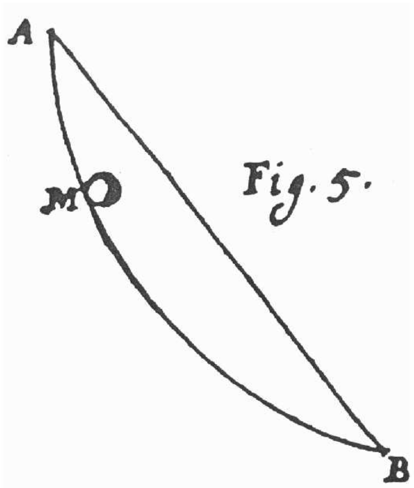
Commande optimale des systèmes dynamiques

Introduction et historique



Renseignements pratiques

Enseignant Denis Arzelier : Directeur de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page http ://homepages.laas.fr/˜arzelier/cours.html

Organisation du cours

❶ 20h : 3x2=6 h (CM) + 3x2=6 h TD + 2x4 h (TP)

- ➪ Cours magistral, bureaux d'études
- ➪ Support de cours : transparents
- ➪ Exercices sur feuille et TP MATLAB

Enseignant Frédéric Gouaisbaut

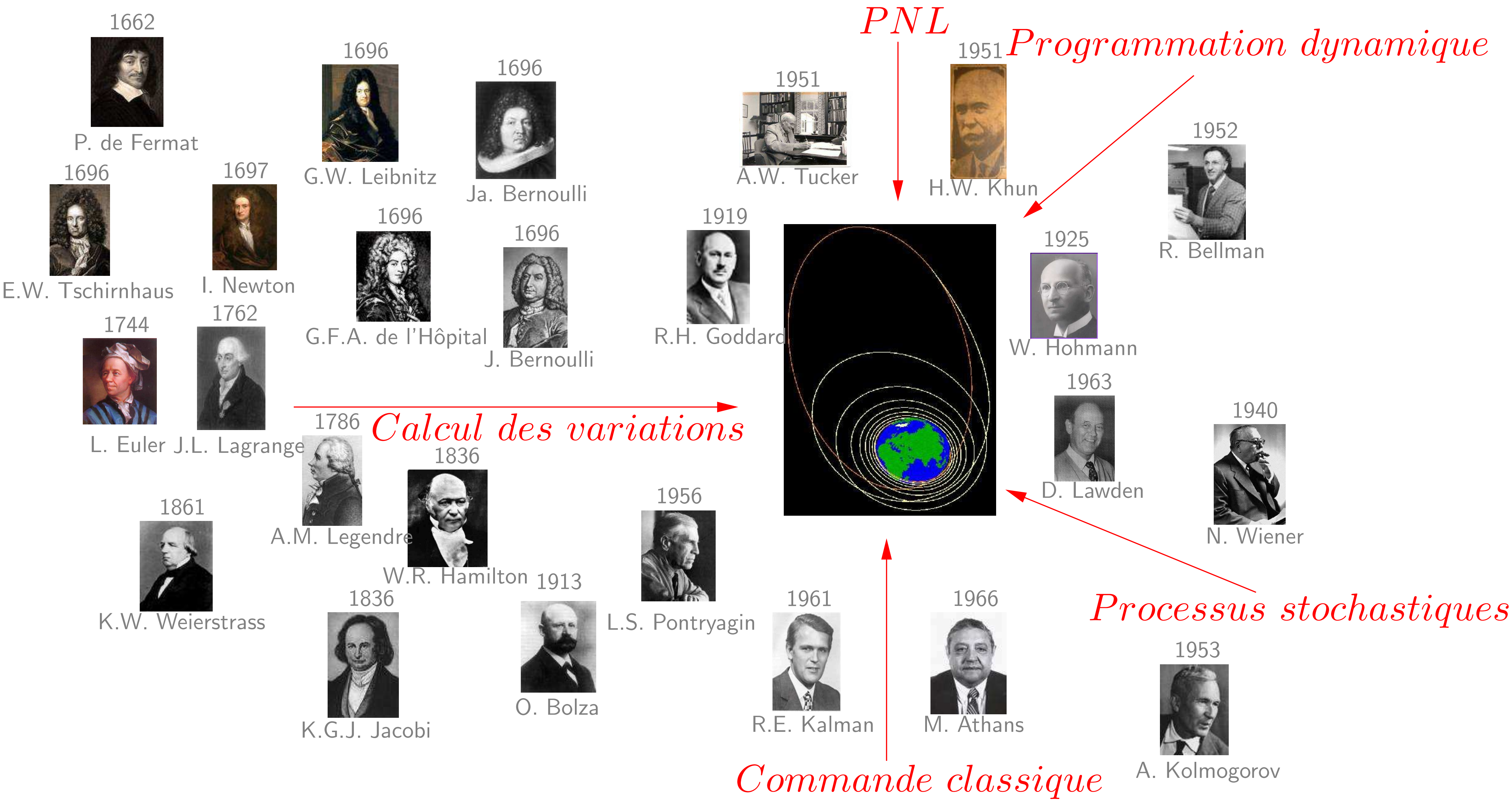
Organisation du cours

❷ 8h : 2 h (CM) + 2 h TD + 4 h (TP)

- ➪ Cours magistral et bureau d'études
- ➪ Support de cours : transparents
- ➪ Exercices sur feuille et TP MATLAB

❸ 1 Examen 2 h

Durée totale : 30h


1662
P. de Fermat
1696
G.W. Leibnitz
1696
Ja. Bernoulli
1696
E.W. Tschirnhaus
1697
I. Newton
1696
G.F.A. de l'Hôpital
1696
J. Bernoulli
1744
L. Euler
1762
J.L. Lagrange
1786
A.M. Legendre
1836
W.R. Hamilton
1861
K.W. Weierstrass
1836
K.G.J. Jacobi
1913
O. Bolza
1956
L.S. Pontryagin
Calcul des variations
1919
R.H. Goddard
1951
A.W. Tucker
PNL
1951
H.W. Khun
Programmation dynamique
1952
R. Bellman
1925
W. Hohmann
1963
D. Lawden
1940
N. Wiener
Processus stochastiques
1953
A. Kolmogorov
1961
R.E. Kalman
1966
M. Athans
Commande classique

Le problème de calcul des variations est défini sur l'espace de Banach $\mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\min_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} \quad & J(x, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) \\
\text{sous} \quad & \Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \\
& \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \\
& x(t_0) = x_0 \\
& x(t_f) = x_f \quad t_f \text{ libre ou fixé}
\end{aligned}$$

avec :

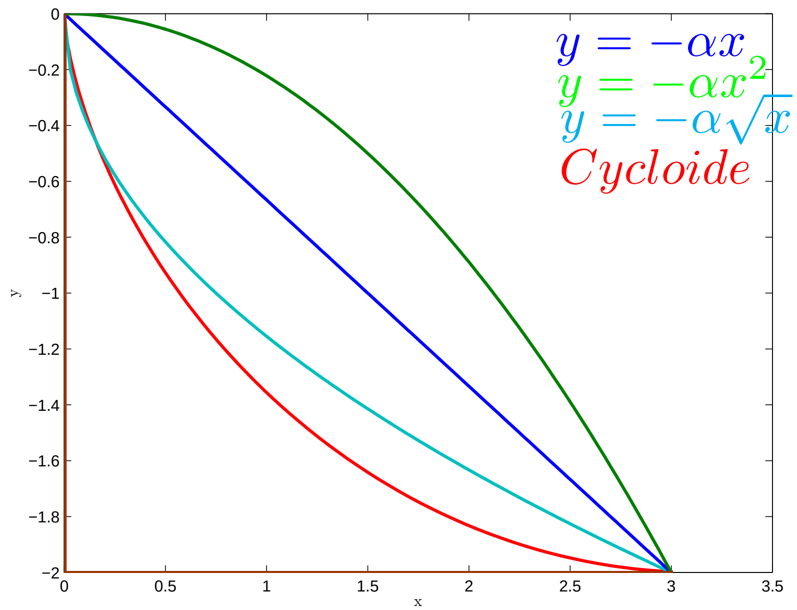
- $J(x, t_f)$ est une fonctionnelle de Bolza (Lagrange pour $\psi_0 \equiv 0$, Mayer pour $L \equiv 0$)
- $L \ : \ V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- $\psi_0 \ : \ W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- $\psi \ : \ W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- $\Phi \ : \ V \to \mathbb{R}^s$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes de phase ou contraintes holonomes si $\Phi(t, x(t)) = 0$
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Si dans un plan vertical deux points A et B sont donnés, alors il est demandé de spécifier l'orbite AMB d'un point mobile M, le long de laquelle, partant de A, et sous la seule influence de son propre poids, il arrive en B en un temps le plus court.

Jean Bernoulli, Acta Eruditorum, juin 1696

Contributeurs :

- 1638 - Galiléo Galilée (Arc de cercle)
- 1696 - Jean et Jacob Bernoulli
- 1697 - Isaac Newton
- 1696 - Gottfried Wilhelm Leibnitz
- 1696 - Guillaume-François-Antoine de Sainte Mesme de l'Hôpital
- 1696 - Ehrenfried Walther von Tschirnhaus



Soit $C(t)$ la courbe paramétrée par t et définie par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ vérifiant l'équation suivante $y = f(x)$ de $A(0,0)$ vers $B(a,b) = (3,-2)$

Mise en équations :

- Déplacement infinitésimal :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

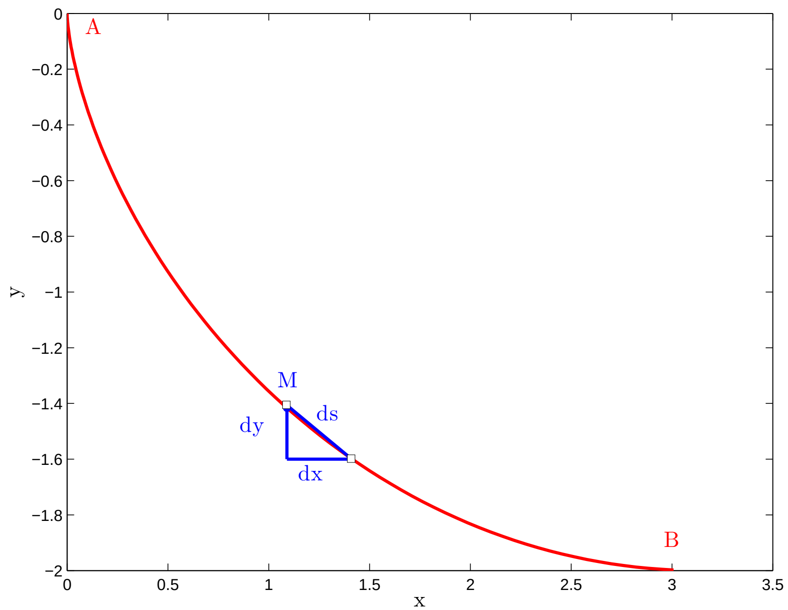
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Temps de parcours infinitésimal :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx}{\sqrt{2gy}}$$

- Temps total :

$$T = \int_0^{s(t_f)} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$



Problème de calcul des variations :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx \\ \text{sous} \quad & y(x(0)) = 0 \\ & y(a) = b \end{aligned}$$

Solution du brachistochrone par Jean Bernoulli

$$T_n = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{\sqrt{2gy_{i+1}}}$$

La courbe solution doit suivre le trajet de la lumière dans un milieu où la vitesse augmente selon l'accélération terrestre (g).

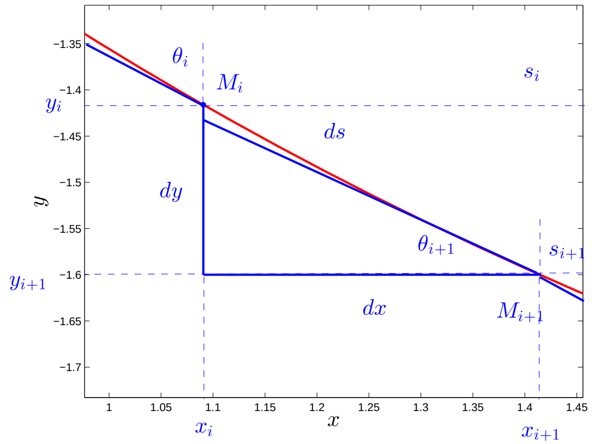
Mise en équations :

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Loi de la réfraction (loi de Snell - 1625) :

$$\frac{\sin\theta}{v} = K = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2gy}}$$



1- La vitesse est nulle en A

2- La vitesse est bornée par $v_{max} = \sqrt{2g|b|}$

- Trajectoire sur une courbe :

$$\sin\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$y(1 + (\frac{dy}{dx})^2) = \frac{1}{2gK^2} = |b| \quad \frac{1}{\sqrt{2g|b|}} = K$$

Opposée d'une cycloïde générée par un cercle de diamètre $|b|$

- Problèmes isopérimétriques :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})}\int_a^b L(t,x,\dot{x})dt,\ \text{sous}\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2,\ G(x)=\int_a^b g(t,x,\dot{x})dt=l$$

pb. de Didon :

$$\max_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})}\int_a^b xdt,\ \text{sous}\ b-a\leq l,\ \int_a^b(1+\dot{x}^2)^{1/2}dt=l$$

- Problèmes de Newton (surfaces de révolution de plus faible résistance en mouvement dans un fluide) :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})}\int_a^b 2\pi x\frac{\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2}dt,\ \text{sous},\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2$$

- Principes de mécanique (principe de moindre action de Maupertuis (1744)) :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([t_a,t_b],\mathbb{R}^{3N})} S=\int_{t_a}^{t_b} T(x)-U(t,x)dt$$

≪ Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite possible ≫

Le problème de commande optimale est défini sur l'espace
$\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \times \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \quad t_0, \ t_f \text{ libres ou fixés} \\ & u(t) \in \mathcal{U} \text{ espace topologique de } \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \text{ compact} \end{aligned}$$

avec :

- $L \ : \ V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- $\psi_0 \ : \ W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- $\psi \ : \ W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- $f \ : \ V \to \mathbb{R}^n$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes dynamiques
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

- Problème de Cauchy : existence et unicité de la solution de
  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0) = x_0$
  1- $u(t) \in \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ + $f(., x, .) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
  + $f(t, ., u) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (différentiable partout sauf en les points de discontinuité de $u(t)$)
  2- $u(t) \in \mathcal{L}^\infty_{loc}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ + $f(., x, .) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
  + $f(t, ., u) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$
- Equivalence des pb. de Lagrange ($\psi_0 = 0$), pb. de Mayer ($L = 0$) et pb. de Bolza

➪ Problème de Mayer :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x^T \end{bmatrix}^T,\ \dot{x}^0(t) = L(t, x, u),\ x^0(t_0) = 0$$

➪ Problème de Lagrange :

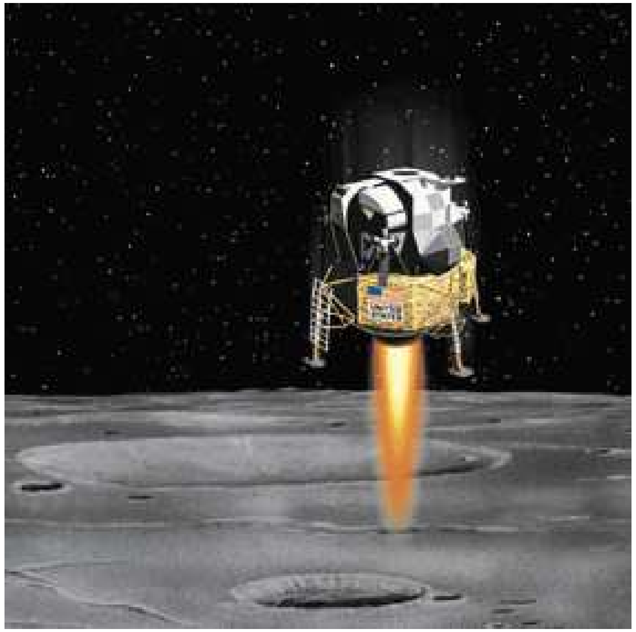
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x^T \end{bmatrix}^T,\ \dot{x}^0(t) = 0,\ x^0(t_f) = \frac{1}{t_f - t_0}\psi_0(t_f, x(t_f))$$

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant alunir (accélération de la gravité sur la lune (g) en douceur (avec une vitesse $v(t)$ nulle à l'arrivée) à partir d'une hauteur donnée h_0 et avec une vitesse initiale donnée v_0 et en utilisant une poussée $T(t)$ toujours orientée dans le sens inverse de sa chute.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot{h}(t) = v(t)$$
$$\dot{v}(t) = -g + \frac{T(t)}{m(t)}$$
$$\dot{m}(t) = -\frac{T(t)}{\alpha}$$



- Conditions aux limites :

$$h(0) = h_0 > 0,\ v(0) = v_0 \leq 0,\ m(0) = M + F$$
$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0,\ m(t_f) \geq M$$

- $J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f)$
- Contraintes : $0 \leq T(t) \leq \mu$

Problème de Lagrange à temps final libre :

$$\min_{0\le u(t)\le 1} \quad -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

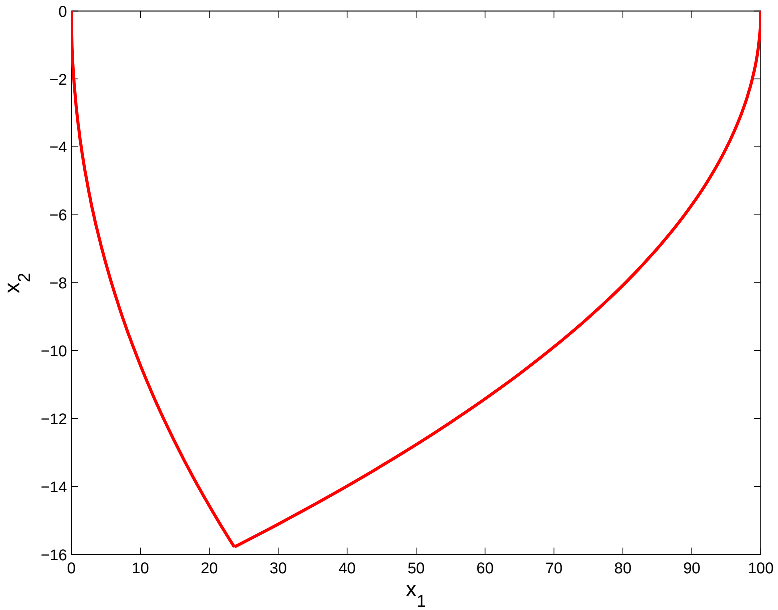
$$\dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)}$$

$$\dot{x}_3(t) = -\sigma u(t),\ x_1(0) = h_0 > 0$$

$$x_2(0) = v_0 \le 0$$

$$x_3(0) = M + F,\ x_1(t_f) = 0$$

$$x_2(t_f) = 0,\ M + F \ge x_3(t_f) \ge M,\ 0 \le u(t) \le \mu$$



Nota :

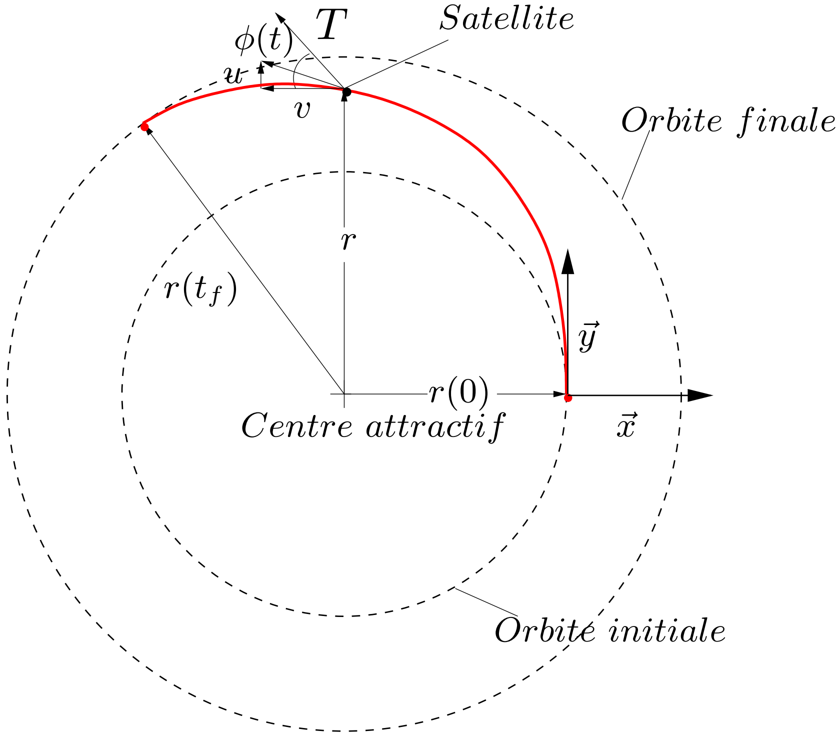
- Problème en consommation minimale
- Problème à temps final libre et avec contraintes inégalités sur la commande et l'état final

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps minimal (t_f) l'orbite circulaire de rayon donné ($r(t_f)$) à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot r(t) = u(t)$$
$$\dot u(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot m(t)|t}$$
$$\dot v(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot m(t)|t}$$



- Conditions aux limites :

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\quad v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}},\ r(t_f) = r_f$$

- Fonctionnelle : $J(t_f) = \int_0^{t_f} dt = t_f$

Problème de Mayer en temps minimum :

$$\min_{u(t)} \quad t_f$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

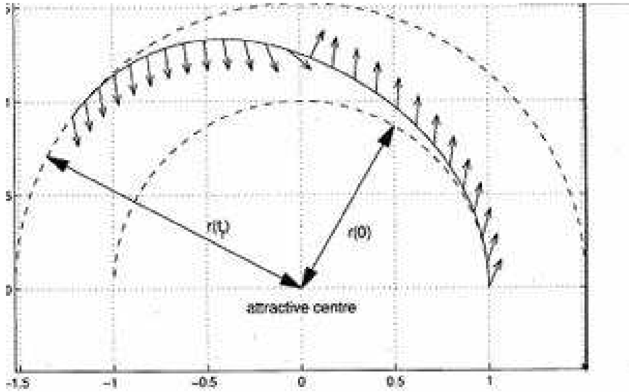
$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_3^2(t)}{x_1} - \frac{\mu}{x_1^2} + \frac{T \sin u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{T \cos u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$

$$x_1(0) = r_0 > 0, \; x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(0)}}$$

$$x_2(t_f) = 0, \; x_3(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(t_f)}}, \; x_1(t_f) = r_f$$



Nota :

- Problème en temps minimal
- Problème à temps final libre et sans contraintes inégalités

Résolution d'un problème de CO

❶ Modélisation mathématique du problème de commande optimale

- ➪ Différents groupes de variables (état, commande)
- ➪ Fonctionnelle de coût (Lagrange 1762, Mayer 1878, Bolza 1913)
- ➪ Contrainte différentielle (équation dynamique)
- ➪ Conditions aux limites (initiales, terminales)
- ➪ Contraintes algébriques (inégalités, égalités, ensembles, espaces)
- ➪ Ensemble d'hypothèses (continuité, différentiabilité)

❷ Caractérisation d'un optimum

- ➪ Conditions nécessaires (variation d'ordre 1, principe du maximum)
- ➪ Conditions suffisantes (variation du deuxième ordre)
- ➪ Théorie de Hamilton-Jacobi

❸ Résolution des conditions d'optimalité

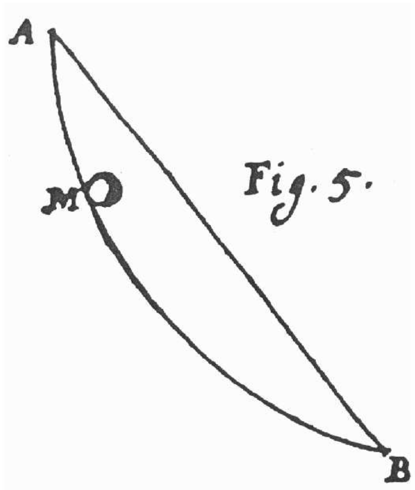
- ➪ Approche exacte
- ➪ Méthodes numériques

Pré-requis

- Mathématiques :
  - ➩ Algèbre linéaire de base
  - ➩ Calcul différentiel et intégral
  - ➩ Eléments d'analyse fonctionnelle
  - ➩ Programmation non linéaire et théorie de l'optimisation statique
- Automatique élémentaire :
  - ➩ Méthodes d'analyse et de commande fréquentielles des modèles LTI
  - ➩ Méthodes d'analyse et de commande dans l'espace d'état des modèles LTI
- Informatique : MATLAB

Commande optimale des systèmes dynamiques

Eléments de calcul des variations



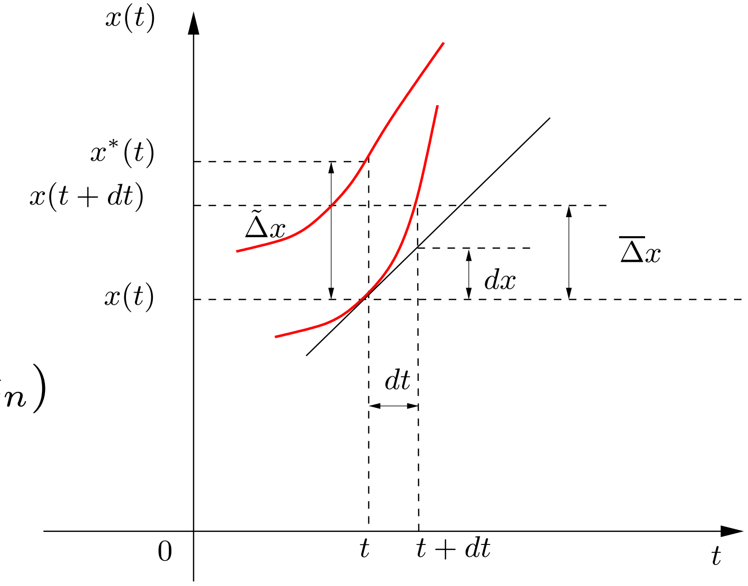
- Accroissement d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[a,b]$

$$\overline{\Delta} x = x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t)\Delta t^2 + \cdots = dx + \frac{1}{2!}d^2x + \cdots$$

Nota :

- t variable indépendante : $\overline{\Delta} t = dt$, $d(dt) = d^2 t = 0$
- La différentielle d'une fonction x est une différentielle dépendante $dx = \dot{x}(t)dt$
- Si $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_{t_1} x(t) &= x(t_1+\Delta t_1, t_2, \cdots, t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
\overline{\Delta} x(t) &= x(t_1+\Delta t_1, \cdots, t_n+\Delta t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
dx &= x_{t_1}(t)dt_1 + \cdots + x_{t_n}(t)dt_n = \nabla x(t)^T dt \\
d^2x &= dt^T \nabla^2 x(t) dt
\end{aligned}$$



- Variation à temps fixé d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{\Delta} x(t) = x^*(t) - x(t) = \delta x(t) + \frac{1}{2!}\delta^2 x(t) + \cdots$$

- Variation à temps libre d'une fonction $x(t) \ : \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Delta x(t,dt) = x^*(t+dt) - x(t) &= \tilde{\Delta} x(t) + \overline{\Delta} x^*(t,dt) \\
&= \delta x(t) + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x(t) + dx^* + \tfrac{1}{2!} d^2 x^* + \cdots \\
&= \delta x + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}\ddot{x}^* dt^2 + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}[\ddot{x}^* dt^2 + \delta^2 x] + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x} dt + \tfrac{1}{2!}[2\delta\dot{x} dt + \delta^2 x + \ddot{x} dt^2] + \cdots
\end{aligned}$$

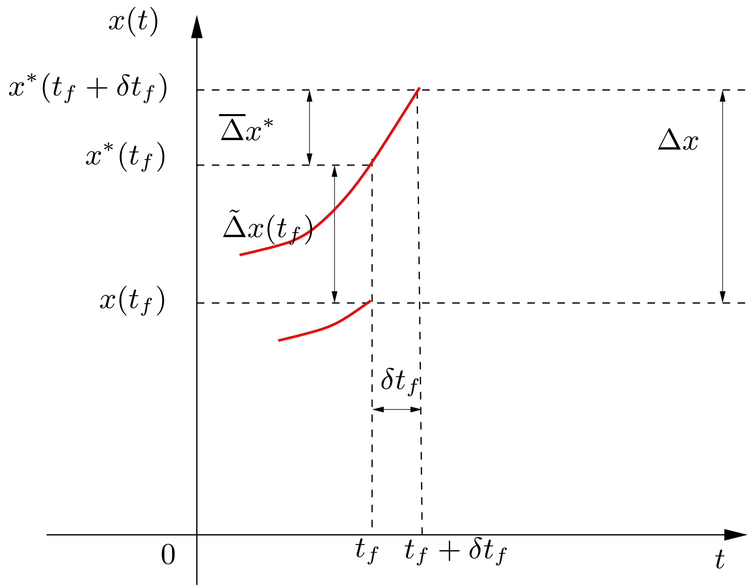
Variations au premier ordre et au deuxième ordre :

$$\Delta^1 x = \delta x + \dot{x} dt \qquad \Delta^2 x = [2\delta\dot{x} dt + \delta^2 x + \ddot{x} dt^2]$$

$$\Delta(.) = \delta(.) + \tfrac{d}{dt}(.)dt \qquad \Delta^2(.) = \Delta(\Delta(.))$$

Nota :

- $\dot{x}^* = \dot{x} + \tilde{\Delta}\dot{x} = \dot{x} + \delta\dot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\dot{x} + \cdots$
- $\ddot{x}^* = \ddot{x} + \tilde{\Delta}\ddot{x} = \ddot{x} + \delta\ddot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\ddot{x} + \cdots$



Exemple 1

Soit la fonction $x(t) = (t_1 - t_2)^2$ *alors*

$$\nabla x = \begin{bmatrix} 2(t_1 - t_2) \\ -2(t_1 - t_2) \end{bmatrix} \quad \nabla^2 x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\overline{\Delta} x(t) = 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 - 2dt_1 dt_2 + dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \Delta x(t, dt) = & \quad \delta x + 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 + \frac{1}{2}(2\delta \dot{x}^T dt + \delta^2 x - 4dt_1 dt_2 + 2dt_1^2 + 2dt_2^2) + \\ = & \quad \Delta^1 x + \tfrac{1}{2}\Delta^2 x + \cdots \end{aligned}$$

▼ **Définition 1** *$J(f)$ est une fonctionnelle si pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$ correspond une valeur de J (J est une fonction de fonction). $\mathcal{F}$ est le champ de définition de la fonctionnelle.*

$$J(f(t)),\ f(t) \in \mathcal{F},\ t \in\ (a, b)$$

Exemple 2 *: Aire sous une courbe f*

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

Le champ $\mathcal{F}$ de la fonctionnelle $I(f)$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0\ ,\ 1]$.

Exemple 3 *: Energie totale d'une membrane élastique sous une charge Q*

$$E(u) = \frac{1}{2}a\int\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy - \int\int_S Q(x,y)u(x,y)dxdy$$

Le champ $\mathcal{U}$ de la fonctionnelle $E(u)$ est l'ensemble des fonctions u deux fois continûment différentiables sur le domaine S.

▼ Définition 2

- $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local fort de la fonctionnelle* $J(x(t))$ *si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$

$$\|x(t) - x^*(t)\|_0 < \epsilon \ \Rightarrow \ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global*

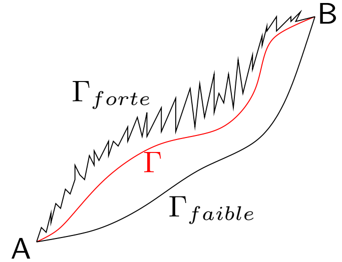
- $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local faible si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$,

$$\|x(t) - x^*(t)\|_1 < \epsilon \ \Rightarrow \ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global faible*

$$\|x(t)\|_0 = \sup_{a \leq t \leq b} \|x(t)\|$$

$$\|x(t)\|_i = \sup_i \|x^{(i)}(t)\|_0$$



- Chercher $x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ est restrictif

Exemple 4 : *Bolza*

$$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(1-\dot{x})^2 dt \quad \text{sous} \quad x(-1) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = 0 \quad \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 0 \quad \text{et} \quad x^* = t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1$$

La solution x^* est AC et $\dot{x}^*$ est discontinue en 0

$$x^* \in \mathcal{KC}^1([-1, 1], \mathbb{R}^n)$$

Exemple 5 : *contre-exemple de Hilbert*

$$J(x) = \int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2 dt \quad \text{sous} \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = t^{1/3}$$

x^* est AC telle que $J(x^*)$ est finie et $\dot{x}^*$ est non bornée en 0

$$x^* \in \mathcal{AC}([0, 1], \mathbb{R}^n)$$

▼ **Définition 3** *variation d'une fonctionnelle différentiable*

$$\begin{aligned}\Delta J &= \tilde{\Delta} J(x, x^*, t_0, t_f) + \overline{\Delta} J(x^*, t_0, \delta t_0, t_f, \delta t_f) \\ &= J(x^*, t_0, t_f) - J(x, t_0, t_f) + J(x^*, t_0 + \delta t_0, t_f + \delta t_f) - J(x^*, t_0, t_f) \\ &= \delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f) + \epsilon_x \|\delta x\| + \epsilon_{t_0} \|\delta t_0\| + \epsilon_{t_f} \|\delta t_f\|\end{aligned}$$

où $\delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f)$ est une fonctionnelle linéaire unique appelée variation au premier ordre si J est différentiable.

❐ **Théorème 1** *théorème fondamental du calcul des variations*

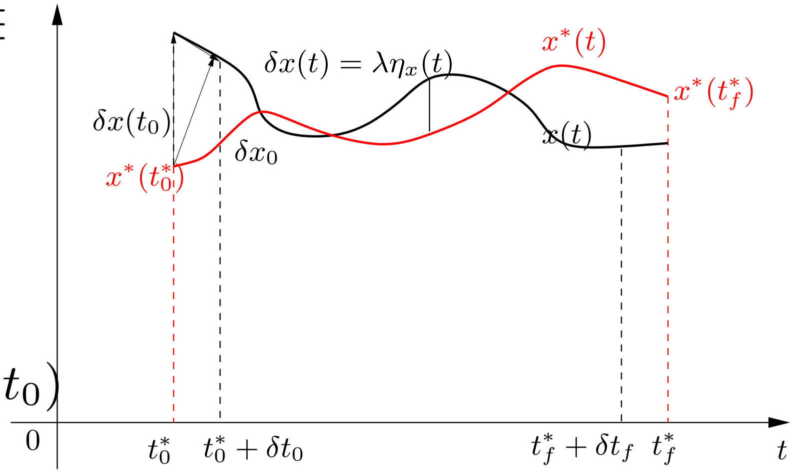
Soit $J(x(t))$ différentiable définie sur le domaine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$
Si $x^*(t)$ est un extrémum fort (faible) alors

$$\boxed{\delta J(x^*, \delta x, \delta t_0, \delta t_f) = 0}$$

pour toute variation forte (faible) admissible $\delta x(t)$ ($x(t) + \delta x(t) \in \mathcal{F}$).

A - Première variation de Lagrange :

Soit $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$ la trajectoire optimale et les trajectoires paramétrées pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta_x(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$, $\eta_f(t_f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta_0(t_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



$$x(t) = x^*(t) + \lambda\eta_x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \lambda\dot{\eta}_x(t) = \dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)$$

$$t_f = t_f^* + \delta t_f = t_f^* + \lambda\eta_f(t_f), \; t_0 = t_0^* + \delta t_0 = t_0^* + \lambda\eta_0(t_0)$$

$$\delta x_0 = \delta x(t_0) + \dot{x}\delta t_0, \; \delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}\delta t_f$$

$$\begin{aligned} J(\lambda) - J(0) = & \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f)) \\ & - \int_{t_0^*}^{t_f^*} L(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))dt + \psi_0(t_0^*, t_f^*, x^*(t_0^*), x^*(t_f^*)) = \frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}_{|\lambda=0} d\lambda + \cdots \end{aligned}$$

Notations :

$$L(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0) = L(t_0) \qquad L(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = L(t_f)$$

$$\nabla_x L(t, x, \dot{x}) = L_x(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial x_0} = \nabla_{x_0}\psi_0(.) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial t_0} = \psi_{0t_0}(.)$$

$$\nabla_{\dot{x}} L(t, x, \dot{x}) = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial x_f} = \nabla_{x_f}\psi_0(.) \qquad \frac{\partial \psi_0(.)}{\partial t_f} = \psi_{0t_f}(.)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

La variation totale de la fonctionnelle de Bolza est donnée par :

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}_{|\lambda=0} = \delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta\dot{x}, \delta t_0, \delta t_f) = \delta_{t_0} J + \delta_{t_f} J + \delta_x J$$

❶ 1^{ere} variation de J/x :

$$\begin{aligned}\delta_x J(x^*(t), \delta x(t), \delta x_0, \delta x_f) \quad &= \quad \int_{t_0}^{t_f} \left[L_x^T(t, x^*, \dot{x}^*)\delta x + L_{\dot{x}}^T(t, x^*, \dot{x}^*)\delta\dot{x} \right] dt \\ &\quad + \nabla_{x_f}^T \psi_0(x_f)\delta x_f + \nabla_{x_0}^T \psi_0(x_0)\delta x_0\end{aligned}$$

❷ 1^{ere} variation de J/t_0 :

$$\delta_{t_0} J(x^*(t_0), \delta t_0) = (-L(t_0) + \psi_{0t_0}(t_0))\delta t_0$$

❸ 1^{ere} variation de J/t_f :

$$\delta_{t_f} J(x^*(t_f), \delta t_f) = (L(t_f) + \psi_{0t_f}(t_f))\delta t_f$$

B - Transformation de la 1^{ere} variation de Lagrange :

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_f} L_{\dot{x}}^T(t, x^*, \dot{x}^*)\delta\dot{x}dt &= \left[L_{\dot{x}}^T\delta x\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}}^T\right)\delta x dt \\
&= L_{\dot{x}}^T(t_f)\delta x(t_f) - L_{\dot{x}}^T(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}}^T\right)\delta x dt \\
&= L_{\dot{x}}^T(t_f)\delta x_f - L_{\dot{x}}^T(t_f)\dot{x}\delta t_f - L_{\dot{x}}^T(t_0)\delta x_0 + L_{\dot{x}}^T(t_0)\dot{x}\delta t_0 \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}}^T\right)\delta x dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta t_0, \delta t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left[L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right]^T \delta x dt \\
&+ \left[L_{\dot{x}}^T(t_f) + \nabla_{x_f}\psi_0^T\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L_{\dot{x}}^T(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f \\
&- \left[L_{\dot{x}}^T(t_0) - \nabla_{x_0}\psi_0^T\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L_{\dot{x}}^T(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0
\end{aligned}
$$

Nota : les variations δx, $(\delta x_0, \delta t_0)$ et $(\delta x_f, \delta t_f)$ sont indépendantes

C - Application du lemme de Lagrange :

❒ **Lemme 1** *de Lagrange*

Pour une fonction $y(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$, *si* $\int_{t_0}^{t_f} y^T(t)\alpha(t)dt = 0$ *pour toute* $\alpha(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $\alpha(t_0) = \alpha(t_f) = 0$ *alors* $y(t) \equiv 0$ *sur* $[t_0, t_f]$

❒ **Théorème 2** *C.N. d'optimalité*

- *Equation différentielle d'Euler-Lagrange :*

  Si $x^*(t)$ *est une trajectoire optimale faible locale alors*

$$\boxed{L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] = 0}$$

  et toute solution $x^*(t)$ *est une extrémale faible du problème de CV*

- *Conditions de transversalité :*

$$\begin{aligned} -\left[L_{\dot{x}}^T(t_0) - \nabla_{x_0}\psi_0^T\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L_{\dot{x}}^T(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0 &= 0 \\ \left[L_{\dot{x}}^T(t_f) + \nabla_{x_f}\psi_0^T\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L_{\dot{x}}^T(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f &= 0 \end{aligned}$$

Nota : forme explicite de l'équation d'Euler-Lagrange

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - L_{t\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) - L_{x\dot{x}}^T(t, x^*, \dot{x}^*)\dot{x}^* - L_{\dot{x}\dot{x}}^T(t, x^*, \dot{x}^*)\ddot{x}^* = 0$$

❶ Formulation par le calcul des variations :

$$\min_{x} \quad \int_0^a \frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$\text{sous} \quad y(x(0))=0,\ y(a)=b \qquad L(x,y,\tfrac{dy}{dx})=L(x,y,\dot{y})=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$L_{x\dot{y}}(x,y,\dot{y})=0$$

❷ Equation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}
L_y(x,y^*,\dot{y}^*)-L_{y\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\dot{y}^*-L_{\dot{y}\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\ddot{y}^* &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[L(x,y^*,\dot{y}^*)-\dot{y}L_{\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\right] &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}}-\dot{y}L_{\dot{y}}(x,y^*,\dot{y}^*)\right] &= 0\\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}}-\frac{\dot{y}^{*2}}{\sqrt{2gy^*}\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}\right] &= 0
\end{aligned}$$

❸ Equation différentielle de la cycloïde :

$$y^*(1+\dot{y}^{*2})=|b|$$

❶ Si $L(t,x,\dot{x}) = L(t,\dot{x})$ alors

$$L_{\dot{x}}(t,\dot{x}^*) = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'impulsion

❷ Si $L(t,x,\dot{x}) = L(x,\dot{x})$ alors

$$L(x^*,\dot{x}^*) - L_{\dot{x}}(x^*,\dot{x}^*)^T\dot{x}^* = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'énergie

Nota : l'équation d'Euler-Lagrange : système de n équations différentielles du second ordre avec $2n$ conditions initiales et terminales

Exemple 6

Déterminer la trajectoire extrémale de la fonctionnelle $\displaystyle\int_0^{t_f} [t\dot{x} + \dot{x}^2(t)]dt$ *pour* $x(0) = 1$ *et* $x(t_f) = 5$ *avec* $t_f > 0$ *libre.*

L'intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est l'intégrale de l'impulsion : $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}^*) = t + 2\dot{x}^* = C_1$. *On en déduit*

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{C_1 t}{2} + C_2$$

Conditions de transversalité :

$$t_f \dot{x}^*(t_f) + \dot{x}^{*2}(t_f) - (t_f + 2\dot{x}^*(t_f))\dot{x}^*(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^*(t_f) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} &\dot{x}^*(t_f) = -\tfrac{t_f}{2} + \tfrac{C_1}{2} && \Rightarrow \quad C_1 = t_f \\ &x(0) = 1 = C_2 && \\ &x(t_f) = 5 = -\tfrac{t_f^2}{4} + \tfrac{C_1 t_f}{2} + C_2 && \Rightarrow \quad t_f = 4 \end{aligned}$$

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + 2t + 1$$

Soit le problème de CV :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt \\ \text{sous} & x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f \\ & t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

où $L(.)\ :\ V \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Deuxième variation de Lagrange :

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2\phi(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \varphi(\eta_x) &= \delta^2 J(x^*,\eta_x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\eta_x^T L_{xx}\eta_x + 2\dot{\eta}_x^T L_{x\dot{x}}\eta_x + \dot{\eta}_x^T L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\eta_x^T \left[L_{xx} - \frac{dL_{x\dot{x}}}{dt}\right]\eta_x + \dot{\eta}_x^T L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] dt \end{aligned}$$

où $\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$

❒ **Lemme 2**

Si $\varphi(\eta_x) \succeq 0$ pour toute fonction $\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$ alors $L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) \succeq 0,\ \forall\, t \in [t_0,t_f]$.

Si $x^*(t)$ est une extrémale faible du problème de CV alors $\eta_x^* \equiv 0$ est un minimum faible du problème de CV auxiliaire :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \varphi(\eta_x) \\ \text{sous} & \eta_x(t_0) = 0,\ \eta_x(t_f) = 0 \\ & t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le problème de CV auxiliaire : Equation de Jacobi

$$\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{\dot{x}x}\eta_x(t)\right] = L_{x\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{xx}\eta_x(t)$$

Nota : Equation de Jacobi

$$-\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] + \left[L_{xx} - \frac{d}{dt}(L_{x\dot{x}})\right]\eta_x = 0$$

$\eta_x \equiv 0$ est solution triviale de l'équation de Jacobi avec les conditions de bord $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$ mais il peut exister d'autres solutions.

▼ **Définition 4** *points conjugués*

Le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède une solution $\overline{\eta}_x$ telle que $\overline{\eta}_x(\tau) = \overline{\eta}_x(t_0) = 0$, $L_{\dot{x}\dot{x}}(\tau, x^*, \dot{x}^*)\dot{\overline{\eta}}_x(\tau) \neq 0$

✍ **Remarques 1** *Autre caractérisation des points conjugués*

Le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède n solutions $\overline{\eta}_x^i$, $i = 1, \cdots, n$ telles que $\overline{\eta}_x^i(t_0) = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $\dot{\overline{\eta}}_x^i(t_0) = e_i$, $i = 1, \cdots, n$ et

$$\det \begin{bmatrix} \overline{\eta}_x^{1T}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{\eta}_x^{nT}(\tau) \end{bmatrix} = 0$$

Nota : Si $\overline{\eta}_x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$ alors le point $\tau \neq t_0$ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\varphi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède une solution non identiquement nulle telle que $\overline{\eta}_x(\tau) = \overline{\eta}_x(t_0) = 0$ et $\dot{\overline{\eta}}_x(t_0) = 1$

❒ **Théorème 3** *C.N. pour une extrémale faible*

Si $x^*(t)$ est une extrémale faible du problème de CV alors $x^*(t)$ vérifie $\forall\ t \in [t_0, t_f]$

- l'équation d'Euler-Lagrange

- la condition de Legendre-Clebsch :

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succeq 0$$

- la condition de Jacobi :

Il n'y a pas de points conjugués à t_0 dans l'intervalle (t_0, t_f)

❒ **Théorème 4** *C.S. au 2eme ordre*

Si $x^*(t)$ vérifie $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ les conditions suffisantes suivantes **simultanément** *:*

- l'équation d'Euler-Lagrange

- la condition forte de Legendre-Clebsch :

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succ 0$$

- la condition forte de Jacobi :

il n'existe pas de points conjugués à t_0 dans le semi intervalle $(t_0, t_f]$

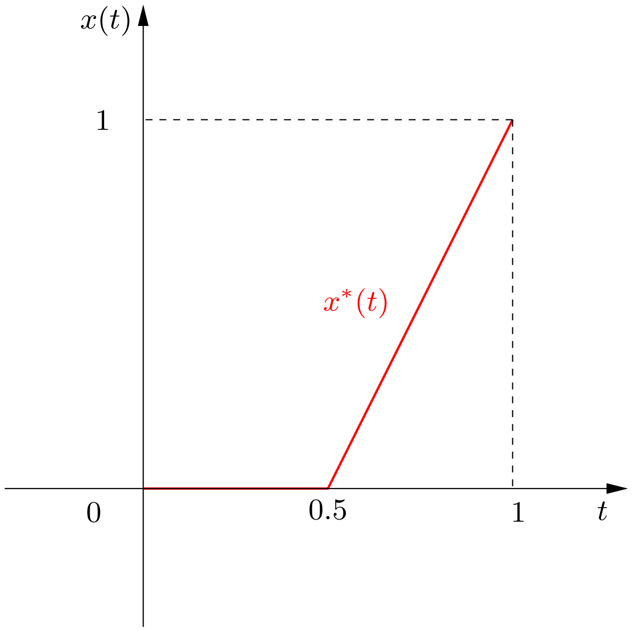
alors $x^*(t)$ est une extrémale faible stricte du problème de CV simplifié

Exemple 7 *Bolza*

$$\min \; J = \int_0^1 x^2(2-\dot{x})^2 dt, \;\; x(0)=0, \;\; x(1)=1$$

- $J^* = 0$
- $x^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 0.5] \\ 2t-1 & t \in [0.5, 1] \end{cases}$
- $x^*(t)$ *est solution d'Euler-Lagrange*

$$x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2 - 4x = 0$$



Théorème 5 *Conditions de Weierstrass-Erdmann*

Si $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est une extrémale locale avec un point de discontinuité de* $\dot{x}$ *en* $t_i \in [t_0, t_f]$ *alors* $x^*(t)$ *vérifie l'équation d'Euler-Lagrange, les conditions de transversalité finales et initiales et les conditions de Weierstrass-Erdmann*

$$L_{\dot{x}}(t_i^-) = L_{\dot{x}}(t_i^+)$$
$$(L - L_{\dot{x}}^T \dot{x})(t_i^-) = (L - L_{\dot{x}}^T \dot{x})(t_i^+)$$

Soit le problème de CV :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{KC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt \\ \text{sous} & x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f,\ t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

❒ **Théorème 6** *CN de Weierstrass*

Si $x^*(t)$ est une extrémale forte du problème de CV alors $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ *et* $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(t,x^*,\dot{x}^*,u) = L(t,x^*,u) - L(t,x^*,\dot{x}^*) - L_{\dot{x}}^T(t,x^*,\dot{x}^*)(u-\dot{x}^*) \geq 0$$

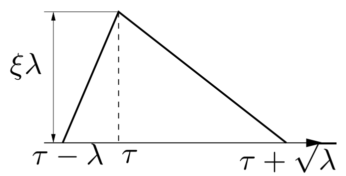
Cette condition est vérifiée si la fonction $L(.,.,\dot{x})$ est convexe

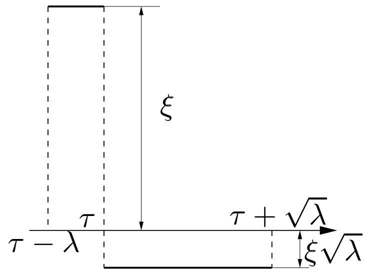
Nota : la fonction $\mathcal{E}(t,x^*,u)$ est appelée fonction de Weierstrass

Variation en aiguille de Weierstrass :

$$x_\lambda(t) = x^*(t) + h_\lambda(t)$$

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi & t \in [\tau-\lambda,\tau] \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda} & t \in [\tau, \sqrt{\lambda}+\tau] \end{cases}$$





Problème de CV :

$$\min_x \quad J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

avec $k(x_0, t_0) = 0$ et $l(x_f, t_f) = 0$ et

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0 \quad r(.) \in \mathbb{R}^r$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\ t \quad q(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad q(.) \in \mathbb{R}^q$$

▼ **Définition 5** *Lagrangien augmenté*

La fonction

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) \ : \ V \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda^T r(t, x(t), \dot{x}(t)) + \mu(t)^T q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

est le Lagrangien augmenté associé au problème de CV où $\lambda \in \mathbb{R}^r$ *et* $\mu(t) \ : \ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^q$ *sont les multiplieurs de Lagrange respectivement associés aux contraintes intégrales et instantanées*

❐ **Théorème 7** *C.N. d'optimalité et équation différentielle d'Euler-Lagrange*

Si $x^*(t)$ est une trajectoire optimale faible locale alors

$$\mathcal{L}_x(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t))\right] = 0$$

Nota : résultats précédents valides avec $L(t, x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t))$

- Conditions de Weierstrass, Weierstrass-Erdmann
- Conditions de Legendre et de transversalité

Contraintes inégalités intégrales et instantanées :

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt \leq 0 \;\; r(.) \in \mathbb{R}^r \;\; \rightarrow \;\; \int_{t_0}^{t_f} [r(t, x(t), \dot{x}(t)) + Z]dt = 0 \;\; Z \in \mathbb{R}^r \mid Z_i = z_i^2$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\, t \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0 \;\; q(.) \in \mathbb{R}^q \;\; \rightarrow \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) + Y = 0 \;\; Y \in \mathbb{R}^q \mid Y_i = y_i^2$$

Nota : $\mathcal{L}_{Z_i} = \lambda_i^* z_i^* = 0$ et $\mathcal{L}_{Y_i} = \mu_i^*(t) y_i^* = 0$, si $Y_i^* \neq 0 \Rightarrow \mu_i^*(t) = 0$ ou $Z_i^* \neq 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$, la contrainte associée est non saturée et n'intervient pas