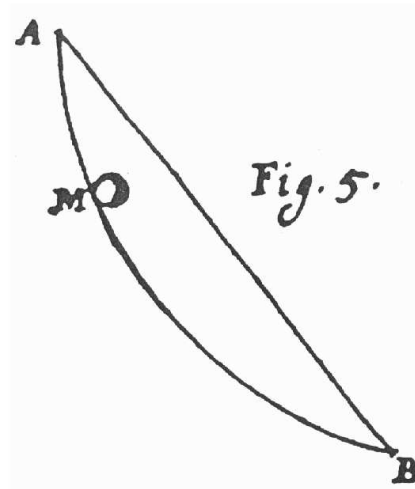


Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 6

Théorie du régulateur linéaire quadratique



Soit le problème de commande optimale :

$$\min_{u(t) \in \mathbb{R}^m} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x'(t_f)Q_f x(t_f)$$

sous $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0$ fixé

t_f fixé

$x(t_f) = x_f$ libre

↪ Hypothèses 1

- $Q_f \succeq 0, Q(t) \succeq 0, \forall t \in [0, t_f]$
- $R(t) \succ 0, \forall t \in [0, t_f]$
- **Interprétation** : déterminer la commande $u(t)$ qui maintienne le vecteur d'état proche de son état d'équilibre 0 sans une dépense trop forte en énergie de commande
- **Nota** : pas de contrainte sur la commande

❶ Hamiltonien :

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] + \lambda'(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t)]$$

❷ Equation d'optimalité :

$$H_u(x^*, u^*, \lambda^*) = R(t)u^*(t) + B'(t)\lambda^*(t) = 0 \Rightarrow u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t)$$

❸ Equations canoniques de Hamilton : TPBVP

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A'(t)\lambda^*(t), \quad \lambda^*(t_f) = Q_f x_f$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B'(t) \\ -Q(t) & -A'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ Q_f x_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \Phi(t, 0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, 0) & \Phi_{12}(t, 0) \\ \Phi_{21}(t, 0) & \Phi_{22}(t, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix}$$

où $\Phi(t, 0)$ est la **matrice de transition d'état** du TPBVP

En utilisant la condition terminale sur l'état adjoint, on obtient :

$$\lambda^*(t) = [\Phi_{22}(t_f, t) - Q_f \Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [Q_f \Phi_{11}(t_f, t) - \Phi_{21}(t_f, t)] x^*(t)$$

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t)$$

avec $P(t) \succeq 0$, $\forall t \in [0, t_f]$ et $P(t_f) = Q_f$

Nota : la matrice $[\Phi_{22}(t_f, t) - Q_f \Phi_{12}(t_f, t)]^{-1}$ existe toujours puisque

$$[\Phi_{22}(t_f, t_f) - Q_f \Phi_{12}(t_f, t_f)]^{-1} = \mathbf{1}$$

et

$$P(t_f) = [\Phi_{22}(t_f, t_f) - Q_f \Phi_{12}(t_f, t_f)]^{-1} [Q_f \Phi_{11}(t_f, t_f) - \Phi_{21}(t_f, t_f)] = Q_f$$

Comme $\lambda(t) = P(t)x(t)$, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = \dot{P}(t)x^*(t) + P(t)\dot{x}^*(t) \quad u^*(t) = -R^{-1}B'(t)P(t)x^*(t)$$

En substituant ces expressions dans le système d'équations canoniques de Hamilton, on obtient **l'équation différentielle de Riccati** :

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad P(t_f) = Q_f$$

👉 Remarques 1

- La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice **symétrique** variant dans le temps **indépendante de l'instant initial** (ici $t_0 = 0$)
- L'équation de Riccati constitue un système de $n(n+1)/2$ **équations différentielles ordinaires du premier ordre non linéaires variant dans le temps**
- La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice **définie positive** sur $[0, t_f)$
- La matrice $P(t)$ peut être calculée **hors ligne** par intégration numérique arrière à partir de $P(t_f) = Q_f$

□ **Théorème 1** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique qui est caractérisée par :*

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ est *gain de Kalman* et $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *la matrice de Riccati* symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$. La trajectoire d'état optimale est solution de :

$$\dot{x}^*(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)]x^*(t), \quad x(0) = x_0$$

Le coût optimal est alors donné par :

$$J^*(x^*(t), t) = \frac{1}{2}x^{*'}(0)P(0)x^*(0) \quad \forall t \in [0, t_f]$$

□ **Théorème 2** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes et un critère de performance :*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x'(t) & u'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + \frac{1}{2} x'(t_f) Q_f x(t_f)$$

a une solution unique qui est caractérisée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) [B'(t)P(t) + S'(t)] x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ est **gain de Kalman** et $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est **la matrice de Riccati** symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :

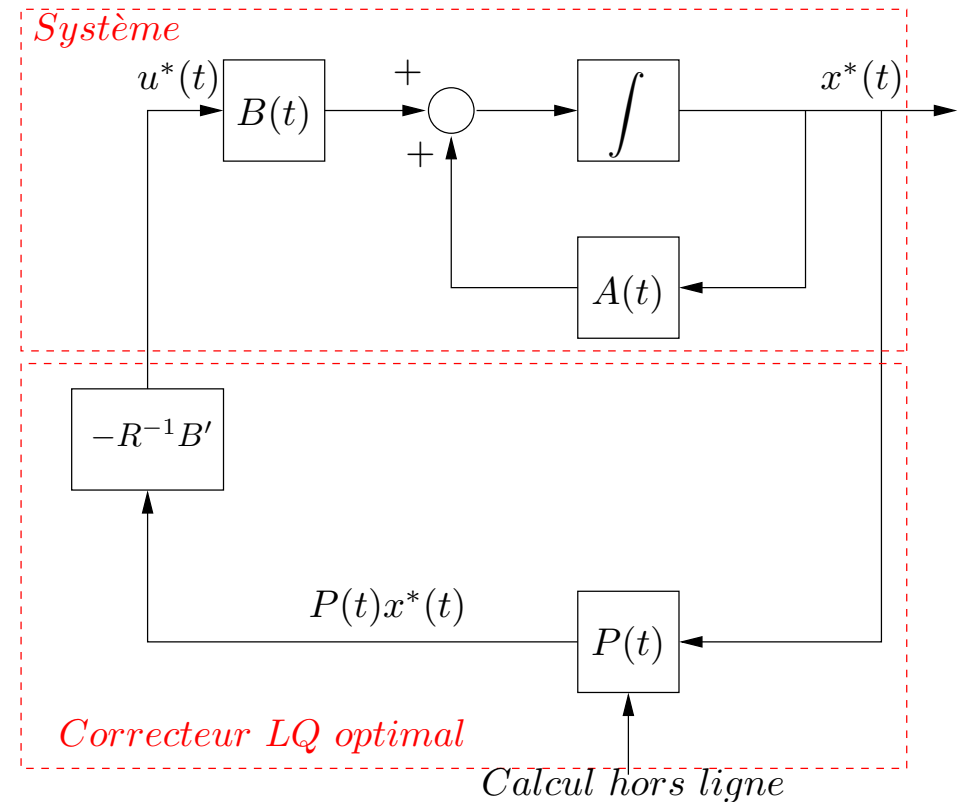
$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - [P(t)B(t) + S(t)] R^{-1} [B'(t)P(t) + S'(t)] + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$. La trajectoire d'état optimale est solution de :

$$\dot{x}^*(t) = [A(t) + B(t)K(t)] x^*(t), \quad x(0) = x_0$$

Remarques 2

- La structure de la commande optimale est une structure de commande **en boucle fermée**
- La loi de commande optimale est **linéaire** et **variant dans le temps** même si le système est LTI
- L'hypothèse de **commandabilité** de la paire $(A(t), B(t))$ n'est pas nécessaire



- Le **vecteur d'état complet** doit être disponible à la mesure

Soit le problème LQ en horizon fini :

$$\begin{aligned} \min_{u(t) \in \mathbb{R}} \quad & J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + hx_2^2(t) + u^2(t)] dt \\ \text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = ax_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = x_{10} \text{ fixé} \\ & \dot{x}_2(t) = bx_2(t), \quad x_2(0) = x_{20} \text{ fixé} \end{aligned}$$

Le régulateur LQ optimal est donné par :

$$u^*(t) = -p_{11}(t)x_1(t) - p_{12}(t)x_2(t)$$

où $p_{11}(t)$ et $p_{12}(t)$ sont les solutions de :

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{11}^2(t) - 1, \quad p_{11}(t_f) = 0$$

$$\dot{p}_{12}(t) = -ap_{11}(t) - bp_{12}(t) + p_{11}(t)p_{12}(t), \quad p_{12}(t_f) = 0$$

$$\dot{p}_{22}(t) = p_{12}^2(t) - 2ap_{12}(t) - 2bp_{22}(t) - h, \quad p_{22}(t_f) = 0$$

👉 Remarques 3

- ⇒ $u^*(t)$ est *indépendante de h* puisque $p_{11}(t)$ et $p_{12}(t)$ sont indépendants de h
- ⇒ Pour $a \neq 0$, $u^*(t)$ *dépend de x_2* même si x_2 est *non commandable*
- ⇒ Pour $a = 0$, $u^*(t)$ *ne dépend pas de x_2*

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{11}^2(t) - 1, \quad p_{11}(t_f) = 0$$

$$\dot{p}_{12}(t) = p_{12}(t)(p_{11}(t) - b), \quad p_{12}(t_f) = 0$$

donc

$$p_{12}(t) = p_{12}(0)e^{\int_0^t (b - p_{11}(\tau))d\tau}, \quad p_{12}(t_f) = 0$$

On en conclut que $p_{12}(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, t_f]$

□ Théorème 3

Dans le cas invariant dans le temps, la solution de l'équation de Riccati différentielle est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ Q_f \end{bmatrix} X_f$$

où \mathcal{H} est la matrice Hamiltonienne

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) = \left[U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_u(t_f-t)} Ge^{\Lambda_s(t_f-t)} \right] \left[U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_u(t_f-t)} Ge^{\Lambda_s(t_f-t)} \right]^{-1}$$

avec :

$$U^{-1}\mathcal{H}U = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = -[U_{22} - Q_f U_{12}]^{-1} [U_{21} - Q_f U_{11}]$$

Soit le problème de commande optimale :

$$\begin{aligned} \min_{u(t) \in \mathbb{R}^m} \quad & J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \text{ fixé} \end{aligned}$$

↪ Hypothèses 2

- $Q \succcurlyeq 0$
- $R \succ 0$
- La paire (A, B) est commandable

Nota : $t_f \rightarrow \infty$

- Pas de coût terminal $\lim_{t_f \rightarrow \infty} x'(t_f)Q_f x(t_f)$
- Comportement du vecteur d'état en régime permanent après le régime transitoire

□ Théorème 4 [Kalman 1960]

Si $Q_f = 0$ et la paire (A, B) est commandable alors $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t) = P$ solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

□ Théorème 5

Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique :

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t) = Kx^*(t)$$

où K est *gain de Kalman* et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *la matrice de Riccati* symétrique solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad P = U_{21}U_{11}^{-1}$$

La trajectoire d'état optimale et le coût optimal sont donnés par :

$$\dot{x}^*(t) = [A - BR^{-1}B'P]x^*(t), \quad x(0) = x_0 \quad J^* = \frac{1}{2}x_0'Px_0$$

□ Théorème 6

Le problème LQ en horizon infini pour lequel la paire (A, B) est commandable et la paire (A, C) est observable ($Q = C'C$) a une solution unique :

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t)$$

où la matrice de Riccati symétrique $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est **définie positive** et solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

De plus, le système dynamique en boucle fermée est **asymptotiquement stable**

$$\Lambda(A - BR^{-1}B'P) \subset \mathbb{C}^-$$

Nota :

- Existence d'une loi optimale stabilisante $\Rightarrow (A, B)$ stabilisable et (A, C) détectable
- $\Lambda(\mathcal{H}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset \Rightarrow (A, B)$ stabilisable et (A, C) détectable
- Si (A, C) est détectable mais non observable alors $P \succeq 0$

Modèle d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2}$$

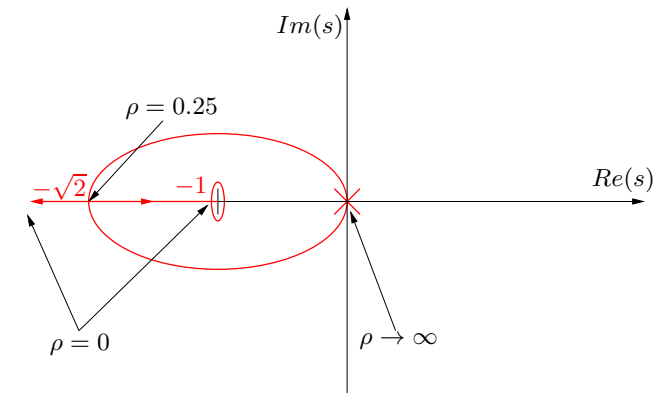
Régulateur ($e = 0$) minimisant :

$$J = \int_0^{\infty} [z^2 + \rho u^2] dt \quad \text{avec } \rho > 0$$

Solution analytique :

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho(1 + 2\sqrt{\rho})} \end{bmatrix}$$

$$K_r = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$$



- Pour $\rho < 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

- Pour $\rho > 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} \pm j\sqrt{-1 + 2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

>> [K,P]=lqr(A,B,C'*C,rho)

