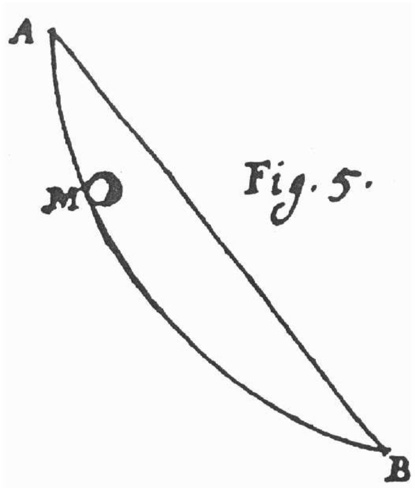
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 5

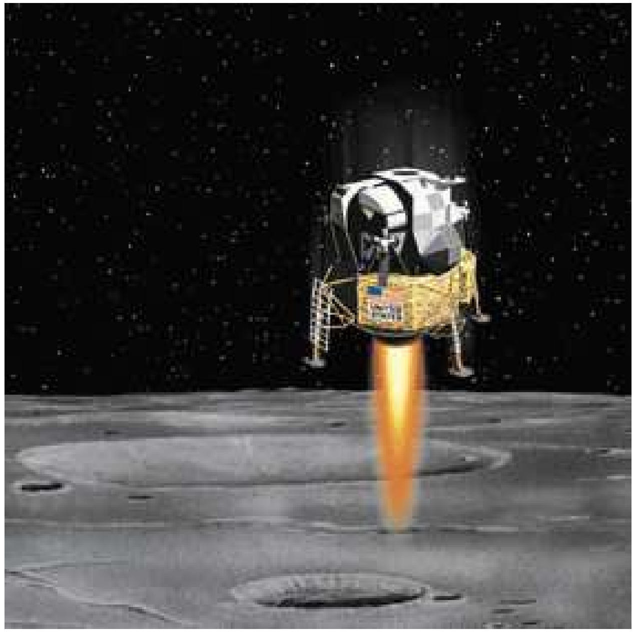
Applications du principe de Pontryagin



Exemple 1 *Problème de l'alunissage*

$$\min_{0 \leq u(t) \leq 1} \quad -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt$$

$$\begin{aligned}
\text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)} \\
& \dot{x}_3(t) = -\sigma u(t), \ x_1(0) = h_0 > 0 \\
& t_f \text{ libre}, \ x_2(0) = v_0 \leq 0 \\
& x_3(0) = M + F, \ x_1(t_f) = 0 \\
& x_2(t_f) = 0, \ 0 \leq u(t) \leq 1
\end{aligned}$$



Nota : *problème de consommation minimum* $\equiv$ *problème en temps minimum*

$$J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f) = m(0)\left(1 - e^{\frac{(v_0 - gt_f)}{\alpha}}\right)$$

$J(t_f)$ *est une fonction strictement monotone croissante*

✍ Définition du Hamiltonien :

$$H(x,\lambda,u) = \sigma u(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(\sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)} - g) - \sigma\lambda_3(t)u(t)$$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1^*(t) & = & x_2^*(t) \\
\dot{x}_2^*(t) & = & -g + \sigma\alpha\dfrac{u^*(t)}{x_3^*(t)} \\
\dot{x}_3^*(t) & = & -\sigma u^*(t) \\
\dot{\lambda}_1^*(t) & = & -H_{x_1}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^*(t) = K_1 \\
\dot{\lambda}_2^*(t) & = & -H_{x_2}^* = -\lambda_1^*(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^*(t) = -K_1 t + K_2 \\
\dot{\lambda}_3^*(t) & = & -H_{x_3}^* = \sigma\alpha\dfrac{\lambda_2^*(t)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_3^*(t) = \sigma\alpha\dfrac{(-K_1 t + K_2)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)}
\end{array}$$

✍ Conditions initiales, finales :

$$x_1(0) = h_0 \quad x_2(0) = v_0 \quad x_3(0) = M + F \quad x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0$$

✍ Analyse du Hamiltonien comme fonction de u :

$$H(u) = \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)g + \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1)\right]u(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)u(t)$$

$H(u)$ est une fonction affine qui est minimale en ses bornes inférieure ou supérieure suivant le signe de $\phi_2(t)$ $\Rightarrow$ commande optimale tout ou rien

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_2(t) < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 < \lambda_3(t) \\ 0 & \text{si } \phi_2(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 > \lambda_3(t) \end{cases}$$

Nota : condition de singularité

$u(t)$ est indéterminée si $\phi_2(t) = \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 - \lambda_3(t) = 0$

Cette condition de singularité ne peut jamais être physiquement satisfaite

✍ Etude du signe de $\phi_2(t) = \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1)\right]$:

- $\frac{d\phi_2(t)}{dt} = -\sigma\alpha\frac{\lambda_1}{x_3(t)} = -\sigma\alpha\frac{K_1}{m(t)}$
- 1 commutation au plus en t_c
- Pour $t_0 \rightarrow t_c$ $u^*(t) = 0$ et pour $t_c \rightarrow t_f$ $u^*(t) = 1$

✍ Etude de l'arc de trajectoire $0 \rightarrow t_c,\ u = 0$:

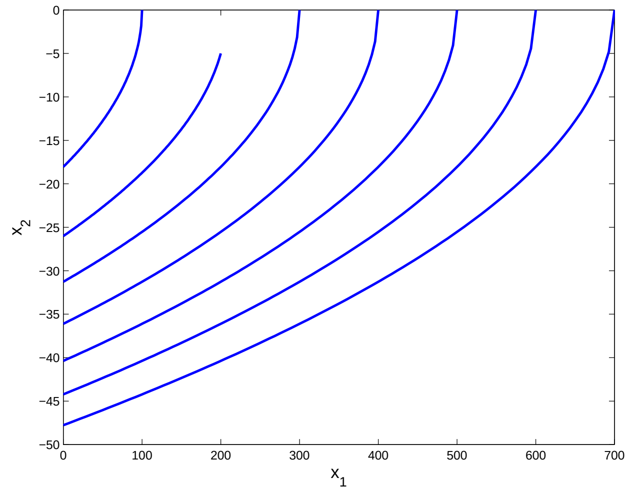
$$\begin{array}{rclcrcl}
\dot{x}_1^*(t) & = & x_2^*(t) & \Rightarrow & x_1^*(t) & = & -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 \\
\dot{x}_2^*(t) & = & -g & \Rightarrow & x_2^*(t) & = & -gt + C_1 = -gt + v_0 \\
\dot{x}_3^*(t) & = & 0 & \Rightarrow & x_3^*(t) & = & m(0) = M + F
\end{array}$$

✍ Equation de la trajectoire en chute libre :

$$x_1^*(t) = h_0 + \frac{(v_0^2 - x_2^{*2}(t))}{2g}$$

✍ Conditions finales au point t_c :

$$\begin{array}{rcl}
x_{1c}^* & = & -\frac{gt_c^2}{2} + v_0 t_c + h_0 \\
x_{2c}^* & = & -gt_c + v_0 \\
x_{3c}^* & = & M + F
\end{array}$$



✍ Etude de l'arc de trajectoire $t_c \rightarrow t_f, \; u = 1$:

$$\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \quad \Rightarrow$$
$$x_1^*(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right| - 1\right]$$
$$\dot{x}_2^*(t) = -g + \frac{\sigma\alpha}{x_3(t)} \quad \Rightarrow \quad x_2^*(t) = -gt + v_0 - \alpha\log\left|\frac{m(0) - \sigma(t-t_c)}{m(0)}\right|$$
$$\dot{x}_3^*(t) = -\sigma \quad \Rightarrow \quad x_3^*(t) = -\sigma t + C_3 = -\sigma t + m(0) + \sigma t_c = -\sigma(t-t_c) + m(0)$$

✍ Conditions finales : $m_f^*, \; t_f^*, \; t_c$

$$0 = -\frac{gt_f^{*2}}{2} + v_0 t_f^* + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right| - 1\right]$$
$$0 = -gt_f^* + v_0 - \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right|$$
$$m_f^* = -\sigma(t_f^* - t_c^*) + m(0)$$

MATLAB :

```
>> [mf,tc,tf]=solve('mf+(50*(tf-tc))-1500=0','-(1.63*tf)-(200*log(1-((tf-tc)/30)))=0',...
'-(0.815*tf^2)+6100+((6000*(1-((tf-tc)/30)))*(log(1-((tf-tc)/30))-1))')
```

✍ Equations de la surface de commutation : $m(0)/\sigma > \theta^* = t_f^* - t_c^* > 0$

$$\begin{aligned} x_{1c}^* &= -\frac{g\theta^{*2}}{2} - \alpha\theta^* - \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \\ x_{2c}^* &= g\theta^* + \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \end{aligned}$$

Nota :

- En éliminant θ^*, on obtient la surface de commutation $F(x_{1c}^*, x_{2c}^*) = 0$
- $\sigma\theta^*/m(0)$ est la proportion de masse initiale consommée

✍ Approximation de la surface de commutation : pour $\dfrac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25$

$$\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \sim -\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} - \frac{\sigma^2\theta^{*2}}{2m(0)^2}$$

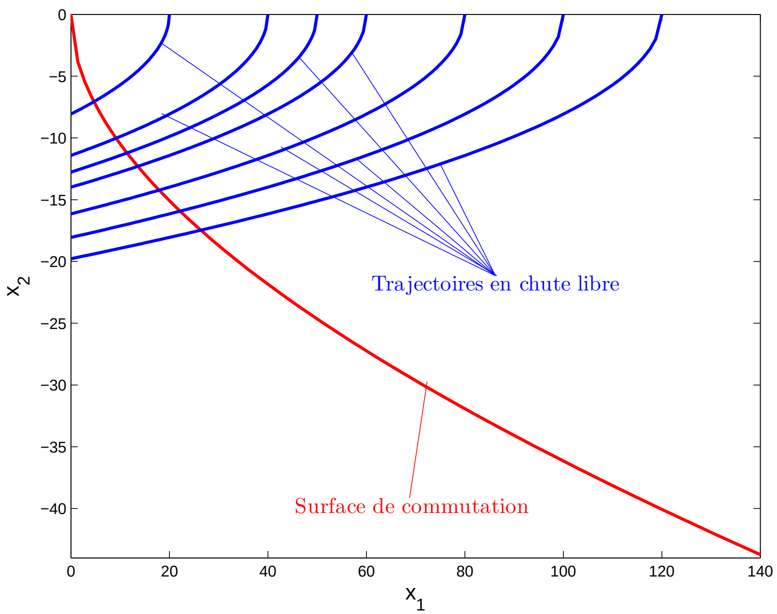
$$x_{2c}^* = \left(g - \frac{\alpha\sigma}{m(0)}\right)\sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}} - \frac{\alpha\sigma^2}{m(0)^2}\frac{x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}$$

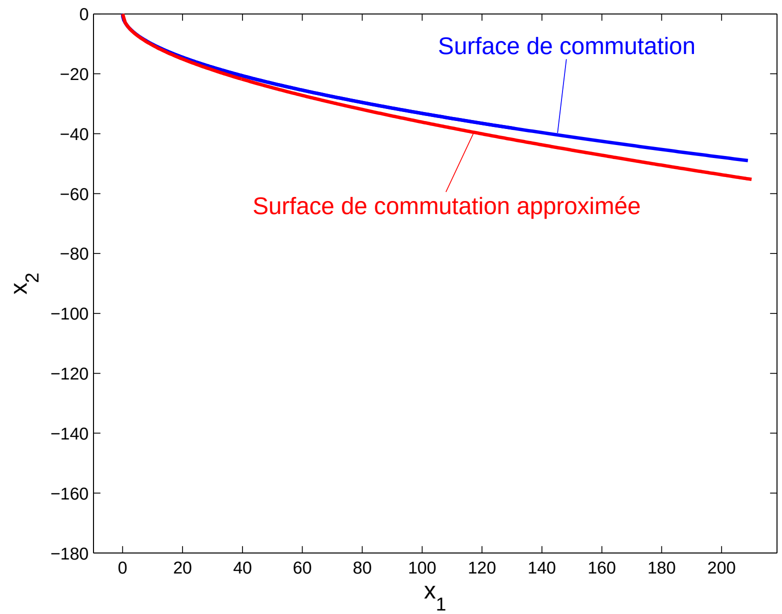
Nota : $\dfrac{\alpha\sigma}{m(0)} \geq g$ et $\theta^* = \sqrt{\dfrac{2x_{1c}^*}{(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)}}$

Espace réalisable :

$$\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x_{1c} \leq 0.25^2 a \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \\ -0.5a\dfrac{m(0)}{\sigma} - 0.25^2 b \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \leq x_{2c} \leq 0 \end{cases}$$

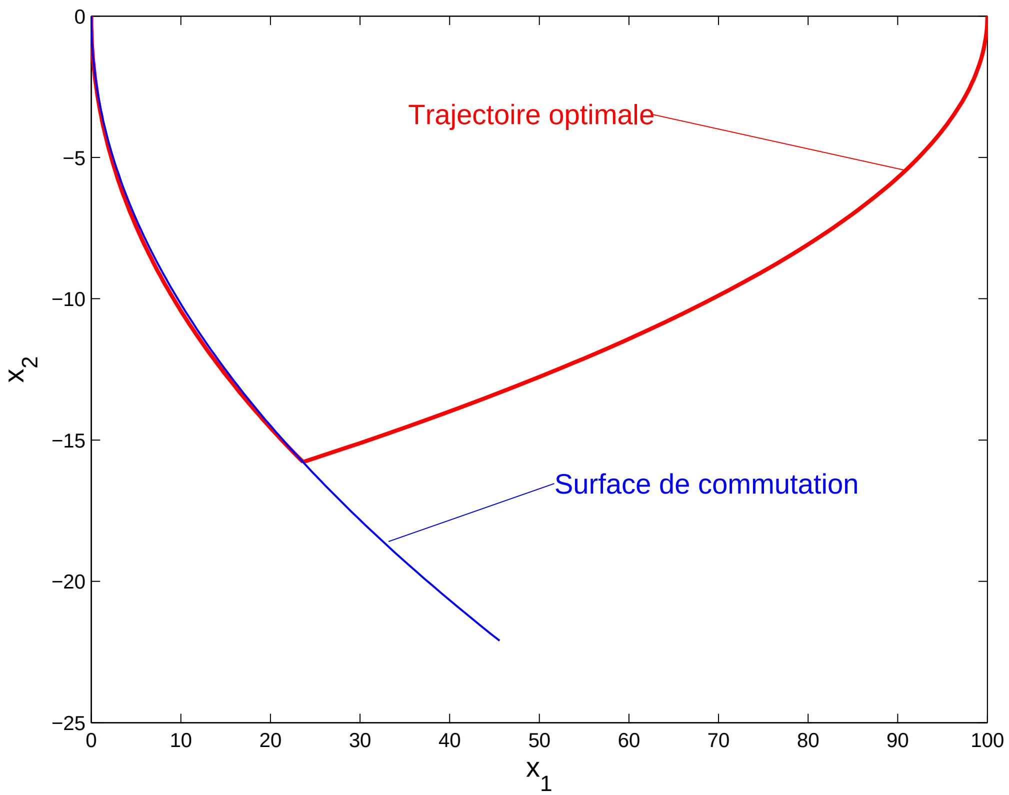
où $a = 0.5(\dfrac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)$ et $b = \dfrac{\alpha\sigma^2}{2m^2(0)}$ et la surface de commutation approximée : $f(x_{1c}, x_{2c}) = bx_{1c} + 2a^2\sqrt{\frac{x_{1c}}{a}} + ax_{2c} = 0$





Données numériques :

$$h_0 = 100 \text{ m} \quad m(0) = 1500 \text{ kg} \quad g = 1.63 \text{ m/s}^2$$
$$\sigma = 50 \text{ kg/s} \quad \alpha = 200 \text{ m/s}$$



$$t_f^* = 12.61 \text{ s} \qquad t_c^* = 9.68 \text{ s}$$
$$m_f^* = 1353,5 \text{ kg} \qquad J^* = 146.5 \text{ kg}$$
$$x_{1c}^* = 23.63 \text{ m} \qquad x_{2c}^* = -15.78 \text{ m/s}$$
$$0 \leq x_{1c} \leq 141.65 \text{ m} \qquad -44 \text{ m/s} \leq x_{2c} \leq 0$$

Nota : la surface de commutation et la trajectoire $(t_c \rightarrow t_f)$ optimale sont distinctes

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{aligned} \min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t)) + M'(t,x(t))u(t)dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t),\ \ x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \ : \ \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \ \forall\ i = 1,\cdots,m\}$
- La commande "entre" linéairement dans le problème

✍ Hamiltonien : fonction linéaire de u

$$H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = L(t,x) + M'(t,x)u(t) + \lambda'(t)\left[f(t,x) + G(t,x)u(t)\right]$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u_i^*(t) = \begin{cases} \underline{u}_i & \text{si} \quad [M'(t,x) + \lambda'(t)G(t,x)]_i > 0 \\ \overline{u}_i & \text{si} \quad [M'(t,x) + \lambda'(t)G(t,x)]_i < 0 \end{cases}$$

La commande optimale $u^*(t)$ est une commande bang-bang

- Equations canoniques de Hamilton et problème aux deux bouts :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t), \;\; x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial L(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M'(t,x)}{\partial x}u(t) - \frac{\partial f'(t,x)}{\partial x}\lambda(t) - \lambda'(t)\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}u(t), \;\; \lambda(t_f) = \lambda_f \end{aligned}$$

Exemple 2 *modèles linéaires et temps minimum*

$$\begin{aligned} \min_{-1 \leq u(t) \leq 1} \quad & t_f \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \\ & x(t_0) = x_0, \;\; x(t_f) = 0 \end{aligned}$$

- *Hamiltonien :* $H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = \lambda'(t)A(t)x(t) + \lambda'(t)b(t)u(t)$
- *Principe de Pontryagin :*

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda'(t)b(t) < 0 \\ -1 & \text{si} \quad \lambda'(t)b(t) > 0 \end{cases} \qquad \lambda'(t)b(t) \text{ fonction de commutation}$$

- *Condition de transversalité :* $\lambda'(t_f)(A(t_f)x(t_f) + b(t_f)u(t_f)) + 1 = 0$
- *Equation d'état adjointe :* $\dot{\lambda}(t) = -A'(t)\lambda(t)$

✍ Condition de singularité / commande i : $[M'(t,x^*)+\lambda'(t)G(t,x^*)]_i = 0$

$$H(t,x^*,\lambda^*) = L(t,x^*)+\sum_{j\neq i}^{m} M_j(t,x^*)u_j^*(t)+\lambda^{*'}(t)\left[f(t,x^*)+\sum_{j\neq i}^{m} G_j(t,x^*)u_j^*(t)\right]$$

u_i^* est un élément optimal singulier du vecteur de commande optimale u.

▼ **Définition 1** *solution singulière*

Pour un vecteur $u^*(t)$ dont les composantes sont singulières, si la condition $\dfrac{\partial H(t,x^*,\lambda^*)}{\partial u} = 0$ est vérifiée sur un intervalle de temps fini alors $u^*(t)$ est une solution singulière (arc singulier) totale (partielle) sur $[t_0,t_f]$ ($[t_1,t_2]$)

❐ **Théorème 1** *condition généralisée de Legendre-Clebsch*

Une condition nécessaire d'optimalité pour le vecteur de commande $u^*(t)$ est

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^p H_u}{dt^p} = 0 \; \forall\, t \in [t_0,t_f]} \quad \text{et} \quad \boxed{(-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q} H_u}{dt^{2q}} \succeq 0 \; \forall\, t \in [t_0,t_f]}$$

pour p pair et q l'ordre de singularité de $u^*(t)$

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \psi_0(x(t_f)) \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \ , u \in \mathbb{R}, \ x(0) \text{ donné} \\ & \psi(x(t_f)) = 0, \ t_f \text{ fixé} \end{aligned}$$

- Hamiltonien : $H = \lambda'(f(x) + g(x)u)$
- Système d'état adjoint : $\dot{\lambda} = -f_x'\lambda - g_x'\lambda u$
- Conditions de transversalité : $\lambda(t_f) = \nabla_{x_f}\psi_0 + \psi_{x_f}'\nu$
- Condition d'optimalité : $H_u = \lambda' g(x) = 0$
- Conditions de singularité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H_u] &= \lambda' g_x(f(x) + g(x)u) - \lambda'(f_x + g_x u)g(x) = 0 \\ &= \lambda'(g_x f(x) - f_x g(x)) = \lambda' q(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[H_u] &= -\lambda' f_x q(x) - \lambda' g_x q(x) u + \lambda' q_x(f(x) + g(x)u) = 0 \\ &= u(\lambda' q_x g(x) - \lambda' g_x q(x)) + \lambda'(q_x f(x) - f_x q(x)) = 0 \end{aligned}$$

✍ Commande singulière : si $(\lambda' q_x g(x) - \lambda' g_x q(x)) \neq 0$

$$u = -\frac{\lambda'(q_x f(x) - f_x q(x))}{\lambda'(q_x g(x) - g_x q(x))}$$

✍ Surface singulière dans l'espace (λ, x) : (dimension 2n-2)

$$\begin{aligned} \lambda' g(x) &= 0 \\ \lambda'(g_x f(x) - f_x g(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Nota :

- Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ et t_f libre alors la dimension de la surface singulière est 2n-3

$$H = \lambda'(f(x) + g(x)u) = \lambda' f(x) = 0$$

- Si $n = 3$ alors l'équation de la surface singulière est donnée par :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ (g_x f(x) - f_x g(x))_1 & (g_x f(x) - f_x g(x))_2 & (g_x f(x) - f_x g(x))_3 \end{vmatrix} = 0$$

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{|u(t)|\leq 1} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dt$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 1,\ x(2) = 0$$

- Hamiltonien : $H(x,u,\lambda) = \dfrac{x^2}{2} + \lambda u$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= u^*(t),\ x^*(0) = 1 \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -x(t),\ x^*(2) = 0 \end{aligned}$$

- Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} \quad \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

- Analyse des arcs singuliers : $\lambda(t) = 0, \ \forall\, t \in [t_1, t_2] \subset [0, 2]$

$$\lambda(t) = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\lambda}(t) = 0 \ \Rightarrow \ x(t) = 0 \ \Rightarrow \ u(t) = 0$$

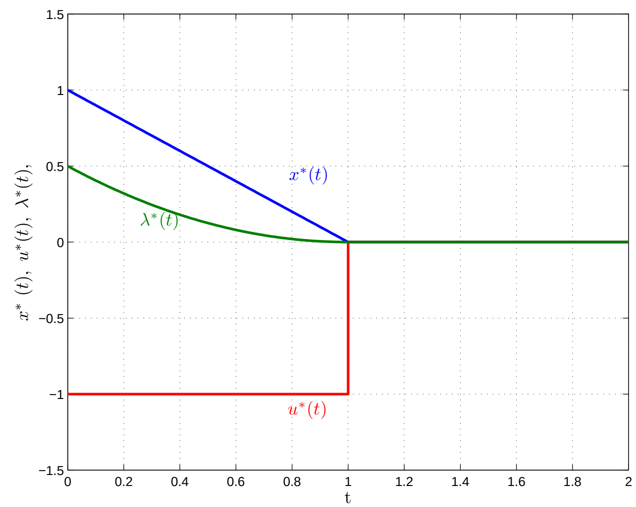
Nota : une commutation se produit en t_1 si $x(t_1) = 0$

- Discussion :
  - $\lambda^*(t) < 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*) = 1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = t + 1$ donc pas de commutation et solution impossible
  - $\lambda^*(t) > 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*) = -1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = 1 - t \ \Rightarrow \ t_c = 1$ alors $\lambda^*(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \lambda(0)$ avec $\lambda(0) = 0.5$

La solution optimale est donc donnée par :

$$0 \leq t \leq 1 \qquad u^*(t) = -1 \quad x^*(t) = 1 - t, \qquad \lambda^*(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$1 \leq t \leq 2 \qquad u^*(t) = 0 \quad x^*(t) = 0, \qquad \lambda^*(t) = 0 \quad \lambda^*(2) = 0$$



Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = 0$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \ : \ -1 \leq u_i \leq 1 \ \forall\ i = 1, \cdots, m\}$
- La dynamique du sytème est supposée linéaire

✍ Hamiltonien : $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda'(t)\,[Ax(t) + Bu(t)]$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned}
\dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad x^*(t_0) = x_0,\ x^*(t_f) = 0 \\
\dot{\lambda}^*(t) &= -A'\lambda^*(t)
\end{aligned}$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(B'\lambda^*(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

✍ C.N.S. de singularité :

❒ **Théorème 2** *Le système admet une commande optimale en temps minimum singulière sur $[t_1, t_2]$ ssi le système n'est pas commandable*

✍ Unicité de la commande optimale et nombre de commutations :

❒ **Théorème 3** *Si le système est complètement commandable alors il n'existe qu'une seule commande extrémale égale à la commande optimale en temps minimum. Dans ce cas, si ses n pôles sont réels la commande optimale $u^*(t)$ peut commuter au plus $n-1$ fois*

✍ Existence de la commande optimale :

❒ **Théorème 4** *Si le système est complètement commandable et si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle non positive alors une commande optimale en temps minimum conduisant x_0 en $x(t_f) = 0 \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe toujours*

Nota : si le système est temps-variant ($\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$), l'unicité des extrémales et de la commande optimale est toujours vraie

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{m} |u_i(t)| dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f$$

✍ **Hamiltonien :** $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \sum_{j=1}^{m} |u_i(t)| + \lambda'(t)\left[Ax(t) + Bu(t)\right]$

✍ **Equations canoniques de Hamilton :**

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad x^*(t_0) = x_0,\ x^*(t_f) = x_f \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A'\lambda^*(t) \end{aligned}$$

✍ **Principe de Pontryagin :**

$$u^*(t) = -\text{dez}(B'\lambda^*(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |B'\lambda^*(t)| < 1 \\ -\text{sign}(\text{B}'\lambda^*(\text{t})) & \text{si} \quad |B'\lambda^*(t)| > 1 \\ 0 \leq u \leq 1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = -1 \\ -1 \leq u \leq 0 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = 1 \end{cases}$$

✍ C.S. de non singularité :

❒ **Théorème 5** *Si le système est commandable et la matrice A n'est pas singulière :*

$$\det(B_j A) \neq 0 \;\; \forall \; j = 1, \cdots, m \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_j & \cdots B_m \end{bmatrix}$$

alors le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur $[t_0, t_f]$

✍ Unicité de la commande optimale en consommation minimale :

❒ **Théorème 6** *Si le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur* $[t_0, t_f]$ *alors il existe une unique commande optimale en consommation minimale.*

✍ Structure de commande en boucle ouverte ou fermée

Nota : pas de théorème général d'existence de la loi de commande optimale en consommation minimale