Commande optimale des systèmes dynamiques
BE3
Commande optimale

Exercice 1 :

Un bateau doit se déplacer à travers une région de forts courants marins dont l'amplitude et la direction sont des fonctions de la position du bateau repérée par ses coordonnées rectangulaires (x, y). (u, v) sont les composantes rectangulaires de la vitesse du courant :

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

L'amplitude de la vitesse relative du bateau par rapport à l'eau est constante et donnée par V. **Le problème de navigation de Zermelo** (1931) est de diriger le bateau d'un point A à un point B(0,0) en temps minimum. Nous supposons que les équations du mouvement du bateau sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\theta + u(x, y) \\ \dot{y} &= V\sin\theta + v(x, y) \end{aligned}$$

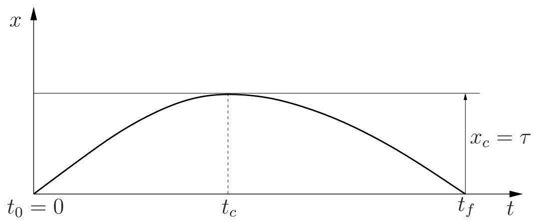
où θ est l'angle entre le vecteur vitesse du bateau et l'axe horizontal.
1- Ecrire les équations canoniques de Hamilton.
2- Exprimer les états adjoints en fonction de la commande θ.
3- En déduire l'équation différentielle vérifiée par la commande optimale.
4- Que conclure si le courant a des composantes de vitesse constantes.
5- On suppose que $u(x, y) = -Vy$ et $v = 0$. Ecrire la trajectoire optimale d'état du bateau. On choisira θ comme variable indépendante au lieu de t.

Exercice 2 :

On souhaite déterminer la forme symétrique d'une aile d'avion supersonique qui minimise la pression de trainée et dont la longueur (la corde t_f) est fixée. L'épaisseur maximale atteinte en t_c est e. La pression de trainée est donnée par :

$$D_p = \int_0^{t_f} \dot{x}^2(t)dt$$

Les conditions de corde et d'épaisseur s'écrivent $t_f = 1$ et $e = 2x_c = 2\tau$.



1- Ecrire le problème de commande optimale ainsi défini.
2- Ecrire et résoudre les équations canoniques de Hamilton.
3- En appliquent les conditions de Weierstrass-Erdmann, construire une extrémale du problème.

Exercice 3 :

Soit le système régi par l'équation différentielle $\dot{x}(t) = g(t)u(t)$, $x(0) = x_0$ où $g(t)$ est une fonction connue du temps. Déterminer la commande optimale sous la contrainte de saturation de la commande $|u(t)| \leq 1$ ramenant l'état en $x(T)$ pour T fixé et minimisant le critère :

$$J = \frac{a^2}{2}x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt$$

Exercice 4 :

Soit le système régi par l'équation différentielle $\ddot{x}(t) = u(t)$ sous la contrainte de la saturation de la commande $|u(t)| \leq 1$. Déterminer la commande optimale conduisant un point quelconque donné par $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, \dot{x}_0)$ en $(0, 0)$ en temps minimum.

Exercice 5 :

On considère une fusée dont le programme de consommation de carburant est fixé *a priori* mais dont la direction de poussée peut être choisie arbitrairement dans un plan vertical $(O, \vec{x}, \vec{y})$. La fusée est lancée à partir de l'origine O du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y})$ avec une vitesse initiale nulle en $t = 0$. On suppose que la poussée est effective jusqu'à l'instant T fixé. A partir de cet instant, la fusée est uniquement soumise à la force de gravitation et poursuit donc une trajectoire ballistique. Le champ de gravitation est considéré comme uniforme et la résistance atmosphérique est négligée. Les équations du mouvement de la fusée dans le plan sont données par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= \gamma \cos\theta \\ \dot{v} &= \gamma \sin\theta - g \end{aligned} \qquad (1)$$

où (x, y) sont les composantes de la position du centre de gravité de la fusée dans $\mathcal{R}$, (u, v) les composantes de la vitesse, θ l'angle du vecteur de poussée avec l'axe $(O, \vec{x})$, γ le module de la poussée s'exerçant sur la fusée et g l'accélération de la gravitation.

1- Calculer la distance d_B sur l'axe $(O, \vec{x})$ parcourue par le missile après arrêt de la poussée en fonction de g, $y(T) = y_T$, $u(T) = u_T$, $v(T) = v_T$.
2- Formuler le problème de commande optimale associé au problème de maximisation de la distance horizontale parcourue par le missile dans le plan vertical $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
3- Ecrire les équations canoniques de Hamilton associées au problème de commande optimale précédent.
4- Ecrire les conditions de transversalité de ce problème de commande optimale.
5- Calculer la commande optimale en fonction de g, y_T, u_T et v_T.

6- Donner une condition sur la commande θ pour qu'elle soit maximisante en utilisant la condition au deuxième ordre de Legendre-Clebsch.
7- Appliquer la condition de Weierstrass afin de montrer que le maximum précédent est un maximum fort.
8- En supposant la poussée γ constante, donner les équations de la trajectoire optimale dans le plan vertical.
9- En déduire l'équation permettant de calculer numériquement la commande optimale.

Exercice 6 :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{|u|\leq 1} & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_f} x_1^2(t)dt \\ \text{sous} & \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t),\ x_1(0) = 1 \\ & \dot{x}_2(t) = -u(t),\ x_2(0) = 1 \\ & x_2(t_f) = 0,\ x_1(t_f) = 0,\ t_f \text{ fixé} \end{array}$$

1- Donner les conditions pour que ce problème admette d'éventuels arcs singuliers.
2- Donner la forme de la commande optimale sur l'arc singulier.
3- Donner l'équation des arcs singuliers dans le plan (x_1, x_2).
4- Montrer que les extrémales contiennent nécessairement une commutation.

Commande optimale des systèmes dynamiques
BE3
Correction
Commande optimale

Exercice 1 :

Soient les équations du mouvement du bateau :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V\cos\theta + u(x,y)\\ \dot{y} &= V\sin\theta + v(x,y)\end{aligned}$$

où θ est l'angle entre le vecteur vitesse du bateau et l'axe horizontal.
1- Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{array}{ll} & \min_{\theta} \displaystyle\int_0^{t_f} dt \\ \text{sous} & \dot{x} = V\cos\theta + u(x,y) \\ & \dot{y} = V\sin\theta + v(x,y) \\ & x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \\ & x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0 \end{array}$$

Le Hamiltonien est donné par :

$$H(x,y,\theta,\lambda) = 1 + \lambda_x(V\cos\theta + u(x,y)) + \lambda_y(V\sin\theta + v(x,y))$$

Les équations canoniques de Hamilton sont alors :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_{\lambda_x}(x,y,\theta,\lambda) &&= V\cos\theta + u(x,y)\\ \dot{y} &= H_{\lambda_y}(x,y,\theta,\lambda) &&= V\sin\theta + v(x,y)\\[1em] \dot{\lambda}_x &= -H_x(x,y,\theta,\lambda) &&= -\lambda_x u_x(x,y) - \lambda_y v_x(x,y)\\ \dot{\lambda}_y &= -H_y(x,y,\theta,\lambda) &&= -\lambda_x u_y(x,y) - \lambda_y v_y(x,y)\\[1em] 0 &= H_\theta &&= -\lambda_x V\sin\theta + \lambda_y V\cos\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}\end{aligned}$$

2- Le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et le temps final est libre. On en déduit donc que $H \equiv 0$. En utilisant cette équation et l'équation de commande, on obtient pour les états adjoints :

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{-\cos\theta}{V + u\cos\theta + v\sin\theta}\\[1em] \lambda_y &= \frac{-\sin\theta}{V + u\cos\theta + v\sin\theta}\end{aligned}$$

3- A l'aide des équations différentielles de l'état adjoint et de l'état, on obtient l'équation différentielle :

$$\dot{\theta} = v_x \sin^2\theta + (u_x - v_y)\sin\theta\cos\theta - u_y\cos^2\theta$$

4- Dans ce cas $u(x,y) = u$ et $v(x,y) = v$. L'équation différentielle vérifiée par la commande optimale devient alors $\dot{\theta} = 0$. Les trajectoires optimales sont donc des droites.

5- Les équations canoniques adjointes deviennent alors :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= 0 \\ \dot{\lambda}_y &= V\lambda_x \end{aligned}$$

On obtient donc les solutions pour les états adjoints :

$$\begin{aligned} \lambda_x(t) &= \lambda_x = \frac{-\cos\theta}{V - yV\cos\theta} = \lambda_x(t_f) = \frac{-\cos\theta_f}{V} \\ \lambda_y(t) &= \lambda_x V t + \lambda_y(0) \end{aligned}$$

De la première équation, on tire la relation pour la commande optimale :

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta_f}{1 + y\cos\theta_f}$$

En utilisant l'équation différentielle de la commande optimale qui s'écrit $\dot{\theta} = V\cos^2\theta$, on définit θ comme variable indépendante :

$$dt = \frac{d\theta}{V\cos^2\theta}$$

On obtient ainsi :

$$y(\theta) = \cos^{-1}\theta - \cos^{-1}\theta_f$$

et

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-\cos\theta + y}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos^3\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f\cos^2\theta}$$

Enfin,

$$x(\theta) = 0.5\left[\cos^{-1}\theta_f(\tan\theta_f - \tan\theta) - \tan\theta(\cos^{-1}\theta_f - \cos^{-1}\theta) + \log\frac{\tan\theta_f + \cos^{-1}\theta_f}{\tan\theta + \cos^{-1}\theta}\right]$$

Exercice 2 :

La pression de trainée est donnée par

$$D_p = \int_0^{t_f} \dot{x}^2(t)dt$$

1- Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_u & \displaystyle\int_0^{t_f} u^2(t)dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = u(t) \\ & x(0) = 0 \\ & t_f = 1,\ x_f = 0 \\ & x_c = \tau \\ & \theta(t_c, x_c) = x_c - \tau = 0 \end{array}$$

2- Le Hamiltonien est construit comme :

$$H(u, \lambda) = u(\lambda + u)$$

On en déduit les équations canoniques de Hamilton comme :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & u^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) & = & 0 \\ H_u & = & 2u^* + \lambda^* \end{array}$$

On obtient donc que l'état adjoint $\lambda^*(t) = \lambda$ et la commande $u^*(t) = -\lambda/2$ sont constants sur $[t_0, t_f]$. Pour vérifier les conditions aux limites, la trajectoire d'état optimale doit être constituée de deux droites qui se raccordent en t_c où l'on constate une discontinuité sur la commande u^*.

3- Les conditions de Weierstrass-Erdmann s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} \lambda(t_c^-) & = & \lambda(t_c^+) + \xi \\ (\lambda(t_c^-) + u(t_c^-))u(t_c^-) & = & (\lambda(t_c^+) + u(t_c^+))u(t_c^+) \end{array}$$

La variable de Lagrange ξ est égale à la discontinuité sur l'état adjoint en t_c :

$$\xi = \lambda(t_c^-) - \lambda(t_c^+)$$

alors que le fait que $\lambda^* = -2u^*$ sur chaque sous-arc de l'extrémale et la deuxième condition de Weierstrass conduisent à écrire que $u(t_c^-) = \pm u(t_c^+)$. En tenant compte des conditions aux limites, on obtient nécessairement $u(t_c^-) = -u(t_c^+)$ et $t_c^* = 1/2$. Les trajectoires de l'extrémale sont donc :

$$\begin{array}{llll} 0 \leq t < t_c & u^*(t) = 2\tau & \lambda^*(t) = -4\tau & x^*(t) = 2\tau t \\ t_c < t \leq t_f & u^*(t) = -2\tau & \lambda^*(t) = 4\tau & x^*(t) = -2\tau(t-1) \end{array}$$

On en déduit également $\xi = -8\tau$.

Exercice 3 :

Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{|u(t)| \leq 1} & \dfrac{a^2}{2} x^2(T) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^T u^2 dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = g(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \end{array}$$

Le Hamiltonien est donné par :

$$H(u, \lambda) = 0.5u^2(t) + \lambda g(t)u(t)$$

L'équation d'état adjointe est donnée par :

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(t) = \lambda(T)$$

La commande minimisant le Hamiltonien appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ est définie par :

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda g(t) & \text{si} \quad |\lambda g(t)| \leq 1 \\ \text{sign}(\lambda g(t)) & \text{si} \quad |\lambda g(t)| \geq 1 \end{cases}$$

donc la commande optimale s'écrit finalement :

$$u(t) = \begin{cases} -a^2 x(T) g(t) & \text{si} \quad |a^2 x(T) g(t)| \leq 1 \\ \text{sign}(a^2 x(T) g(t)) & \text{si} \quad |a^2 x(T) g(t)| \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{|u(t)|\leq 1} & \displaystyle\int_0^T dt \\ \text{sous} & \ddot{x}(t) = x(t), \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array}$$

L'équation d'état est du deuxième ordre :

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = AX(t) + Bu(t)$$

Le Hamiltonien est donné par :

$$H(u, \lambda) = 1 + \lambda'(AX(t) + Bu(t))$$

L'équation d'état adjointe s'écrit :

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x = -A'\lambda(t)$$

La solution est donc :

$$\lambda(t) = e^{-A't}\lambda(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \lambda(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) - \lambda_1(0)t \end{bmatrix}$$

La commande minimisant le Hamiltonien appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ est définie par :

$$u(t) = -\text{sign}(B'\lambda)$$

La fonction de commutation est $B'\lambda = \lambda_2(t) = \lambda_2(0) - \lambda_1(0)t$. Comme le système est d'ordre 2, il ne peut y avoir au plus qu'une commutation de la commande optimale. Les séquences optimales de commande sont donc données par :

$$\{1\},\ \{-1\},\ \{1, -1\},\ \{-1, 1\}$$

De plus, si l'on note $u_0 = \pm 1$, les équations d'état peuvent être intégrées :

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_0 d\tau = \begin{bmatrix} x_0 + \dot{x}_0 t + 0.5u_0 t^2 \\ \dot{x}_0 + u_0 t \end{bmatrix}$$

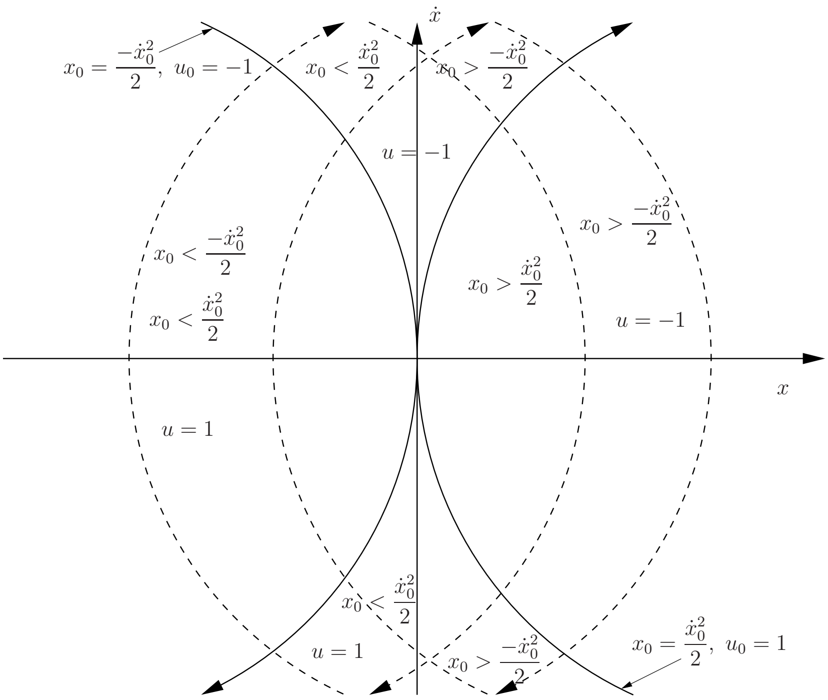
L'équation des trajectoires d'état est donc l'équation d'une parabole :

$$x(t) = x_0 - \frac{0.5}{u_0}(\dot{x}_0^2 - x_2^2)$$

D'autre part, les conditions finales conduisent à $x_0 = 0.5\dot{x}_0^2/u_0$. Toute condition initiale vérifiant cette équation peut être transférée vers l'origine. Pour atteindre l'origine, $u_0 = -1$ si $x_0 < 0$ et $u_0 = 1$ si $x_0 > 0$. Donc, une première analyse peut se résumer par :

- Si $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 < 0$ et tels que $x_0 = 0.5\dot{x}_0^2$ alors $u_0 = 1$ conduit le système à l'origine.

- Si $x_0 < 0$, $\dot{x}_0 < 0$ et tels que $x_0 = -0.5\dot{x}_0^2$ alors $u_0 = -1$ conduit le système à l'origine.



L'analyse des trajectoires d'état montre que la courbe de commutation est nécessairement calculée par :

$$x_{1c} = -0.5x_{2c}|x_{2c}|$$

Cette courbe sépare l'espace d'état $(x, \dot{x})$ en deux sous-régions dans lesquelles nous aurons les deux types de commutations possibles (cf. figure ci-dessus). On obtient ainsi la séquence de discussion suivante pour les trajectoires optimales :

- Si $x_0 > -0.5\dot{x}_0|\dot{x}_0|$ alors la séquence $\{-1, 1\}$ conduit le système à l'origine.
- Si $x_0 < -0.5\dot{x}_0|\dot{x}_0|$ alors la séquence $\{1, -1\}$ conduit le système à l'origine.

Le temps optimal est alors calculé :

$$T^* = \begin{cases} \dot{x}_0 + \sqrt{4x_0 + 2\dot{x}_0^2} & \text{si} \quad x_0 > -0.5\dot{x}_0|\dot{x}_0| \\ -\dot{x}_0 + \sqrt{-4x_0 + 2\dot{x}_0^2} & \text{si} \quad x_0 < -0.5\dot{x}_0|\dot{x}_0| \\ |\dot{x}_0| & \text{si} \quad x_0 = -0.5\dot{x}_0|\dot{x}_0| \end{cases}$$

Exercice 5 :

1- La distance parcourue pendant la phase ballistique est donnée par :

$$d_B = \frac{u_T}{g}\left(v_T + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T}\right)$$

puisque les équations paramétriques du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} x(t) &= u_T(t-T) + x_T \\ y(t) &= -\frac{g}{2}(t-T)^2 + v_T(t-T) + y_T \\ u(t) &= u_T \\ v(t) &= -g(t-T) + v_T \end{aligned}$$

2- Le problème de commande optimale consistant à maximiser la distance horitontale parcourue par le missile en un temps T est donné par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\theta} & -x_T - \dfrac{u_T}{g}\left(v_T + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T}\right) \\ \text{sous} & \dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ x_T \text{ libre} \\ & \dot{y} = v,\ y(0) = 0,\ y_T \text{ libre} \\ & \dot{u} = \gamma\cos\theta,\ u(0) = 0,\ u_T \text{ libre} \\ & \dot{v} = \gamma\sin\theta - g,\ v(0) = 0,\ v_T \text{ libre} \end{array}$$

3- Le hamiltonien est donné par :

$$H = \lambda_x u + \lambda_y v + \lambda_u \gamma\cos\theta + \lambda_v(\gamma\sin\theta - g)$$

On obtient donc les équations d'état adjointes :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\lambda}_x & = & 0 \\ \dot{\lambda}_y & = & 0 \\ \dot{\lambda}_u & = & -\lambda_x \\ \dot{\lambda}_v & = & -\lambda_y \end{array} \tag{2}$$

qui sont associées aux équations d'état (1) et à l'équation d'optimalité exprimant la stationnarité du hamiltonien :

$$H_\theta = 0 = -\lambda_u\gamma\sin\theta + \lambda_v\gamma\cos\theta \tag{3}$$

4- Les conditions de transversalité s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_x(T) & = & -1 \\ \lambda_y(T) & = & -\dfrac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}} \\ \lambda_u(T) & = & -\dfrac{v_T + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}{g} \\ \lambda_v(T) & = & -\dfrac{u_T(1 + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T})}{g\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}} \end{array} \tag{4}$$

5- La commande optimale est obtenue à partir de l'équation (3) :

$$\tan\theta^* = \frac{\lambda_v^*}{\lambda_u^*} \tag{5}$$

où les variables de Lagrange optimales sont calculées à partir des équations d'état adjointes (2) :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_x^*(t) & = & \lambda_x(T) = -1 \\ \lambda_y^*(t) & = & \lambda_y(T) = -\dfrac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}} \\ \lambda_u^*(t) & = & t - \dfrac{v_T + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}{g} - T \\ \lambda_v^*(t) & = & \dfrac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}t - \dfrac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}\left(T + \dfrac{v_T + \sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}{g}\right) \end{array}$$

On obtient alors :

$$\tan\theta^* = \frac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}} \tag{6}$$

La commande optimale est constante sur l'horizon de poussée.

6- On calcule $H_{\theta\theta} = -\lambda_u^*\gamma\cos\theta^* - \lambda_v^*\gamma\sin\theta^*$. On constate aisément que du fait que $\gamma > 0$, $\lambda_u^*(t) \leq 0$ et $\lambda_v^*(t) \leq 0$ pour tout $t \leq T$, il est nécessaire que $0 \leq \theta^* \leq \frac{\pi}{2}$ pour que $H_{\theta\theta} \geq 0$ et que θ^* soit la commande minimisante d'après la condition au deuxième ordre de Legendre-Clebsch.

7- On calcule

$$\delta H = H(t, X^*, \lambda^*, \theta) - H(t, X^*, \lambda^*, \theta^*) = \lambda_u^*\gamma(\cos\theta - \cos\theta^*) + \lambda_v^*\gamma(\sin\theta - \sin\theta^*)$$

Pour que θ^* corresponde à un maximum fort, il est nécessaire que $\delta H \geq 0$ (le hamiltonien est minimisé à l'optimum), soit :

$$\cos\theta + \frac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}\sin\theta \leq \cos\theta^* + \frac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}\sin\theta^*$$

Pour θ^* donné par (6), la partie gauche de l'inégalité précédente atteint son maximum donc l'inégalité est toujours vraie.

8- En supposant γ constante, il est possible d'intégrer les équations du mouvement pour $t \leq T$:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \gamma\cos\theta t^2/2 \\ y(t) & = & (\gamma\sin\theta - g)t^2/2 \\ u(t) & = & \gamma\cos\theta t \\ v(t) & = & (\gamma\sin\theta - g)t \end{array} \tag{7}$$

On obtient alors la trajectoire :

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \left[\frac{u_T}{\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}} - \frac{g\sqrt{v_T^2 + u_T^2 + 2gy_T}}{\gamma\sqrt{v_T^2 + 2gy_T}}\right] x^*(t) \quad t \leq T \\ y^*(t) &= \frac{-g(x^*(t) - x_T)^2}{2u_T^2} + \frac{v_T}{u_T}(x^*(t) - x_T) + y_T \quad t \geq T \end{aligned}$$

9- L'équation permettant d'obtenir l'angle optimal est donnée par :

$$\frac{g}{\gamma}\sin^3\theta^* + \cos^4\theta^* - \sin^4\theta^* = 0$$

Exercice 6 :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{|u|\leq 1} & \frac{1}{2}\int_0^{t_f} x_1^2(t)dt \\ \text{sous} & \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t),\ x_1(0) = 1 \\ & \dot{x}_2(t) = -u(t),\ x_2(0) = 1 \\ & x_2(t_f) = 0,\ x_1(t_f) = 0 \end{array}$$

1- Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = x_1^2/2 + \lambda_1(x_2 + u) - u\lambda_2 = x_1^2/2 + \lambda_1 x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)u$$

alors que les équations canoniques sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, \ x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 &= -u, \ x_2(0) = 1 \\ \dot{\lambda}_1 &= -x_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \end{aligned}$$

On obtient donc un arc singulier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ si $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ sur cet intervalle. Dans ce cas, $H = x_1^2/2 + \lambda_1 x_2$ et de plus :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_u &= \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = \lambda_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} H_u &= 0 \ \Rightarrow \ -x_1 - x_2 = u \end{aligned}$$

La condition nécessaire d'optimalité de l'arc singulier est vérifiée puisque :

$$-\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} H_u = 1 > 0$$

2- Comme nous venons de le voir, l'expression de la commande sur l'arc singulier est donnée par :

$$u = -x_1 - x_2$$

3- H ne dépend pas explicitement du temps donc $H \equiv C$. Cela conduit naturellement à l'équation de la trajectoire d'état sur un arc singulier :

$$x_1^2/2 + x_1 x_2 = C$$

Les arcs singuliers seront donc des portions d'hyperboles.

4- La trajectoire optimale d'état ne présente pas de commutation si $u(t) = -1$ ou $u(t) = 1$ ou $u(t) = -(x_1 + x_2)$ sur l'intervalle $[0, t_f]$.

- 1^{er} cas : $u(t) = -1$ et $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ sur $[0, t_f]$. Les trajectoires optimales d'état après intégration deviennent :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{t^2}{2} + 1 \\ x_2(t) &= t + 1 \end{aligned}$$

  Il est donc impossible de satisfaire les conditions terminales $(x_1(t_f), x_2(t_f)) = (0, 0)$.

- 2^{eme} cas : $u(t) = 1$ et $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ sur $[0, t_f]$. Les trajectoires optimales d'état après intégration deviennent :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \\ x_2(t) &= 1 - t \end{aligned}$$

  Il est également impossible de satisfaire les conditions terminales $(x_1(t_f), x_2(t_f)) = (0, 0)$.

- 3^{eme} cas : $u(t) = -(x_1 + x_2)$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ sur $[0, t_f]$. Les trajectoires optimales d'état sur l'arc singulier sont :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= -\frac{K_1}{2} e^{-t} + K_2 e^{t} \end{aligned}$$

L'équation de la trajectoire d'état est calculée comme :

$$\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 = K_1 K_2$$

En tenant compte des conditions aux limites $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ et $(x_1(t_f), x_2(t_f)) = (0, 0)$, il est évident qu'un arc singulier ne peut amener le système de son état initial vers son état final.