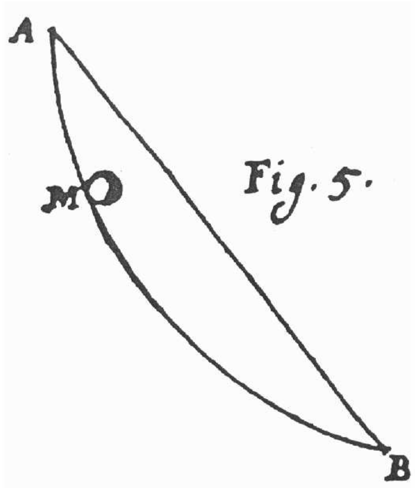
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 4

Approche variationnelle en commande optimale

Principe du maximum de Pontryagin



Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{aligned} \min_{u(t)\in\mathcal{C}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)} \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \\ & x(t_f) = x_f,\ t_f \text{ libres} \end{aligned}$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande
- Problème de calcul des variations sous une contrainte différentielle instantanée (équation dynamique d'état)

Nota :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt} dt = \psi_0(t_f,x(t_f)) - \psi_0(t_0,x(t_0))$$

$$J_2(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(t,x(t),u(t)) + \frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt}\right] dt = J(x,u) - \psi_0(t_0,x(t_0))$$

Fonctionnelle augmentée avec le vecteur des multiplieurs de Lagrange $\lambda : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$: appelé vecteur d'état adjoint

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{t_0}^{t_f} \{L(t,x,u) + \lambda'(t)[f(t,x,u) - \dot{x}]\}\, dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \{H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) - \lambda'(t)\dot{x}(t)\}\, dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{H(t,x,u,\lambda) + \dot{\lambda}' x(t)\right\} dt - \lambda'(t_f)x(t_f) + \lambda'(t_0)x(t_0) + \psi_0(t_f, x(t_f))
\end{aligned}$$

Première variation sur l'état, la commande et le temps final :

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad t_f = t_f^* + \delta t_f$$

$$\begin{aligned}
\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[H_x^* + \dot{\lambda}^*(t)\right]' \delta x(t) + H_u^{*'} \delta u(t)\right\} dt
\end{aligned}$$

❒ **Théorème 1** *Si* $u^*(t)$ *est trajectoire optimale locale faible de commande alors* $\exists\ \lambda^*(t)\ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ *:*

- *C.N. 1 : équations canoniques de Hamilton*

$$
\begin{aligned}
H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= \dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) \ \text{ Equation d'état} \\
H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= -\dot{\lambda}^*(t) \ \text{ Equation d'état adjointe} \\
H_u(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= 0 \ \text{ Equation de commande}
\end{aligned}
$$

- *C.N. 2 : condition (forte) au deuxième ordre de Jacobi*

  Il n'existe pas de points conjugués sur $[t_0, t_f)$ *(*$[t_0, t_f]$*) ou la solution* $S(t)$ *de :*

$$
-\dot{S} = H_{xx} + Sf_x + f_x'S - (H_{xu} + Sf_u)H_{uu}^{-1}(H_{ux} + f_u'S), \quad S(t_f) = \psi_{0xx}(t_f, x(t_f))
$$

  est finie sur $[t_0, t_f)$ *(*$[t_0, t_f]$*)*

- *C.N. 3 : condition (forte) au deuxième ordre de Legendre-Clebsch*

$$
H_{uu}^* \succeq 0 \qquad H_{uu}^* \succ 0
$$

- *C.N. 4 : les conditions de transversalité*

$$\left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f}\right] \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t_f)\right]' \delta x_f = 0$$

❶ t_f fixé et x_f fixé : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$

❷ t_f fixé et x_f contraint $\psi(x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\psi(x^*(t^*_f)) = 0 \qquad x(t_0) = x_0$$
$$\nabla_{x_f}\psi^*_0 + \psi^{*'}_{x_f}\nu = \lambda^*(t_f)$$

❸ t_f fixé et x_f libre : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad \nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t_f) = 0$

❹ t_f libre et x_f fixé :

$$\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \quad H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f} = 0$$

❺ t_f libre et x_f contraint $\psi(t_f, x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\left[H^* + \nu'\psi^*_{t_f} + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 + \psi^{*'}_{x_f}\nu - \lambda^*\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

❻ t_f libre et x_f libre : $\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0$

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

❒ **Théorème 2** *conditions fortes de Legendre-Clebsch et de Jacobi*

Si la C.N. 1 d'optimalité au premier ordre et les C.N. 2 et 3 d'optimalité fortes au second ordre sont vérifiées par un triplet d'extrémales (x^*, u^*, λ^*) alors c'est un triplet d'extrémales minimales faibles.

Exemple 1
$$\min_{u(t)\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \int_0^1 (x(t)-u(t))^2 dt$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 1$$

❶ *C.N. 1 :*

$$H = (u-x)^2 + \lambda u \quad H_u^* = \lambda^* + 2(u^* - x^*) = 0 \quad \dot{\lambda}^* = 2(u^* - x^*) \quad \lambda^*(1) = 0$$
$$\lambda^*(t) = 0 \quad u^*(t) = x^*(t) \quad x^*(t) = e^t \quad u^*(t) = e^t$$

❷ *C.N. 2 et condition forte de Jacobi :* $\dot{s}(t) = \dfrac{s^2(t)}{2} - 2s(t),\ s(1) = 0 \quad s(t) \equiv 0$

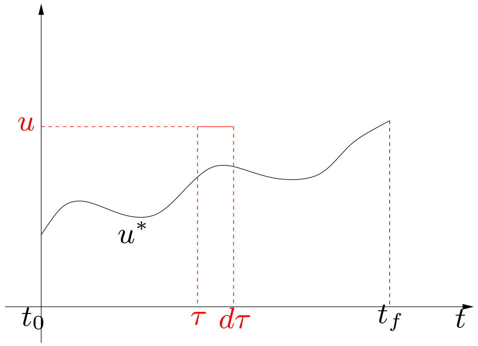
$s(t)$ *est finie partout sur* $[0,1]$

❸ *C.N. 3 et Condition forte de Legendre-Clebsch :* $H_{uu} = 2 > 0$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *est un minimum local faible*

Variation forte (en aiguille)

$$\delta u = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \tau \ \ \tau \in (t_0, t_f) \\ u - u^* & \text{pour} \quad \tau \leq t \leq \tau + d\tau \\ 0 & \text{pour} \quad \tau + d\tau \leq t \leq t_f \end{cases}$$



C.N. 4 : condition de Weierstrass

Si (x^*, λ^*, u^*) est un minimum fort du problème de commande optimale alors u^* conduit à un minimum absolu pour le Hamiltonien :

$$\delta H = H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \geq 0 \quad \forall \ t \text{ et } u \neq u^*$$

Exemple 1 *(suite)*

❹ *C.N. 4 : condition de Weierstrass*

$$\begin{aligned} H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) &= (u - x^*)^2 + \lambda^* u - (u^* - x^*)^2 - \lambda^* u^* \\ &= (u - u^*)^2 > 0 \ \forall \ u \neq u^* \end{aligned}$$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *vérifie la C.N de Weierstrass*

On suppose que $u^* \in \mathcal{PC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$ et $\tau \in [t_0,t_f]$ est le point de discontinuité en lequel la condition $\theta(\tau,x(\tau)) = 0$ est imposée

On définit alors $G(\tau,x_\tau,\xi,t_f,x_f,\nu) = \psi_0(t_f,x_f) + \nu'\psi(t_f,x_f) + \xi'\theta(\tau,x_\tau)$

❶ Equations canoniques d'Euler-Lagrange sur les sous-arcs $[t_0,\tau]$ et $[\tau,t_f]$

❷ Conditions de transversalité et conditions aux extrémités

❸ Condition de Legendre-Clebsch

❹ Conditions de Weierstrass-Erdmann :

$$H^*(\tau,x(\tau),u(\tau^-),\lambda(\tau^-)) = H^*(\tau,x(\tau),u(\tau^+),\lambda(\tau^+)) - G_\tau(\tau^*,x^*(\tau),\xi^*)$$
$$\lambda^*(\tau^-) = \lambda^*(\tau^+) + G_{x_\tau}(\tau^*,x^*(\tau),\xi^*)$$

❺ Condition de Weierstrass : $\forall\ u \neq u^*$ et $\forall\ u \neq u^*(\tau^+)$

$$H(t,x^*,\lambda^*,u) - H(t,x^*,\lambda^*,u^*) > 0$$

Nota : pour une discontinuité non contrainte $\theta \equiv 0$, la condition de Weierstrass est vérifiée à l'égalité pour $u^* = u(\tau^-)$ et $u = u(\tau^+)$

Exemple 2

$$\min_{u(t)\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \int_0^1 u(t)^3 dt$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 1$$

❶ *C.N. 1 :*

$$\dot{\lambda}^* = 0 \qquad \lambda^*(t) = \lambda^*(1) = \lambda^* \qquad H = u^3 + \lambda u$$
$$H_u^* = \lambda^* + 3u^{2*} = 0 \qquad u^* = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}} \qquad x^*(t) = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}}t \qquad x(1) = 1$$
$$\lambda^* = -3 \qquad x^*(t) = t \qquad u^*(t) = 1 \qquad J^* = 1$$

❷ *C.N. 3 et Condition forte de Legendre-Clebsch :*

$$H_{uu} = 6u \quad H_{uu}^* = 6 > 0$$

❸ *C.N. 2 et Condition forte de Jacobi : équation de Riccati homogène*

$$\dot{s}(t) = s^2/6, \;\; s(1) = 0 \quad s(t) \equiv 0$$

Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ est un minimum local faible

Exemple 2 (suite)

❹ C.N. 5 : condition de Weierstrass

$$\delta H(x^*, \lambda^*, u, u^*) = u^3 - u^{3*} + \lambda^*(u - u^*) = (u-1)^2(u+2) < 0 \text{ pour } u < -2\,!$$

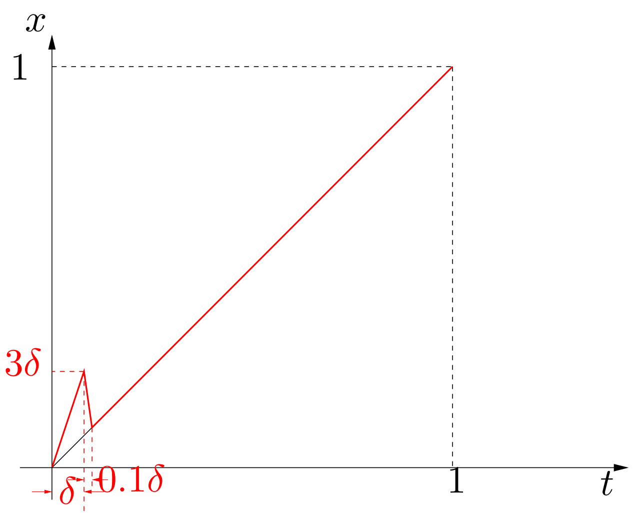
Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ n'est pas un minimum fort

❺ C.N. 4 : conditions de Weierstrass-Erdman

$$\lambda(\tau_i^-) = \lambda(\tau_i^+) = \lambda$$

$$u(\tau_i^-)(u^2(\tau_i^-) + \lambda) = u(\tau_i^+)(u^2(\tau_i^+) + \lambda)$$

$$\begin{aligned} J(x,u) &= \int_0^{\delta} u^3(t)dt + \int_{\delta}^{1.1\delta} u^3(t)dt \\ &\quad + \int_{1.1\delta}^{1} u^3(t)dt \\ &= 1 - 678\delta \end{aligned}$$



$J^*_{u \in \mathcal{KC}^0} < J^*_{u \in \mathcal{C}^0}$

- Le vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$ découple les variables $x(t)$ et $u(t)$ dans les équations d'Euler-Lagrange (équations canoniques de Hamilton)
- Le vecteur de commande $u(t)$ n'est pas contraint ni borné
- La commande optimale $u^*(t)$ est obtenue par application du principe du minimum de Pontryagin : $H(t,x,u,\lambda) = \lambda_0 L(t,x,u) + \lambda' f(t,x,u)$
  - $\lambda_0 = 1$: principe du minimum de Pontryagin
  - $\lambda_0 = -1$: principe du maximum de Pontryagin

$$\max \rightarrow \min \quad J(x,u) \rightarrow \lambda_0 J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_0 L(t,x(t),u(t))dt + \lambda_0 \psi_0^*$$

- Si H ne dépend pas explicitement de t alors il est constant le long de la trajectoire optimale

$$H_t(t,x^*,u^*,\lambda^*) = \frac{dH(t,x,u,\lambda)}{dt}$$

- Résoudre le problème aux deux bouts revient à résoudre les équations d'état et d'état adjointe avec les conditions initiales et finales (méthodes numériques dans les cas généraux : non linéaires et variants dans le temps)
- La résolution du problème aux deux bouts permet de résoudre l'équation de commande pour obtenir la commande optimale $u^*(t)$ en boucle ouverte

Exemple 3 *Soit le problème de commande optimale (double intégrateur)*

$$
\begin{array}{cc}
\min\limits_{u(t)\in\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R})} & J(x,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 u(t)^2 dt \\
 & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\text{sous} & \dot{x}_2(t) = u(t) \\
 & x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}' \\
 & x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}'
\end{array}
$$

Nota : problème de commande optimale à instant final et état final fixes où $L(t,x(t),u(t)) = \frac{1}{2}u^2(t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$

❶ *Hamiltonien :*

$$H(x_1(t),x_2(t),u(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t)) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

❷ *Equation de commande :*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*,u^*,\lambda^*) = u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0$$

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

❸ Hamiltonien à l'optimum :

$$H(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = -\frac{1}{2}\lambda_2^{2*}(t) + \lambda_1^*(t)x_2^*(t)$$

❹ Equations d'état :

$$\begin{array}{rcccl} \dot{x}_1^*(t) & = & H_{\lambda_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) & = & x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) & = & H_{\lambda_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) & = & -\lambda_2^*(t) \end{array}$$

❺ Equations d'état adjointe :

$$\begin{array}{rcccl} \dot{\lambda}_1^*(t) & = & -H_{x_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) & = & 0 \\ \dot{\lambda}_2^*(t) & = & -H_{x_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) & = & -\lambda_1^*(t) \end{array}$$

❻ Solution des équations d'état et d'état adjointe :

$$\begin{array}{rcl} x_1^*(t) & = & \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2t + C_1 \\ x_2^*(t) & = & \frac{C_3}{2}t^2 - C_4t + C_2 \\ \lambda_1^*(t) & = & C_3 \\ \lambda_2^*(t) & = & -C_3t + C_4 \end{array}$$

❼ Expression explicite de la commande optimale :

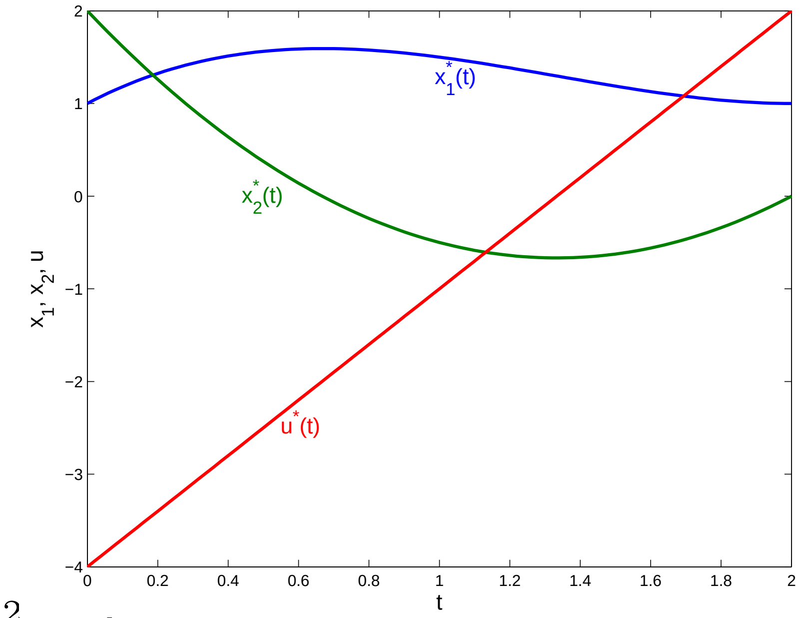
$$u^*(t) = C_3 t - C_4$$

❽ Détermination des constantes d'intégration :

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad C_3 = 3 \quad C_4 = 4$$

❾ Solution optimale :

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= 0.5t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\
x_2^*(t) &= 1.5t^2 - 4t + 2 \\
\lambda_1^*(t) &= 3 \\
\lambda_2^*(t) &= -3t + 4 \\
u^*(t) &= 3t - 4 \\
H(x^*(t), \lambda^*(t)) &= -2 \\
J(x^*(t), u^*(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left[t^3\right]_0^2 - 6\left[t^2\right]_0^2 + 8\left[t\right]_0^2 = 4
\end{aligned}$$



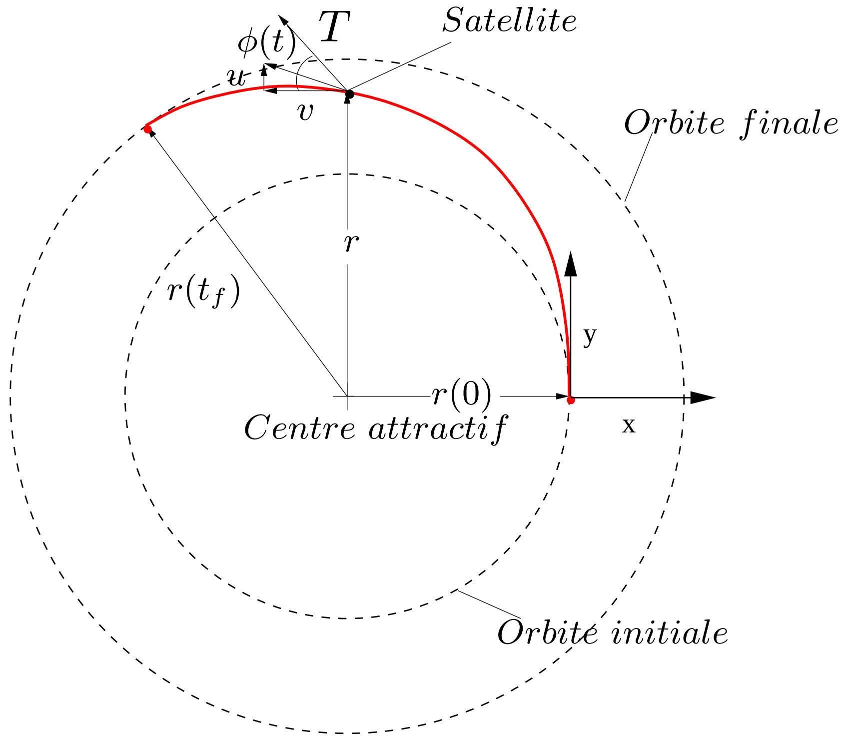
```
>> S=dsolve('Dx1=x2,Dx2=-lambda2,Dlambda1=0,Dlambda2=-lambda1,...
x1(0)=1,x2(0)=2,x1(2)=1,x2(2)=0')

S =

    lambda1: [1x1 sym]
    lambda2: [1x1 sym]
         x1: [1x1 sym]
         x2: [1x1 sym]
>> for tp=0:0.02:2
t=sym(tp);
x1p(j)=double(subs(S.x1));
x2p(j)=double(subs(S.x2));
lambda2(j)=double(subs(S.lambda2));
u(j)=-double(subs(S.lambda2));
t1(j)=tp;
j=j+1;
end
```

Exemple 4 *Problème du transfert orbital :* *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps donné (t_f) l'orbite circulaire de rayon maximal $(r(t_f))$ à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- *Equations dynamiques :*

$$\dot{r}(t) = u(t)$$
$$\dot{u}(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$
$$\dot{v}(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$



- *Conditions aux limites :*

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\ v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}$$

- *Fonctionnelle :* $J = -r(t_f)$

❶ Hamiltonien :

$$H(x(t),\phi(t),\lambda(t)) = \lambda_1 u + \lambda_2 \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right) + \lambda_3 \left(-\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right)$$

❷ Equation de commande :

$$\frac{\partial H}{\partial \phi}(x^*,\phi^*,\lambda^*) = \frac{T}{m_0 - |\dot{m}|t}(\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) - \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t)) = 0$$

$$\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) = \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t) \Rightarrow \tan\phi^*(t) = \frac{\lambda_2^*(t)}{\lambda_3^*(t)}$$

❸ Equation d'état adjointe :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^*(t) &= -H_r(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -\lambda_2^*(t)\left(-\frac{v^{2*}(t)}{r^{2*}(t)} + \frac{2\mu}{r^{3*}}\right) - \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)v^*(t)}{r^{2*}(t)} \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= -H_u(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -\lambda_1^*(t) + \lambda_3^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} \\
\dot{\lambda}_3^*(t) &= -H_v(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -2\lambda_2^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} + \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)}{r^*(t)}
\end{aligned}$$

❹ Conditions de transversalité : t_f fixé et $x(t_f)$ contraint par $\psi(t_f, x^*(t_f)) = 0$

Problème aux deux bouts :

$$
\begin{aligned}
\dot{r}^* &= u^* \\
\dot{u}^* &= \frac{v^{2*}}{r^*} - \frac{\mu}{r^{2*}} + \frac{T\sin\phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{v}^* &= -\frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{T\cos\phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{\lambda}_1^* &= -\lambda_2^* \left(-\frac{v^{2*}}{r^{2*}} + \frac{2\mu}{r^{3*}} \right) - \lambda_3^* \frac{u^* v^*}{r^{2*}} \\
\dot{\lambda}_2^* &= -\lambda_1^* + \lambda_3^* \frac{v^*}{r^*} \\
\dot{\lambda}_3^* &= -2\lambda_2^* \frac{v^*}{r^*} + \lambda_3^* \frac{u^*}{r^*}
\end{aligned}
$$

Conditions initiales et finales :

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^*(t_f) &= -1 + \frac{\nu_2\sqrt{\mu}}{2r^{*3/2}(t_f)} & r(0) &= 0 \\
\lambda_2^*(t_f) &= \nu_1 & u(0) &= 0 \\
\lambda_3^*(t_f) &= \nu_2 & v(0) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} u^*(t_f) \\ v^*(t_f) - \sqrt{\dfrac{\mu}{r^*(t_f)}} \end{bmatrix} = 0
$$

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{U}} & J(x,u) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \\ & x(t_f) = x_f,\ t_f \text{ libres} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 1** - *les fonctions* $L(.)$ *et* $f(.)$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* x *et* t *:* $f(t,x,u)$*,* $f_x(t,x,u)$*,*$f_t(t,x,u)$*,* $L(t,x,u)$*,* $L_x(t,x,u)$*,* $L_t(t,x,u)$ *sont continues sur* $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}$

- *Le Hamiltonien* $H(t,x,u,\lambda) = L(t,x,u) + \lambda' f(t,x,u)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* x *:* $H(t,x,u,\lambda)$ *et* $H_x(t,x,u,\lambda)$ *sont continues sur* $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}\times\mathbb{R}^n$
- *Contrainte sur le vecteur de commandes :* $u(t)\in\mathcal{U}$ *espace topologique de* $\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)$

- Les variations $\delta u(t)$ sur la trajectoire optimale de la commande $u^*(t)$ ne sont plus arbitraires : $u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \in \mathcal{U}$
- Principe du maximum de Pontryagin pour $H(t,x,u,\lambda) = -L(t,x,u) + \lambda' f(t,x,u)$ donc ici principe du minimun de Pontryagin

Première variation de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[H^*_x + \dot{\lambda}^*(t)\right]' \delta x(t) + H^{*'}_u \delta u(t)\right\} dt\end{aligned}$$

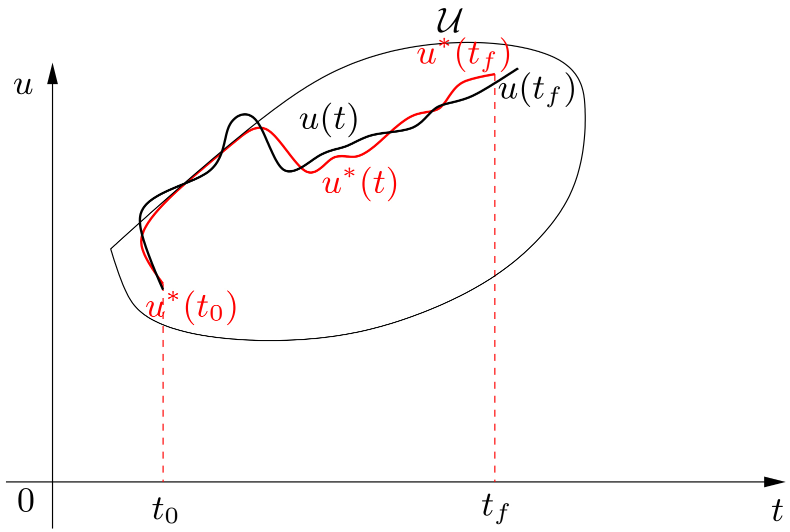
Les conditions nécessaires pour que $u^*(t)$ minimise J sont :

- $\delta J = 0$ si $u^*(t)$ est à l'intérieur de $\mathcal{U}$
- $\delta J \geq 0$ si $u^*(t)$ est sur la frontière de $\mathcal{U}$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*)\end{aligned}$$

- Conditions de transversalité :

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$



$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} H^{*'}_u \delta u(t) dt$ avec $H^{*'}_u \delta u(t) = H((t, x^*, u^* + \delta u, \lambda^*)) - H((t, x^*, u^*, \lambda^*))$

d'où $\delta J \geq 0$ implique $H(t, x^*, u, \lambda^*) \geq H(t, x^*, u^*, \lambda^*)\ \forall\ u \in \mathcal{U}$

❒ **Théorème 3** *principe de Pontryagin*

Si $u^*(t) \in \mathcal{U}$ *est une commande optimale admissible et* $x^*(t)$ *la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à* $u^*(t)$ *alors il existe un vecteur* $\lambda^*(t)$ *tel que les équations canoniques de Hamilton :*

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) \end{aligned}$$

L.S. Pontryagin

aient des solutions $(x^*(t), \lambda^*(t))$ *sous les conditions de transversalité :*

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

et $u^*(t)$ *est un minimum global du Hamiltonien sur* $\mathcal{U}$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \; H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*)$$

ou

$$H(t, x^*, \lambda^*, u) \geq H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \;\; \forall\, u \in \mathcal{U}$$

Principe de Pontryagin : commentaires

Nota :

- Si le vecteur de commande n'est pas contraint, la condition de minimisation du Hamiltonien revient à l'annulation du gradient du Hamiltonien par rapport à la commande à l'optimum

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \quad \Leftrightarrow \quad H_u(t, x^*, \lambda^*, u^*) = 0$$

- Problème aux deux bouts : $2n$ équations différentielles à résoudre avec n conditions initiales $x(0)$ et n conditions finales si $x(t_f)$ est fixé ou N multiplieurs $+ n - N$ contraintes sur les variables adjointes si $\psi(.) \in \mathbb{R}^N$ avec $\psi(t_f, x(t_f)) = 0$

Conditions nécessaires additionnelles :

❶ Si t_f est libre et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \equiv 0 \;\; \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

❷ Si t_f est fixé et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = C \;\; \forall\, t \in [t_0, t_f]$$