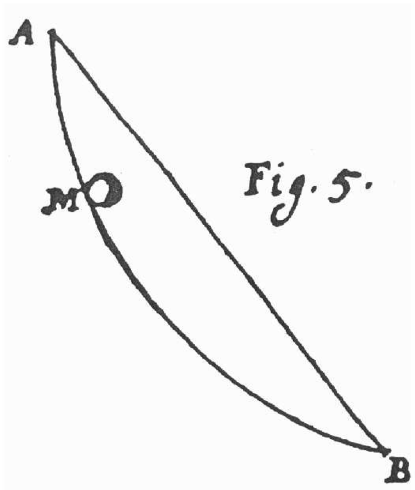
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 4

Théorie du régulateur linéaire quadratique



Soit le problème de commande optimale :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}^m} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_f} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]\, dt + \dfrac{1}{2}x'(t_f)Q_f x(t_f) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = x_0 \text{ fixé} \\ & t_f \text{ fixé} \\ & x(t_f) = x_f \text{ libre} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 1**

- $Q_f \succeq 0$, $Q(t) \succeq 0$, $\forall\ t \in [0, t_f]$
- $R(t) \succ 0$, $\forall\ t \in [0, t_f]$

- Interprétation : déterminer la commande $u(t)$ qui maintienne le vecteur d'état proche de son état d'équilibre 0 sans une dépense trop forte en énergie de commande.
- Nota : pas de contrainte sur la commande (saturation ...).

Problème LQ en horizon fini : Hamilton

❶ Hamiltonien :

$$H(x,u,\lambda) = \frac{1}{2}\left[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)\right] + \lambda'(t)\left[A(t)x(t) + B(t)u(t)\right]$$

❷ Equation d'optimalité :

$$H_u(x^*,u^*,\lambda^*) = R(t)u^*(t) + B'(t)\lambda^*(t) = 0 \;\Rightarrow\; u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t)$$

❸ Equations canoniques de Hamilton : TPBVP

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t),\ x(0) = x_0 \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -Q(t)x^*(t) - A'(t)\lambda^*(t),\ \lambda^*(t_f) = Q_f x_f\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}B'(t) \\ -Q(t) & -A'(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^*(t) \\ \lambda^*(t)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x(0) \\ \lambda^*(t_f)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0 \\ Q_f x_f\end{bmatrix}$$

Afin de résoudre les équations d'Hamilton, introduisons la matrice de transition :

▼ **Définition 1** *Considérons l'équation* $\dot{X}(t) = \tilde{A}(t)X(t)$, *où* $\tilde{A}$ *est une fonction continue par rapport à* t. *On appelle* $\Phi(t, t_0)$, *la matrice vérifiant l'équation différentielle :*

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \tilde{A}(t)\Phi(t, t_0),$$

❒ **Théorème 1** *La solution de l'équation* $\dot{X}(t) = \tilde{A}(t)X(t)$ *s'écrit :*

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$$

♥ **Propriétés 1** *La matrice de transition possède les propriétés suivantes :*

1. $\Phi(t, t) = \mathbf{1}$
2. $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$
3. $\Phi(t_1, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t_1)$

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \Phi(t,0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,0) & \Phi_{12}(t,0) \\ \Phi_{21}(t,0) & \Phi_{22}(t,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix}$$

où $\Phi(t,0)$ est la matrice de transition d'état du TPBVP

En utilisant la condition terminale sur l'état adjoint, on obtient :

$$\lambda^*(t) = \left[\Phi_{22}(t_f,t) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[Q_f\Phi_{11}(t_f,t) - \Phi_{21}(t_f,t)\right] x^*(t)$$

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t)$$

avec $P(t) \succeq 0$, $\forall\ t \in [0,t_f]$ et $P(t_f) = Q_f$

Nota : la matrice $\left[\Phi_{22}(t_f,t) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}$ existe toujours puisque

$$\left[\Phi_{22}(t_f,t_f) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t_f)\right]^{-1} = \mathbf{1}$$

et

$$P(t_f) = \left[\Phi_{22}(t_f,t_f) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t_f)\right]^{-1}\left[Q_f\Phi_{11}(t_f,t_f) - \Phi_{21}(t_f,t_f)\right] = Q_f$$

Problème LQ en horizon fini : équation de Riccati

Comme $\lambda(t) = P(t)x(t)$, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = \dot{P}(t)x^*(t) + P(t)\dot{x}^*(t) \quad u^*(t) = -R^{-1}B'(t)P(t)x^*(t)$$

En substituant ces expressions dans le système d'équations canoniques de Hamilton, on obtient l'équation différentielle de Riccati :

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad P(t_f) = Q_f$$

✍ **Remarques 1**

- *La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice symétrique variant dans le temps indépendante de l'instant initial (ici $t_0 = 0$)*
- *L'équation de Riccati constitue un système de $n(n+1)/2$ équations différentielles ordinaires du premier ordre non linéaires variant dans le temps*
- *La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice définie positive sur $[0, t_f)$*
- *La matrice $P(t)$ peut être calculée hors ligne par intégration numérique arrière à partir de $P(t_f) = Q_f$*

Problème LQ en horizon fini : existence et unicité

❒ **Théorème 2** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique qui est caractérisée par :*

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ *est gain de Kalman et* $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la matrice de Riccati symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :*

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$*. La trajectoire d'état optimale est solution de :*

$$\dot{x}^*(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)\right]x^*(t), \;\; x(0) = x_0$$

Le coût optimal est alors donné par :

$$J^*(x^*(t), t) = \frac{1}{2}x^{*'}(0)P(0)x^*(0) \quad \forall\, t \in [0, t_f]$$

❒ **Théorème 3** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes et un critère de performance :*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x'(t) & u'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + \frac{1}{2}x'(t_f)Q_f x(t_f)$$

a une solution unique qui est caractérisée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)\left[B'(t)P(t) + S'(t)\right]x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ est gain de Kalman et $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de Riccati symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :

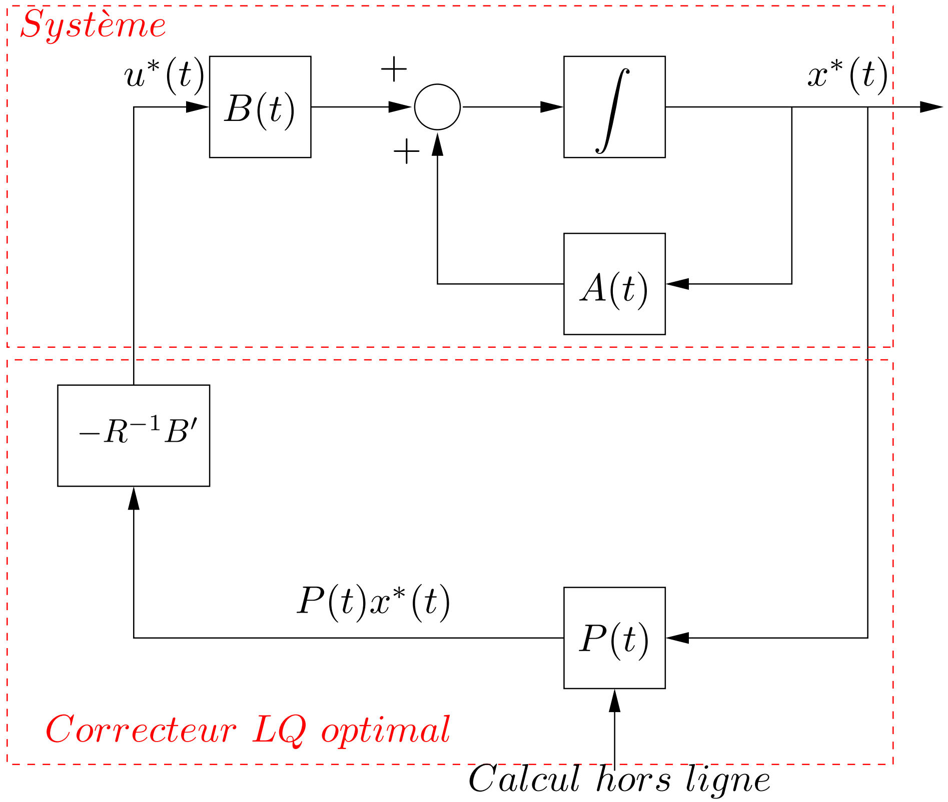
$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - \left[P(t)B(t) + S(t)\right]R^{-1}\left[B'(t)P(t) + S'(t)\right] + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$. La trajectoire d'état optimale est solution de :

$$\dot{x}^*(t) = \left[A(t) + B(t)K(t)\right]x^*(t), \;\; x(0) = x_0$$

✍ Remarques 2

- *La structure de la commande optimale est une structure de commande en boucle fermée*
- *La loi de commande optimale est linéaire et variant dans le temps même si le système est LTI*
- *L'hypothèse de commandabilité de la paire $(A(t), B(t))$ n'est pas nécessaire*



- *Le vecteur d'état complet doit être disponible à la mesure*

Soit le problème LQ en horizon fini :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_f} \left[x_1^2(t) + h x_2^2(t) + u^2(t)\right] dt \\ \text{sous} & \dot{x}_1(t) = a x_2(t) + u(t),\ x_1(0) = x_{10} \text{ fixé} \\ & \dot{x}_2(t) = b x_2(t), x_2(0) = x_{20} \text{ fixé} \end{array}$$

Le régulateur LQ optimal est donné par :

$$u^*(t) = -p_{11}(t)x_1(t) - p_{12}(t)x_2(t)$$

où $p_{11}(t)$ et $p_{12}(t)$ sont les solutions de :

$$\begin{array}{rcl} \dot{p}_{11}(t) & = & p_{11}^2(t) - 1,\ p_{11}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{12}(t) & = & -a p_{11}(t) - b p_{12}(t) + p_{11}(t)p_{12}(t),\ p_{12}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{22}(t) & = & p_{12}^2(t) - 2a p_{12}(t) - 2b p_{22}(t) - h,\ p_{22}(t_f) = 0 \end{array}$$

✍ Remarques 3

- $u^*(t)$ *est indépendante de h puisque $p_{11}(t)$ et $p_{12}(t)$ sont indépendants de h*
- *Pour $a \neq 0$, $u^*(t)$ dépend de x_2 même si x_2 est non commandable*
- *Pour $a = 0$, $u^*(t)$ ne dépend pas de x_2*

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}(t) &= p_{11}^2(t) - 1, \ p_{11}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{12}(t) &= p_{12}(t)(p_{11}(t) - b), \ p_{12}(t_f) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$p_{12}(t) = p_{12}(0)e^{\int_0^t (b - p_{11}(\tau))d\tau}, \ p_{12}(t_f) = 0$$

Ainsi, $p_{12}(t_f) = 0 \Rightarrow p_{12}(0) = 0$. On en conclut que $p_{12}(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, t_f]$

- *On détermine ensuite $p_{22}(t)$ et ensuite $p_{11}(t)$.*

❒ Théorème 4

Dans le cas invariant dans le temps, la solution de l'équation de Riccati différentielle est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ Q_f \end{bmatrix} X_f$$

où $\mathcal{H}$ est la matrice Hamiltonienne

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) = \left[U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_u(t_f-t)}Ge^{\Lambda_s(t_f-t)}\right]\left[U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_u(t_f-t)}Ge^{\Lambda_s(t_f-t)}\right]^{-1}$$

avec :

$$U^{-1}\mathcal{H}U = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = -\left[U_{22} - Q_f U_{12}\right]^{-1}\left[U_{21} - Q_f U_{11}\right]$$

Soit le problème de commande optimale :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}^m} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]\, dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0 \text{ fixé} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 2**

- $Q \succeq 0$
- $R \succ 0$
- *La paire* (A, B) *est commandable*

Nota : $t_f \to \infty$

- Pas de coût terminal $\lim\limits_{t_f\to\infty} x'(t_f)Q_f x(t_f)$
- Comportement du vecteur d'état en régime permanent après le régime transitoire

Problème LQ en horizon infini

❒ **Théorème 5** *[Kalman 1960]*

Si $Q_f = 0$ et la paire (A, B) est commandable alors $\lim_{t_f \to \infty} P(t) = P$ solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

❒ **Théorème 6**

Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique :

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t) = Kx^*(t)$$

où K est gain de Kalman et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de Riccati symétrique solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \qquad P = U_{21}U_{11}^{-1}$$

La trajectoire d'état optimale et le coût optimal sont donnés par :

$$\dot{x}^*(t) = \left[A - BR^{-1}B'P\right] x^*(t), \; x(0) = x_0 \quad J^* = \frac{1}{2} x_0' P x_0$$

❒ Théorème 7

Le problème LQ en horizon infini pour lequel la paire (A, B) *est commandable et la paire* (A, C) *est observable où* $Q = C'C$ *(detectabilité du coût) a une solution unique :*

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t)$$

où la matrice de Riccati symétrique $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est définie positive et solution de l'équation de Riccati algébrique :*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

De plus, le système dynamique en boucle fermée est asymptotiquement stable

$$\Lambda(A - BR^{-1}B'P) \subset \mathbb{C}^-$$

Nota :

- Existence d'une loi optimale stabilisante $\Rightarrow$ (A, B) stabilisable et (A, C) détectable
- $\Lambda(\mathcal{H}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset \Rightarrow (A, B)$ stabilisable et (A, C) détectable
- Si (A, C) est détectable mais non observable alors $P \succeq 0$

Modèle d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2}$$

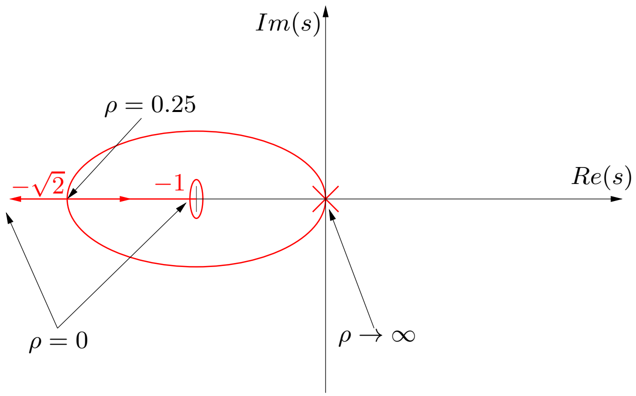
Régulateur ($e = 0$) minimisant :

$$J = \int_0^\infty [z^2 + \rho u^2] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0$$

Solution analytique :

$$P = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho(1+2\sqrt{\rho})} \end{bmatrix}$$

$$K_r = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$$



- Pour $\rho < 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} \pm \sqrt{1-2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

- Pour $\rho > 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} \pm j\sqrt{-1+2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

Synthèse : exemple de régulateur LQ


```
>> [K,P]=lqr(A,B,C'*C,rho)
```