Commande optimale des systèmes dynamiques
BE1 : partie I
Programmation non linéaire

Exercice 1 :

Pour chaque valeur du paramètre β, déterminer les points stationnaires de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

Lesquels sont des minima stricts ?

Exercice 2 :

Dans chacun des problèmes suivants, justifier votre réponse en utilisant les conditions d'optimalité.

1- Montrer que la fonction $f(x,y) = (x^2-4)^2 + y^2$ a deux minima globaux et un point stationnaire, qui n'est ni un maximum local ni un minimum local.

2- Montrer que la fonction $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^2$ a un unique point stationnaire, qui n'est ni un maximum local ni un minimum local.

3- Trouver tous les minima locaux de la fonction $f(x,y) = 1/2x^2 + x\cos(y)$.

Exercice 3 :

Soit le problème d'optimisation suivant

$$\begin{array}{ll} \min & 1/2||x||^2 + c'x \\ \text{sous} & Ax = 0 \\ & c \in \mathbb{R}^n \\ & A \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array}$$

1- Montrer que ce problème peut être réécrit sous la forme d'un problème de projection sur un ensemble convexe à définir.

2- Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en les justifiant.

3- Montrer que la solution optimale est donnée par

$$x^* = -(\mathbf{1} - A'(AA')^{-1}A)c$$

si A est une matrice de rang m.

Exercice 4 :

Soit le problème d'optimisation (P)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & \\ \text{sous} & Ax = b \end{array}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et A est de rang plein. On suppose que $A = [B \;\; R]$ où $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est inversible et $R \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ et on partitionne x en accord avec A, $x = [x_B \;\; x_R]'$.

1- Réécrire le problème (P) sous la forme d'un problème d'optimisation non contraint auxiliaire (P').
2- Ecrire la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre de ce problème auxiliaire (P').
3- Ecrire la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre du problème initial (P).
4- Montrer que ces deux conditions sont identiques.
5- Ecrire la condition nécessaire d'optimalité au deuxième ordre de (P').
6- Ecrire la condition nécessaire d'optimalité au deuxième ordre de (P).
7- Montrer que ces deux conditions sont identiques.

Exercice 5 :

On souhaite maximiser la surface d'un parallépipède P tel que la somme de ses dimensions, (longueur, largeur, hauteur) soit fixe.

1- Poser ce problème sous forme d'un problème de PNL.
2- Trouver un minimum local à ce problème.

Exercice 6 :

Soit le problème

$$\min \quad f(x) = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\text{sous} \quad x_1 = 1$$

Déterminer la solution optimale de ce problème.

Commande optimale des systèmes dynamiques
BE1 : partie I
Correction
Programmation non linéaire

Exercice 1 :

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

Les points stationnaires vérifient la condition nécessaire au premier ordre :

$$\nabla f(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x^* + \beta y^* & = & -1 \\ \beta x^* + 2y^* & = & -2 \end{array} \right.$$

On calcule $\det = \left| \begin{array}{cc} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{array} \right| = 4 - \beta^2$

1- $\det = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$ ou $\beta = -2$, le système linéaire n'a pas de solution donc le problème stationnaire n'admet pas de point stationnaire.

2- $\det \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 2$ et $\beta \neq -2$, le système linéaire a une solution unique donc le problème d'optimisation a un unique point stationnaire :

$$\left[\begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \dfrac{2(\beta - 1)}{4 - \beta^2} \\ \dfrac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \end{array} \right]$$

La condition nécessaire au deuxième ordre conduit à calculer :

$$\nabla^2 f(x, y) = \left[\begin{array}{cc} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{array} \right]$$

Pour $-2 < \beta < 2$, (x^*, y^*) est un minimum local puisque la condition nécessaire au deuxième ordre est vérifiée ainsi que la condition suffisante $\nabla^2 f(x^*, y^*) \succ 0$.

Pour $\beta < -2$ ou $\beta > 2$ il n'y a pas de minimum local puisque le hessien n'a pas de signe et donc la condition nécessaire au deuxième ordre n'est pas vérifiée.

Exercice 2 :

1- Soit $f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2$.

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 4x(x^2 - 4) & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Les points stationnaires sont donc les paires $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$. L'analyse au deuxième ordre conduit à écrire :

$$\nabla^2 f(x, y) = \left[\begin{array}{cc} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right]$$

Pour $(0,0)$,

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne n'a pas de signe donc $(0,0)$ n'est ni un minimum ni un maximum.
Pour $(2,0)$,

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

donc $(2,0)$ est un minimum local strict.
Pour $(-2,0)$,

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

donc $(2,0)$ est un minimum local strict.
Les deux minima locaux $(2,0)$ et $(-2,0)$ sont des minima globaux puisque $f(2,0) = f(-2,0) = 0$.

2- Soit $f(x,y) = (y - x^2)^2 - x^2$.

$$\nabla f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} -2x(1 + 2(y - x^2)) & = & 0 \\ 2(y - x^2) & = & 0 \end{array} \right.$$

L'unique paire stationnaire est donnée par $(0,0)$. L'analyse au deuxième ordre donne

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 - 4y + 12x^2 & -4x \\ -4x & 2 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne n'a pas de signe donc $(0,0)$ n'est ni un minimum ni un maximum.

3- Soit $f(x,y) = 1/2x^2 + x\cos y$.

$$\nabla f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} x + \cos y & = & 0 \\ -x\sin y & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour $x = 0$ et $\cos y = 0$ alors $(0, (2k+1)\pi/2)$, $k = 0, 1, ...$ sont des paires stationnaires.
Pour $x \neq 0$ et $\sin y = 0$, $((-1)^{k+1}, k\pi)$, $k = 0, 1, \cdots$ sont des paires stationnaires.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{bmatrix}$$

Pour $(0, (2k+1)\pi/2)$, $k = 0, 1, ...$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{bmatrix}$$

or $\det[\nabla^2 f(x,y)] = -1$ donc la matrice hessienne n'est pas signée et les paires $(0, (2k+1)\pi/2)$, $k = 0, 1, ...$ ne sont ni des minima ni des maxima.

Pour $((-1)^{k+1}, k\pi)$, $k = 0, 1, \cdots$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc les paires $((-1)^{k+1}, k\pi)$, $k = 0, 1, \cdots$ sont des minima locaux stricts. $f((-1)^{k+1}, k\pi) = 1/2 + (-1)^{2k+1}$ donc les paires $((-1)^{k+1}, k\pi)$, $k = 0, 1, \cdots$ sont des minima globaux.

Exercice 3 :

Soit le problème d'optimisation suivant

$$\begin{array}{ll} \min & 1/2||x||^2 + c'x \\ \text{sous} & Ax = 0 \\ & c \in \mathbb{R}^n \\ & A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array}$$

1- Si l'on ajoute la constante $1/2c^2$ à la fonction coût, on modifie le coût optimal final mais la solution optimale x^* n'est pas modifiée. Le problème peut alors se réécrire :

$$\begin{array}{ll} \min & 1/2||x + c||_2^2 \\ \text{sous} & Ax = 0 \\ & c \in \mathbb{R}^n \\ & A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array}$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0\}$ est un ensemble convexe puisque :

$$\forall\ (x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2,\ \forall\ \lambda \in (0, 1)\ \lambda A x_1 + (1 - \lambda) A x_2 = 0$$

Le problème est donc bien un problème de projection du vecteur $-c$ sur l'ensemble $\mathcal{C}$.

2- Les conditions nécessaires d'optimalité sont données par $(x+c)'x = 0$ pour tout $x \mid Ax = 0$. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes puisque le problème est complètement convexe.

3- Si $x^* = -(\mathbf{1} - A'(AA')^{-1}A)c$ alors x^* est réalisable puisque

$$Ax^* = -A(\mathbf{1} - A'(AA')^{-1}A)c = -(A - AA'(AA')^{-1})c = 0$$

De plus, $\mathcal{C}$ est un sous-espace et $x^* \in \mathcal{C}$ est une projection sur $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$(x - x^*)'x = 0 \ \ \forall\ x \in \mathcal{C}$$

On vérifie que $x^* = -(\mathbf{1} - A'(AA')^{-1}A)c$ est tel que cette dernière relation soit vraie.

$$(-(\mathbf{1} - A'(AA')^{-1}A)c + c)'x = (A'(AA')^{-1}Ac)'x = 0 \ \ \forall\ x \in \mathcal{C}$$

Exercice 4 :

Soit le problème d'optimisation (P)

$$\min \quad f(x)$$

$$\text{sous} \quad Ax = b$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et A est de rang plein. On suppose que $A = [B \;\; R]$ où $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est inversible et $R \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ et on partitionne x en accord avec A, $x = [x_B \;\; x_R]'$.

1- Il faut procéder à une élimination algébrique en partitionnant la matrice $A = \left[\begin{array}{cc} B & R \end{array}\right]$, le vecteur $x = \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_R \end{array}\right]$ et en réécrivant (P) sous la forme :

$$\min \quad f(x_B, x_R)$$

$$\text{sous} \quad Bx_B + Rx_R = b$$

Comme A est une matrice de rang plein égal à son nombre de lignes m, il est toujours possible de trouver B inversible telle que :

$$x_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b = B^{-1}(b - Rx_R)$$

d'où le problème d'optimisation équivalent (P') :

$$\min \quad f(B^{-1}(b - Rx_R), x_R) = F(x_R)$$

$$\text{sous} \quad x_R \in \mathbb{R}^{n-m}$$

2- Condition nécessaire d'optimalité de (P') : si x_R^* est un minimum local strict de (P') alors $\nabla F(x_R^*) = 0$.

$$\nabla F(x_R^*) = -R'(B')^{-1}\nabla_{x_B} f(x^*) + \nabla f_{x_R}(x^*) = 0$$

3- Condition nécessaire d'optimalité de (P) : si x^* est un minimum strict local de (P) alors il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que le lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda'(Ax - b)$ soit minimal en (x^*, λ^*).

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + A'\lambda^* = 0$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = Ax^* - b = 0$$

4- En partant de la condition nécessaire d'optimalité de (P'), on peut poser :

$$\lambda^* = -(B')^{-1}\nabla_{x_B} f(x^*)$$

Cela signifie donc que :

$$\begin{aligned} R'\lambda^* + \nabla_{x_R} f(x^*) &= 0 \\ B'\lambda^* + \nabla_{x_B} f(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

que l'on réécrit de manière matricielle :

$$\left[\begin{array}{c} \nabla_{x_B} f(x^*) \\ R'\lambda^* + \nabla_{x_R} f(x^*) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} B' \\ R' \end{array} \right] \lambda^* = \nabla f(x^*) = 0$$

et qui n'est rien d'autre que la condition nécessaire d'optimalité de (P). L'unicité vient du fait que A est de rang plein.

5- La condition nécessaire d'optimalité au second ordre de (P') : si x_R^* est un minimum local de (P') alors $\forall\ d \in \mathbb{R}^{n-m} \neq 0,\ d'\nabla^2 F(x_R^*)d \leq 0$. La matrice hessienne se calcule par :

$$\nabla^2 F(x_R^*) = R'(B')^{-1}\nabla^2_{x_B x_B} f(x^*)B^{-1}R - R'(B')^{-1}\nabla^2_{x_B x_R} f(x^*)$$
$$-\nabla^2_{x_R x_B} f(x^*)B^{-1}R + \nabla^2_{x_R x_R} f(x^*)$$

En posant $y = \left[\begin{array}{c} -B^{-1}Rd \\ d \end{array} \right]$ on a :

$$d'F(x_R^*)d = y'\nabla^2 f(x^*)y$$

d'où la condition :

$$0 \leq y'\nabla^2 f(B^{-1}(b - Rx_R^*), x_R^*)y \quad \forall\ y = \left[\begin{array}{c} -B^{-1}Rd \\ d \end{array} \right] \neq 0 \mid d \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$$

6- La condition nécessaire d'optimalité au deuxième ordre de (P) : si x^* est un minimum local de (P) alors :

$$y'\nabla f(x^*)y \geq 0 \quad \forall\ y \in \mathcal{V}(x^*)$$

où $\mathcal{V}(x^*)$ est l'ensemble des directions réalisables $\mathcal{V}(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$. Ce dernier ensemble peut être réécrit comme :

$$\mathcal{V}(x^*) = \left\{ y = \left[\begin{array}{c} y_B \\ y_R \end{array} \right] \in \mathbb{R}^n \mid y_B = -B^{-1}Ry_R \right\}$$

d'où la condition :

$$y'\nabla^2 f(x^*)y \geq 0 \quad \text{pour} \quad y = \left[\begin{array}{c} y_B \\ y_R \end{array} \right],\ y_R \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Exercice 5 :

1- On définit le problème par :

$$\min \quad f(x) = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$\text{sous} \quad x_1 + x_2 + x_3 = \alpha$$

2- La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre est : si x^* est un optimum local strict alors il existe λ^* tel que le lagrangien :

$$L(x, \lambda) = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - \alpha)$$

soit minimal en (x^*, λ^*) :

$$\begin{array}{rcl} & & \\ \nabla_x L(x^*, \lambda^*) & = & 0 \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) & = & 0 \\ & & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} -x_2^* - x_3^* + \lambda^* & = & 0 \\ -x_1^* - x_3^* + \lambda^* & = & 0 \\ -x_2^* - x_1^* + \lambda^* & = & 0 \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* & = & \alpha \end{array}$$

Il faut résoudre ce système linéaire à quatre équations et quatre inconnues.

$$\begin{aligned} (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*) &= A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = -1/3 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= (\alpha/3, \alpha/3, \alpha/3, 2\alpha/3) \end{aligned}$$

La condition nécessaire d'optimalité au deuxième ordre est : si x^* est un minimum local strict alors $\forall\ y \in \mathcal{V}(x^*) = \left\{ y \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y = 0 \right\}$:

$$y' \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) y = y' \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} y \geq 0$$

On obtient donc la condition

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0 \quad \forall\ y \ :\ y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

qui est également une condition suffisante pour que $(\alpha/3, \alpha/3, \alpha/3)$ soit une minimum local strict.

Exercice 6 :

Soit le problème

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = 1/2(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{sous} & x_1 = 1 \end{array}$$

Le lagrangien s'écrit $L(x, \lambda) = 1/2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(x_1 - 1)$ et si x^* est un minimum local strict alors $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ et $\nabla_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$. On obtient donc les conditions :

$$\begin{array}{l} x_1^* + \lambda^* = 0 \\ x_2^* = 0 \\ x_1^* = 1 \\ \lambda^* = -1 \end{array}$$

On calcule la matrice hessienne du lagrangien comme $\nabla^2 L = \mathbf{1}_2$ donc $x^* = (1, 0)$ vérifie la condition suffisante d'optimalité et est donc un minimu local strict du problème.