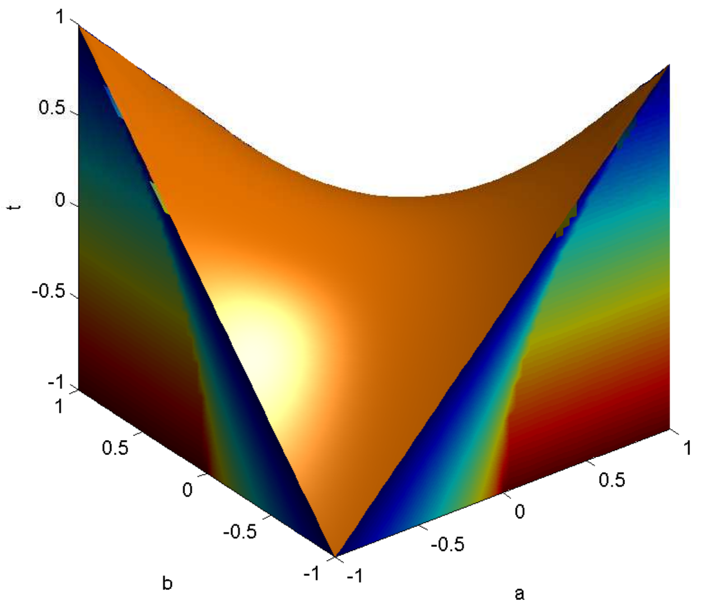
Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 10

Analyse de performance robuste



Analyse en performance nominale

- Caractéristiques temporelles

  Réponses en boucle fermée à des entrées typiques (gabarits temporels)

  Placement de pôles dans des sous-régions du plan complexe

- Caractéristiques fréquentielles

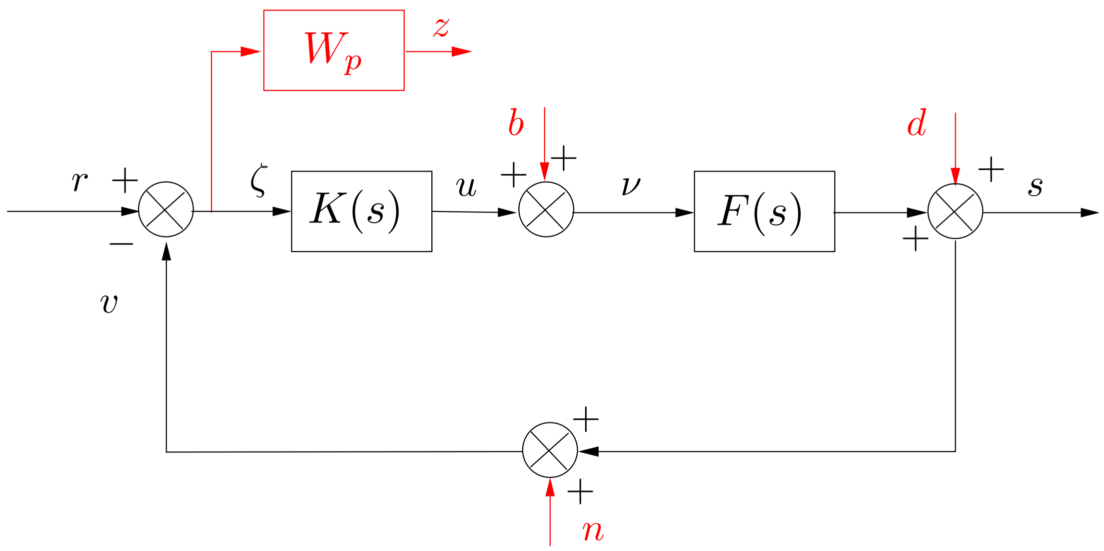
  Modelage de boucle et des fonctions de sensibilité (gabarits fréquentiels)

  Utilisation de fonctions de pondération

- La notion de norme système

  Norme $\mathcal{H}_\infty$ (pire des cas)

  Norme $\mathcal{H}_2$ (énergie)...



- Les fonctions de sensibilités :

$$S_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}$$
$$T_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK$$
$$S_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}$$
$$T_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}KF$$
$$KS_y = K(\mathbf{1} + FK)^{-1}$$
$$S_yF = (\mathbf{1} + FK)^{-1}F$$

Propriétés :

$$S_y + T_y = \mathbf{1} \qquad S_u + T_u = \mathbf{1}$$
$$KS_y = S_uK \qquad S_yF = FS_u$$

Analyse en performance nominale : exemple

Exemple de spécification : bon suivi de référence

$$\epsilon = s - r = S_y(d - r) - T_y n + S_y F b$$

Soit

$$\underline{\sigma}(S_y(\omega)) \leq \frac{\|\epsilon(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} \leq \overline{\sigma}(S_y(\omega))$$

On a donc :

$$\overline{\sigma}(W_p S_y(\omega)) \leq 1 \quad \forall\ \omega \text{ où } W_p = \mathrm{diag}(w_{p_i}) \text{ et } \boxed{w_{p_i} = \frac{s/M_i + \omega_{Bi}}{s + \omega_{Bi} A_i}}$$

avec $A_i \ll 1$ pour une action intégrale, $M_i \simeq 2$, ω_{Bi} la bande passante en BF

Nota : pour les systèmes MIMO, on définit une région de bande passante

$$\omega_{\underline{\sigma}(S)=0.7} \leq \omega_B \leq \omega_{\overline{\sigma}(S)=0.7}$$

Exemple de spécification : bon suivi de référence

Le tracé des valeurs singulières min et max de S doit donc suivre un gabarit :

- Faible à basses fréquences

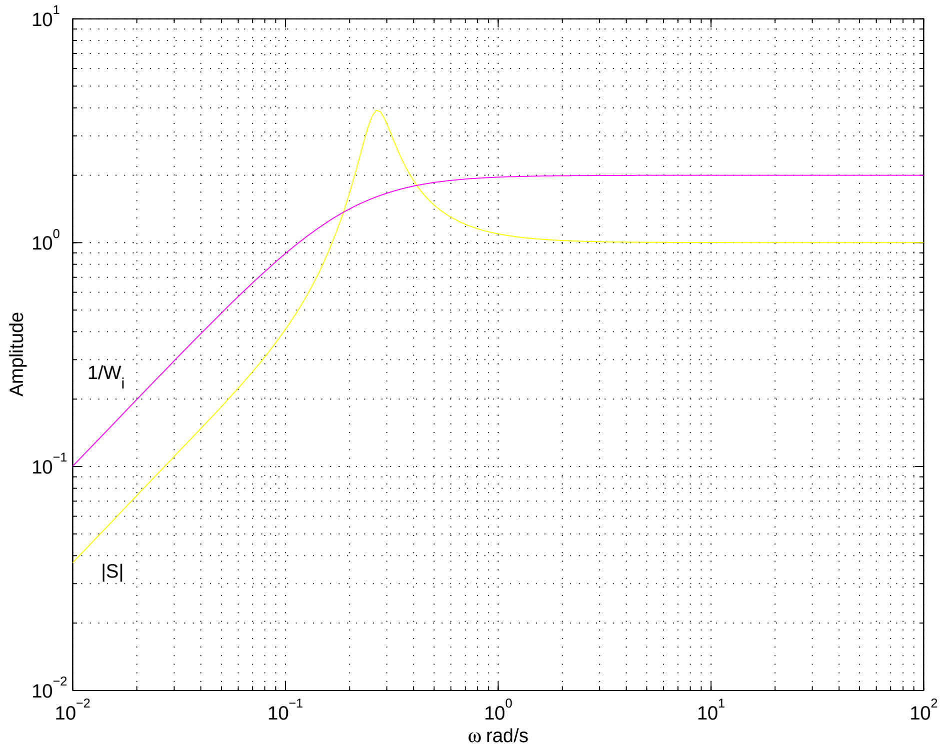
$$\omega < \omega_B \quad \overline{\sigma}(S) \ll 1$$

- ~ 1 aux hautes fréquences

$$\omega > \omega_B \quad \overline{\sigma}(S) \sim 1$$

- Un pic supérieur à 1 autour de la pulsation de coupure ω_B

$$\omega \sim \omega_B \quad 0.41 \leq \overline{\sigma}(S) \leq 2.41$$



- Objectifs de performance :
  - S_y et $S_y F$ faibles : suivi de référence et réjection de perturbations

$$\boxed{\overline{\sigma}(W_p S_y(\omega)) \leq 1 \ \forall \ \omega \Leftrightarrow \ \|W_p S_y\|_\infty \leq 1}$$

  - KS_y, T_u et S_u faibles : u et ν faibles

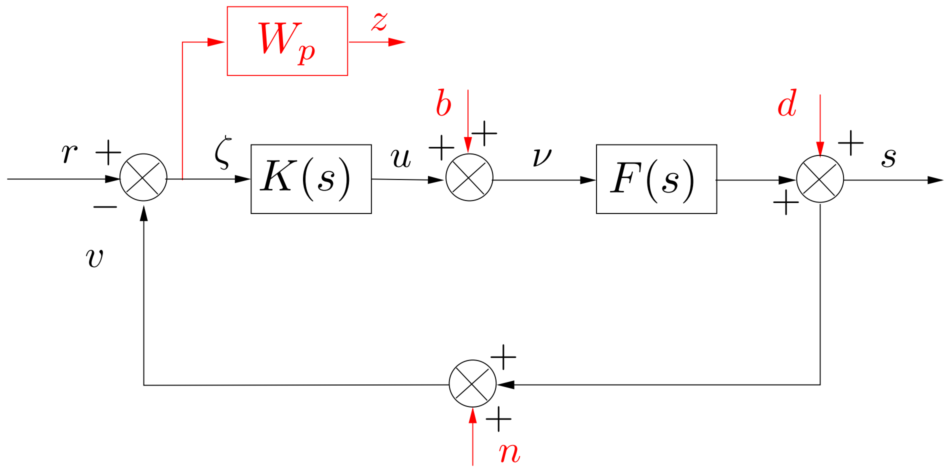
$$\overline{\sigma}(W_u K S_y(\omega)) \leq 1 \ \forall \ \omega \Leftrightarrow \ \|W_u K S_y\|_\infty \leq 1$$

  - T_y faible : un bon filtrage des bruits de mesure

$$\overline{\sigma}(W_T T_y(\omega)) \leq 1 \ \forall \ \omega \Leftrightarrow \ \|W_T T_y\|_\infty \leq 1$$

- Contraintes algébriques sur les spécifications :

$$|1 - \overline{\sigma}(S)| \leq \overline{\sigma}(T) \leq 1 + \overline{\sigma}(S) \quad |1 - \overline{\sigma}(T)| \leq \overline{\sigma}(S) \leq 1 + \overline{\sigma}(T)$$

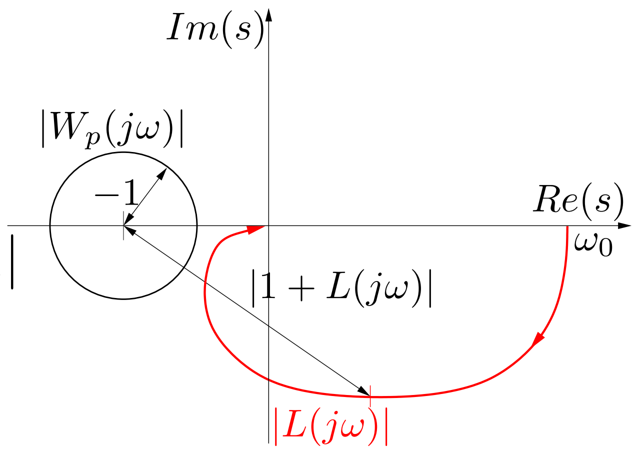


Condition de performance nominale :

$$\overline{\sigma}(W_p S_y(\omega)) \leq 1 \;\forall\; \omega \Leftrightarrow \;\|W_p S_y\|_\infty \leq 1$$

Interprétation SISO :

$$\|W_p S_y\|_\infty \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \omega \;\; |W_p(j\omega)| \leq |L_y(j\omega)+1|$$

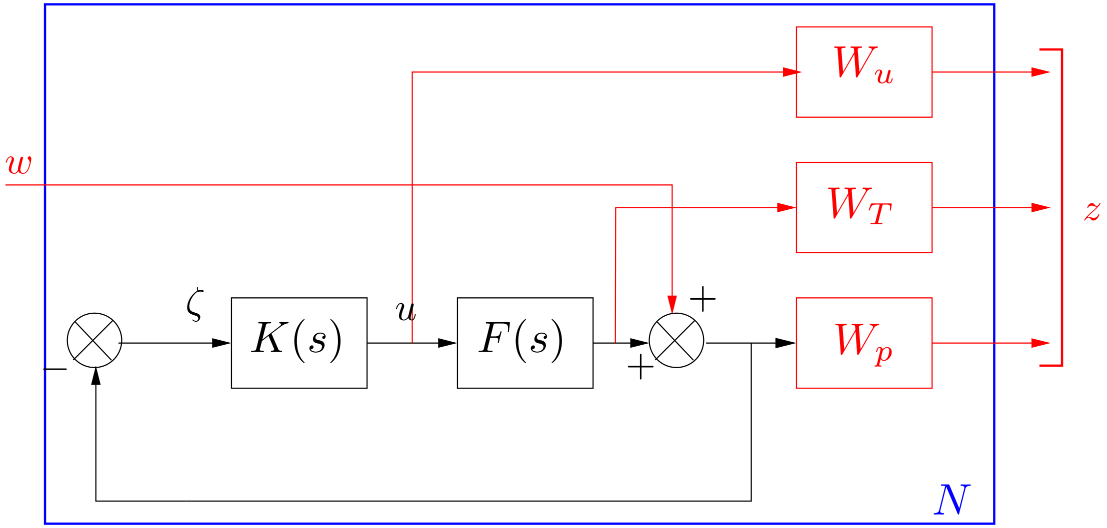


Condition de performance nominale étendue :

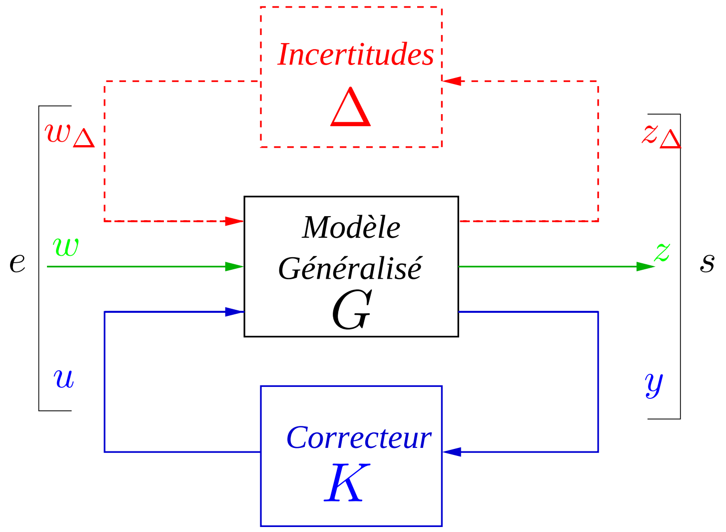
$$N = \begin{bmatrix} W_p S_y & W_T T_y & W_u K S_y \end{bmatrix}'$$

$$\boxed{\overline{\sigma}(N(\omega)) \leq 1 \ \forall\ \omega \Leftrightarrow \ \|N\|_\infty \leq 1}$$

Mise sous forme standard :



$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} u = Ky \\ w_\Delta = \Delta z_\Delta \\ \Delta \in \boldsymbol{\Delta} \end{array}$$



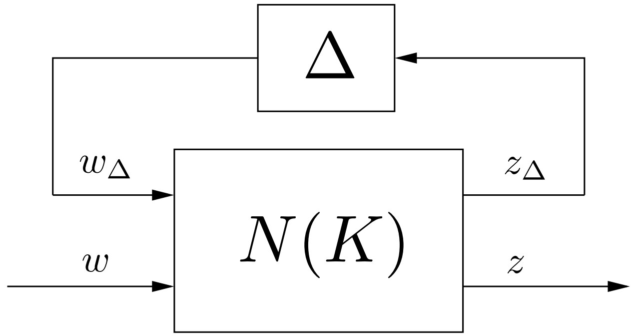
➥ **Hypothèses 1** :

- $\boldsymbol{\Delta}_s = \{\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid \Delta(j\omega)$ bloc diagonale $\overline{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1 \ \ \forall\ \omega\}$
- $\forall\ \Delta \in \boldsymbol{\Delta}_s,\ \mathbf{1} - G_{11}(\infty)\Delta$ *est inversible*
- *Le transfert* $w \rightarrow z$ *est défini pour les performances*

▼ **Définition 1** : *analyse robuste en performance*

Etant donné $N(K)$ stable, le problème d'analyse de performance robuste revient à tester :

$$\|\mathcal{L}_u(\Delta, N)\|_\infty \leq 1 \quad \forall \; \|\Delta\|_\infty < 1$$



Notations :

$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{L}_l(K, G) \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L}_l(K, G) = \begin{bmatrix} M & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_u(\Delta, N) = N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - M\Delta)^{-1}N_{12}$$

❒ **Théorème 1** :

- *Performance nominale si :*

$$\boxed{\overline{\sigma}(N_{22}(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}}$$

- *Stabilité robuste si :*

$$\boxed{\mu_{\boldsymbol{\Delta}_s}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}}$$

- *Performance robuste si :*

$$\boxed{\overline{\sigma}(\mathcal{L}_u(\Delta, N(j\omega))) \leq 1 \quad \forall\, \Delta \in \boldsymbol{\Delta}_s \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}}$$

✍ **Remarques 1** :

Ces test doivent être effectués sur l'ensemble des fréquences !

$\longrightarrow$ *Explosion numérique !*

❒ **Théorème 2** :

Etant donné un correcteur stabilisant de manière interne K (N est NS) la forme $N - \Delta$ avec $N_{22} \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}$ vérifie la condition de performance robuste ssi :

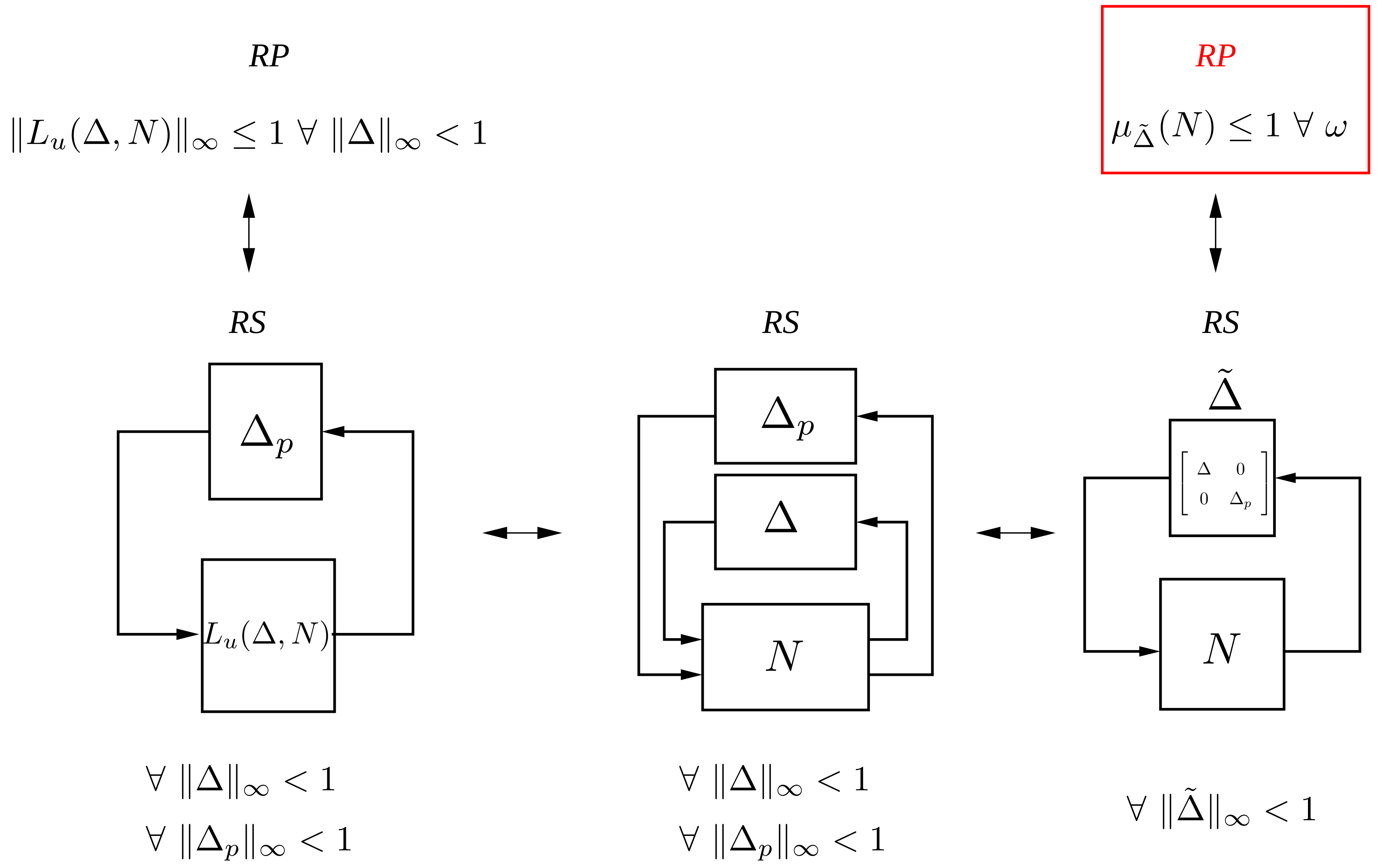
$$\boxed{\mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}}(N(j\omega)) \leq 1 \ \ \forall \ \omega}$$

où la structure d'incertitude est définie par :

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_p \end{bmatrix} \quad \Delta_p \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}$$

✍ **Remarques 2** :

Le problème de performance robuste est équivalent à un problème de stabilité robuste avec incertitude structurée généralisée comprenant un bloc complexe plein fictif Δ_p


RP
$\|L_u(\Delta, N)\|_\infty \le 1 \ \forall \ \|\Delta\|_\infty < 1$
RP
$\mu_{\tilde{\Delta}}(N) \le 1 \ \forall \ \omega$
RS
RS
RS
Δ_p
$L_u(\Delta, N)$
Δ_p
Δ
N
$\tilde{\Delta}$
$\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$
N
$\forall \ \|\Delta\|_\infty < 1$
$\forall \ \|\Delta_p\|_\infty < 1$
$\forall \ \|\Delta\|_\infty < 1$
$\forall \ \|\Delta_p\|_\infty < 1$
$\forall \ \|\tilde{\Delta}\|_\infty < 1$

Résumé des conditions en μ

- Stabilité nominale (SN) si N est stable de manière interne
- Stabilité robuste (SR) si (SN) et :

$$\boxed{\mu_{\boldsymbol{\Delta}_s}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}}$$

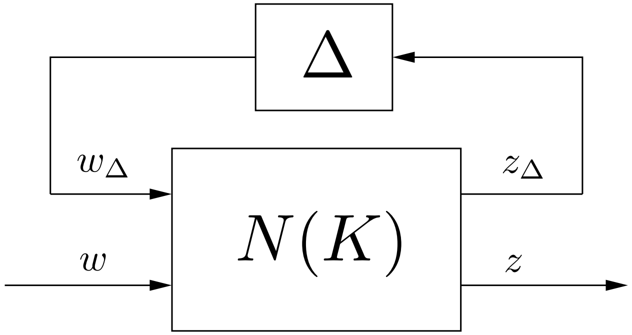
- Performance nominale (PN) si (SN) et :

$$\boxed{\overline{\sigma}(N_{22}(j\omega)) = \mu_{\boldsymbol{\Delta_p}}(N_{22}(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}}$$

- Performance robuste (PR) si (SN) et :

$$\boxed{\mu_{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}(N(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_p \end{bmatrix}}$$

Soit le modèle bouclé incertain décrit par :



$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix}$$

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta \ , \ \Delta \in \mathbf{\Delta}_s$$

$$\mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}} \left(N(j\omega) \begin{bmatrix} \gamma_1 \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 \mathbf{1} \end{bmatrix} \right) \leq \gamma_3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mu_{\mathbf{\Delta}_s} (M(j\omega)) \leq \frac{\gamma_3}{\gamma_1}}$$

et

$$\boxed{\overline{\sigma}(\mathcal{L}_u(\Delta, N)) \leq \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \qquad \forall\ \Delta \in \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \mathbf{\Delta}_s}$$

Exemple : [Scherer 00]

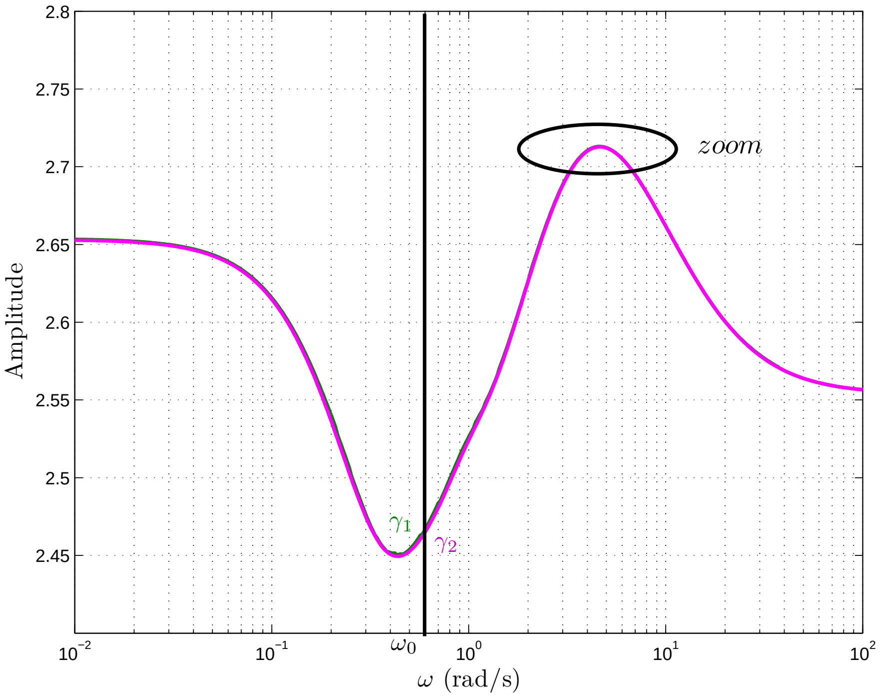
$$N(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2s+1} & 1 & \frac{s-2}{2s+4} & \frac{s-0.1}{s+1} \\ -1 & \frac{s}{s^2+s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0.1 \\ \frac{3s}{s+5} & \frac{-1}{4s+1} & 1 & \frac{10}{s+4} \\ \hline \frac{1}{s+2} & \frac{0.1}{s^2+s+1} & \frac{s-1}{s+1} & 1 \end{array}\right] \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \ , \ \Delta_1 \in \mathbb{C}^{2\times 2} \ , \ \Delta_2 \in \mathbb{C}$$

La structure généralisée :

$$\tilde{\Delta} = \left[\begin{array}{cc|c} \Delta_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta_p \end{array}\right] , \quad \Delta_1 \in \mathbb{C}^{2\times 2} , \quad \Delta_2 \in \mathbb{C} , \quad \Delta_p \in \mathbb{C}$$

- (SR) : tracé de $\omega \longrightarrow \mu_{\mathbf{\Delta}}(M(j\omega))$
- (PR) : tracé de $\omega \longrightarrow \mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}}(N(j\omega))$

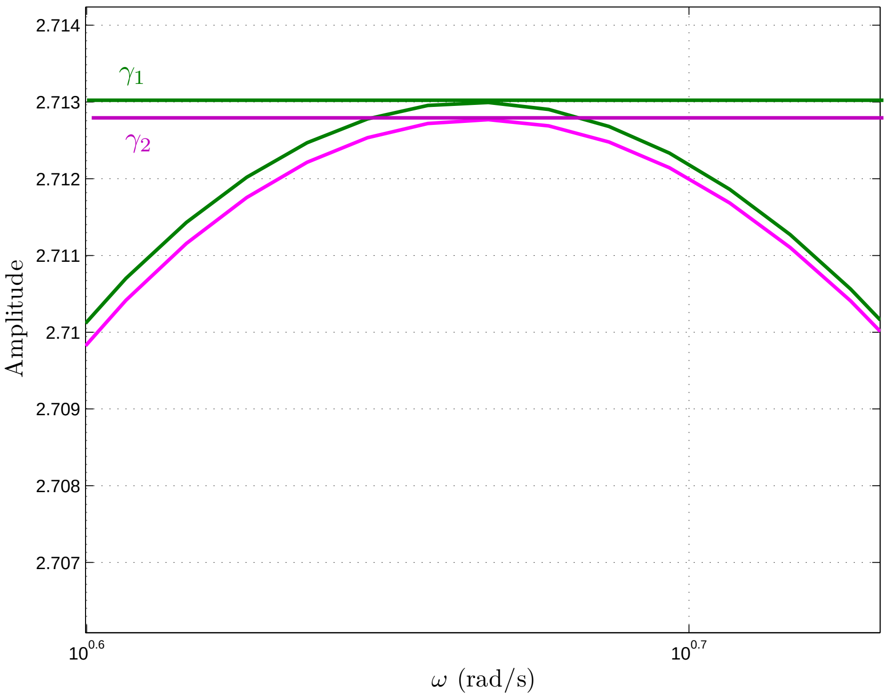


- $\mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}}(N(j\omega_0)) \leq \gamma_1$ implique

$$\overline{\sigma}(\mathcal{L}_u(\Delta, N(j\omega_0))) \leq \gamma_1 \;\; \forall\, \Delta \in \frac{1}{\gamma_1}\mathbf{\Delta}_s$$

- $\mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}}(N(j\omega_0)) > \gamma_2$ implique

$$\overline{\sigma}(\mathcal{L}_u(\Delta, N(j\omega_0))) > \gamma_2 \;\; \text{pour}\; \Delta \in \frac{1}{\gamma_2}\mathbf{\Delta}_s$$



- Borne sup $\leq \gamma_1 = 2.713 \ \ \forall\, \omega$:

$$\|\mathcal{L}_u(\Delta, N)\|_\infty \leq 2.713$$
$$\forall\ \Delta \in 0.36859\boldsymbol{\Delta}_s$$

- Borne inf. $> \gamma_2 = 2.7127$ à une pulsation donnée

$$\|\mathcal{L}_u(\Delta, N)\|_\infty > 2.7127$$
$$\text{pour } \Delta \in 0.36863\boldsymbol{\Delta}_s$$