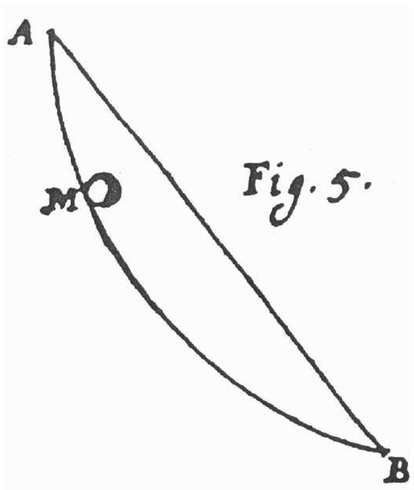
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 2

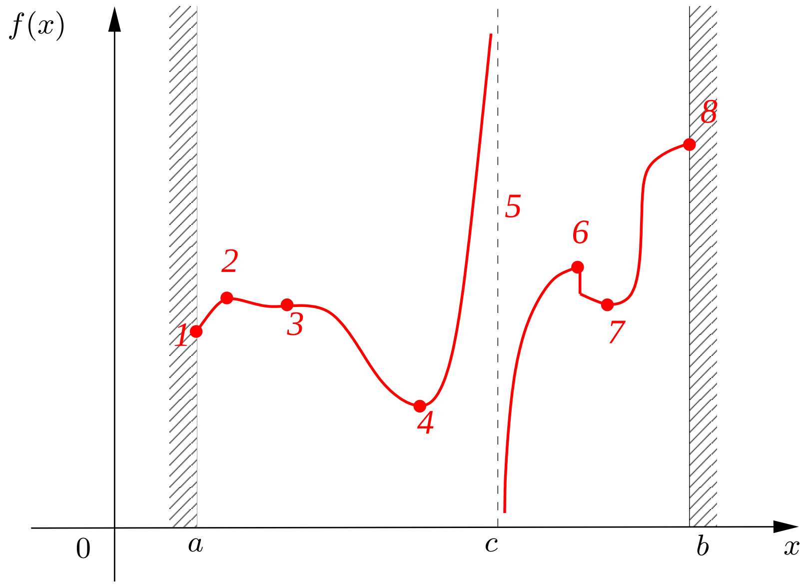
Rappels de PNL

Application à la commande optimale en temps discret



$$\min_{x \in D} \; f(x)$$

- (1) minimum local, (7) minimum local sur (c, b)
- (4) minimum local et global sur (a, c) et
- (3) point selle
- (2) maximum local
- (5) et (6) optima non analytiques
- (8) maximum local et global sur $[c, b]$



▼ **Définition 1** $x^* \in D \subset \mathbb{R}^n$ *est un minimum local (global) de* $f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \cap D$ *(*$\forall\ x \in D$*) alors :*

$$f(x^*) \leq f(x)$$

❒ **Théorème 1** *conditions nécessaires d'optimalité locale*

CN1 *Premier ordre : si* $x^* \in D$ *est un minimum de* $f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alors* $\nabla f(x^*) = 0$

CN2 *Deuxième ordre : si* $x^* \in D$ *est un minimum de* $f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alors*
$\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$

▼ **Définition 2** *point stationnaire*

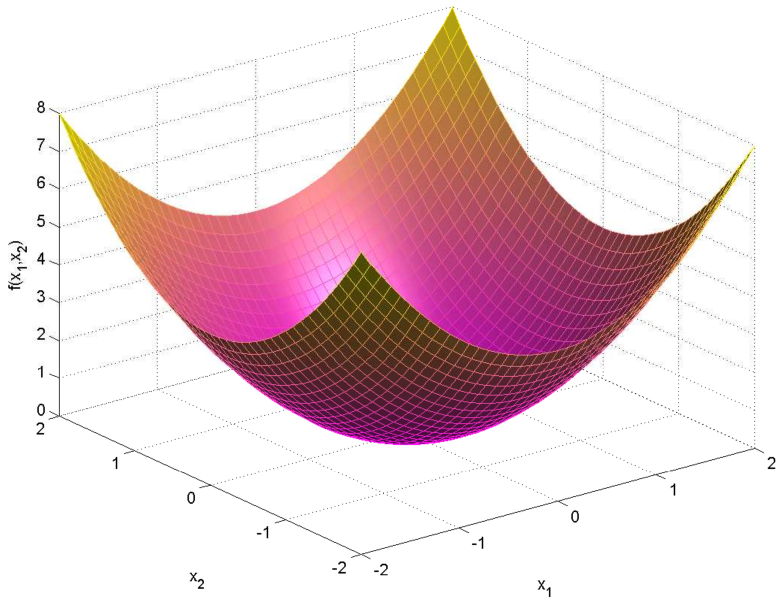
Tout point $x^*(t)$ qui vérifie la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre (CN1) est un point stationnaire de la fonction f.

❒ **Théorème 2** *conditions suffisantes d'optimalité locale*

CS *Deuxième ordre : si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$ alors $x^* \in D$ est un minimum local de f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

✍ **Exemple 1**

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *est un mini. global sur* $\mathbb{R}^2$
- $\nabla f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$
- $\nabla^2 f(x) = 2 \times \mathbf{1}_2$
- $(0, 0)$ *est un minimum global de f*



(PNL)

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{sous} & h(x) = \mathbf{0} \\ & g(x) \preceq 0 \end{array}$$

- Fonction coût (critère) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- Contraintes égalités $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
- Contraintes inégalités $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$

▼ Définition 3

- $x \in \mathbb{R}^n$ *est (strictement) réalisable de (PNL) si* $h(x) = \mathbf{0}$ *et* $g(x) \preceq 0$ *(*$\prec 0$*)*
- $x \in \mathbb{R}^n$ *réalisable est régulier si*

$$\mathrm{rg}(H) = \mathrm{rg}\left(\left[\begin{array}{ccc} \nabla h_1(x), & \cdots & , \nabla h_m(x) \end{array}\right]\right) = m$$

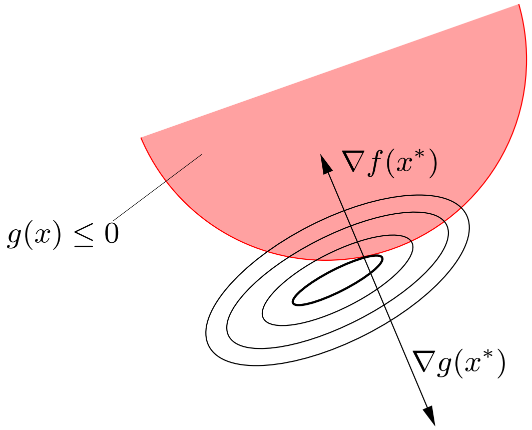
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^n$ *réalisable* $A(x) = \{j \mid g_j(x) = 0\}$ *est l'ensemble des contraintes actives (saturées). Si* $j \notin A(x)$*, la contrainte associée à* g_j *est inactive*
- $x^* \in \mathbb{R}^n$ *réalisable est un minimum local de (PNL) si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que pour tout point réalisable* x

$$\|x - x^*\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x^*) \leq f(x)$$

❒ **Théorème 3** *condition nécessaire au premier ordre d'optimalité locale (Karush-Kuhn-Tucker)*

CN1 *Si x^* est un minimum local régulier de (PNL) alors il existe deux vecteurs de multiplieurs de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :*

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1, \cdots, r$$
$$\mu_j^* = 0 \quad \forall\, j \notin A(x^*)$$



$L(x, \lambda, \mu) \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ est le lagrangien associé à (PNL) :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) + \mu' g(x)$$

▼ **Définition 4** *solutions de KKT*

Les solutions des conditions nécessaires au premier ordre sont appelées solutions de Karush-Kuhn-Tucker.

❒ **Théorème 4** *condition nécessaire au deuxième ordre d'optimalité locale*

CN2 *On suppose que les fonctions $f,\ h,\ g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Si x^*, point réalisable, est un optimum local alors $\exists\ \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\exists\ \mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :*

$$y'\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*,\mu^*)y \geq 0 \quad \forall\ y \in V(x^*)$$

où $V(x^*)$ est le sous-espace des variations réalisables au 1er ordre :

$$V(x^*) = \{y \mid \nabla h_i(x^*)'y = 0,\ i = 1,\cdots,m, \quad \nabla g_j(x^*)'y = 0 \quad j \in A(x^*)\}$$

❒ **Théorème 5** *condition suffisante d'optimalité locale*

$f,\ h,\ g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et soient $x^* \in \mathbb{R}^n$ réalisable, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\begin{array}{lll}
\nabla L(x^*,\lambda^*,\mu^*) = 0 & & \\
\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1,\cdots,r & \mu_j^* = 0 \quad \forall\ j \notin A(x^*) & \mu_j^* > 0 \quad \forall\ j \in A(x^*) \\
y'\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*,\mu^*)y > 0 \quad \forall\ y \neq 0 \in V(x^*) & &
\end{array}$$

alors x^* est un minimum local strict de (PNL)

Exemple 2

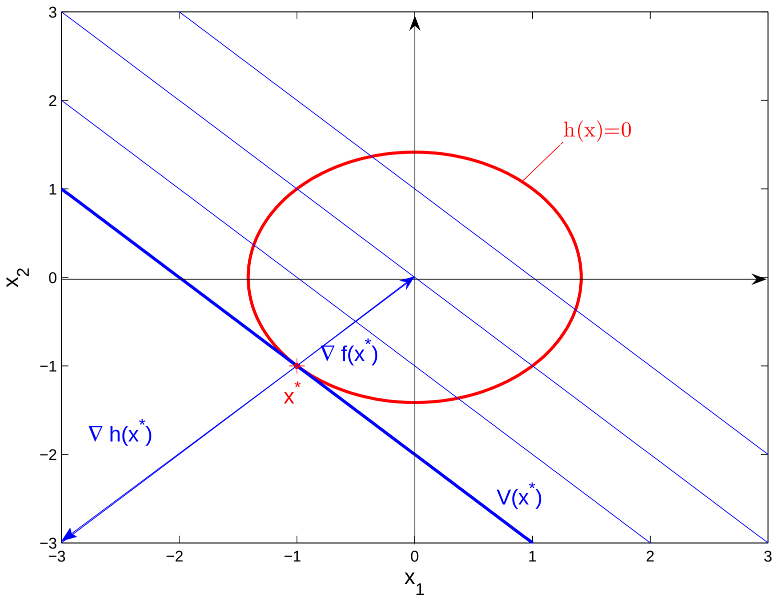
$$\min_{x_1,x_2} \quad x_1 + x_2$$
$$\text{sous} \quad x_1^2 + x_2^2 = 2$$

- *Minimum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- *Maximum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 3 *(McCormick 1967)*

$$\min_{x_1,x_2} \quad (x_1-1)^2 + x_2^2$$
$$\text{sous} \quad 2kx_1 - x_2^2 \leq 0$$

$0 < k < 1$:

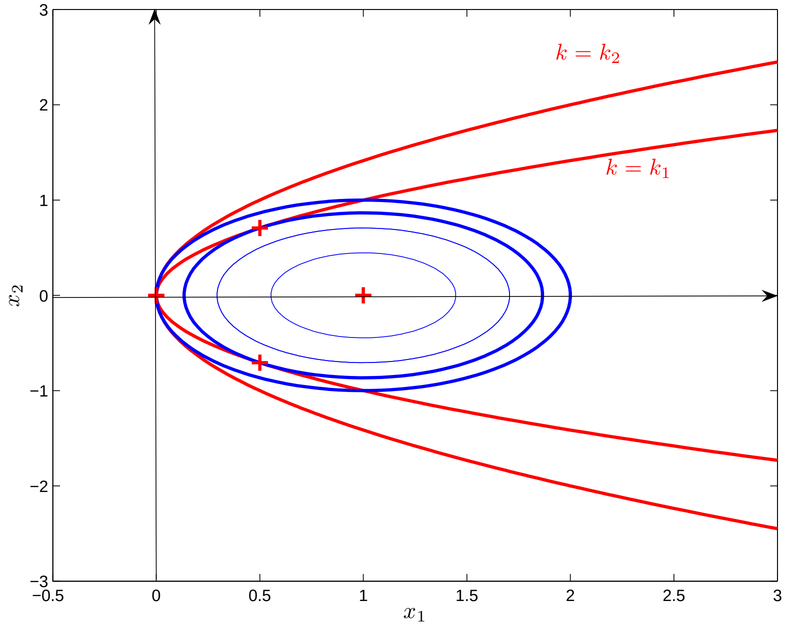
$$(x^*,\mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1-k & \pm\sqrt{2k(1-k)} \end{array}\right], 1\right)$$

$k \geq 1$:

$$(x^*,\mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right], 1/k\right)$$

$k \leq 0$:

$$(x^*,\mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right], 0\right)$$



Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$\begin{aligned}
\min_{x_i, u_i} \quad & J(x_i, u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i, u_i) + \psi_0(x_N) \\
\text{sous} \quad & x_i = f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}),\ i = 1, \cdots, N,\ N \text{ fixé} \\
& x_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 0, \cdots, N \\
& x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\
& u_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 0, \cdots, N-1 \\
& \psi(x_N) = 0
\end{aligned}$$

avec :

- $J(x_i, u_i)$ est une fonction de Bolza (Lagrange pour $\psi_0 \equiv 0$, Mayer pour $L_i \equiv 0$)
- L_i : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^2$ appelé Lagrangien
- ψ_0 : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^2$
- ψ : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^2$ définit les conditions de bord

▼ **Définition 5** *trajectoires d'état et de commande*

$U_{N-1} = (u_0, u_1, \cdots, u_{N-1})$ est une trajectoire de commande et
$x = (x_0, x_1, \cdots, x_N)$ est une trajectoire d'état.

➥ **Hypothèses 1** *La trajectoire d'état x est unique pour U_{N-1} donnée*

$$\begin{aligned} x_i &= f_{i-1}(f_{i-2}(f_{i-3}(\cdots), u_{i-2}), u_{i-1}), \quad i = 1, \cdots, N \\ x_i &= F_i(u_0, u_1, \cdots, u_{i-1}, x_0) = F_i(U_{i-1}, x_0) \quad i = 1, \cdots, N \end{aligned}$$

Le problème de CO en temps discret est un problème de PNL sous contraintes égalités (COD) :

$$\begin{aligned} \min_{U_{N-1}} \quad & J(U_{N-1}) = L_0(x_0, u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1}, x_0), u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1}, x_0)) \\ \text{sous} \quad & x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\ & u_i \in \mathbb{R}^m, \; i = 0, \cdots, N-1 \\ & \psi(F_N(U_{N-1}, x_0)) = 0 \end{aligned}$$

- Lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(U_{N-1},\nu) = \quad & L_0(x_0,u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1},x_0),u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1},x_0)) + \nu'\psi(F_N(U_{N-1},x_0)) \\ = \quad & \underbrace{L_0(x_0,u_0)}_{y_1} + \sum_{i=1}^{N-1} \underbrace{L_i(F_i(U_{i-1},x_0),u_i)}_{y_{i+1}-y_i} + \Psi(F_N(U_{N-1},x_0),\nu)\end{aligned}$$

- Passage à la forme de Mayer : $\tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \Psi(F_N,\nu) + y_N = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N,\nu)$

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + L_{i-1}(x_{i-1},u_{i-1}) \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \qquad \tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \tilde{f}_{i-1}(\tilde{x}_{i-1},u_{i-1}) = \tilde{F}_i(U_{i-1},\tilde{x}_0)$$

Le problème de commande optimale en temps discret est un problème de PNL sans contraintes :

$$(CODM) \quad \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{U_{N-1},\nu} & \tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1},x_0),\nu) \\ \text{sous} & \tilde{x}_0 = \tilde{\bar{x}} \text{ donné} \\ & u_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 0,\cdots,N-1 \end{array}$$

- CN d'optimalité au premier ordre :

  CN1 : si $U^*_{N-1} = (u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{N-1})$ est une trajectoire de commande optimale pour (PCODM) alors :

$$\boxed{\nabla_{u_i} J(U^*_{N-1}) = 0 \quad \forall\ i = 0, \cdots N-1}$$

- Calcul de $\nabla_{u_i} J(U_{N-1}) = \nabla_{u_i} \Psi(F_N(U_{N-1}, x_0))$:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_i} J(U_{N-1}) &= \nabla_{u_i} F_N \nabla \Psi(F_N) \\ &= \nabla_{u_i} f_i \underbrace{\nabla_{x_{i+1}} f_{i+1} \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1} \nabla \Psi(F_N)}_{\lambda_{i+1}} \end{aligned}$$

où :

$\nabla_{u_i} F_N$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla \Psi(F_N)$: vecteur gradient $n \times 1$

$\nabla_{u_i} f_i$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla_{x_i} f_i$: matrice gradient $n \times n$

▼ **Définition 6** *vecteur adjoint*

On définit le vecteur adjoint $\lambda_i \in \mathbb{R}^n, \ \forall \ i = 1, \cdots, N$ *par*

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{x_i} f_i \underbrace{\nabla_{x_{i+1}} f_{i+1} \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1} \nabla \Psi}_{\lambda_{i+1}} \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ \lambda_N &= \nabla \Psi \end{aligned}$$

Equation adjointe :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{x_i} f_i \lambda_{i+1} \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ \lambda_N &= \nabla \Psi \end{aligned}$$

La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre devient :

$$\boxed{\nabla_{u_i} J(U^*_{N-1}) = \nabla_{u_i} f_i \lambda_{i+1} = 0 \quad \forall \ i = 0, \cdots N-1}$$

- Calcul de $\nabla_{u_i}\tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \nabla_{u_i}\tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1},x_0))$:

$$\nabla_{u_i}\tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \nabla_{u_i}\tilde{f}_i\tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 0,\cdots,N-1$$

où :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\lambda}_i & = & \nabla_{\tilde{x}_i}\tilde{f}_i\tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 1,\cdots,N-1 \\ \tilde{\lambda}_N & = & \nabla\tilde{\Psi} \end{array} \quad \text{avec } \tilde{f}_i = \begin{bmatrix} f_i(x_i,u_i) \\ y_i + L_i(x_i,u_i) \end{bmatrix}$$

- Vecteur adjoint :

$$\tilde{\lambda}_N = \begin{bmatrix} \lambda_N \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\Psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\lambda}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{x_i} f_i & \nabla_{x_i} L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Equation adjointe et CN d'optimalité :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_i & = & \nabla_{x_i}\overbrace{(f_i'\lambda_{i+1} + L_i)}^{H_i(x_i,u_i,\lambda_{i+1})}, \quad \forall\, i = 0,\cdots N-1 \\ \lambda_N & = & \nabla\Psi \end{array}$$

$$\nabla_{u_i}\overbrace{(f_i'\lambda_{i+1} + L_i)}^{H_i(x_i,u_i,\lambda_{i+1})} = 0$$

CN2 : si $U^*_{N-1} = (u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{N-1})$ est une trajectoire de commande localement optimale pour (COD) alors :

$$\nabla_{u_i} H_i(x^*_i, u^*_i, \lambda^*_{i+1}) = 0 \quad \forall\ i = 0, \cdots N-1$$

où le Hamiltonien est défini par $H_i(x_i, u_i, \lambda_{i+1}) = L_i(x_i, u_i) + \lambda'_{i+1} f_i(x_i, u_i)$ et l'équation d'état adjointe est donnée par :

$$\lambda^*_i = \nabla_{x_i} H_i(x^*_i, u^*_i, \lambda^*_{i+1}), \quad i = 1, \cdots, N-1$$

avec la condition terminale $\lambda^*_N = \nabla\Psi(X^*_N)$ et la condition initiale $x_0 = \overline{x}$

Nota : il est nécessaire de résoudre un problème aux deux bouts (Two-Point Boundary Value Problem, TPBVP) par la résolution d'un système d'équations récurrentes non linéaires de dimension $N(2n+m)$ en les inconnues x_i, λ_i et u_i.

Exemple 4 : *Perle*

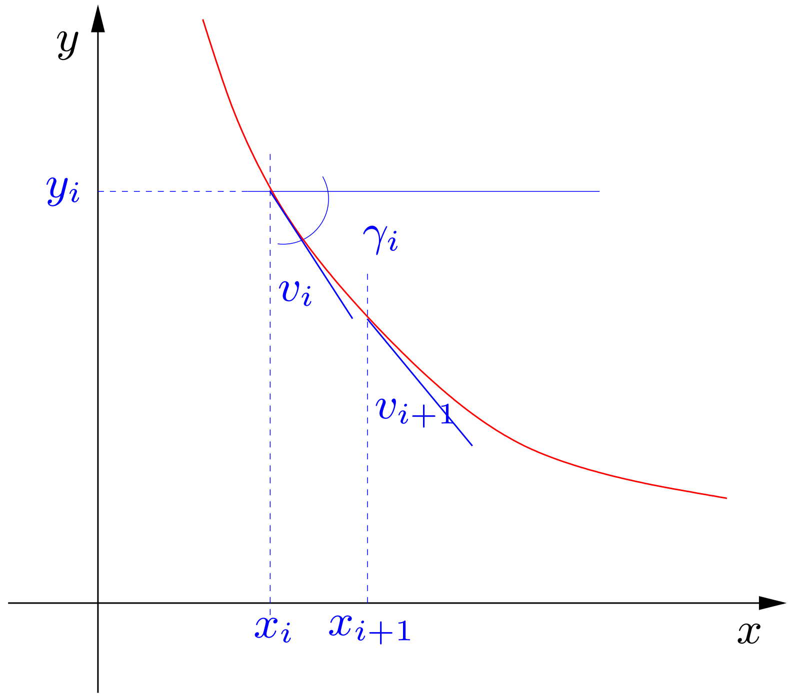
Une perle glisse sans frottement dans un plan (x, y) le long d'un collier dans un champ de gravité donné par l'accélération g. Déterminer la forme de la courbe faite par le collier pour atteindre l'abscisse maximale en un temps $t_f = N\Delta T$ donné.

- *Equation des forces :*

$$v_{i+1} = v_i + g\Delta T \sin\gamma_i$$

- *Equations de la cinématique :*

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta s_i \cos\gamma_i \\ \Delta s_i &= \Delta T v_i + \frac{g}{2}\Delta T^2 \sin\gamma_i \end{aligned}$$



❶ Modélisation :

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + (v_i \Delta T + \tfrac{g}{2} \Delta T^2 \sin\gamma_i)\cos\gamma_i \qquad x(0) = 0 \\
v_{i+1} &= v_i + g\Delta T \sin\gamma_i \qquad v(0) = 0
\end{aligned}
$$

❷ Fonction coût : $J = -x_N$

❸ Hamiltonien :

$$
H_i = \lambda^v_{i+1}(v_i + g\Delta T \sin\gamma_i) + \lambda^x_{i+1}(x_i + \Delta T v_i \cos\gamma_i + \frac{g\Delta T^2}{2}\sin\gamma_i\cos\gamma_i)
$$

❹ TPBVP :

$$
\begin{aligned}
\lambda^v_{i+1} - \lambda^v_i - \tfrac{t_f}{N}\cos\gamma_i &= 0 \qquad \lambda^v_N = 0 \\
\lambda^x_i &= -1 \\
g\tfrac{t_f}{N}\lambda^v_{i+1}\cos\gamma_i + \tfrac{t_f}{N} v_i \sin\gamma_i - \tfrac{g t_f^2}{2N^2}\cos 2\gamma_i &= 0 \\
v_{i+1} - v_i - g\tfrac{t_f}{N}\sin\gamma_i &= 0 \qquad v_0 = 0 \\
x_{i+1} - x_i - \tfrac{t_f}{N} v_i \cos\gamma_i - \tfrac{g t_f^2}{2N^2}\sin\gamma_i\cos\gamma_i &= 0 \qquad x_0 = 0
\end{aligned}
$$

Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i, u_i} \quad & J(x_i, u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i, u_i) + \psi_0(x_N) \\
\text{sous} \quad & x_i = f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}),\ i = 0, \cdots, N-1,\ N \text{ fixé} \\
& x_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \cdots, N \quad x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\
& \psi(x_N) = 0
\end{aligned}
$$

$\psi_0(x_N)$ est remplacée par $\Psi(x_N, \nu) = \psi_0(x_N) + \nu' \psi(x_N)$. Le hamiltonien et les conditions d'optimalité (équations canoniques de Hamilton) ne changent pas.

- Hamiltonien :

$$H_i(x_i, \lambda_{i+1}, u_i) = \lambda_{i+1}' f_i(x_i, u_i) + L_i(x_i, u_i)$$

- Equation adjointe :

$$\lambda_i^* = \nabla_{x_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*), \quad \lambda_N^* = \nabla_x \Psi(x_N^*, \nu^*) = \nabla_x \psi_0(x_N^*) + \nu'^* \nabla_x \psi(x_N^*)$$

- Equation d'optimalité :

$$\nabla_{u_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*) = 0, \quad \forall\ i = 0, \cdots, N-1$$