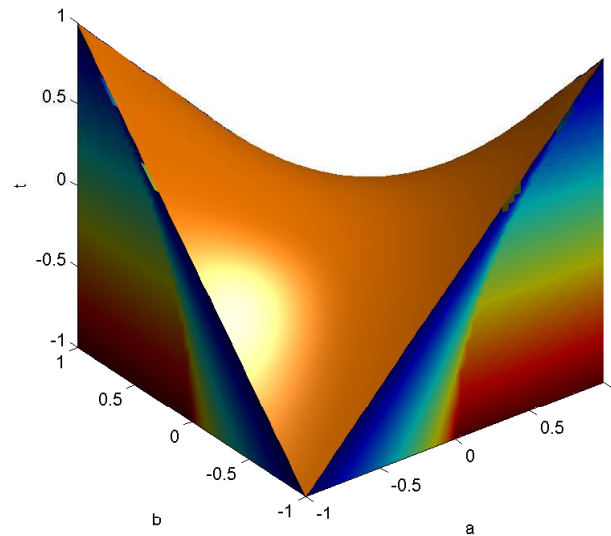


**Analyse et synthèse robustes  
des systèmes linéaires  
Cours 1  
Introduction et rappels**



**Enseignants** Denis Arzelier : directeur de recherche au LAAS-CNRS et Frédéric Gouaisbaut  
Maître de Conférences à l'UPS

**Contacts** Tel : 05 61 33 64 76 et 05 61 33 63 07 - emails : arzelier@laas.fr, fgouaisb@laas.fr

**Web-pages** <http://homepages.laas.fr/arzelier/> et <http://homepages.laas.fr/fgouaisb/>

## Organisation du cours

❶ 6 **cours** 1h15 : 7h30 + 2 **bureaux d'études** 2h30 : 5h

❷ 4 **cours** 1h15 : 5h + 1 **bureau d'études** 2h30 : 2h30

⇒ Cours magistral avec support de cours sur planches

⇒ Exercices avec support MATLAB

**Enseignant** Christelle Pittet : Ingénieur CNES

## Organisation du cours

❷ 3 **cours** 1h15 : 3h45 + 2 **bureaux d'études** 2h30 : 2h30

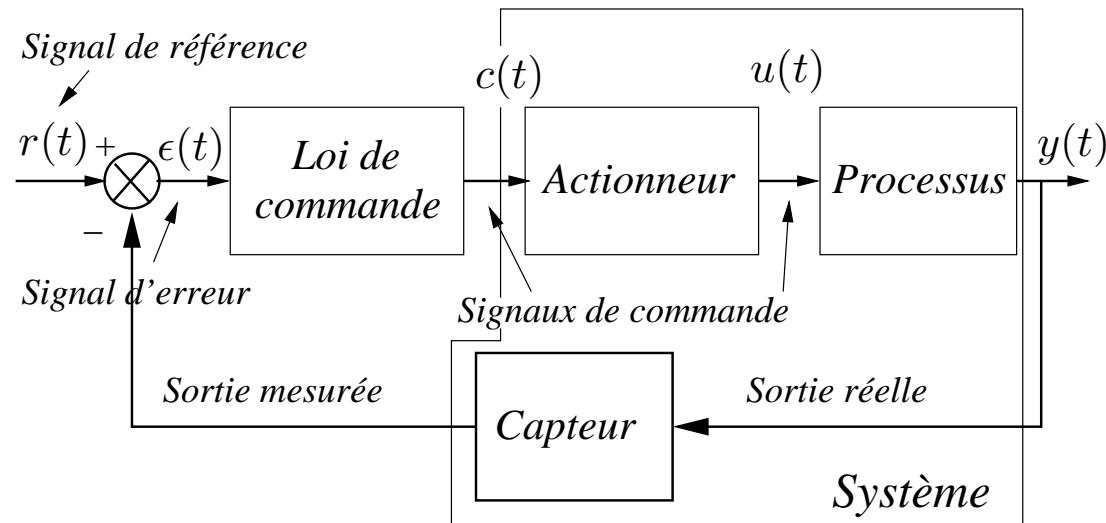
⇒ Cours magistral avec support de cours sur planches

⇒ Bureaux d'études sur une application spatiale avec support MATLAB

❸ 1 **Examen** 2h30 (Tous documents autorisés)

Durée totale : 31h15

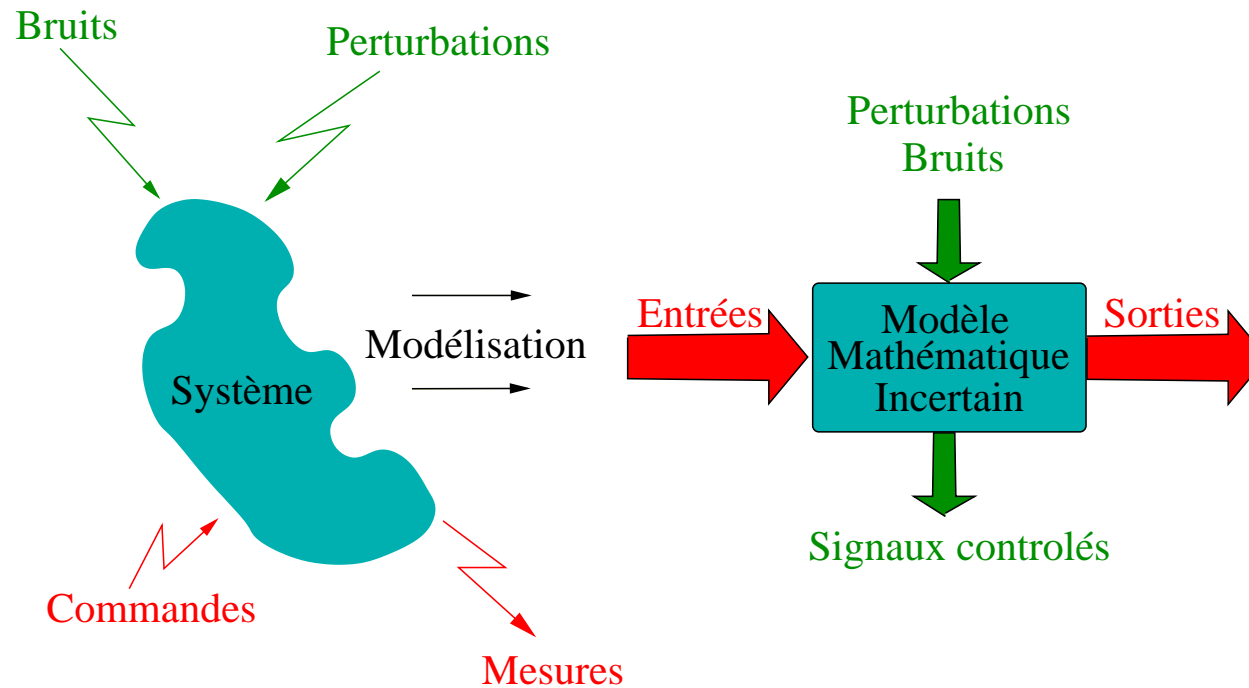
Exposer une théorie moderne des systèmes de commande avec **contre-réaction** prenant **explicitement** et *a priori* en compte la notion de **robustesse**



## ▼ Définition 1 : *système de commande robuste*

Un système de commande est dit **robuste** s'il conserve *ses propriétés* malgré *les incertitudes* et *les perturbations* affectant le système à commander

Méthodes d'analyse et synthèse : les propriétés, les perturbations et les incertitudes ?



**Modélisation** : expression des lois physiques et des connaissances expérimentales

**Modèle mathématique incertain** : ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entrées-sorties + une représentation mathématique de l'incertitude

- 1 - **Systeme physique réel**
- 2 - **Modèle physique idéal**
  - Aggrégat de systèmes élémentaires  
(Décomposition en blocs idéaux)
- 3 - **Modèle mathématique idéal**
  - Modèle de connaissance  
(application des lois de la physique)
- 4 - **Modèle mathématique réduit**
  - Modèle de comportement  
(linéarisation...)
- 5 - **Modèle incertain**
  - Modèle mathématique réduit **LTI** + modèle d'incertitude  
(famille de modèles + structure  $\pm$  fine)
- 6 - **Formulation et problème standards**

## 1- Système physique réel :

Lanceur constitué de deux étages reliés par une liaison visco-élastique et soumis à des perturbations dues au vent et à la poussée du moteur

## 2- Modèle physique idéal :

Deux masses  $M_1$  et  $M_2$  couplées par un amortisseur et un ressort et soumises à des forces

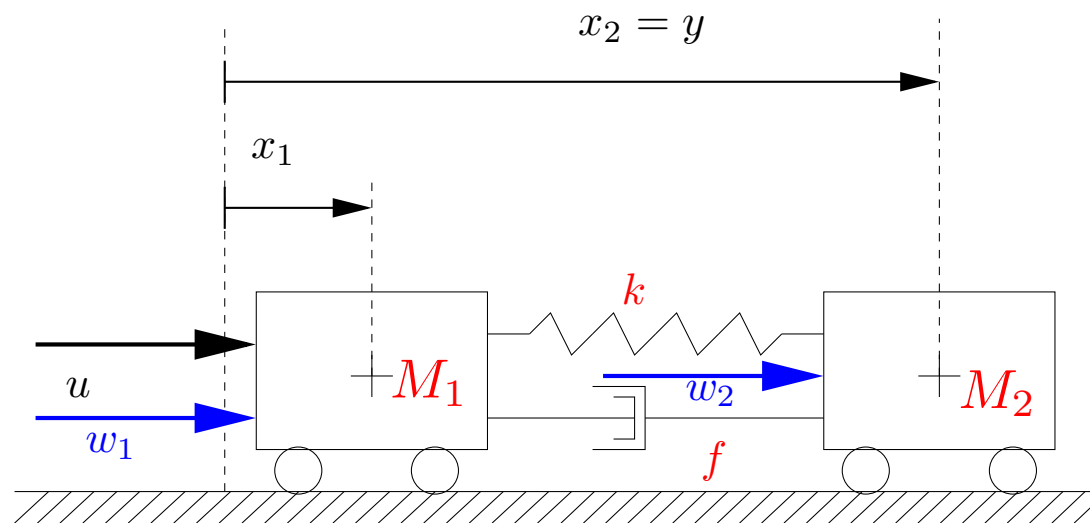


FIGURE 1 – Structure flexible

### 3- Modèle mathématique idéal :

Modèle variant dans le temps et non linéaire

$$M_1(t)\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = u + w_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = w_2$$

où  $M_1(t)$  : fonction du temps et  $f$  et  $k$  fonctions non linéaires

### 4- Modèle mathématique réduit :

Vecteur d'état :  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}'$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/M_1 & k/M_1 & -f/M_1 & f/M_1 \\ k/M_2 & -k/M_2 & f/M_2 & -f/M_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M_1 & 0 \\ 0 & 1/M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

## 5- Modèle incertain :

### - Incertitude paramétrique :

Les masses :

$$\underline{M}_i \leq M_i \leq \overline{M}_i$$

La raideur du ressort :

$$\underline{k} \leq k \leq \overline{k}$$

Le coefficient d'amortissement :

$$\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$$

### - Perturbations exogènes :

Les signaux exogènes  $w_1$  et  $w_2$  sont des signaux d'énergie finie ( $\in \mathcal{L}_2$ )



- Modèle externe 1 : **matrice de transfert**

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$$

- Modèle externe 2 : **matrice de réponse impulsionnelle**

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$y(t) = (g * u)(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

- Modèle interne : **représentation d'état**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{r \times m}$$

## ▼ Définition 2 :

- Le système est **propre** si  $G(\infty) = D = \text{cste}$ . Il sera dit **strictement propre** si  $G(\infty) = D = \mathbf{0}$
- Si  $r = m = 1$ , le système est **monovarié** (SISO) sinon il sera **multivarié** (MIMO)

$$G(s) = D + C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B$$

## ▼ Définition 3 : réalisation minimale

A toute matrice de transfert  $G(s)$ , une réalisation d'état  $(A, B, C, D)$  est associée.

- La réalisation est **minimale**
- $A$  a la plus petite dimension possible
- $(A, B)$  est **commandable** et  $(A, C)$  est **observable**

Nota :

- $(A, B)$  est **commandable** ssi  $\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$
- $(A, C)$  est **observable** ssi  $\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} C' & (CA) & \dots & (CA^{n-1})' \end{bmatrix}\right) = n$

Notation : réalisation et réalisation minimale

$$G(s) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad G(s) \simeq \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

## ▼ Définition 4 : pôles et zéros des modèles LTI

- Les pôles de la réalisation de  $G(s)$  sont les valeurs propres de  $A$ .
- $z_0 \in \mathbb{C}$  est un zéro invariant de la réalisation de  $G(s)$  ssi
  - $\exists 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$  et  $w \in \mathbb{C}^m$  t.q.

$$M(z_0) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \mathbf{1} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

Si  $w = 0$ , alors  $z_0$  est un mode inobservable de la réalisation

- $\exists 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$  et  $\xi \in \mathbb{C}^r$  t.q.  $\begin{bmatrix} v^H & \xi^H \end{bmatrix} M(z_0) = 0$ . Si  $\xi = 0$ , alors  $z_0$  est un mode non commandable de la réalisation
- $z_0 \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission de  $G(s)$  ssi  $\text{rg}(G(z_0)) < \text{nrg}(G(s))$

Nota :  $\mathcal{Z}_T \subseteq \mathcal{Z}_I$  et  $\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z}_I$  ssi  $G(s) \simeq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Si  $m = r=1$  ( $G(s) = \frac{\pi_z(s)}{\pi_p(s)}$ ) ou si  $m = r$  ( $\det(G(s)) = \frac{\pi_z(s)}{\pi_p(s)}$ )

- les pôles de  $G(s)$  sont les racines du polynôme caractéristique  $\pi_p(s)$
- les zéros de transmission de  $G(s)$  sont les racines de  $\pi_z(s)$

Soit  $G(s) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ , deux notions de stabilité peuvent être définies :

- **Stabilité BIBO :**

▼ **Définition 5 :**

*Le système de réponse impulsionnelle  $g(t)$  est BIBO-stable ssi*

-  $\exists k \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq k < \infty$$

*ssi*

- *Tous les pôles  $p_i$  de la forme irréductible de  $G(s)$  sont tels que  $Re(p_i) < 0, \forall i$*

- **Stabilité interne :**

▼ **Définition 6 :**

*Le modèle LTI est stable de façon interne ssi*

-  *$A$  est stable asymptotiquement*

*ssi*

- *Les valeurs propres de  $A$  sont telles que  $Re(\lambda_i(A)) < 0$*

Nota :

- La stabilité interne  $\Rightarrow$  la stabilité BIBO

Exemple :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

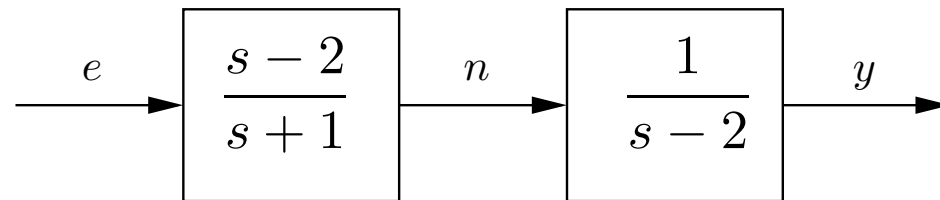
$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s - 1}{s + 2}$$

- La stabilité interne  $\Leftrightarrow$  la stabilité BIBO si

$$G(s) \simeq \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Exemple :



- Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

- Représentation d'état :  $x_1 = y$ ,  $x_2 = n - e$ ,  $u = e$

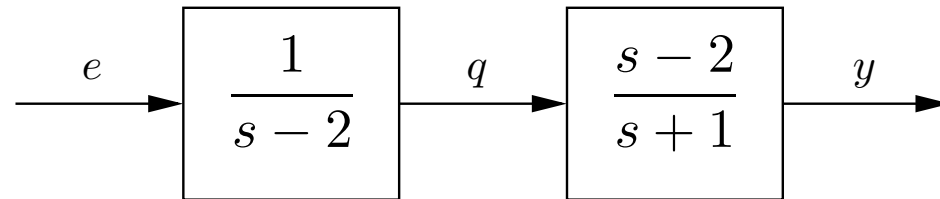
$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 3u$$

$$y = x_1$$

Le pôle 2 est **instable** et **non commandable**

## Exemple : (suite)



- Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{s-2}{s+1} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s+1}$$

- Représentation d'état :  $x_1 = q$ ,  $x_2 = y - q$ ,  $u = e$

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - x_2$$

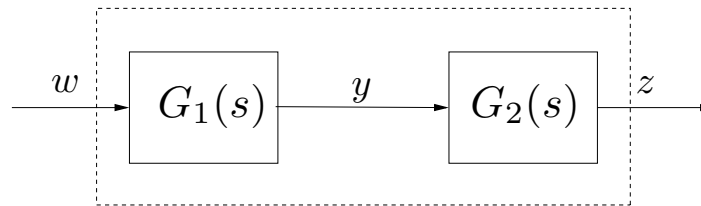
$$y = x_1 + x_2$$

Le pôle 2 est **instable** et **non observable**

Un mode est observable et/ou commandable pour une réalisation d'état donnée

♠ La multiplication des matrices n'est pas commutative  $GK \neq KG$

- Règle 1 : cascade  $z(s) = G(s)w(s) = G_2(s)G_1(s)w(s)$



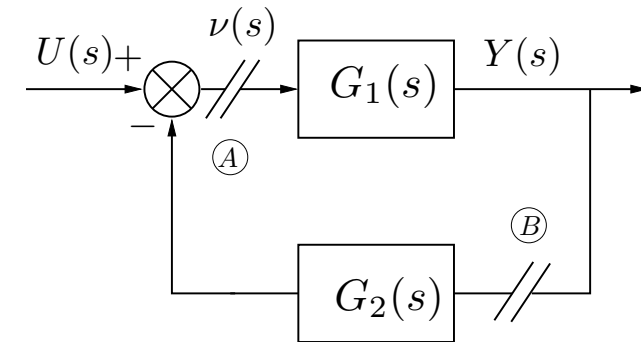
- Règle 2 : bouclage

$$\text{Point A : } Y(s) = G_1(s) \underbrace{(\mathbf{1} + G_2 G_1(s))}^{-1} U(s)$$

$L_y(s)$

$$\text{Point B : } Y(s) = \underbrace{(\mathbf{1} + G_1 G_2(s))}^{-1} G_1(s) U(s)$$

$L_u(s)$



- Règle 3 : push and pull  $(\mathbf{1} + L_u(s))^{-1} G_1(s) = G_1(s) (\mathbf{1} + L_y(s))^{-1}$



Soient les réalisations  $G_1 \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right]$   $G_2 \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$

- Somme :

$$G_1 + G_2 \sim \left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & \mathbf{0} & B_1 \\ \mathbf{0} & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

- Produit :

$$G_1.G_2 \sim \left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ \mathbf{0} & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} A_2 & \mathbf{0} & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array} \right]$$

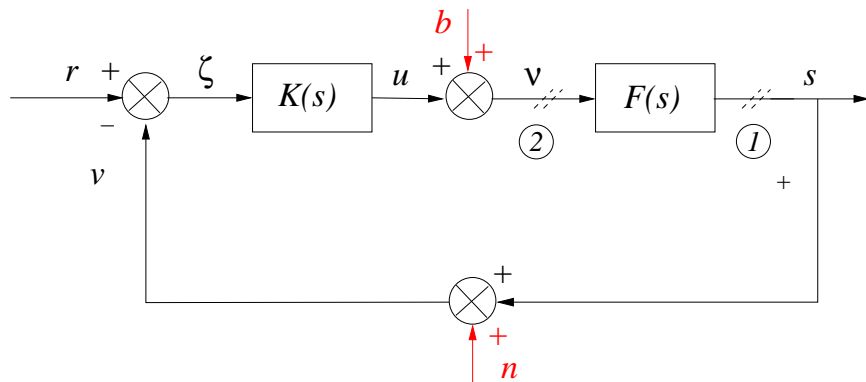
- Inverse :

$$G_1^{-1} \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right]$$

- Dérivation :

$$sG_1 \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 A_1 & C_1 B_1 + sD_1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_1 B_1 \\ \hline C_1 & C_1 B_1 + sD_1 \end{array} \right]$$

Les fonctions de sensibilité en sortie :



$$s = (\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb + (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK(r - n)$$

$$\zeta = (\mathbf{1} + FK)^{-1}(r - n) - (\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb$$

$$u = K(\mathbf{1} + FK)^{-1}(r - n) - K(\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb$$

- $S_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}$  sensibilité en sortie
- $T_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK$  sensibilité complémentaire en sortie
- $KS_y$  et  $S_yF$

$$S_y + T_y = \mathbf{1}$$

De même,

$$v = (\mathbf{1} + KF)^{-1}b + (\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

$$u = -(\mathbf{1} + KF)^{-1}KFb + (\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

$$s = F(\mathbf{1} + KF)^{-1}b + F(\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

Fonctions de sensibilité en entrée :

- $S_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}$  sensibilité en entrée
- $T_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}KF$  sensibilité complémentaire en entrée
- $S_uK = KS_y$  et  $FS_u = S_yF$

$$S_u + T_u = \mathbf{1}$$

$$S_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1} \quad S_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}$$

$$T_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK \quad T_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}KF$$

$$S_y F = F S_u \quad K S_y = S_u K$$

**Nota :** pour un système monovariante, quatre fonctions de sensibilité :

$$S = S_u = S_y = \frac{1}{1 + FK} \quad \left| \quad FS \quad \right| \quad T = T_u = T_y = \frac{FK}{1 + FK} \quad \left| \quad KS \right.$$

avec :

$$S + T = \mathbf{1}$$

```
>> G=tf([-6 3],[50 15 1]);
>> K=tf([15 1],[13 0]);
>> L=G*K;
>> Lmin=minreal(L);
>> S=inv(1+L);
>> Smin=minreal(S);
>> T=1-S;
>> Tmin=minreal(T);
>> bode(Lmin,Smin,Tmin)
>> grid
>> KS=K*S;
>> KSmin=minreal(KS);
>> GS=G*S;
>> GSmin=minreal(GS);
>> bode(KSmin,GSmin);
>> grid
```

