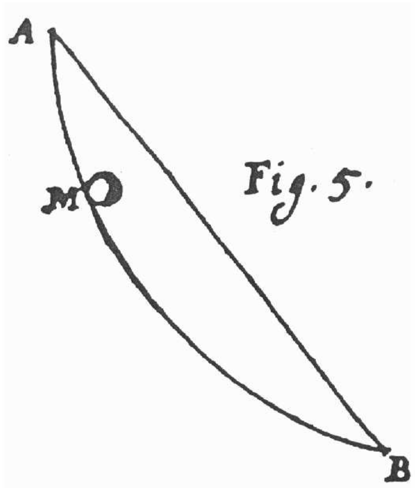
Commande optimale des systèmes dynamiques

Approche variationnelle en commande optimale

Principe du maximum de Pontryagin



Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{aligned}
\min_{u(t)\in\mathcal{C}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)} \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\
\text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \\
& x(t_f) = x_f,\ t_f \text{ libres}
\end{aligned}$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande
- Problème de calcul des variations sous une contrainte différentielle instantanée (équation dynamique d'état)

Nota :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt}dt = \psi_0(t_f,x(t_f)) - \psi_0(t_0,x(t_0))$$

$$J_2(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(t,x(t),u(t)) + \frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt}\right]dt = J(x,u) - \psi_0(t_0,x(t_0))$$

Fonctionnelle augmentée avec le vecteur des multiplieurs de Lagrange $\lambda : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$: appelé vecteur d'état adjoint

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(t,x,u) + \lambda^T(t)[f(t,x,u) - \dot{x}] \right\} dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) - \lambda^T(t)\dot{x}(t) \right\} dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(t,x,u,\lambda) + \dot{\lambda}^T x(t) \right\} dt - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) + \psi_0(t_f, x(t_f))
\end{aligned}$$

Première variation sur l'état, la commande et le temps final :

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad t_f = t_f^* + \delta t_f$$

$$\begin{aligned}
\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f} \right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f} \psi_0^* - \lambda^*(t) \right]^T_{|t_f} \delta x_f \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[H_x^* + \dot{\lambda}^*(t) \right]^T \delta x(t) + H_u^{*T} \delta u(t) \right\} dt
\end{aligned}$$

❒ **Théorème 1** *Si* $u^*(t)$ *est trajectoire optimale locale faible de commande alors*
$\exists\ \lambda^*(t)\ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ *:*

- *C.N. 1 : équations canoniques de Hamilton*

$$\begin{aligned} H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= \dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) \ \text{ Equation d'état} \\ H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= -\dot{\lambda}^*(t) \ \text{ Equation d'état adjointe} \\ H_u(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= 0 \ \text{ Equation de commande} \end{aligned}$$

- *C.N. 2 : condition (forte) au deuxième ordre de Jacobi*
  Il n'existe pas de points conjugués sur $[t_0, t_f)$ $([t_0, t_f])$ *ou la solution* $S(t)$ *de :*

$$-\dot{S} = H_{xx} + Sf_x + f_x^T S - (H_{xu} + Sf_u)H_{uu}^{-1}(H_{ux} + f_u^T S), \quad S(t_f) = \psi_{0xx}(t_f, x(t_f))$$

  est finie sur $[t_0, t_f)$ $([t_0, t_f])$
- *C.N. 3 : condition (forte) au deuxième ordre de Legendre-Clebsch*

$$H^*_{uu} \succeq 0 \qquad H^*_{uu} \succ 0$$

- *C.N. 4 : les conditions de transversalité*

Différentes conditions de transversalité

$$\left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f}\right]\delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*(t_f)\right]^T \delta x_f = 0$$

❶ t_f fixé et x_f fixé : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$

❷ t_f fixé et x_f contraint $\psi(x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\psi(x^*(t_f^*)) = 0 \qquad x(t_0) = x_0$$
$$\nabla_{x_f}\psi_0^* + \psi^{*T}_{x_f}\nu = \lambda^*(t_f)$$

❸ t_f fixé et x_f libre : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad \nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*(t_f) = 0$

❹ t_f libre et x_f fixé :

$$\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \quad H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f} = 0$$

❺ t_f libre et x_f contraint $\psi(t_f, x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\left[H^* + \nu^T\psi^*_{t_f} + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* + \psi^{*T}_{x_f}\nu - \lambda^*\right]_{|t_f} = 0$$

❻ t_f libre et x_f libre : $\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0$

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*\right]_{|t_f} = 0$$

CS d'optimalité au deuxième ordre

❒ **Théorème 2** *conditions fortes de Legendre-Clebsch et de Jacobi*

Si la C.N. 1 d'optimalité au premier ordre et les C.N. 2 et 3 d'optimalité fortes au second ordre sont vérifiées par un triplet d'extrémales (x^*, u^*, λ^*) alors c'est un triplet d'extrémales minimales faibles.

✍ **Exemple 1**

$$\min_{u(t)\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \int_0^1 (x(t)-u(t))^2 dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 1$$

❶ *C.N. 1 :*

$$H = (u-x)^2 + \lambda u \qquad H_u^* = \lambda^* + 2(u^* - x^*) = 0 \qquad \dot{\lambda}^* = 2(u^* - x^*) \qquad \lambda^*(1) = 0$$

$$\lambda^*(t) = 0 \qquad u^*(t) = x^*(t) \qquad x^*(t) = e^t \qquad u^*(t) = e^t$$

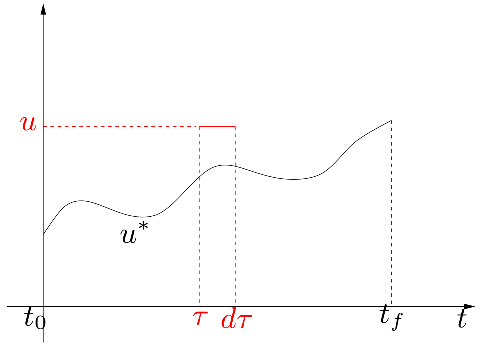
❷ *C.N. 2 et condition forte de Jacobi :* $\dot{s}(t) = \dfrac{s^2(t)}{2} - 2s(t),\ s(1) = 0 \quad s(t) \equiv 0 \quad s(t)$ *est finie partout sur* $[0,1]$

❸ *C.N. 3 et Condition forte de Legendre-Clebsch :* $H_{uu} = 2 > 0$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *est un minimum local faible*

Variation forte (en aiguille)

$$\delta u = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \tau \ \ \tau \in (t_0, t_f) \\ u - u^* & \text{pour} \quad \tau \leq t \leq \tau + d\tau \\ 0 & \text{pour} \quad \tau + d\tau \leq t \leq t_f \end{cases}$$



C.N. 4 : condition de Weierstrass

Si (x^*, λ^*, u^*) est un minimum fort du problème de commande optimale alors u^* conduit à un minimum absolu pour le Hamiltonien :

$$\delta H = H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \geq 0 \quad \forall\, t \text{ et } u \neq u^*$$

Exemple 1 *(suite)*

❹ *C.N. 4 : condition de Weierstrass*

$$\begin{aligned} H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) &= (u - x^*)^2 + \lambda^* u - (u^* - x^*)^2 - \lambda^* u^* \\ &= (u - u^*)^2 > 0 \ \forall\, u \neq u^* \end{aligned}$$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *vérifie la C.N de Weierstrass*

On suppose que $u^* \in \mathcal{PC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$ et $\tau \in [t_0,t_f]$ est le point de discontinuité en lequel la condition $\theta(\tau,x(\tau))=0$ est imposée

On définit alors $G(\tau,x_\tau,\xi,t_f,x_f,\nu)=\psi_0(t_f,x_f)+\nu^T\psi(t_f,x_f)+\xi^T\theta(\tau,x_\tau)$

❶ Equations canoniques d'Euler-Lagrange sur les sous-arcs $[t_0,\tau]$ et $[\tau,t_f]$

❷ Conditions de transversalité et conditions aux extrémités

❸ Condition de Legendre-Clebsch

❹ Conditions de Weierstrass-Erdmann :

$$H^*(\tau,x(\tau),u(\tau^-),\lambda(\tau^-)) = H^*(\tau,x(\tau),u(\tau^+),\lambda(\tau^+)) - G_\tau(\tau^*,x^*(\tau),\xi^*)$$
$$\lambda^*(\tau^-) = \lambda^*(\tau^+) + G_{x_\tau}(\tau^*,x^*(\tau),\xi^*)$$

❺ Condition de Weierstrass : $\forall\ u \neq u^*$ et $\forall\ u \neq u^*(\tau^+)$

$$H(t,x^*,\lambda^*,u) - H(t,x^*,\lambda^*,u^*) > 0$$

Nota : pour une discontinuité non contrainte $\theta \equiv 0$, la condition de Weierstrass est vérifiée à l'égalité pour $u^* = u(\tau^-)$ et $u = u(\tau^+)$

Exemple 2

$$\min_{u(t)\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \int_0^1 u(t)^3 dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0)=0 \quad x(1)=1$$

❶ *C.N. 1 :*

$$\dot{\lambda}^* = 0 \qquad \lambda^*(t) = \lambda^*(1) = \lambda^* \qquad H = u^3 + \lambda u$$

$$H_u^* = \lambda^* + 3u^{2*} = 0 \qquad u^* = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}} \qquad x^*(t) = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}}t \qquad x(1) = 1$$

$$\lambda^* = -3 \qquad x^*(t) = t \qquad u^*(t) = 1 \qquad J^* = 1$$

❷ *C.N. 3 et Condition forte de Legendre-Clebsch :*

$$H_{uu} = 6u \qquad H_{uu}^* = 6 > 0$$

❸ *C.N. 2 et Condition forte de Jacobi : équation de Riccati homogène*

$$\dot{s}(t) = s^2/6, \ \ s(1) = 0 \qquad s(t) \equiv 0$$

Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ *est un minimum local faible*

Exemple 2 (suite)

❹ C.N. 5 : condition de Weierstrass

$$\delta H(x^*, \lambda^*, u, u^*) = u^3 - u^{3*} + \lambda^*(u - u^*) = (u-1)^2(u+2) < 0 \text{ pour } u < -2\,!$$

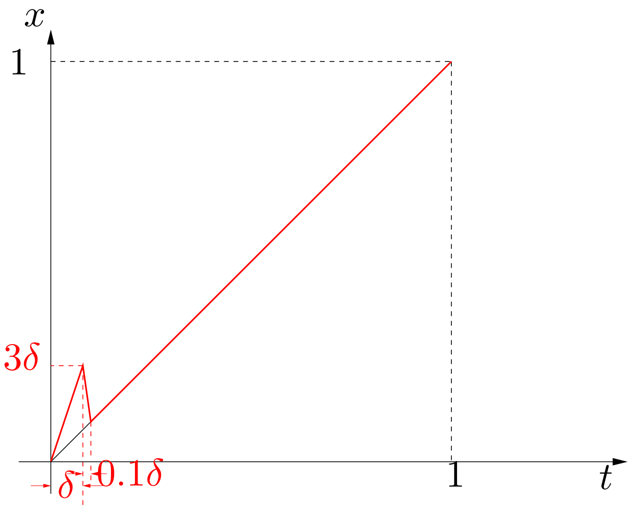
Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ n'est pas un minimum fort

❺ C.N. 4 : conditions de Weierstrass-Erdman

$$\lambda(\tau_i^-) = \lambda(\tau_i^+) = \lambda$$

$$u(\tau_i^-)(u^2(\tau_i^-) + \lambda) = u(\tau_i^+)(u^2(\tau_i^+) + \lambda)$$

$$\begin{aligned} J(x,u) &= \int_0^{\delta} u^3(t)dt + \int_{\delta}^{1.1\delta} u^3(t)dt \\ &\quad + \int_{1.1\delta}^{1} u^3(t)dt \\ &= 1 - 678\delta \end{aligned}$$



$J^*_{u \in \mathcal{KC}^0} < J^*_{u \in \mathcal{C}^0}$

- Le vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$ découple les variables $x(t)$ et $u(t)$ dans les équations d'Euler-Lagrange (équations canoniques de Hamilton)
- Le vecteur de commande $u(t)$ n'est pas contraint ni borné
- La commande optimale $u^*(t)$ est obtenue par application du principe du minimum de Pontryagin : $H(t,x,u,\lambda) = \lambda_0 L(t,x,u) + \lambda^T f(t,x,u)$
  - $\lambda_0 = 1$: principe du minimum de Pontryagin
  - $\lambda_0 = -1$: principe du maximum de Pontryagin

$$\max \to \min \quad J(x,u) \to \lambda_0 J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_0 L(t,x(t),u(t))dt + \lambda_0 \psi_0^*$$

- Si H ne dépend pas explicitement de t alors il est constant le long de la trajectoire optimale

$$H_t(t,x^*,u^*,\lambda^*) = \frac{dH(t,x,u,\lambda)}{dt}$$

- Résoudre le problème aux deux bouts revient à résoudre les équations d'état et d'état adjointe avec les conditions initiales et finales (méthodes numériques dans les cas généraux : non linéaires et variants dans le temps)
- La résolution du problème aux deux bouts permet de résoudre l'équation de commande pour obtenir la commande optimale $u^*(t)$ en boucle ouverte

Exemple 3 *Soit le problème de commande optimale (double intégrateur)*

$$\min_{u(t)\in\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R})} \quad J(x,u)=\frac{1}{2}\int_0^2 u(t)^2 dt$$

$$\text{sous} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Nota : problème de commande optimale à instant final et état final fixes où $L(t,x(t),u(t))=\frac{1}{2}u^2(t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$

❶ *Hamiltonien :*

$$H(x_1(t),x_2(t),u(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t))=\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)$$

❷ *Equation de commande :*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*,u^*,\lambda^*)=u^*(t)+\lambda_2^*(t)=0$$

$$u^*(t)=-\lambda_2^*(t)$$

❸ Hamiltonien à l'optimum :

$$H(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = -\frac{1}{2}\lambda_2^{2*}(t) + \lambda_1^*(t)x_2^*(t)$$

❹ Equations d'état :

$$\begin{array}{rcccl} \dot{x}_1^*(t) & = & H_{\lambda_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) & = & x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) & = & H_{\lambda_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) & = & -\lambda_2^*(t) \end{array}$$

❺ Equations d'état adjointe :

$$\begin{array}{rcccl} \dot{\lambda}_1^*(t) & = & -H_{x_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) & = & 0 \\ \dot{\lambda}_2^*(t) & = & -H_{x_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) & = & -\lambda_1^*(t) \end{array}$$

❻ Solution des équations d'état et d'état adjointe :

$$\begin{array}{rcl} x_1^*(t) & = & \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2 t + C_1 \\ x_2^*(t) & = & \frac{C_3}{2}t^2 - C_4 t + C_2 \\ \lambda_1^*(t) & = & C_3 \\ \lambda_2^*(t) & = & -C_3 t + C_4 \end{array}$$

❼ Expression explicite de la commande optimale :

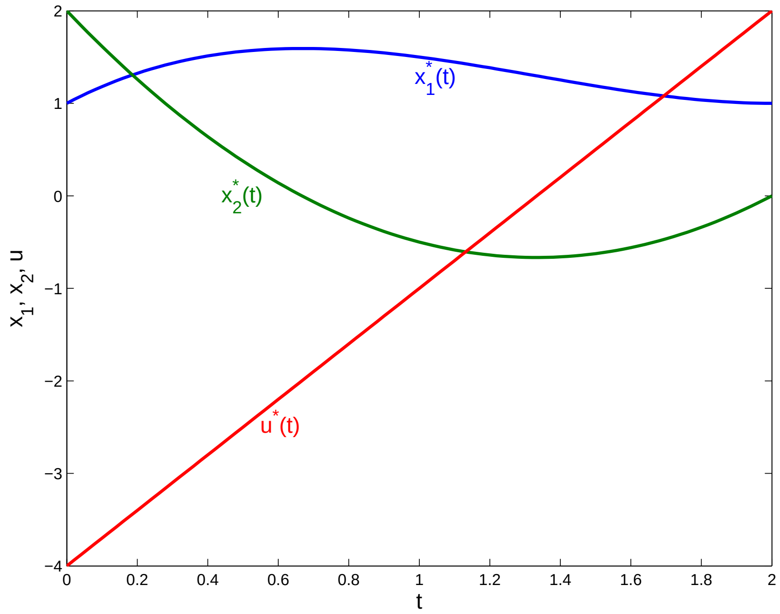
$$u^*(t) = C_3 t - C_4$$

❽ Détermination des constantes d'intégration :

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad C_3 = 3 \quad C_4 = 4$$

❾ Solution optimale :

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= 0.5t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\
x_2^*(t) &= 1.5t^2 - 4t + 2 \\
\lambda_1^*(t) &= 3 \\
\lambda_2^*(t) &= -3t + 4 \\
u^*(t) &= 3t - 4 \\
H(x^*(t), \lambda^*(t)) &= -2 \\
J(x^*(t), u^*(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left[t^3\right]_0^2 - 6\left[t^2\right]_0^2 + 8\left[t\right]_0^2 = 4
\end{aligned}$$



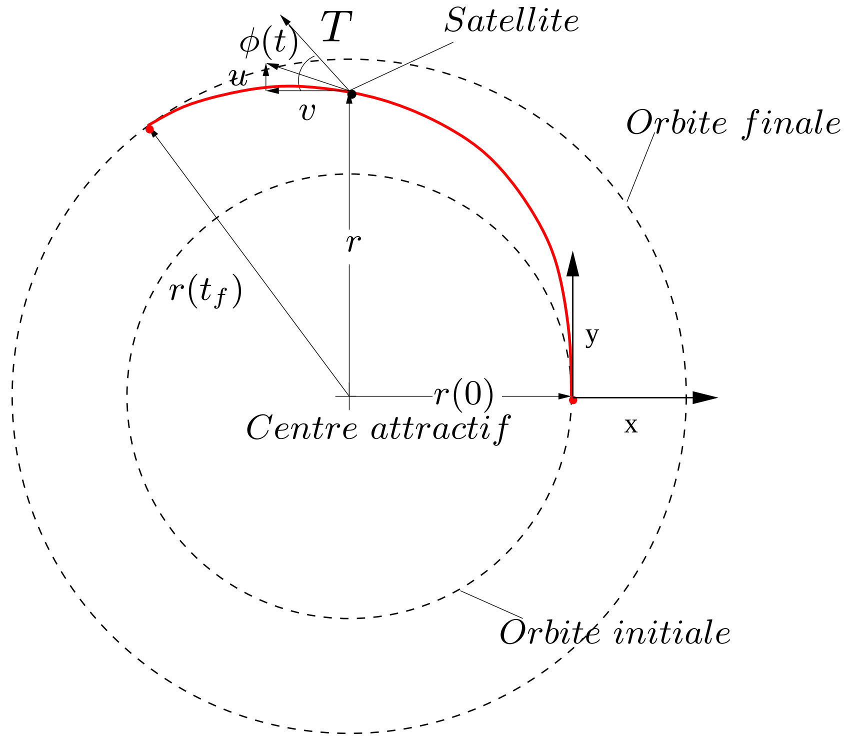
```
>> S=dsolve('Dx1=x2,Dx2=-lambda2,Dlambda1=0,Dlambda2=-lambda1,...
x1(0)=1,x2(0)=2,x1(2)=1,x2(2)=0')

S =

    lambda1: [1x1 sym]
    lambda2: [1x1 sym]
         x1: [1x1 sym]
         x2: [1x1 sym]
>> j=1;for tp=0:0.02:2
t=sym(tp);
x1p(j)=double(subs(S.x1));
x2p(j)=double(subs(S.x2));
lambda2(j)=double(subs(S.lambda2));
u(j)=-double(subs(S.lambda2));
t1(j)=tp;
j=j+1;
end
```

Exemple 4 *Problème du transfert orbital :* *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps donné (t_f) l'orbite circulaire de rayon maximal $(r(t_f))$ à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- *Equations dynamiques :*

$$\dot{r}(t) = u(t)$$
$$\dot{u}(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$
$$\dot{v}(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$



- *Conditions aux limites :*

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\ v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}$$

- *Fonctionnelle :* $J = -r(t_f)$

❶ Hamiltonien :

$$H(x(t),\phi(t),\lambda(t)) = \lambda_1 u + \lambda_2\left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right) + \lambda_3\left(-\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right)$$

❷ Equation de commande :

$$\frac{\partial H}{\partial \phi}(x^*,\phi^*,\lambda^*) = \frac{T}{m_0 - |\dot{m}|t}(\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) - \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t)) = 0$$

$$\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) = \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t) \Rightarrow \tan\phi^*(t) = \frac{\lambda_2^*(t)}{\lambda_3^*(t)}$$

❸ Equation d'état adjointe :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^*(t) &= -H_r(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) = -\lambda_2^*(t)\left(-\frac{v^{2*}(t)}{r^{2*}(t)} + \frac{2\mu}{r^{3*}}\right) - \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)v^*(t)}{r^{2*}(t)} \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= -H_u(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) = -\lambda_1^*(t) + \lambda_3^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} \\
\dot{\lambda}_3^*(t) &= -H_v(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) = -2\lambda_2^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} + \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)}{r^*(t)}
\end{aligned}$$

❹ Conditions de transversalité : t_f fixé et $x(t_f)$ contraint par $\psi(t_f, x^*(t_f)) = 0$

Problème aux deux bouts : (TPBVP)

$$
\begin{aligned}
\dot{r}^* &= u^* \\
\dot{u}^* &= \frac{v^{2*}}{r^*} - \frac{\mu}{r^{2*}} + \frac{T \sin \phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{v}^* &= -\frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{T \cos \phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{\lambda}_1^* &= -\lambda_2^* \left(-\frac{v^{2*}}{r^{2*}} + \frac{2\mu}{r^{3*}} \right) - \lambda_3^* \frac{u^* v^*}{r^{2*}} \\
\dot{\lambda}_2^* &= -\lambda_1^* + \lambda_3^* \frac{v^*}{r^*} \\
\dot{\lambda}_3^* &= -2\lambda_2^* \frac{v^*}{r^*} + \lambda_3^* \frac{u^*}{r^*}
\end{aligned}
$$

Conditions initiales et finales :

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^*(t_f) &= -1 + \frac{\nu_2 \sqrt{\mu}}{2 r^{*3/2}(t_f)} & r(0) &= r_0 \\
\lambda_2^*(t_f) &= \nu_1 & u(0) &= 0 \\
\lambda_3^*(t_f) &= \nu_2 & v(0) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} u^*(t_f) \\ v^*(t_f) - \sqrt{\dfrac{\mu}{r^*(t_f)}} \end{bmatrix} = 0
$$

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{aligned}
\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
\text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \\
& x(t_f) = x_f,\ t_f \text{ libres}
\end{aligned}$$

➥ **Hypothèses 1** - *les fonctions $L(.)$ et $f(.)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et t : $f(t,x,u)$, $f_x(t,x,u)$,$f_t(t,x,u)$, $L(t,x,u)$, $L_x(t,x,u)$, $L_t(t,x,u)$ sont continues sur $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}$*

- *Le Hamiltonien $H(t,x,u,\lambda) = L(t,x,u) + \lambda^T f(t,x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x : $H(t,x,u,\lambda)$ et $H_x(t,x,u,\lambda)$ sont continues sur $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}\times\mathbb{R}^n$*
- *Contrainte sur le vecteur de commandes : $u(t)\in\mathcal{U}$ espace topologique de $\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)$*

- Les variations $\delta u(t)$ sur la trajectoire optimale de la commande $u^*(t)$ ne sont plus arbitraires : $u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \in \mathcal{U}$
- Principe du maximum de Pontryagin pour $H(t,x,u,\lambda) = -L(t,x,u) + \lambda^T f(t,x,u)$ donc ici principe du minimun de Pontryagin

Première variation de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]^T_{|t_f} \delta x_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[H^*_x + \dot{\lambda}^*(t)\right]^T \delta x(t) + H^{*T}_u \delta u(t)\right\} dt\end{aligned}$$

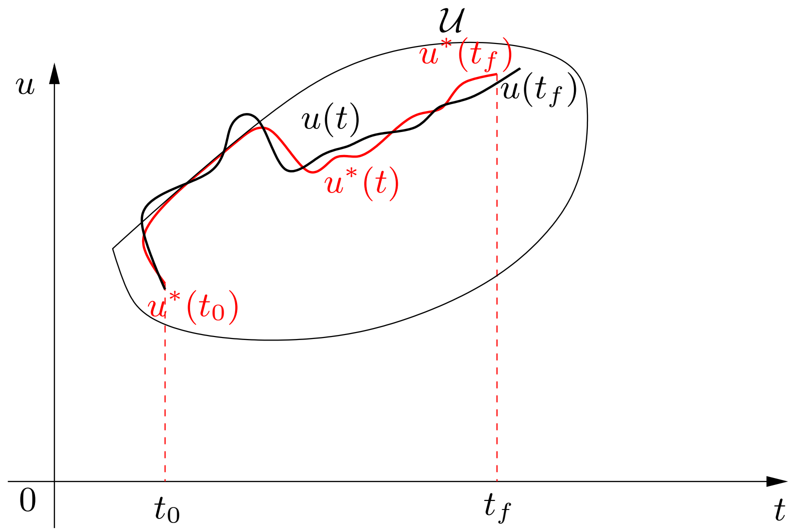
Les conditions nécessaires pour que $u^*(t)$ minimise J sont :

- $\delta J = 0$ si $u^*(t)$ est à l'intérieur de $\mathcal{U}$
- $\delta J \geq 0$ si $u^*(t)$ est sur la frontière de $\mathcal{U}$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\dot{x}^*(t) = H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*)$$
$$\dot{\lambda}^*(t) = -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*)$$

- Conditions de transversalité :

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]^T_{|t_f} \delta x_f = 0$$



$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} H^{*T}_u \delta u(t) dt$ avec $H^{*T}_u \delta u(t) = H((t, x^*, u^* + \delta u, \lambda^*)) - H((t, x^*, u^*, \lambda^*))$ d'où

$\delta J \geq 0$ implique $H(t, x^*, u, \lambda^*) \geq H(t, x^*, u^*, \lambda^*)\ \forall\ u \in \mathcal{U}$

❒ Théorème 3 *principe de Pontryagin*

Si $u^*(t) \in \mathcal{U}$ *est une commande optimale admissible et* $x^*(t)$ *la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à* $u^*(t)$ *alors il existe un vecteur* $\lambda^*(t)$ *tel que les équations canoniques de Hamilton :*

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) \end{aligned}$$

L.S. Pontryagin

aient des solutions $(x^*(t), \lambda^*(t))$ *sous les conditions de transversalité :*

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi_0^* - \lambda^*(t)\right]^T_{|t_f} \delta x_f = 0$$

et $u^*(t)$ *est un minimum global du Hamiltonien sur* $\mathcal{U}$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \; H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*)$$

ou

$$H(t, x^*, \lambda^*, u) \geq H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \;\; \forall \, u \in \mathcal{U}$$

Nota :

- Si le vecteur de commande n'est pas contraint, la condition de minimisation du Hamiltonien revient à l'annulation du gradient du Hamiltonien par rapport à la commande à l'optimum

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \quad H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \quad \Leftrightarrow \quad H_u(t, x^*, \lambda^*, u^*) = 0$$

- Problème aux deux bouts : $2n$ équations différentielles à résoudre avec n conditions initiales $x(0)$ et n conditions finales si $x(t_f)$ est fixé ou N multiplieurs $+ n - N$ contraintes sur les variables adjointes si $\psi(.) \in \mathbb{R}^N$ avec $\psi(t_f, x(t_f)) = 0$

Conditions nécessaires additionnelles :

❶ Si t_f est libre et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

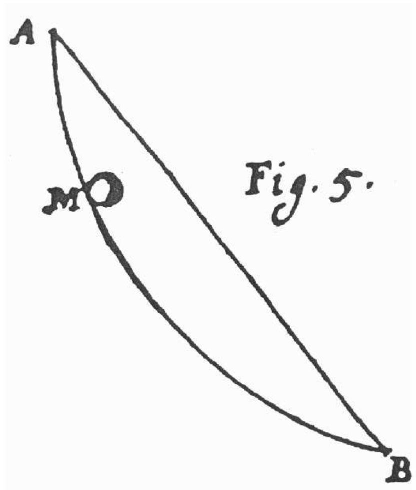
$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \equiv 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

❷ Si t_f est fixé et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = C \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

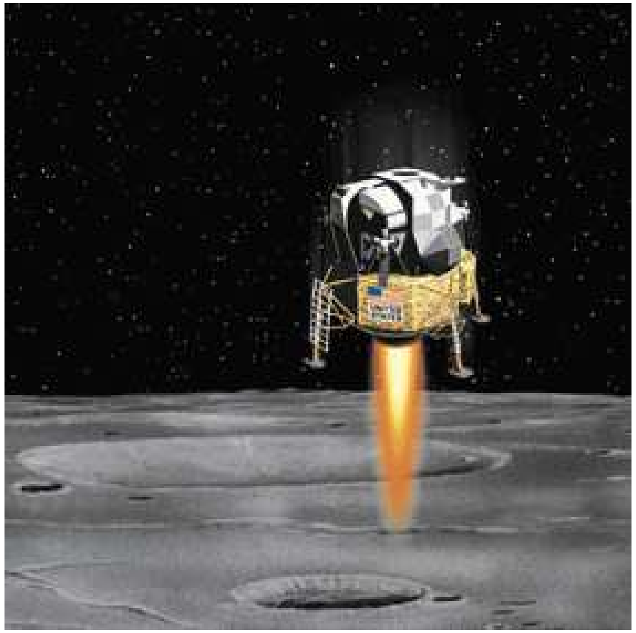
Commande optimale des systèmes dynamiques

Applications du principe de Pontryagin



Exemple 5 *Problème de l'alunissage*

$$\begin{aligned}
\min_{0\leq u(t)\leq 1} \quad & -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt \\
\text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)} \\
& \dot{x}_3(t) = -\sigma u(t),\ x_1(0) = h_0 > 0 \\
& t_f \text{ libre},\ x_2(0) = v_0 \leq 0 \\
& x_3(0) = M + F,\ x_1(t_f) = 0 \\
& x_2(t_f) = 0,\ 0 \leq u(t) \leq 1
\end{aligned}$$



Nota : problème de consommation minimum $\equiv$ *problème en temps minimum*

$$J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f) = m(0)\left(1 - e^{\frac{(v_0 - g t_f)}{\alpha}}\right)$$

$J(t_f)$ *est une fonction strictement monotone croissante*

✍ Définition du Hamiltonien :

$$H(x,\lambda,u) = \sigma u(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(\sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)} - g) - \sigma\lambda_3(t)u(t)$$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1^*(t) & = & x_2^*(t) \\
\dot{x}_2^*(t) & = & -g + \sigma\alpha\dfrac{u^*(t)}{x_3^*(t)} \\
\dot{x}_3^*(t) & = & -\sigma u^*(t) \\
\dot{\lambda}_1^*(t) & = & -H_{x_1}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^*(t) = K_1 \\
\dot{\lambda}_2^*(t) & = & -H_{x_2}^* = -\lambda_1^*(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^*(t) = -K_1 t + K_2 \\
\dot{\lambda}_3^*(t) & = & -H_{x_3}^* = \sigma\alpha\dfrac{\lambda_2^*(t)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_3^*(t) = \sigma\alpha\dfrac{(-K_1 t + K_2)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)}
\end{array}$$

✍ Conditions initiales, finales :

$$x_1(0) = h_0 \quad x_2(0) = v_0 \quad x_3(0) = M + F \quad x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0$$

Exemple de l'alunissage III

✍ Analyse du Hamiltonien comme fonction de u :

$$H(u) = \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)g + \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t)-1)\right]u(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)u(t)$$

$H(u)$ est une fonction affine qui est minimale en ses bornes inférieure ou supérieure suivant le signe de $\phi_2(t) \Rightarrow$ commande optimale tout ou rien

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_2(t) < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 < \lambda_3(t) \\ 0 & \text{si } \phi_2(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 > \lambda_3(t) \end{cases}$$

Nota : condition de singularité

$$u(t) \text{ est indéterminée si } \phi_2(t) = \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 - \lambda_3(t) = 0$$

Cette condition de singularité ne peut jamais être physiquement satisfaite

✍ Etude du signe de $\phi_2(t) = \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t)-1)\right]$:

- $\dfrac{d\phi_2(t)}{dt} = -\sigma\alpha\dfrac{\lambda_1}{x_3(t)} = -\sigma\alpha\dfrac{K_1}{m(t)}$
- 1 commutation au plus en t_c
- Pour $t_0 \rightarrow t_c$ $u^*(t) = 0$ et pour $t_c \rightarrow t_f$ $u^*(t) = 1$

- Etude de l'arc de trajectoire $0 \rightarrow t_c, \; u = 0$:

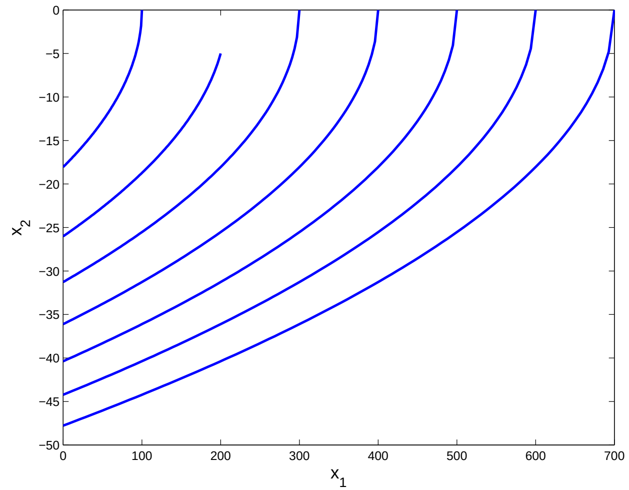
$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{x}_1^*(t) & = & x_2^*(t) & \Rightarrow & x_1^*(t) & = & -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 \\ \dot{x}_2^*(t) & = & -g & \Rightarrow & x_2^*(t) & = & -gt + C_1 = -gt + v_0 \\ \dot{x}_3^*(t) & = & 0 & \Rightarrow & x_3^*(t) & = & m(0) = M + F \end{array}$$

- Equation de la trajectoire en chute libre :

$$x_1^*(t) = h_0 + \frac{(v_0^2 - x_2^{*2}(t))}{2g}$$

- Conditions finales au point t_c :

$$\begin{array}{rcl} x_{1c}^* & = & -\frac{gt_c^2}{2} + v_0 t_c + h_0 \\ x_{2c}^* & = & -gt_c + v_0 \\ x_{3c}^* & = & M + F \end{array}$$



Exemple de l'alunissage IV

✍ Etude de l'arc de trajectoire $t_c \to t_f,\ u = 1$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \quad \Rightarrow \\
&x_1^*(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right| - 1\right] \\
&\dot{x}_2^*(t) = -g + \frac{\sigma\alpha}{x_3(t)} \quad \Rightarrow \quad x_2^*(t) = -gt + v_0 - \alpha\log\left|\frac{m(0)-\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right| \\
&\dot{x}_3^*(t) = -\sigma \quad \Rightarrow \quad x_3^*(t) = -\sigma t + C_3 = -\sigma t + m(0) + \sigma t_c = -\sigma(t-t_c) + m(0)
\end{aligned}
$$

✍ Conditions finales : $m_f^*,\ t_f^*,\ t_c$

$$
\begin{aligned}
&0 = -\frac{gt_f^{*2}}{2} + v_0 t_f^* + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t_f^*-t_c^*)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^*-t_c^*)}{m(0)}\right| - 1\right] \\
&0 = -gt_f^* + v_0 - \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^*-t_c^*)}{m(0)}\right| \\
&m_f^* = -\sigma(t_f^* - t_c^*) + m(0)
\end{aligned}
$$

MATLAB :

```
>> [mf,tc,tf]=solve('mf+(50*(tf-tc))-1500=0','-(1.63*tf)-(200*log(1-((tf-tc)/30)))=0',...
'-(0.815*tf^2)+6100+((6000*(1-((tf-tc)/30)))*(log(1-((tf-tc)/30))-1))')
```

- **Equations de la surface de commutation :** $m(0)/\sigma > \theta^* = t_f^* - t_c^* > 0$

$$\begin{aligned} x_{1c}^* &= -\frac{g\theta^{*2}}{2} - \alpha\theta^* - \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \\ x_{2c}^* &= g\theta^* + \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \end{aligned}$$

Nota :

- En éliminant θ^*, on obtient la surface de commutation $F(x_{1c}^*, x_{2c}^*) = 0$
- $\sigma\theta^*/m(0)$ est la proportion de masse initiale consommée

- **Approximation de la surface de commutation :** pour $\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25$

$$\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \sim -\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} - \frac{\sigma^2\theta^{*2}}{2m(0)^2}$$

$$x_{2c}^* = \left(g - \frac{\alpha\sigma}{m(0)}\right)\sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}} - \frac{\alpha\sigma^2}{m(0)^2}\frac{x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}$$

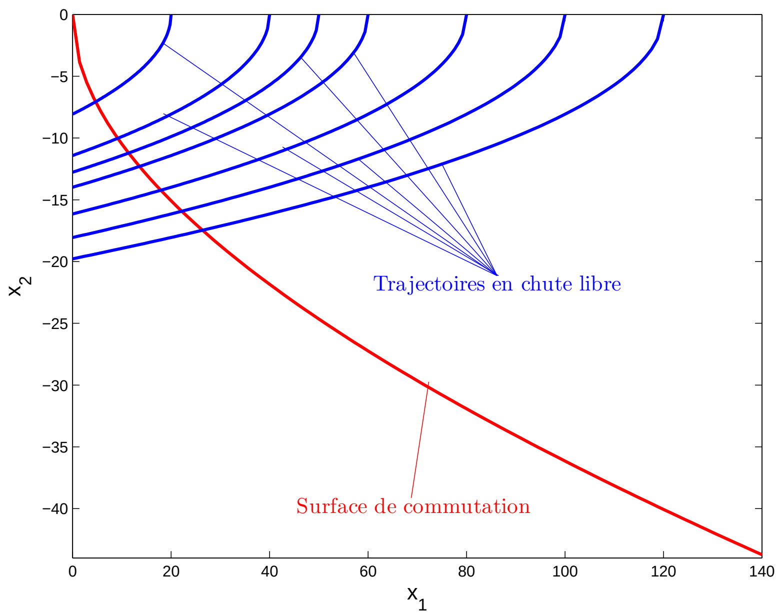
Nota : $\frac{\alpha\sigma}{m(0)} \geq g$ et $\theta^* = \sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)}}$

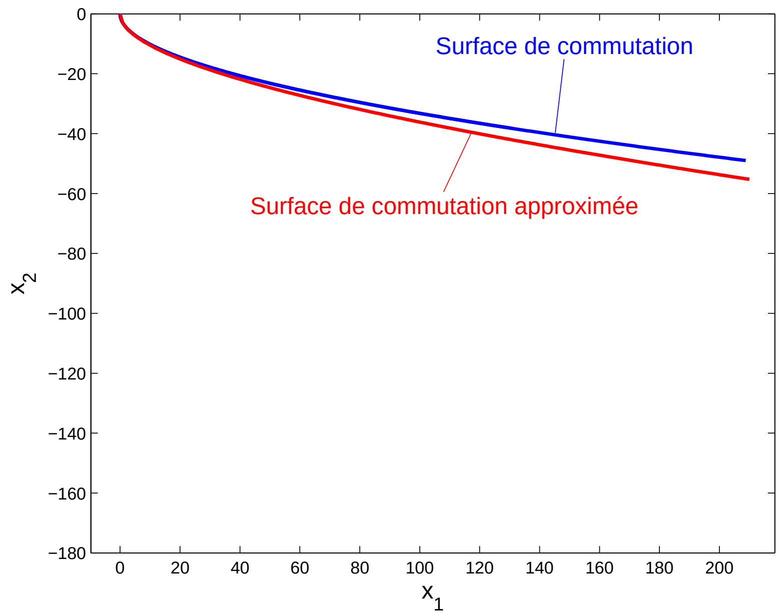
Exemple de l'alunissage VI

✍ Espace réalisable :

$$\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x_{1c} \leq 0.25^2 a \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \\ -0.5a\dfrac{m(0)}{\sigma} - 0.25^2 b \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \leq x_{2c} \leq 0 \end{cases}$$

où $a = 0.5(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)$ et $b = \frac{\alpha\sigma^2}{2m^2(0)}$ et la surface de commutation approximée :
$f(x_{1c}, x_{2c}) = bx_{1c} + 2a^2\sqrt{\frac{x_{1c}}{a}} + ax_{2c} = 0$



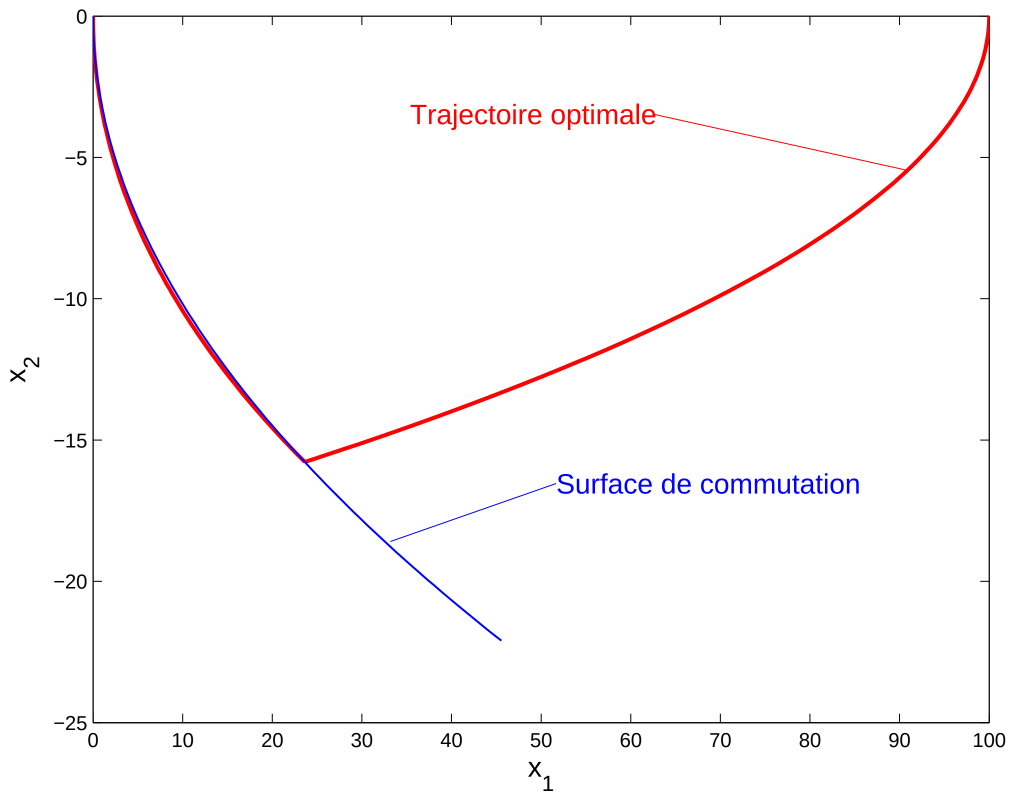


Exemple de l'alunissage VII : application numérique

Données numériques :

$$h_0 = 100 \text{ m} \quad m(0) = 1500 \text{ kg} \quad g = 1.63 \text{ m/s}^2$$

$$\sigma = 50 \text{ kg/s} \quad \alpha = 200 \text{ m/s}$$



$$t_f^* = 12.61 \text{ s} \qquad t_c^* = 9.68 \text{ s}$$

$$m_f^* = 1353,5 \text{ kg} \qquad J^* = 146.5 \text{ kg}$$

$$x_{1c}^* = 23.63 \text{ m} \qquad x_{2c}^* = -15.78 \text{ m/s}$$

$$0 \leq x_{1c} \leq 141.65 \text{ m} \qquad -44 \text{ m/s} \leq x_{2c} \leq 0$$

Nota : la surface de commutation et la trajectoire $(t_c \rightarrow t_f)$ optimale sont distinctes

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t)) + M^T(t,x(t))u(t)dt + \psi_0(t_f,x(t_f))$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t), \; x(t_0) = x_0$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \;:\; \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \;\forall\, i = 1,\cdots,m\}$
- La commande "entre" linéairement dans le problème

✍ Hamiltonien : fonction linéaire de u

$$H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = L(t,x) + M^T(t,x)u(t) + \lambda^T(t)\left[f(t,x) + G(t,x)u(t)\right]$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u_i^*(t) = \begin{cases} \underline{u}_i & \text{si} \quad \left[M^T(t,x) + \lambda^T(t)G(t,x)\right]_i > 0 \\ \overline{u}_i & \text{si} \quad \left[M^T(t,x) + \lambda^T(t)G(t,x)\right]_i < 0 \end{cases}$$

La commande optimale $u^*(t)$ est une commande bang-bang

Commande optimale bang-bang II

- Equations canoniques de Hamilton et problème aux deux bouts :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t),\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial L(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M^T(t,x)}{\partial x}u(t) - \frac{\partial f^T(t,x)}{\partial x}\lambda(t) - \lambda^T(t)\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}u(t),\ \lambda(t_f) = \lambda_f\end{aligned}$$

Exemple 6 *modèles linéaires et temps minimum*

$$\begin{aligned}\min_{-1\leq u(t)\leq 1} \quad & t_f \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \\ & x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = 0\end{aligned}$$

- *Hamiltonien :* $H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = \lambda^T(t)A(t)x(t) + \lambda^T(t)b(t)u(t)$
- *Principe de Pontryagin :*

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda^T(t)b(t) < 0 \\ -1 & \text{si} \quad \lambda^T(t)b(t) > 0 \end{cases} \qquad \lambda^T(t)b(t) \text{ fonction de commutation}$$

- *Condition de transversalité :* $\lambda^T(t_f)(A(t_f)x(t_f) + b(t_f)u(t_f)) + 1 = 0$
- *Equation d'état adjointe :* $\dot{\lambda}(t) = -A^T(t)\lambda(t)$

✍ Condition de singularité / commande i : $\left[M^T(t,x^*) + \lambda^T(t)G(t,x^*)\right]_i = 0$

$$H(t,x^*,\lambda^*) = L(t,x^*) + \sum_{j\neq i}^{m} M_j(t,x^*)u_j^*(t) + \lambda^{*T}(t)\left[f(t,x^*) + \sum_{j\neq i}^{m} G_j(t,x^*)u_j^*(t)\right]$$

u_i^* est un élément optimal singulier du vecteur de commande optimale u.

▼ **Définition 1** *solution singulière*

Pour un vecteur $u^*(t)$ dont les composantes sont singulières, si la condition $\dfrac{\partial H(t,x^*,\lambda^*)}{\partial u} = 0$ est vérifiée sur un intervalle de temps fini alors $u^*(t)$ est une solution singulière (arc singulier) totale (partielle) sur $[t_0,t_f]$ ($[t_1,t_2]$)

❒ **Théorème 4** *condition généralisée de Legendre-Clebsch*

Une condition nécessaire d'optimalité de l'arc singulier de commande $u^*(t)$ est

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^p H_u}{dt^p} = 0 \;\forall\; t \in [t_0,t_f]} \quad \text{et} \quad \boxed{(-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q} H_u}{dt^{2q}} \succeq 0 \;\forall\; t \in [t_0,t_f]}$$

pour p pair et q l'ordre de singularité de $u^*(t)$

$$
\begin{aligned}
\min_u \quad & \psi_0(x(t_f)) \\
\text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \ , u \in \mathbb{R}, \ \ x(0) \text{ donné} \\
& \psi(x(t_f)) = 0, \ \ t_f \text{ fixé}
\end{aligned}
$$

- Hamiltonien : $H = \lambda^T(f(x) + g(x)u)$
- Système d'état adjoint : $\dot{\lambda} = -f_x^T \lambda - g_x^T \lambda u$
- Conditions de transversalité : $\lambda(t_f) = \nabla_{x_f} \psi_0 + \psi_{x_f}^T \nu$
- Condition d'optimalité : $H_u = \lambda^T g(x) = 0$
- Conditions de singularité :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[H_u] \quad &= \quad \lambda^T g_x(f(x) + g(x)u) - \lambda^T(f_x + g_x u)g(x) = 0 \\
&= \quad \lambda^T(g_x f(x) - f_x g(x)) = \lambda^T q(x) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}[H_u] \quad &= \quad -\lambda^T f_x q(x) - \lambda^T g_x q(x) u + \lambda^T q_x(f(x) + g(x)u) = 0 \\
&= \quad u(\lambda^T q_x g(x) - \lambda^T g_x q(x)) + \lambda^T(q_x f(x) - f_x q(x)) = 0
\end{aligned}
$$

✍ Commande singulière : si $(\lambda^T q_x g(x) - \lambda^T g_x q(x)) \neq 0$

$$\boxed{u = -\frac{\lambda^T (q_x f(x) - f_x q(x))}{\lambda^T (q_x g(x) - g_x q(x))}}$$

✍ Surface singulière dans l'espace (λ, x) : (dimension 2n-2)

$$\begin{aligned} \lambda^T g(x) &= 0 \\ \lambda^T (g_x f(x) - f_x g(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Nota :

- Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ et t_f libre alors la dimension de la surface singulière est 2n-3

$$H = \lambda^T (f(x) + g(x)u) = \lambda^T f(x) = 0$$

- Si $n = 3$ alors l'équation de la surface singulière est donnée par :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ (g_x f(x) - f_x g(x))_1 & (g_x f(x) - f_x g(x))_2 & (g_x f(x) - f_x g(x))_3 \end{vmatrix} = 0$$

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{|u(t)|\leq 1} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dt$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 1,\ x(2) = 0$$

✍ Hamiltonien : $H(x,u,\lambda) = \dfrac{x^2}{2} + \lambda u$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= u^*(t),\ x^*(0) = 1 \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -x(t),\ x^*(2) = 0 \end{aligned}$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} \quad \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

- **Analyse des arcs singuliers :** $\lambda(t) = 0, \ \forall\, t \in [t_1, t_2] \subset [0, 2]$

$$\lambda(t) = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\lambda}(t) = 0 \ \Rightarrow \ x(t) = 0 \ \Rightarrow \ u(t) = 0$$

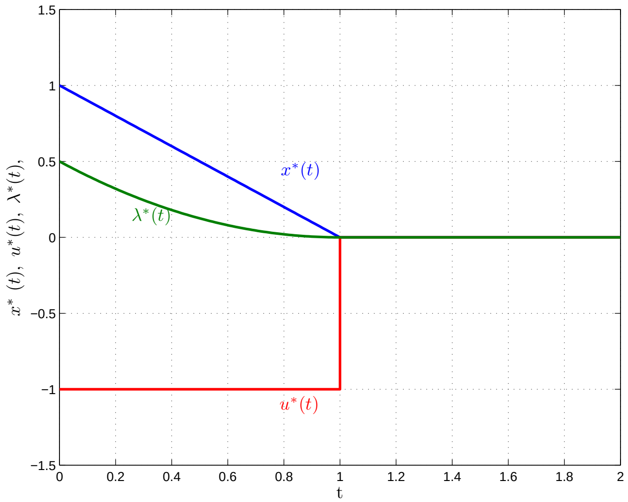
Nota : une commutation se produit en t_1 si $x(t_1) = 0$

- **Discussion :**
  - $\lambda^*(t) < 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\mathrm{sign}(\lambda^*) = 1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = t + 1$ donc pas de commutation et solution impossible
  - $\lambda^*(t) > 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\mathrm{sign}(\lambda^*) = -1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = 1 - t \ \Rightarrow \ t_c = 1$ alors $\lambda^*(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \lambda(0)$ avec $\lambda(0) = 0.5$

La solution optimale est donc donnée par :

$$0 \leq t \leq 1 \qquad u^*(t) = -1 \quad x^*(t) = 1 - t \qquad \lambda^*(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$1 \leq t \leq 2 \qquad u^*(t) = 0 \quad x^*(t) = 0 \qquad \lambda^*(t) = 0 \quad \lambda^*(2) = 0$$



Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{U}} & J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \ : \ -1 \leq u_i \leq 1 \ \forall\ i = 1, \cdots, m\}$
- La dynamique du sytème est supposée linéaire

✍ Hamiltonien : $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda^T(t)\,[Ax(t) + Bu(t)]$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & Ax^*(t) + Bu^*(t),\ \ x^*(t_0) = x_0,\ \ x^*(t_f) = 0 \\ \dot{\lambda}^*(t) & = & -A^T\lambda^*(t) \end{array}$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(B^T\lambda^*(t)) = \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & \text{si} & B^T\lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} & B^T\lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} & B^T\lambda^*(t) = 0 \end{array} \right.$$

✍ C.N.S. de singularité :

❒ **Théorème 5** *Le système admet une commande optimale en temps minimum singulière sur $[t_1, t_2]$ ssi le système n'est pas commandable*

✍ Unicité de la commande optimale et nombre de commutations :

❒ **Théorème 6** *Si le système est complètement commandable alors il n'existe qu'une seule commande extrémale égale à la commande optimale en temps minimum. Dans ce cas, si ses n pôles sont réels la commande optimale $u^*(t)$ peut commuter au plus $n-1$ fois*

✍ Existence de la commande optimale :

❒ **Théorème 7** *Si le système est complètement commandable et si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle non positive alors une commande optimale en temps minimum conduisant x_0 en $x(t_f) = 0 \; \forall \; x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe toujours*

Nota : si le système est temps-variant ($\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$), l'unicité des extrémales et de la commande optimale est toujours vraie

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{m} |u_i(t)| dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(t_0) = x_0, \; x(t_f) = x_f$$

- Hamiltonien : $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \sum_{i=1}^{m} |u_i(t)| + \lambda^T(t) \left[Ax(t) + Bu(t)\right]$

- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad x^*(t_0) = x_0, \; x^*(t_f) = x_f \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A^T\lambda^*(t) \end{aligned}$$

- Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{dez}(B^T\lambda^*(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |B^T\lambda^*(t)| < 1 \\ -\text{sign}(\text{B}^\text{T}\lambda^*(\text{t})) & \text{si} \quad |B^T\lambda^*(t)| > 1 \\ 0 \le u \le 1 & \text{si} \quad B^T\lambda^*(t) = -1 \\ -1 \le u \le 0 & \text{si} \quad B^T\lambda^*(t) = 1 \end{cases}$$

✍ C.S. de non singularité :

❒ **Théorème 8** *Si le système est commandable et la matrice A n'est pas singulière :*

$$\det(B_j A) \neq 0 \;\; \forall \; j = 1, \cdots, m \quad B = \left[\begin{array}{cccc} B_1 & \cdots & B_j & \cdots B_m \end{array} \right]$$

alors le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur $[t_0, t_f]$

✍ Unicité de la commande optimale en consommation minimale :

❒ **Théorème 9** *Si le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur* $[t_0, t_f]$ *alors il existe une unique commande optimale en consommation minimale.*

✍ Structure de commande en boucle ouverte ou fermée

Nota : pas de théorème général d'existence de la loi de commande optimale en consommation minimale