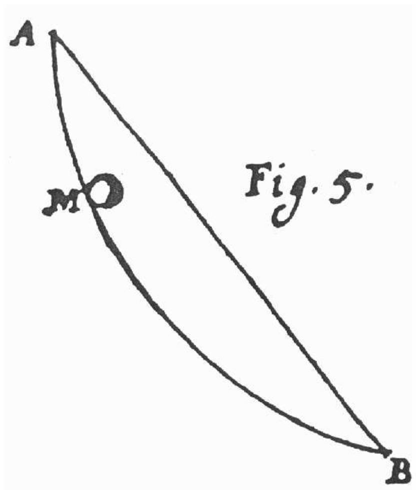
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 1

Introduction et historique



Enseignant Denis Arzelier : Directeur de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page http ://homepages.laas.fr/˜arzelier/cours.html

Organisation du cours

❶ 16 séances 1h15 : 20h00

- Cours magistral et bureaux d'études
- Support de cours : transparents
- Exercices sur feuille

Enseignant Richard Epenoy : Ingénieur CNES

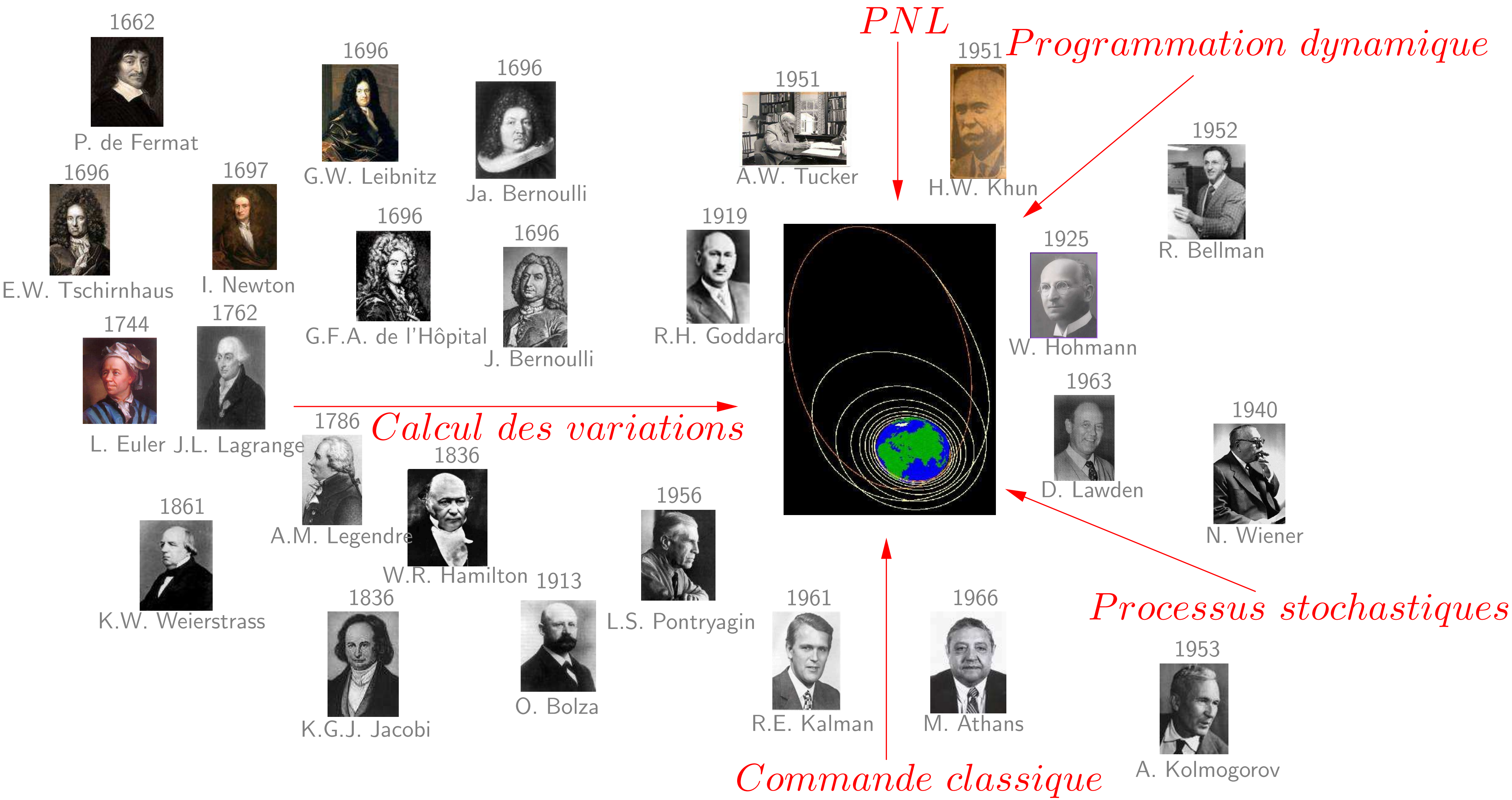
Organisation du cours

❷ 8 séances 1h15 : 10h00

- Cours magistral et bureau d'études sur une application spatiale
- Support de cours : transparents
- Support MATLAB

❸ 1 Examen 2h30

Durée totale : 30h


1662
P. de Fermat
1696
E.W. Tschirnhaus
1697
I. Newton
1696
G.W. Leibnitz
1696
Ja. Bernoulli
1696
G.F.A. de l'Hôpital
1696
J. Bernoulli
1744
L. Euler
1762
J.L. Lagrange
1786
A.M. Legendre
1836
W.R. Hamilton
1861
K.W. Weierstrass
1836
K.G.J. Jacobi
1913
O. Bolza
1956
L.S. Pontryagin
1919
R.H. Goddard
1951
A.W. Tucker
1951
H.W. Khun
PNL
Programmation dynamique
1952
R. Bellman
1925
W. Hohmann
1963
D. Lawden
1940
N. Wiener
Calcul des variations
1961
R.E. Kalman
1966
M. Athans
Processus stochastiques
1953
A. Kolmogorov
Commande classique

Le problème de calcul des variations est défini sur l'espace de Banach $\mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{array}{ll}
\min\limits_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & J(x, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) \\
\text{sous} & \Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \\
& \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \\
& x(t_0) = x_0 \\
& x(t_f) = x_f \quad t_f \text{ libre ou fixé}
\end{array}$$

avec :

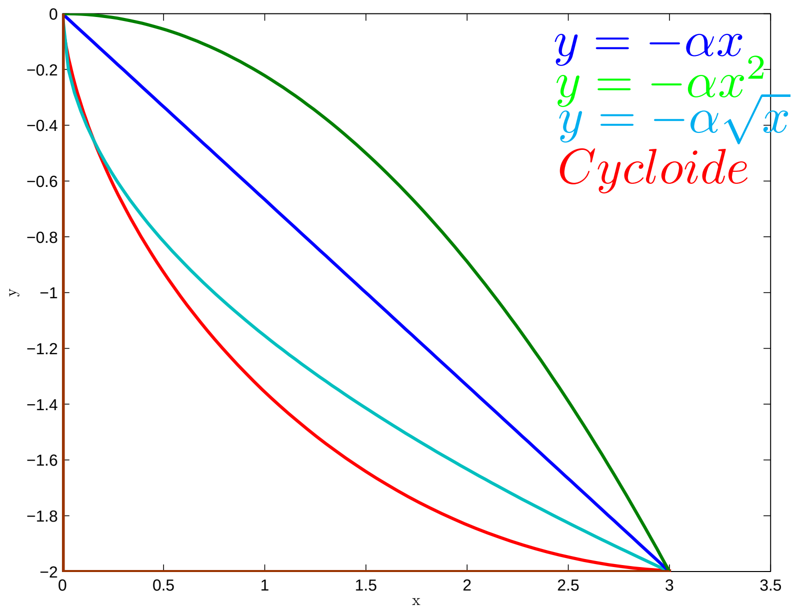
- $J(x, t_f)$ est une fonctionnelle de Bolza (Lagrange pour $\psi_0 \equiv 0$, Mayer pour $L \equiv 0$)
- $L \ : \ V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- $\psi_0 \ : \ W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- $\psi \ : \ W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- $\Phi \ : \ V \to \mathbb{R}^s$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes de phase ou contraintes holonomes si $\Phi(t, x(t)) = 0$
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Si dans un plan vertical deux points A et B sont donnés, alors il est demandé de spécifier l'orbite AMB d'un point mobile M, le long de laquelle, partant de A, et sous la seule influence de son propre poids, il arrive en B en un temps le plus court.

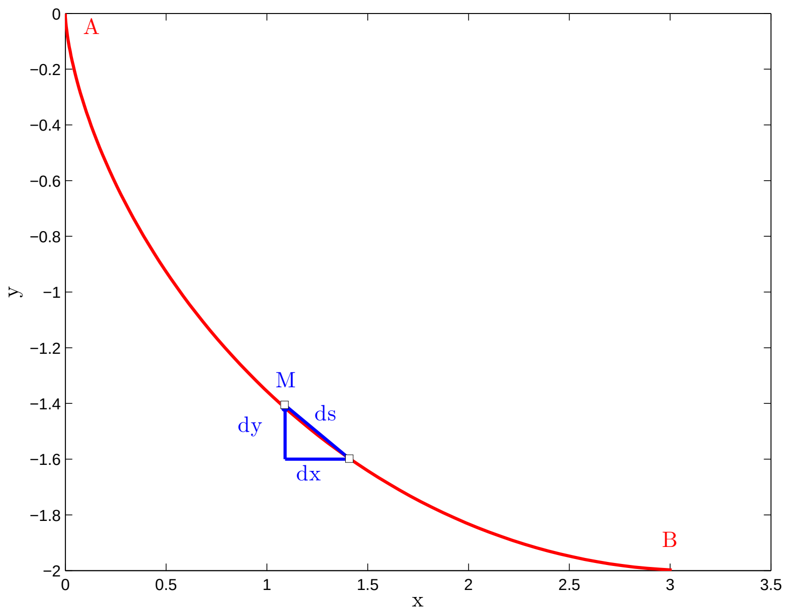
Jean Bernoulli, Acta Eruditorum, juin 1696

Contributeurs :

- 1638 - Galiléo Galilée (Arc de cercle)
- 1696 - Jean et Jacob Bernoulli
- 1697 - Isaac Newton
- 1696 - Gottfried Wilhelm Leibnitz
- 1696 - Guillaume-François-Antoine de Sainte Mesme de l'Hôpital
- 1696 - Ehrenfried Walther von Tschirnhaus



Soit $C(t)$ la courbe paramétrée par t et définie par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ vérifiant l'équation suivante $y = f(x)$ de $A(0,0)$ vers $B(a,b) = (3,-2)$



Mise en équations :

- Déplacement infinitésimal :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Temps de parcours infinitésimal :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

- Temps total :

$$T = \int_0^{s(t_f)} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Problème de calcul des variations :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}} dx \\ \text{sous} \quad & y(x(0)) = 0 \\ & y(a) = b \end{aligned}$$

$$T_n = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{\sqrt{2gy_{i+1}}}$$

La courbe solution doit suivre le trajet de la lumière dans un milieu où la vitesse augmente selon l'accélération terrestre (g).

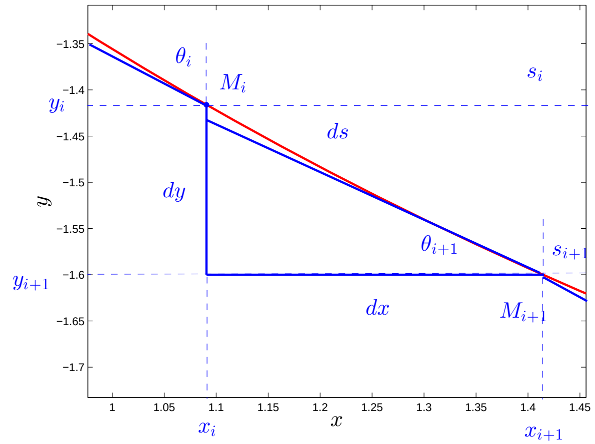
Mise en équations :

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Loi de la réfraction (loi de Snell - 1625) :

$$\frac{\sin\theta}{v} = K = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2gy}}$$



1- La vitesse est nulle en A

2- La vitesse est bornée par $v_{max} = \sqrt{2g|b|}$

- Trajectoire sur une courbe :

$$\sin\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{1}{2gK^2} = |b| \quad \frac{1}{\sqrt{2g|b|}} = K$$

Opposée d'une cycloïde générée par un cercle de diamètre $|b|$

- Problèmes isopérimétriques :

$$\min_{x \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b L(t,x,\dot{x})dt, \text{ sous } x(a) = x_1, \ x(b) = x_2, \ G(x) = \int_a^b g(t,x,\dot{x})dt = l$$

pb. de Didon :

$$\max_{x \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b x dt, \ \text{ sous } b - a \leq l, \ \int_a^b (1+\dot{x}^2)^{1/2} dt = l$$

- Problèmes de Newton (surfaces de révolution de plus faible résistance en mouvement dans un fluide) :

$$\min_{x \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b 2\pi x \frac{\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2} dt, \ \text{ sous}, \ x(a) = x_1, \ x(b) = x_2$$

- Principes de mécanique (principe de moindre action de Maupertuis (1744)) :

$$\min_{x \in \mathcal{C}^1([t_a,t_b],\mathbb{R}^{3N})} S = \int_{t_a}^{t_b} T(x) - U(t,x) dt$$

≪ Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite possible ≫

Le problème de commande optimale est défini sur l'espace $\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \times \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\ \text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \;\; t_0, \; t_f \text{ libres ou fixés} \\ & u(t) \in \mathcal{U} \text{ espace topologique de } \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \text{ compact} \end{aligned}$$

avec :

- L : $V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- ψ_0 : $W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- ψ : $W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- f : $V \to \mathbb{R}^n$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes dynamiques
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

- Problème de Cauchy : existence et unicité de la solution de

  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0) = x_0$

  1- $u(t) \in \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ + $f(., x, .) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

  + $f(t, ., u) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (différentiable partout sauf en les points de discontinuité de $u(t)$)

  2- $u(t) \in \mathcal{L}^\infty_{loc}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ + $f(., x, .) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

  + $f(t, ., u) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$

- Equivalence des pb. de Lagrange ($\psi_0 = 0$), pb. de Mayer ($L = 0$) et pb. de Bolza

  ➩ Problème de Mayer :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x' \end{bmatrix}',\ \dot{x}^0(t) = L(t, x, u),\ x^0(t_0) = 0$$

  ➩ Problème de Lagrange :

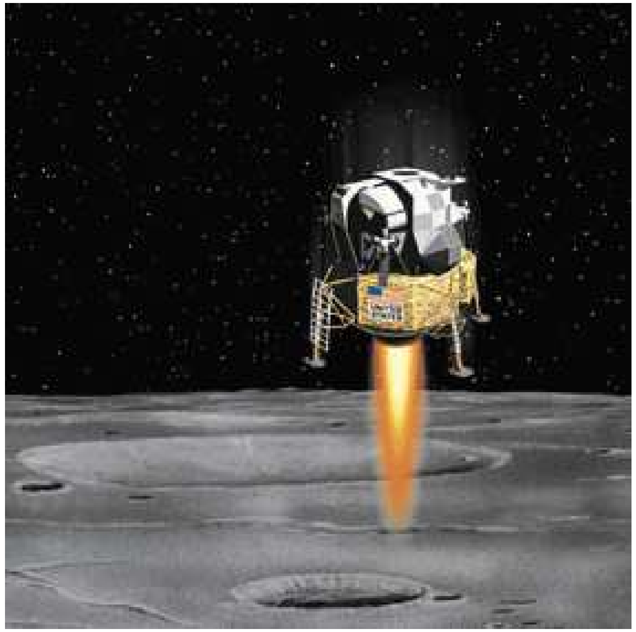
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x' \end{bmatrix}',\ \dot{x}^0(t) = 0,\ x^0(t_f) = \frac{1}{t_f - t_0}\psi_0(t_f, x(t_f))$$

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant alunir (accélération de la gravité sur la lune (g) en douceur (avec une vitesse $v(t)$ nulle à l'arrivée) à partir d'une hauteur donnée h_0 et avec une vitesse initiale donnée v_0 et en utilisant une poussée $T(t)$ toujours orientée dans le sens inverse de sa chute.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot{h}(t) = v(t)$$
$$\dot{v}(t) = -g + \frac{T(t)}{m(t)}$$
$$\dot{m}(t) = -\tfrac{T(t)}{\alpha}$$



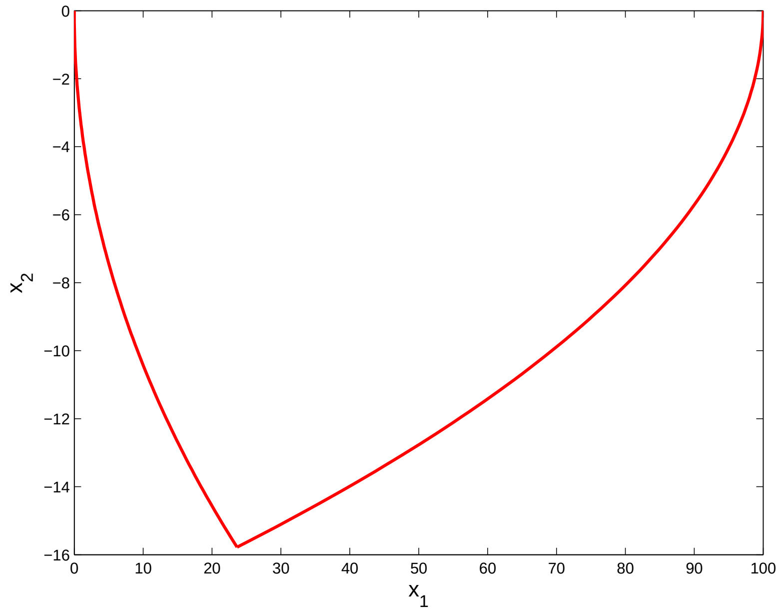
- Conditions aux limites :

$$h(0) = h_0 > 0,\ v(0) = v_0 \leq 0,\ m(0) = M + F$$
$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0,\ m(t_f) \geq M$$

- $J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f)$
- Contraintes : $0 \leq T(t) \leq \mu$

Problème de Lagrange à temps final libre :

$$
\begin{aligned}
\min_{0 \le u(t) \le 1} \quad & -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt \\
\text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha \frac{u(t)}{x_3(t)} \\
& \dot{x}_3(t) = -\sigma u(t), \; x_1(0) = h_0 > 0 \\
& x_2(0) = v_0 \le 0 \\
& x_3(0) = M + F, \; x_1(t_f) = 0 \\
& x_2(t_f) = 0, \; M + F \ge x_3(t_f) \ge M, \; 0 \le u(t) \le \mu
\end{aligned}
$$



Nota :

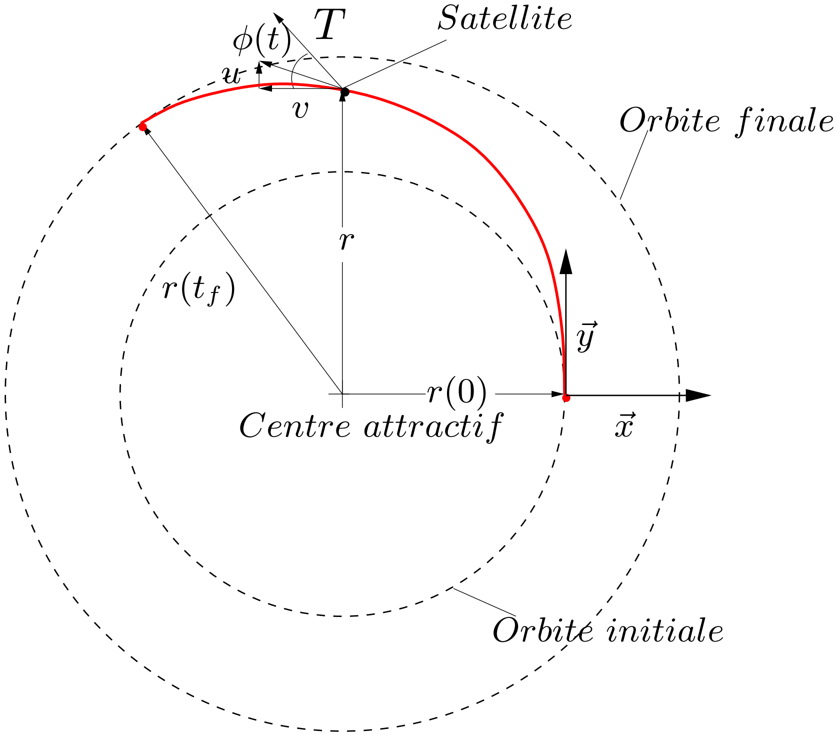
- Problème en consommation minimale
- Problème à temps final libre et avec contraintes inégalités sur la commande et l'état final

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps minimal (t_f) l'orbite circulaire de rayon donné ($r(t_f)$) à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot{r}(t) = u(t)$$
$$\dot{u}(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$
$$\dot{v}(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$



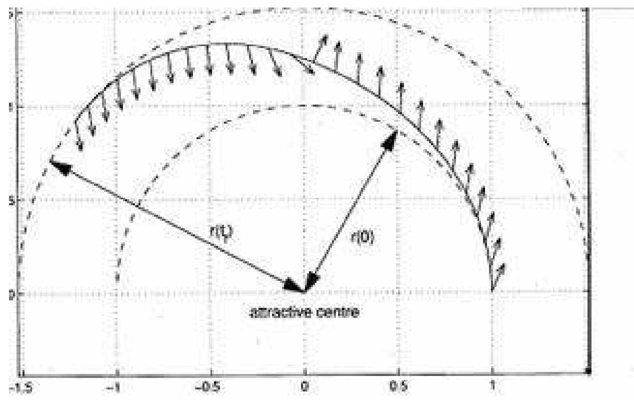
- Conditions aux limites :

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\quad v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}},\ r(t_f) = r_f$$

- Fonctionnelle : $J(t_f) = \displaystyle\int_0^{t_f} dt = t_f$

Problème de Mayer en temps minimum :

$$
\begin{aligned}
\min_{u(t)} \quad & t_f \\
\text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = \frac{x_3^2(t)}{x_1} - \frac{\mu}{x_1^2} + \frac{T \sin u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
& \dot{x}_3(t) = -\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{T \cos u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
& x_1(0) = r_0 > 0,\ x_2(0) = 0 \\
& x_3(0) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(0)}} \\
& x_2(t_f) = 0,\ x_3(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(t_f)}},\ x_1(t_f) = r_f
\end{aligned}
$$



Nota :

- Problème en temps minimal
- Problème à temps final libre et sans contraintes inégalités

❶ Modélisation mathématique du problème de commande optimale

- ➩ Différents groupes de variables (état, commande)
- ➩ Fonctionnelle de coût (Lagrange 1762, Mayer 1878, Bolza 1913)
- ➩ Contrainte différentielle (équation dynamique)
- ➩ Conditions aux limites (initiales, terminales)
- ➩ Contraintes algébriques (inégalités, égalités, ensembles, espaces)
- ➩ Ensemble d'hypothèses (continuité, différentiabilité)

❷ Caractérisation d'un optimum

- ➩ Conditions nécessaires (variation d'ordre 1, principe du maximum)
- ➩ Conditions suffisantes (variation du deuxième ordre)
- ➩ Théorie de Hamilton-Jacobi

❸ Résolution des conditions d'optimalité

- ➩ Approche exacte
- ➩ Méthodes numériques

Pré-requis

- Mathématiques :
  - ➩ Algèbre linéaire de base
  - ➩ Calcul différentiel et intégral
  - ➩ Eléments d'analyse fonctionnelle
  - ➩ Programmation non linéaire et théorie de l'optimisation statique
- Automatique élémentaire :
  - ➩ Méthodes d'analyse et de commande fréquentielles des modèles LTI
  - ➩ Méthodes d'analyse et de commande dans l'espace d'état des modèles LTI
- Informatique : MATLAB