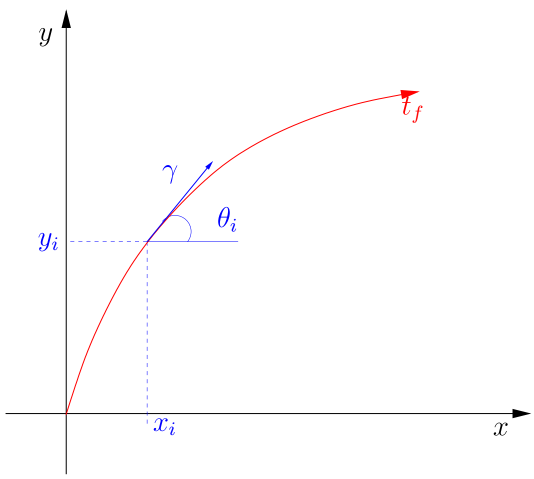
Commande optimale des systèmes dynamiques
BE1 : partie II
Commande optimale en temps discret

Exercice 1 :

Une force de poussée spécifique constante γ est appliquée à une fusée dans la direction faisant un angle θ avec la direction inertielle repérée par l'axe Ox. Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \gamma \cos\theta \\ \dot{v} &= \gamma \sin\theta \\ \dot{y} &= v \end{aligned}$$



On suppose que la commande est appliquée de manière discrète en la maintenant constante entre deux instants de discrétisation de longueur ΔT. Le problème d'injection d'orbite consiste à trouver la séquence de commande discrétisée θ_i qui maximise u_N avec les conditions terminales $y_N = y_f$, $v_N = 0$ et des conditions initiales nulles, pour t_f fixé.

1- Discrétiser les équations du mouvement.

2- Formuler le problème de commande optimale en temps discret associé au problème d'injection d'orbite.

3- Ecrire les équations canoniques de Hamilton associées à ce problème.

4- Montrer que la résolution du problème aux deux bouts nécessite la résolution de trois équations implicites.

Exercice 2 :

On considère un modèle d'état linéaire donné par :

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i \quad i = 0, \cdots, N-1, \quad x_0 = \overline{x}$$

et la fonction de coût quadratique :

$$J(u_i, x_i) = \frac{1}{2}\left[x_N' Q_N x_N + \sum_{i=0}^{N-1}(x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i)\right]$$

avec $Q_i = Q_i' \succeq \mathbf{0}$, $\forall\ i = 0, \cdots, N$, $R_i = R_i' \succ \mathbf{0}$ $\forall\ i = 0, \cdots, N-1$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ et $u_i \in \mathbb{R}^m$.

1- Ecrire les équations canoniques de Hamilton associées au problème de minimisation de $J(u_i, x_i)$.

2- Montrer que les conditions nécessaires d'optimalité sont également des conditions suffisantes d'optimalité.

3- Donner la forme de la commande optimale.

4- Ecrire le problème aux deux bouts associé à ce problème de commande optimale en supposant que A_i est inversible pour tout $i = 0, 1, \cdots, N$.

5- En supposant que le vecteur adjoint peut s'écrire comme $\lambda_i^* = P_i x_i^*$ pour $P_i \succeq \mathbf{0}$, montrer que la séquence de commande optimale est une loi de commande en boucle fermée.

6- Calculer le coût optimal $J(u_i^*, x_i^*)$.

Exercice 3 :

On considère le système défini par son modèle en temps discret :

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k) \qquad x(0) = 1$$

1- Déterminer la loi de commande optimale $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 10$ et la trajectoire d'état optimale associée minimisant le critère ci-dessous en résolvant le TPBVP :

$$J = \frac{1}{2}x^2(11) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}[x^2(k) + 2u^2(k)]$$

2- Même question que précédemment en utilisant l'équation de Riccati discrète.

Commande optimale des systèmes dynamiques
BE1 : partie II
Correction
Commande optimale en temps discret

Exercice 1 :

1- On utilise la discrétisation $\dot{u} \rightarrow \dfrac{u_{i+1} - u_i}{\Delta T}$. Cela conduit à écrire :

$$\begin{array}{rcl} u_{i+1} & = & u_i + \gamma \Delta T \cos\theta_i \\ v_{i+1} & = & v_i + \gamma \Delta T \sin\theta_i \end{array}$$

De plus, entre les instants i et $i+1$, nous pouvons écrire $\dot{y}(t) = \gamma \sin\theta_i t + v_i$ et $y(t) = \gamma \sin\theta_i \frac{t^2}{2} + v_i t + y_i$. On obtient donc :

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta T + \gamma \frac{\Delta T^2}{2} \sin\theta_i$$

2- La fonction coût est donnée par $\psi_0 = -u_N$ et il y a une contrainte terminale $\psi(y_N, v_N) = \begin{bmatrix} y_N - y_f \\ v_N \end{bmatrix}$. En définissant le vecteur d'état comme $X_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & v_i \end{bmatrix}'$, le problème de commande optimale en temps discret se définit comme :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\theta_i} & \psi_0(u_N) = -u_N \\ \text{sous} & X_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u_{i+1} & = & u_i + \gamma \Delta T \cos\theta_i \\ v_{i+1} & = & v_i + \gamma \Delta T \sin\theta_i \\ y_{i+1} & = & y_i + v_i \Delta T + \gamma \dfrac{\Delta T^2}{2} \sin\theta_i \\ \psi(y_N, v_N) & = & \begin{bmatrix} y_N - y_f \\ v_N \end{bmatrix} = 0 \end{array}$$

3- Les équations canoniques de Hamilton sont obtenues à partir du Hamiltonien.

$$H_i = \lambda_{i+1}^u (u_i + \gamma \Delta T \cos\gamma_i) + \lambda_{i+1}^v (v_i + \gamma \Delta T \sin\theta_i) + \lambda_{i+1}^y \left(y_i + v_i \Delta T + \gamma \frac{\Delta T^2}{2} \sin\theta_i\right)$$

De plus, on définit $\Psi = \psi_0 + \nu' \psi = u_N + \nu_1 (y_N - y_f) + \nu_2 v_N$. Les équations canoniques de Hamilton sont composées des équations d'état adjointes :

$$\begin{array}{rcll} \lambda_i^u & = & \lambda_{i+1}^u & \lambda_N^u = -1 \\ \lambda_i^v & = & \lambda_{i+1}^v + \lambda_{i+1}^y \Delta T & \lambda_N^v = \nu_2 \\ \lambda_i^y & = & \lambda_{i+1}^y & \lambda_N^y = \nu_1 \end{array}$$

et de l'équation d'optimalité :

$$-\lambda^u_{i+1}\sin\theta_i + (\lambda^v_{i+1} + \lambda^y_{i+1}\Delta T/2)\cos\theta_i = 0$$

4- Les équations adjointes permettent de déduire $\lambda^u_i = -1,\ \forall\ i,\ \lambda^y_i = \nu_1$ et $\lambda^v_i = \nu_2 + (N-i)\nu_1\frac{t_f}{N}$. La condition d'optimalité peut se réécrire comme :

$$\tan\theta_i = -[\nu_2 + (2(N-i)-1)\frac{\nu_1 t_f}{2N}]$$

En reprenant les équations d'état du système, on obtient avec les conditions initiales et les conditions finales :

$$\begin{array}{rcccc} v_N & = & \gamma\frac{t_f}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\theta_i & = & 0 \\ \frac{y_N N^2}{\gamma t_f^2} & = & \sum_{i=0}^{N-1}(\sum_{k=0}^{i-1}\sin\theta_k + \frac{\sin\theta_i}{2}) & = & \frac{y_f N^2}{\gamma t_f^2} \end{array}$$

ν_1 et ν_2 doivent être déduits en fonction de y_f de ces trois dernières équations par élimination de θ_i afin de résoudre le TPBVP.

$$\begin{array}{rcl} -[\nu_2 + (2(N-i)-1)\frac{\nu_1 t_f}{2N}] & = & \tan\theta_i \\ \sum_{i=0}^{N-1}\sin\theta_i & = & 0 \\ \sum_{i=0}^{N-2}(N-1-i)\sin\theta_i & = & \frac{y_f N^2}{\gamma t_f^2} \end{array}$$

Exercice 2 :

On considère un modèle d'état linéaire donné par :

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i \quad i = 0, \cdots, N-1$$

et la fonction de coût quadratique :

$$J(u_i, x_i) = \frac{1}{2}\left[x'_N Q_N x_N + \sum_{i=0}^{N-1}(x'_i Q_i x_i + u'_i R_i u_i)\right]$$

avec $Q_i = Q'_i \succeq \mathbf{0},\ \forall\ i = 0, \cdots, N,\ R_i = R'_i \succ \mathbf{0}\ \forall\ i = 0, \cdots, N-1,\ x_i \in \mathbb{R}^n$ et $u_i \in \mathbb{R}^m$.

1- Le Hamiltonien est donné par :

$$H_i(x_i, u_i, \lambda_{i+1}) = \lambda'_{i+1}(A_i x_i + B_i u_i) + \frac{1}{2}(x'_i Q_i x_i + u'_i R_i u_i)$$

L'équation d'état adjointe s'écrit alors :

$$\lambda^*_i = A'_i \lambda^*_{i+1} + Q_i x^*_i \quad \lambda^*_N = Q_N x^*_N$$

alors que l'équation d'optimalité est donnée par :

$$R_i u^*_i + B'_i \lambda^*_{i+1} = 0 \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

Ces équations augmentées des équations d'état forment les conditions nécessaires pour une trajectoire de commande u_i et pour les trajectoires d'état x_i et d'état adjoint λ_i pour être optimales.

2- La trajectoire d'état dépend linéairement de la trajectoire de commande puisque $x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i$ donc le critère $J(u_i, x_i)$ dépend quadratiquement de la trajectoire de commande u_i. Du fait que l'on a supposé que $Q_i \succeq \mathbf{0}$ et $R_i \succ \mathbf{0}$, $\forall\ i$, la fonction coût est une fonction quadratique semi définie positive et convexe. Les conditions nécessaires d'optimalité sont donc des conditions nécessaires et suffisantes.

3- En reprenant l'équation d'optimalité, on obtient :

$$u_i^* = -R_i^{-1} B_i' \lambda_{i+1}^* \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

4- En substituant la forme de la commande optimale précédente, on obtient le TPBVP suivant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= A_i x_i^* - B_i R_i^{-1} B_i' \lambda_{i+1}^* \quad && x_0 = \overline{x} \\ \lambda_i^* &= Q_i x_i^* + A_i' \lambda_{i+1}^* && \lambda_N^* = Q_N x_N^* \end{aligned}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= (A_i + B_i R_i^{-1} B_i' A_i^{-T} Q_i) x_i^* - B_i R_i^{-1} B_i' A_i^{-T} \lambda_i * \quad && x_0 = \overline{x} \\ \lambda_{i+1}^* &= -A_i^{-T} Q_i x_i^* + A_i^{-T} \lambda_i^* && \lambda_N^* = Q_N x_N^* \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^* \\ \lambda_{i+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_i + B_i R_i^{-1} B_i' A_i^{-T} Q_i) & -B_i R_i^{-1} B_i' A_i^{-T} \\ -A_i^{-T} Q_i & A_i^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^* \\ \lambda_i^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{x} \\ Q_N x_N^* \end{bmatrix}$$

5- La condition terminale sur l'équation d'état adjointe est $\lambda_N^* = Q_N x_N^*$ pour $Q_N \succeq \mathbf{0}$. On suppose qu'il existe $P_i \succeq \mathbf{0}$ telle que $\lambda_i^* = P_i x_i^*$, $\forall\ i = 1, \cdots, N$. La séquence de commande optimale devient alors

$$u_i^* = -R_i^{-1} B_i' \lambda_{i+1}^* = -R_i^{-1} B_i' P_{i+1} x_{i+1}^*$$

En utilisant $x_{i+1}^* = A_i x_i^* + B_i u_i^*$, on obtient alors :

$$(\mathbf{1} + R_i^{-1} B_i' P_{i+1} B_i) u_i^* = -R_i^{-1} B_i' P_{i+1} A_i x_i^*, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

En supposant la matrice $(\mathbf{1} + R_i^{-1} B_i' P_{i+1} B_i)$ inversible, on a :

$$u_i^* = -(R_i + B_i' P_{i+1} B_i)^{-1} B_i' P_{i+1} A_i x_i^*, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

La dynamique optimale en boucle fermée est donnée par :

$$x_{i+1}^* = [A_i - B_i (R_i + B_i' P_{i+1} B_i)^{-1} B_i' P_{i+1} A_i] x_i^*$$

On multiplie cette équation à gauche par $A_i' P_{i+1}$ et ensuite on y ajoute $Q_i x_i^*$ pour obtenir finalement :

$$P_i = A_i' [P_{i+1} - P_{i+1} B_i (R_i + B_i' P_{i+1} B_i)^{-1} B_i' P_{i+1}] A_i + Q_i, \quad P_N = Q_N$$

qui est une équation de Riccati récurrente discrète qui permet de générer les matrices P_i à partir de la condition terminale. Une autre forme de l'équation de Riccati discrète peut être obtenue à l'aide du lemme d'inversion matricielle :

$$P_i = A_i'[P_{i+1}^{-1} + B_i R_i^{-1} B_i']^{-1} A_i + Q_i, \quad P_N = Q_N$$

Les matrices P_i sont calculées hors ligne par résolution récurrente de l'équation aux différences de Riccati à partir de la condition terminale. La commande optimale en boucle fermée est alors donnée par :

$$u_i^* = -K_i x_i^* = -\left[B_i' P_{i+1} B_i + R_i\right]^{-1} B_i' P_{i+1} A_i x_i^*$$

Les matrices de gain K_i sont appelées **les matrices de gain de Kalman**.

6- On calcule :

$$1/2 \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}' P_{i+1} x_{i+1} - x_i' P_i x_i) = 1/2[x_N' P_N x_N - x_0' P_0 x_0]$$

En notant que $P_N = Q_N$ et en remplaçant $x_N' Q_N x_N$ dans la formule du critère $J(u_i^*, x_i^*)$, on obtient :

$$J(u_i^*, x_i^*) = 1/2 x_0' P_0 x_0 + 1/2 \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}' P_{i+1} x_{i+1} - x_i' P_i x_i + x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i)$$

En utilisant l'équation de la dynamique en boucle fermée et de la séquence optimale et en prenant en compte l'équation récurrente discrète de Riccati, on montre que la somme est nulle et le coût optimal est donc donné par :

$$J(u_i^*, x_i^*) = J_0^* = 1/2 x_0' P_0 x_0$$

Exercice 3 :

On considère le système défini par son modèle en temps discret :

$$x_{k+1} = x_k + 2u_k \qquad x_0 = 1$$

et le critère à minimiser :

$$J = \frac{1}{2} x_{11}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x_k^2 + 2u_k^2]$$

1- Le Hamiltonien est donné par :

$$H_k(x_k, u_k, \lambda_k) = \lambda_{k+1}(x_k + 2u_k) + \frac{1}{2}[x_k^2 + 2u_k^2]$$

Cela permet d'écrire le système d'équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{lcll} x_{k+1} & = & x_k + 2u_k & x_0 = 1 \\ \lambda_{k+1} & = & -x_k + \lambda_k & \lambda_{11} = x_{11} \\ u_k & = & -\lambda_{k+1} & \end{array}$$

Après substitution de u_k, on obtient alors le TPBVP suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k - 2\lambda_k \quad x_0 = 1 \\ \lambda_{k+1} &= -x_k + \lambda_k \quad \lambda_{11} = x_{11} \end{aligned}$$

Les trajectoires optimales d'état et d'état adjoint sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_k^* \\ \lambda_k^* \end{bmatrix} = \phi(k,0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0^* \end{bmatrix}$$

Le calcul de A^k par diagonalisation permet d'obtenir :

$$A^k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} (1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^k & 2(-(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k) \\ -(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k & (-1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k + (1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k \end{bmatrix}$$

Pour $k = 11$, on a $\lambda_{11}^* = x_{11}^*$. Cela permet de calculer λ_0^*.

$$\lambda_0^* = \frac{(2+\sqrt{3})^{12} - (2-\sqrt{3})^{12}}{(2+\sqrt{3})^{11}(1+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^{11}(\sqrt{3}-1)}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^k - 2[((2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k)]\lambda_0^* \right] \\ \lambda_k &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[-(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k + [(-1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k + (1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k]\lambda_0^* \right] \end{aligned}$$

Solution MATLAB

```
>> x1=1:12;
>> lambda1=1:12; lambda1(1)=((2+sqrt(3))^12-(2-sqrt(3))^12)/...
>> ((((2+sqrt(3))^11)*(1+sqrt(3)))-(((2-sqrt(3))^11)*(sqrt(3)-1)));

>> for k=2:12
>> x1(k)=(1/(2*sqrt(3)))*(((1+sqrt(3))*(2+sqrt(3))^(k-1))+((sqrt(3)-1)*...
>> (2-sqrt(3))^(k-1))-(2*((2+sqrt(3))^(k-1)-(2-sqrt(3))^(k-1))*lambda1(1)));
>>  lambda1(k)=(1/(2*sqrt(3)))*((-(2+sqrt(3))^(k-1))+((2-sqrt(3))^(k-1))+...
>> ((((sqrt(3)-1)*(2+sqrt(3))^(k-1))+...
>> ((1+sqrt(3))*(2-sqrt(3))^(k-1)))*lambda1(1)));
>> end

>> u1=1:12; u1(1)=-lambda1(2);

>> for k=2:11
>>    u1(k)=-lambda1(k+1);
>> end
```

2- L'équation de Riccati s'écrit comme :

$$p_i = \frac{1+3p_{i+1}}{1+2p_{i+1}} \quad p_{11} = 1$$

La trajectoire optimale d'état obéit à l'équation d'état bouclée par la commande optimale :

$$x_{i+1}^* = \frac{1}{1+2p_{i+1}} x_i^* \quad x_0 = 1$$

La trajectoire de commande optimale est donnée alors par :

$$u_i^* = \frac{-p_{i+1}}{1+2p_{i+1}} x_i, \quad i = 0, \cdots, 11$$

La trajectoire optimale des états adjoints est obtenue par :

$$\lambda_i^* = p_i x_i^*, \quad i = 0, \cdots, 11$$

Solution MATLAB

```
>> p(12)=1;
>> for i=11:-1:1
>> p(i)=(1+3*p(i+1))/(1+2*p(i+1));
>> end
>> x2=1:12;
>> u2=1:12;
>> lambda2=1:12;
>> for i=1:11
>>     x2(i+1)=(1/(1+(2*p(i+1))))*x2(i);
>>     u2(i)=-(p(i+1)/(1+(2*p(i+1))))*x2(i);
>>     lambda2(i)=p(i)*x2(i);
>> end
>> x2(12)=x2(11)+(2*u2(11));
>> lambda2(12)=x2(12);
```