Commande optimale des systèmes dynamiques
BE2
Calcul des variations

Exercice 1 :

Pour les fonctionnelles suivantes,

1- $J_1 = \int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1)$

2- $J_2 = \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin(t))dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi)$

3- $J_3 = \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)dt, \quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi$, T_0 et ξ fixés

4- $J_4 = \int_0^T \dot{x}^2(t)dt,\ x(0) = 0,\ x(T) + T + 1 = 0$ et T libre

5- $J_5 = \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt$ sous $\int_0^1 tx(t)dt = 0,\ x(0) = -4,\ x(1) = 4$

1- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et les conditions de transversalité associées

2- Donner les extrémales solutions de l'équation d'Euler-Lagrange

Exercice 2 :

Montrer que le problème de CV défini par la fonctionnelle :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} (a\dot{x}^2 + bx\dot{x} + cx)dt \quad a \neq 0$$

et les conditions aux limites $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$ n'admet pas d'extrémales dans $\mathcal{PC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$.

Exercice 3 :

Montrer que le minimum faible du problème de CV défini par la fonctionnelle

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt$$

avec les conditions aux limites $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$ n'est pas un minimum fort.

Montrer qu'il n'existe pas d'extréma minimales dans l'ensemble $\mathcal{PC}^1([0,1], \mathbb{R})$ qui ne soit pas dans $\mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$.

Exercice 4 :

Soit la fonctionnelle :

$$\int_0^1 (\dot{y}^2 - c^2y^2 - 2y)dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

avec $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}$.

1- Calculer les extrémales de ce problème.

2- Donner les valeurs de c pour lesquelles les extrémales précédentes sont des minimums faibles du problème.

Commande optimale des systèmes dynamiques
BE2
Correction
Calcul des variations

Exercice 1 :

Nous rappelons que l'équation d'Euler-Lagrange et les conditions de transversalité sont données par :

$$\begin{aligned}
L_x(t,x^*,\dot{x}^*) - \frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}}(t,x^*,\dot{x}^*)\right] &= 0 \\
-\left[L'_{\dot{x}}(t_0) - \nabla_{x_0}\psi'_0\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0 &= 0 \\
\left[L'_{\dot{x}}(t_f) + \nabla_{x_f}\psi'_0\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f &= 0
\end{aligned}$$

1- Soit le problème de calcul des variations défini par sa fonctionnelle :

$$J_1 = \int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1)$$

On a :

$$L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 \quad \psi_0(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 4x^2(0) - 5x^2(1)$$

11- L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$-2\ddot{x}^* = 0$$

Les conditions de transversalité sont données par :

$$\begin{aligned}
2\dot{x}^*(0) - 8x^*(0) &= 0 \\
2\dot{x}^*(1) - 10x^*(1) &= 0
\end{aligned}$$

12- La courbe intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est obtenue comme :

$$x^*(t) = K_1 t + K_2$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned}
K_1 + K_2 &= x^*(1) \\
K_1 &= 4K_2 \\
K_1 &= 5x(1) \\
K_2 &= x^*(0)
\end{aligned}$$

d'où $K_1 = K_2 = 0$ et la trajectoire extrémale est donnée par $x^* \equiv 0$.

2- Soit le problème de calcul des variations défini par sa fonctionnelle :

$$J_2 = \int_0^{\pi} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin(t))dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi)$$

On a :

$$L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin(t) \quad \psi_0(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi)$$

21- L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$-2\ddot{x}^* + 2x^* = 4\sin t$$

Les conditions de transversalité sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(0) - 2x^*(0) &= 0 \\ \dot{x}^*(\pi) + 1 - x^*(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

22- Une solution particulière de l'équation générale d'Euler-Lagrange est $x(t) = \sin t$ alors que la solution de l'équation différentielle homogène est donnée par :

$$x^*(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-t}$$

donc l'extrémale est donnée par : $x^*(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-t} + \sin t$. Les constantes sont déterminées à l'aide des conditions de transversalité pour finalement obtenir :

$$x^*(t) = e^t + \sin t$$

3- Soit le problème de calcul des variations défini par sa fonctionnelle :

$$J_3 = \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)dt, \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$$

On a :

$$L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 - x$$

31- L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$\ddot{x}^*(t) = -1/2$$

32- On obtient donc $x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + K_1 t + K_2$ avec les constantes déterminées par les conditions initiales et finales.

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + \left(\frac{\xi}{T_0} + \frac{T_0}{4}\right) t$$

4- Soit le problème de calcul des variations défini par sa fonctionnelle :

$$J_4 = \int_0^T \dot{x}^2(t)dt, \; x(0) = 0, \; x(T) + T + 1 = 0$$

et T libre. On a :

$$L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2(t)$$

41- L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$\ddot{x}^*(t) = 0$$

Les conditions de transversalité sont données par :

$$\begin{aligned} \delta T + \delta x(T) &= 0 \\ 2\dot{x}^*(T)\delta x(T) - \dot{x}^{*2}(T)\delta T &= 0 \end{aligned}$$

42- Après intégration de l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient $x^*(t) = K_1 t + K_2$. $K_2 = 0$ puisque $x(0) = 0$ et $K_1 = \dfrac{-1-T}{T}$ d'après $x(T) + T + 1 = 0$. Les conditions de transversalité permettent d'écrire :

$$\dot{x}^*(T)(2 + \dot{x}^*(T)) = 0 \quad K_1 = \dot{x}^*(T)$$

On obtient donc deux extrémales :

$$x_1^*(t) = -2t \ (T^* = 1) \quad x_2^*(t) \equiv 0 \ (T^* = -1)$$

5- Soit le problème de calcul des variations défini par sa fonctionnelle :

$$J_5 = \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \text{ sous } \int_0^1 tx(t)dt = 0, \ x(0) = -4, \ x(1) = 4$$

On a :

$$L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2(t)$$

et on définit le lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}(t, x, \dot{x}, \lambda) = L(t, x, \dot{x}) + \lambda t x(t)$$

51- L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{x}} = 2\ddot{x}^*(t) - \lambda^* t = 0$$

52- Après intégration de l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient :

$$x^*(t) = \frac{\lambda^* t^3}{12} + (8 - \frac{\lambda^*}{12})t - 4$$

En utilisant la contrainte intégrale, on calcule $\lambda^* = 60$:

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda^* t^3}{12} + (8 - \frac{\lambda^*}{12})t - 4\right] dt = 0$$

On obtient donc l'extrémale :

$$x^*(t) = 5t^3 + 3t - 4$$

Exercice 2 :

Il suffit de tester les conditions de Weierstrass-Erdmann. En effet, $L(t, x, \dot{x}) = a\dot{x}^2 + bx\dot{x} + cx$. La première condition de Weierstrass-Erdmann est donc donnée par :

$$2ap_1 + bx(\tau) = 2ap_2 + bx(\tau)$$

pour $p_1 = \dot{x}(\tau^-) \neq \dot{x}(\tau^+)$ et τ le point de discontinuité de $\dot{x}$. Cette dernière condition ne peut jamais être vérifiée si $a \neq 0$.

Exercice 3 :

Soit le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt$$

avec les conditions aux limites $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$. L'équation d'Euler-Lagrange est donnée par $6\dot{x}^*\ddot{x}^* = 0$. L'extrémale est donnée par $\dot{x}^* = 0$ et $x^*(t) = C$ ou $\ddot{x}^* = 0$ et $x^*(t) = K_1 t + K_2$. Le premier cas est impossible de par les conditions aux limites. La seule extrémale est donc donnée par :

$$x^*(t) = t$$

quand on applique les conditions aux limites. Cette extrémale est unique et constitue donc un minimum local du problème de CV. De plus, la condition forte de Legendre-Clebsch est également vérifiée puisque :

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) = 6 > 0$$

De plus, la condition forte de Jacobi est également vérifiée. En effet, il n'y a pas de points conjugués dans le semi intervalle $(0, 1]$. L'équation différentielle de Jacobi s'écrit $6\dot{x}^*\dot{\eta}_x(t) = C_1$ pour $\eta_x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\eta_x(0) = 0$ et $\eta_x(1) = 0$. On a donc $\eta_x \equiv 0$ sur $[0, 1]$.

Les conditions suffisantes pour que x^* soit un minimum faible strict sont donc vérifiées. Une condition nécessaire pour que ce soit un minimum fort est donnée par la condition de Weierstrass qui s'écrit :

$$u^3 - \dot{x}^{*3} + 3\dot{x}^{*3} - 3\dot{x}^{*2}u = 2 - 3u + u^3 \geq 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

Cette condition n'est pas vérifiée puisque le polynôme $u^3 - 3u + 2$ change de signe sur $\mathbb{R}$.

Si l'on recherche des solutions dans l'ensemble $\mathcal{PC}^1([0, 1], \mathbb{R})$, cela signifie qu'elles doivent vérifier les conditions de Weierstrass-Erdmann au point τ de discontinuité de $\dot{x}^*$. En notant, $p_1 = \dot{x}(\tau^-) \neq p_2 = \dot{x}(\tau^+)$, il existe τ, p_1 et p_2 tels que :

$$\begin{aligned} L_{\dot{x}}(\tau^-) &= L_{\dot{x}}(\tau^+) \\ (L - L_{\dot{x}}\dot{x})(\tau^-) &= (L - L_{\dot{x}}\dot{x})(\tau^+) \end{aligned}$$

Ces équations sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_2 \\ p_1^3 &= p_2^3 \end{aligned}$$

qui sont visiblement incompatibles avec $p_1 \neq p_2$.

Exercice 4 :

1- Soit la fonctionnelle

$$\int_0^1 (\dot{y}^2 - c^2y^2 - 2y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

On écrit l'équation d'Euler-Lagrange avec $L_{\dot{y}} = 2\dot{y}$ et $L_y = -2c^2y - 2$.

$$\ddot{y} + c^2y + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

La solution de cette équation différentielle est obtenue comme la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène.

$$y(x) = y_{part}(x) + y_{gen}(x)$$

Une solution particulière de l'équation différentielle complète est donnée par :

$$y_{part}(x) = -\frac{1}{c^2}$$

La solution générale de l'équation homogène est obtenue en passant par l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + c^2 = 0$$

On en déduit $y_{gen}(x) = K_1e^{icx} + K_2e^{-icx}$. Les constantes K_1 et K_2 sont obtenues en considérant les conditions aux limites sur la solution complète $y(x)$.

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= \frac{1}{c^2} \\ K_1e^{ic} + K_2e^{-ic} &= \frac{c^2+1}{c^2} \end{aligned}$$

On en déduit l'extrémale suivante :

$$y(x)^* = \left(\frac{c^2+1}{c^2}\right)\frac{\sin cx}{\sin c} + \frac{\sin c(1-x)}{c^2 \sin c} - \frac{1}{c^2}$$

2- On constate aisément que cette extrémale vérifie la condition forte de Legendre puisque $L_{\dot{y}\dot{y}} = 2 > 0$. On teste la condition de Jacobi en cherchant la solution de l'équation de Jacobi :

$$\ddot{\eta}_y + c^2\eta_y = 0, \quad \eta_y(0) = 0, \quad \dot{\eta}_y(0) = 1$$

Cette équation a pour solution :

$$\eta_y(x) = \frac{1}{c}\sin cx$$

$\tau \neq 0$ est un point conjugué de 0 si $\sin c\tau = 0$ et $\tau \in [0,1]$. On en déduit la condition forte de Jacobi (absence de points conjugués dans $[0,1]$) donnée par $|c| < \pi$. Ainsi, en appliquant la condition suffisante d'optimalité au second ordre, on en déduit que $y^*(x)$ est un minimum faible local du problème pour $|c| < \pi$.