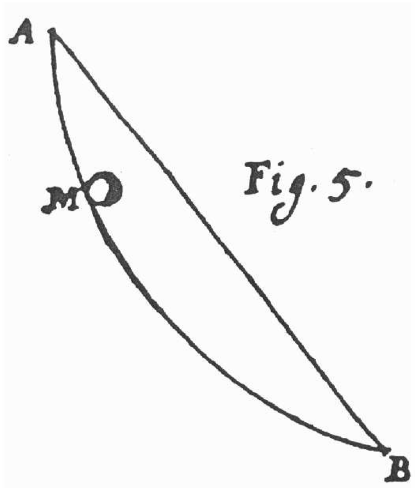
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 3

Eléments de calcul des variations



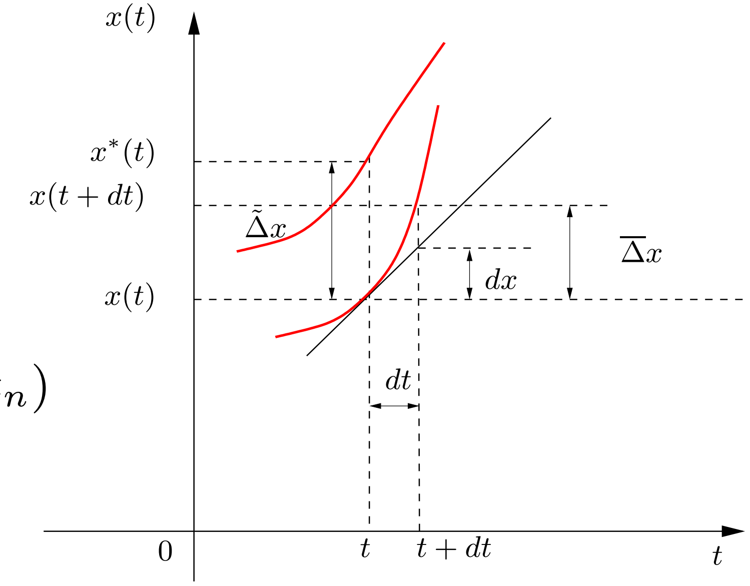
- Accroissement d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[a, b]$

$$\overline{\Delta}x = x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t)\Delta t^2 + \cdots = dx + \frac{1}{2!}d^2x + \cdots$$

Nota :

- t variable indépendante : $\overline{\Delta}t = dt$, $d(dt) = d^2t = 0$
- La différentielle d'une fonction x est une différentielle dépendante $dx = \dot{x}(t)dt$
- Si $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_{t_1}x(t) &= x(t_1+\Delta t_1, t_2, \cdots, t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
\overline{\Delta}x(t) &= x(t_1+\Delta t_1, \cdots, t_n+\Delta t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
dx &= x_{t_1}(t)dt_1 + \cdots + x_{t_n}(t)dt_n = \nabla x(t)'dt \\
d^2x &= dt'\nabla^2 x(t)dt
\end{aligned}$$



- Variation à temps fixé d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{\Delta}x(t) = x^*(t) - x(t) = \delta x(t) + \frac{1}{2!}\delta^2 x(t) + \cdots$$

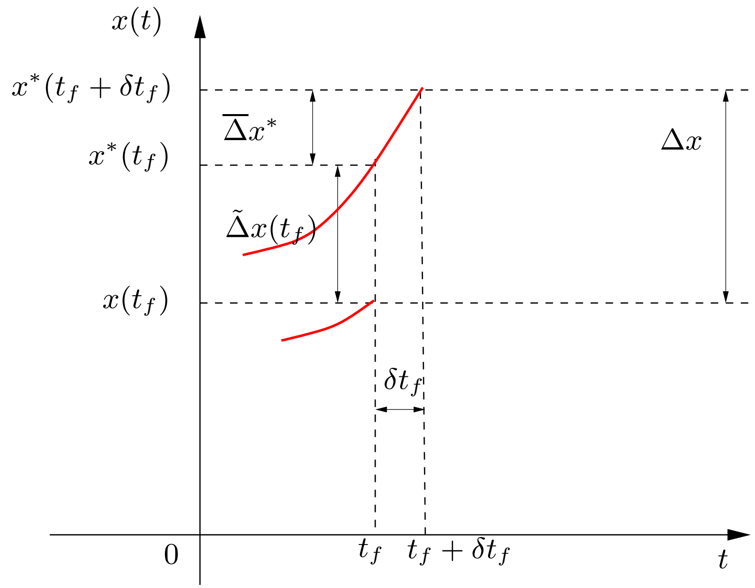
- Variation à temps libre d'une fonction $x(t) \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Delta x(t,dt) = x^*(t+dt) - x(t) &= \tilde{\Delta}x(t) + \overline{\Delta}x^*(t,dt) \\
&= \delta x(t) + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x(t) + dx^* + \tfrac{1}{2!}d^2x^* + \cdots \\
&= \delta x + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}\ddot{x}^* dt^2 + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}[\ddot{x}^* dt^2 + \delta^2 x] + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x} dt + \tfrac{1}{2!}[2\delta\dot{x}dt + \delta^2 x + \ddot{x}dt^2] + \cdots
\end{aligned}$$

Variations au premier ordre et au deuxième ordre :

$$\Delta^1 x = \delta x + \dot{x}dt \qquad \Delta^2 x = [2\delta\dot{x}dt + \delta^2 x + \ddot{x}dt^2]$$

$$\Delta(.) = \delta(.) + \tfrac{d}{dt}(.)dt \qquad \Delta^2(.) = \Delta(\Delta(.))$$



Nota :

- $\dot{x}^* = \dot{x} + \tilde{\Delta}\dot{x} = \dot{x} + \delta\dot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\dot{x} + \cdots$
- $\ddot{x}^* = \ddot{x} + \tilde{\Delta}\ddot{x} = \ddot{x} + \delta\ddot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\ddot{x} + \cdots$

Exemple 1

Soit la fonction $x(t) = (t_1 - t_2)^2$ *alors*

$$\nabla x = \begin{bmatrix} 2(t_1 - t_2) \\ -2(t_1 - t_2) \end{bmatrix} \quad \nabla^2 x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\overline{\Delta} x(t) = 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 - 2dt_1 dt_2 + dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \Delta x(t, dt) = &\quad \delta x + 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 + \frac{1}{2}(2\delta\dot{x}' dt + \delta^2 x - 4dt_1 dt_2 + 2dt_1^2 + 2dt_2^2) \\ = &\quad \Delta^1 x + \tfrac{1}{2}\Delta^2 x + \cdots \end{aligned}$$

▼ **Définition 1** *$J(f)$ est une fonctionnelle si pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$ correspond une valeur de J (J est une fonction de fonction). $\mathcal{F}$ est le champ de définition de la fonctionnelle.*

$$J(f(t)), \;\; f(t) \in \mathcal{F}, \;\; t \in \;\; (a, b)$$

✍ **Exemple 2** *: Aire sous une courbe f*

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

Le champ $\mathcal{F}$ de la fonctionnelle $I(f)$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0\ ,\ 1]$.

✍ **Exemple 3** *: Energie totale d'une membrane élastique sous une charge Q*

$$E(u) = \frac{1}{2}a \int\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy - \int\int_S Q(x,y)u(x,y)dxdy$$

Le champ $\mathcal{U}$ de la fonctionnelle $E(u)$ est l'ensemble des fonctions u deux fois continûment différentiables sur le domaine S.

▼ Définition 2

- $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local fort de la fonctionnelle* $J(x(t))$ *si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$

$$\|x(t) - x^*(t)\|_0 < \epsilon \ \Rightarrow \ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global*

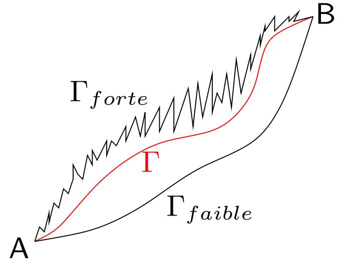
- $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local faible si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$*,*

$$\|x(t) - x^*(t)\|_1 < \epsilon \ \Rightarrow \ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global faible*

$$\|x(t)\|_0 = \sup_{a \leq t \leq b} \|x(t)\|$$

$$\|x(t)\|_i = \sup_i \|x^{(i)}(t)\|_0$$



- Chercher $x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ est restrictif

Exemple 4 : *Bolza*

$$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(1-\dot{x})^2 dt \quad \text{sous} \quad x(-1) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = 0 \quad \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 0 \quad \text{et} \quad x^* = t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1$$

La solution x^* est AC et $\dot{x}^*$ est discontinue en 0

$$x^* \in \mathcal{KC}^1([-1, 1], \mathbb{R}^n)$$

Exemple 5 : *contre-exemple de Hilbert*

$$J(x) = \int_{0}^{1} t^{2/3}\dot{x}^2 dt \quad \text{sous} \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = t^{1/3}$$

x^* est AC telle que $J(x^*)$ est finie et $\dot{x}^*$ est non bornée en 0

$$x^* \in \mathcal{AC}([0, 1], \mathbb{R}^n)$$

▼ **Définition 3** *variation d'une fonctionnelle différentiable*

$$\begin{aligned}\Delta J &= \tilde{\Delta} J(x, x^*, t_0, t_f) + \overline{\Delta} J(x^*, t_0, \delta t_0, t_f, \delta t_f) \\ &= J(x^*, t_0, t_f) - J(x, t_0, t_f) + J(x^*, t_0 + \delta t_0, t_f + \delta t_f) - J(x^*, t_0, t_f) \\ &= \delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f) + \epsilon_x \|\delta x\| + \epsilon_{t_0} \|\delta t_0\| + \epsilon_{t_f} \|\delta t_f\|\end{aligned}$$

où $\delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f)$ est une fonctionnelle linéaire unique appelée variation au premier ordre si J est différentiable.

❒ **Théorème 1** *théorème fondamental du calcul des variations*

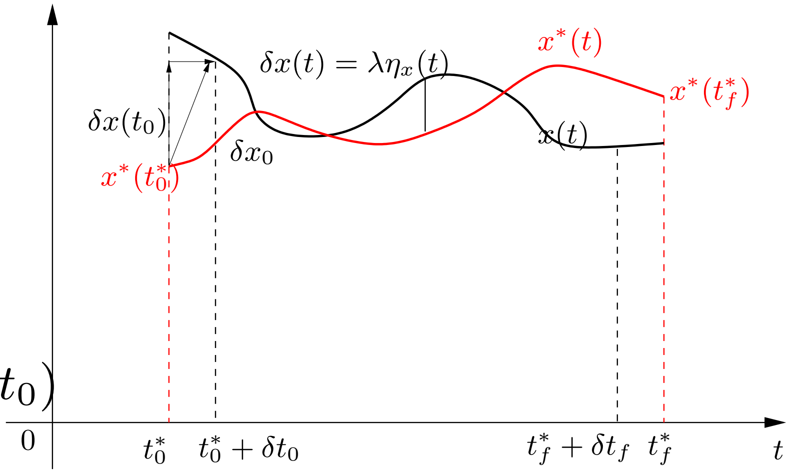
Soit $J(x(t))$ différentiable définie sur le domaine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$
Si $x^*(t)$ est un extrémum fort (faible) alors

$$\boxed{\delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f) = 0}$$

pour toute variation forte (faible) admissible $\delta x(t)$ $(x(t) + \delta x(t) \in \mathcal{F})$.

A - Première variation de Lagrange :

Soit $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$ la trajectoire optimale et les trajectoires paramétrées pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta_x(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$, $\eta_f(t_f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta_0(t_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



$$x(t) = x^*(t) + \lambda \eta_x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \lambda \dot{\eta}_x(t) = \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)$$

$$t_f = t_f^* + \delta t_f = t_f^* + \lambda \eta_f(t_f), \; t_0 = t_0^* + \delta t_0 = t_0^* + \lambda \eta_0(t_0)$$

$$\delta x_0 = \delta x(t_0) + \dot{x} \delta t_0, \; \delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x} \delta t_f$$

$$\begin{aligned} J(\lambda) - J(0) = \quad & \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f)) \\ & - \int_{t_0^*}^{t_f^*} L(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) dt + \psi_0(t_0^*, t_f^*, x^*(t_0^*), x^*(t_f^*)) = \frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}_{|\lambda=0} d\lambda + \cdots \end{aligned}$$

Notations :

$$L(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0) = L(t_0) \qquad L(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = L(t_f)$$

$$\nabla_x L(t, x, \dot{x}) = L_x(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial x_0} = \nabla_{x_0} \psi_0(.) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial t_0} = \psi_{0t_0}(.)$$

$$\nabla_{\dot{x}} L(t, x, \dot{x}) = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial x_f} = \nabla_{x_f} \psi_0(.) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial t_f} = \psi_{0t_f}(.)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

La variation totale de la fonctionnelle de Bolza est donnée par :

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}_{|\lambda=0} = \delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta \dot{x}, \delta t_0, \delta t_f) = \delta_{t_0} J + \delta_{t_f} J + \delta_x J$$

❶ 1^{ere} variation de J/x :

$$\begin{aligned} \delta_x J(x^*(t), \delta x(t), \delta x_0, \delta x_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[L'_x(t, x^*, \dot{x}^*)\delta x + L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\delta \dot{x} \right] dt \\ &\quad + \nabla'_{x_f} \psi_0(x_f)\delta x_f + \nabla'_{x_0} \psi_0(x_0)\delta x_0 \end{aligned}$$

❷ 1^{ere} variation de J/t_0 :

$$\delta_{t_0} J(x^*(t_0), \delta t_0) = (-L(t_0) + \psi_{0t_0}(t_0))\delta t_0$$

❸ 1^{ere} variation de J/t_f :

$$\delta_{t_f} J(x^*(t_f), \delta t_f) = (L(t_f) + \psi_{0t_f}(t_f))\delta t_f$$

B - Transformation de la 1^{ere} variation de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_f} L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\delta\dot{x}dt &= [L'_{\dot{x}}\delta x]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt \\
&= L'_{\dot{x}}(t_f)\delta x(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt \\
&= L'_{\dot{x}}(t_f)\delta x_f - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}\delta t_f - L'_{\dot{x}}(t_0)\delta x_0 + L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}\delta t_0 \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta t_0, \delta t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left[L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right]' \delta x dt \\
&+ \left[L'_{\dot{x}}(t_f) + \nabla_{x_f}\psi'_0\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f \\
&- \left[L'_{\dot{x}}(t_0) - \nabla_{x_0}\psi'_0\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0
\end{aligned}$$

Nota : les variations δx, $(\delta x_0,\ \delta t_0)$ et $(\delta x_f,\ \delta t_f)$ sont indépendantes

C - Application du lemme de Lagrange :

❒ **Lemme 1** *de Lagrange*

Pour une fonction $y(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$, *si* $\int_{t_0}^{t_f} y'(t)\alpha(t)dt = 0$ *pour toute* $\alpha(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $\alpha(t_0) = \alpha(t_f) = 0$ *alors* $y(t) \equiv 0$ *sur* $[t_0, t_f]$

❒ **Théorème 2** *C.N. d'optimalité*

- *Equation différentielle d'Euler-Lagrange :*

  Si $x^*(t)$ *est une trajectoire optimale faible locale alors*

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] = 0$$

  et toute solution $x^*(t)$ *est une extrémale faible du problème de CV*

- *Conditions de transversalité :*

$$\begin{aligned} -\left[L'_{\dot{x}}(t_0) - \nabla_{x_0}\psi'_0\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0 &= 0 \\ \left[L'_{\dot{x}}(t_f) + \nabla_{x_f}\psi'_0\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f &= 0 \end{aligned}$$

Nota : forme explicite de l'équation d'Euler-Lagrange

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - L_{t\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) - L'_{x\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\dot{x}^* - L'_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\ddot{x}^* = 0$$

❶ Formulation par le calcul des variations :

$$\min_x \quad \int_0^a \frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$\text{sous} \quad y(x(0))=0,\ y(a)=b \qquad L(x,y,\tfrac{dy}{dx}) = L(x,y,\dot{y}) = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$L_{x\dot{y}}(x,y,\dot{y}) = 0$$

❷ Equation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}
L_y(x,y^*,\dot{y}^*) - L_{y\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\dot{y}^* - L_{\dot{y}\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\ddot{y}^* &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[L(x,y^*,\dot{y}^*) - \dot{y}L_{\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\right] &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}} - \dot{y}L_{\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\right] &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}} - \frac{\dot{y}^{*2}}{\sqrt{2gy^*}\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}\right] &= 0
\end{aligned}$$

❸ Equation différentielle de la cycloïde :

$$y^*(1+\dot{y}^{*2}) = |b|$$

❶ Si $L(t, x, \dot{x}) = L(t, \dot{x})$ alors

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{x}^*) = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'impulsion

❷ Si $L(t, x, \dot{x}) = L(x, \dot{x})$ alors

$$L(x^*, \dot{x}^*) - L_{\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*)'\dot{x}^* = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'énergie

Nota : l'équation d'Euler-Lagrange : système de n équations différentielles du second ordre avec $2n + 2$ conditions initiales et terminales

Exemple 6

Déterminer la trajectoire extrémale de la fonctionnelle $\int_0^{t_f} [t\dot{x} + \dot{x}^2(t)]dt$ *pour* $x(0) = 1$ *et* $x(t_f) = 5$ *avec* $t_f > 0$ *libre.*

L'intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est l'intégrale de l'impulsion : $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}^*) = t + 2\dot{x}^* = C_1$. *On en déduit*

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{C_1 t}{2} + C_2$$

Conditions de transversalité :

$$t_f \dot{x}^*(t_f) + \dot{x}^{*2}(t_f) - (t_f + 2\dot{x}^*(t_f))\dot{x}^*(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^*(t_f) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} &\dot{x}^*(t_f) = -\tfrac{t_f}{2} + \tfrac{C_1}{2} && \Rightarrow \quad C_1 = t_f \\ &x(0) = 1 = C_2 && \\ &x(t_f) = 5 = -\tfrac{t_f^2}{4} + \tfrac{C_1 t_f}{2} + C_2 && \Rightarrow \quad t_f = 4 \end{aligned}$$

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + 2t + 1$$

Soit le problème de CV :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt \\ \text{sous} & x(t_0) = x_0, \ x(t_f) = x_f \\ & t_0, \ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

où $L(.) \ : \ V \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Deuxième variation de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(\lambda)}{d\lambda^2}_{\lambda=0} = \varphi(\eta_x) \quad &= \quad \delta^2 J(x^*,\eta_x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\eta_x' L_{xx}\eta_x + 2\dot{\eta}_x' L_{x\dot{x}}\eta_x + \dot{\eta}_x' L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] dt \\ &= \quad \int_{t_0}^{t_f} \left[\eta_x' \left[L_{xx} - \frac{dL_{x\dot{x}}}{dt}\right]\eta_x + \dot{\eta}_x' L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] dt \end{aligned}$$

où $\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$

❒ **Lemme 2**

Si $\varphi(\eta_x) \succeq 0$ pour toute fonction $\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$ alors $L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) \succeq 0, \ \forall \ t \in [t_0,t_f]$.

Si $x^*(t)$ est une extrémale faible du problème de CV alors $\eta_x^* \equiv 0$ est un minimum faible du problème de CV auxiliaire :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \varphi(\eta_x) \\ \text{sous} & \eta_x(t_0) = 0,\ \eta_x(t_f) = 0 \\ & t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le problème de CV auxiliaire : Equation de Jacobi

$$\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{\dot{x}x}\eta_x(t)\right] = L_{x\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{xx}\eta_x(t)$$

Nota : Equation de Jacobi

$$-\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] + \left[L_{xx} - \frac{d}{dt}(L_{x\dot{x}})\right]\eta_x = 0$$

$\eta_x \equiv 0$ est solution triviale de l'équation de Jacobi avec les conditions de bord $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$ mais il peut exister d'autres solutions.

▼ **Définition 4** *points conjugués*

Le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède une solution $\overline{\eta}_x$ telle que $\overline{\eta}_x(\tau) = \overline{\eta}_x(t_0) = 0$, $L_{\dot{x}\dot{x}}(\tau, x^*, \dot{x}^*)\dot{\overline{\eta}}_x(\tau) \neq 0$

✍ **Remarques 1** *Autre caractérisation des points conjugués*

Le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède n solutions $\overline{\eta}_x^i,\ i = 1, \cdots, n$ telles que $\overline{\eta}_x^i(t_0) = 0,\ i = 1, \cdots, n,\ \dot{\overline{\eta}}_x^i(t_0) = e_i,\ i = 1, \cdots, n$ et

$$\det \begin{bmatrix} \overline{\eta}_x^{1'}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{\eta}_x^{n'}(\tau) \end{bmatrix} = 0$$

Nota : Si $\overline{\eta}_x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$ alors le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède une solution non identiquement nulle telle que $\overline{\eta}_x(\tau) = \overline{\eta}_x(t_0) = 0$ et $\dot{\overline{\eta}}_x(t_0) = 1$

❒ **Théorème 3** *C.N. pour une extrémale faible*

Si $x^*(t)$ est une extrémale faible du problème de CV alors $x^*(t)$ vérifie $\forall\ t \in [t_0, t_f]$

- *l'équation d'Euler-Lagrange*
- *la condition de Legendre-Clebsch :*

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succeq 0$$

- *la condition de Jacobi :*

Il n'y a pas de points conjugués à t_0 dans l'intervalle (t_0, t_f)

❒ **Théorème 4** *C.S. au 2eme ordre*

Si $x^*(t)$ vérifie $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ les conditions suffisantes suivantes **simultanément** *:*

- *l'équation d'Euler-Lagrange*
- *la condition forte de Legendre-Clebsch :*

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succ 0$$

- *la condition forte de Jacobi :*

il n'existe pas de points conjugués à t_0 dans le semi intervalle $(t_0, t_f]$

alors $x^*(t)$ est une extrémale faible stricte du problème de CV simplifié

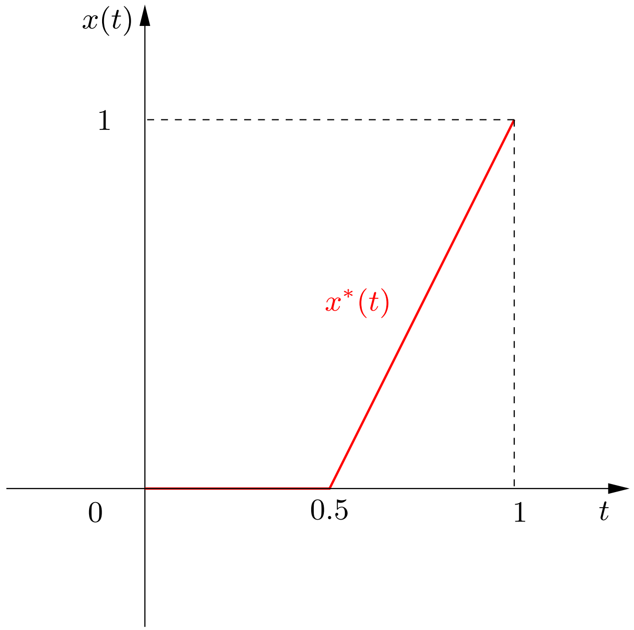
Les solutions discontinues

Exemple 7 *Bolza*

$$\min \ J = \int_0^1 x^2(2-\dot{x})^2 dt, \ x(0) = 0, \ x(1) = 1$$

- $J^* = 0$
- $x^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 0.5] \\ 2t-1 & t \in [0.5, 1] \end{cases}$
- $x^*(t)$ *est solution d'Euler-Lagrange*

$$x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2 - 4x = 0$$



Théorème 5 *Conditions de Weierstrass-Erdmann*

Si $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ est une extrémale locale avec un point de discontinuité de $\dot{x}$ en $t_i \in [t_0, t_f]$ alors $x^*(t)$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange, les conditions de transversalité finales et initiales et les conditions de Weierstrass-Erdmann

$$L_{\dot{x}}(t_i^-) = L_{\dot{x}}(t_i^+)$$
$$(L - L'_{\dot{x}}\dot{x})(t_i^-) = (L - L'_{\dot{x}}\dot{x})(t_i^+)$$

Soit le problème de CV :

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x \in \mathcal{KC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt \\ \text{sous} & x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f,\ t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

❒ **Théorème 6** *CN de Weierstrass*

Si $x^*(t)$ est une extrémale forte du problème de CV alors $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ *et* $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(t,x^*,\dot{x}^*,u) = L(t,x^*,u) - L(t,x^*,\dot{x}^*) - L'_{\dot{x}}(t,x^*,\dot{x}^*)(u-\dot{x}^*) \geq 0$$

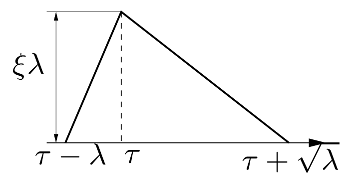
Cette condition est vérifiée si la fonction $L(.,.,\dot{x})$ est convexe

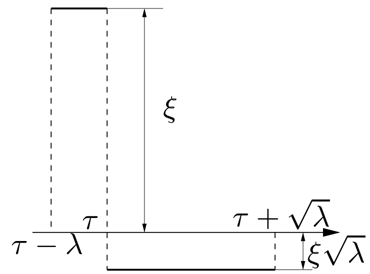
Nota : la fonction $\mathcal{E}(t,x^*,u)$ est appelée fonction de Weierstrass

Variation en aiguille de Weierstrass :

$$x_\lambda(t) = x^*(t) + h_\lambda(t)$$

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi & t \in [\tau-\lambda, \tau] \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda} & t \in [\tau, \sqrt{\lambda}+\tau] \end{cases}$$





Problème de CV :

$$\min_{x} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

avec $k(x_0, t_0) = 0$ et $l(x_f, t_f) = 0$ et

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0 \quad r(.) \in \mathbb{R}^r$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\ t \quad q(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad q(.) \in \mathbb{R}^q$$

▼ **Définition 5** *Lagrangien augmenté*

La fonction

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) \ : \ V \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda' r(t, x(t), \dot{x}(t)) + \mu(t)' q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

est le Lagrangien augmenté associé au problème de CV où $\lambda \in \mathbb{R}^r$ et $\mu(t) \ : \ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^q$ sont les multiplieurs de Lagrange respectivement associés aux contraintes intégrales et instantanées

❐ **Théorème 7** *C.N. d'optimalité et équation différentielle d'Euler-Lagrange*

Si $x^*(t)$ est une trajectoire optimale faible locale alors

$$\mathcal{L}_x(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t))\right] = 0$$

Nota : résultats précédents valides avec $L(t, x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t))$

- Conditions de Weierstrass, Weierstrass-Erdmann
- Conditions de Legendre et de transversalité

Contraintes inégalités intégrales et instantanées :

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt \leq 0 \;\; r(.) \in \mathbb{R}^r \;\; \rightarrow \;\; \int_{t_0}^{t_f} [r(t, x(t), \dot{x}(t)) + Z]dt = 0 \;\; Z \in \mathbb{R}^r \mid Z_i = z_i^2$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\, t \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0 \;\; q(.) \in \mathbb{R}^q \;\; \rightarrow \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) + Y = 0 \;\; Y \in \mathbb{R}^q \mid Y_i = y_i^2$$

Nota : $\mathcal{L}_{Z_i} = \lambda_i^* Z_i^* = 0$ et $\mathcal{L}_{Y_i} = \mu_i^*(t) Y_i^* = 0$, si $Y_i^* \neq 0 \Rightarrow \mu_i^*(t) = 0$ ou $Z_i^* \neq 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$, la contrainte associée est non saturée et n'intervient pas