



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue le 22/06/2017 par :

JEAN-THOMAS CAMINO

Co-optimisation charge utile satellite et système télécom

JURY

ANDRÉ ROSSI	Professeur	Rapporteur
VIRGINIE GABREL	Maître de Conférence HDR	Rapporteur
PHILIPPE MAHEY	Professeur	Examineur
GRÉGOIRE DANOY	Adjoint de Recherche	Examineur
CHRISTIAN ARTIGUES	Directeur de Recherche	Directeur de thèse
LAURENT HOUSSIN	Maître de Conférence	Co-directeur de thèse
STÉPHANE MOURGUES	Ingénieur	Invité

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Informatique et Génie Industriel

Unité de Recherche :

*Équipe ROC : Recherche Opérationnelle, Optimisation Combinatoire et Contraintes
- Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS)*

Directeur(s) de Thèse :

Christian ARTIGUES (directeur), Laurent HOUSSIN (co-directeur) et Stéphane MOURGUES (responsable industriel)

Rapporteurs :

André ROSSI et Virginie GABREL

Remerciements

Résumé :

L'augmentation continue des besoins en télécommunications dans notre société se traduit par une suite de défis technologiques pour les systèmes fournissant ce type de services, qu'il s'agisse de télédiffusion, de téléphonie, ou bien d'échange de données. Les satellites de télécommunications sont ainsi particulièrement concernés par ce besoin d'innover, à la fois sur les technologies mises en orbite, mais aussi et surtout au niveau de l'exploitation de ces ressources embarquées. Sur ce dernier point, pour une mission de télécommunications définie précisément en termes de zone à servir, de type, de quantité et de qualité de service à fournir, il faut effectivement être capable de dimensionner de la manière la plus adéquate possible la charge utile du satellite de télécommunications, sous les différentes contraintes auxquelles elle est soumise : masse, volume, coût, et consommation énergétique des équipements embarqués. Cette thèse développe ainsi une approche algorithmique pour un tel dimensionnement dans le cas particulier des systèmes de télécommunications dits "multifaisceaux". Une procédure d'optimisation globale de ces systèmes satellitaires est ainsi proposée. Elle repose sur une décomposition en un ensemble de problèmes mathématiques interconnectés dont les complexités respectives, réduites par rapport au problème global, permettent d'espérer des solutions algorithmiques efficaces. Ce travail a permis d'exhiber deux problèmes phares dans ce dimensionnement de la charge utile satellite, adressés par l'angle de la recherche opérationnelle : l'optimisation du placement de faisceaux, et l'optimisation de plans de fréquences.

Ce premier problème de placement de faisceaux sous contraintes de charge utile a été l'occasion de proposer des méthodologies inédites de gestion des contraintes en norme euclidienne sur des variables continues pour les problèmes mixtes non-linéaires non-convexes. Ces techniques ont alors été appliquées avec succès au sein de solutions à ce premier problème qui s'appuient pleinement sur la programmation linéaire mixte. Dans un deuxième temps, une exploitation novatrice de certaines propriétés du clustering en k -moyennes est proposée et permet de simplifier ces modèles mathématiques et ainsi accélérer l'optimisation du placement des faisceaux. Ces algorithmes de programmation mathématique sont ensuite confrontés à une heuristique gloutonne randomisée également développée dans le cadre de ces travaux.

Le deuxième problème central de dimensionnement identifié au cours de ces travaux de thèse est la définition de plans de fréquences. Il s'agit d'une allocation de ressource disponible à bord du satellite aux différents faisceaux de ce dernier, tels qu'ils ont été définis dans le problème précédent de placement de faisceaux. Avec un objectif de minimisation du nombre d'un certain type d'équipement à embarquer dans la charge utile satellite, on cherche à satisfaire la mission de télécommunications qui s'exprime en une demande de chaque utilisateur au sol. Ce problème complexe a lui-même donné lieu à une décomposition en deux sous-problèmes d'allocation de fréquences, puis d'allocation d'équipements de la charge utile, qui sont traités par programmation par contraintes et programmation linéaire en nombres entiers, en exploitant des résultats théoriques qui servent à la fois à la modélisation des problèmes, mais aussi à leur résolution.

©Airbus Defence and Space SAS - “Ce document et les informations qu’il contient sont propriété d’Airbus Defence and Space. Il ne doit pas être utilisé à d’autres fins que celles pour lesquelles il a été remis. Il ne peut être ni reproduit, ni divulgué à des tiers (en tout ou partie) sans l’accord préalable et écrit d’Airbus Defence and Space. **Airbus Defence and Space - Tous droits réservés.**”

Table des matières

Table des figures	vii
Liste des notations	xi
I Introduction	1
<hr/>	
Introduction générale et objectifs de la thèse	2
Organisation du manuscrit et contributions	4
II Chapitres	8
<hr/>	
1 Le dimensionnement de satellites de télécommunications multifaisceaux	9
1.1 Définition des systèmes satellitaires multifaisceaux	9
1.1.1 Généralités sur les satellites de télécommunications	9
1.1.2 Système multifaisceaux : principe et architecture standard	11
1.1.3 Segment spatial : la charge utile des satellites de télécommunications multifaisceaux	14
1.2 La conception de systèmes satellitaires multifaisceaux	17
1.2.1 Mission de télécommunications	17
1.2.2 Défis et approche pour la conception optimale de systèmes de télécommunications spatiales adaptés pour des missions spécifiques	18
1.3 Contexte scientifique : optimisation des systèmes spatiaux	18
1.3.1 Recours à l'optimisation dans l'ingénierie des systèmes spatiaux	19
1.3.2 Approches d'optimisation par rupture technologique ou de concept	20
1.3.3 Approches d'optimisation dédiées à un ou plusieurs sous-systèmes d'un satellite de télécommunications	20
1.4 Définition d'une procédure d'optimisation globale d'un système multifaisceaux	21
1.4.1 Notion de co-design de la charge utile et du système de télécommunications	21
1.4.2 Approche globale itérative pour la conception d'un système de télécommunication spatiales	23
1.4.3 Sélection d'un cadre mathématique d'optimisation	23
1.5 Conclusions	26

2	Le problème d’agencement de faisceaux : définition et état de l’art	27
2.1	Le beam layout d’un système multifaisceaux : définition, enjeux, contraintes et solutions existantes	27
2.1.1	Définition et enjeux d’un beam layout de satellite multifaisceaux	28
2.1.2	Système de coordonnées considéré	29
2.1.3	Contraintes et critère de co-design pour la définition d’un beam layout multifaisceaux	34
2.1.4	Une solution classique : le beam layout régulier	38
2.1.5	Vers des solutions irrégulières optimisées	42
2.2	État de l’art : l’optimisation de beam layout, les problèmes voisins, et la gestion des contraintes en norme euclidienne	46
2.2.1	Solutions existantes au problème d’optimisation de beam layout irrégulier	47
2.2.2	Problèmes voisins de la littérature et solutions associées	47
2.2.3	Les contraintes inégalités continues en norme euclidienne dans les programmes mathématiques	53
2.3	Conclusions	58
3	Nouvelles linéarisations de la norme euclidienne et application au placement de faisceaux	61
3.1	Externalisation des évaluations de l_2 par discrétisation des positions des centres des faisceaux, et résolution gloutonne	61
3.1.1	Intérêt et mise en œuvre de la discrétisation du domaine des centres des faisceaux	62
3.1.2	Premier algorithme de placement de faisceaux : heuristique randomisée de construction gloutonne avec coloration de graphe	68
3.1.3	Perspectives d’amélioration de l’heuristique	78
3.2	Linéarisation des évaluations de l_2 par discrétisation des directions du plan	79
3.2.1	Principe de la linéarisation de la norme euclidienne par discrétisation des directions du plan	79
3.2.2	Extension des principes de linéarisation aux dimensions supérieures	83
3.2.3	Définition d’un programme linéaire mixte pour le placement de faisceaux	85
3.3	Confrontation de la méthode gloutonne au modèle de programmation linéaire mixte	95
3.3.1	Définition des instances du problème d’optimisation de beam layout	95
3.3.2	Les différents types d’instances testées	96
3.3.3	Expérimentations croisées des deux algorithmes de placement de faisceaux	98
3.4	Conclusions	102
4	Partitionnement en k-moyennes pour la définition d’algorithmes avancés de placement de faisceaux	107
4.1	Le partitionnement k -moyennes	107
4.1.1	Définition et applications	107
4.1.2	Solution algorithmique classique : l’algorithme de Lloyd	108
4.2	Rupture de symétries et réduction de modèle par partitionnement k -means	110
4.2.1	Partitionnement de la zone de service par clustering k -means	111

4.2.2	Réduction du nombre de variables d'affectation des stations aux faisceaux	111
4.2.3	Réduction du nombre de contraintes station-faisceau-direction	113
4.2.4	Réduction du nombre de variables faisceau-faisceau	113
4.2.5	Modèle de programmation linéaire mixte réduit par partitionnement en k -moyennes	115
4.2.6	Nombre maximum de faisceaux par cluster : approche générale et approche heuristique	119
4.2.7	Optimisation du nombre de clusters	121
4.3	Expérimentations croisées des algorithmes de placement de faisceaux	123
4.4	Conclusions	126
5	Définition de plans de fréquences irréguliers minimisant la complexité du répéteur	129
5.1	La problématique d'allocation de fréquences	129
5.1.1	Les limitations d'utilisation de la ressource spectrale	129
5.1.2	La classe de problèmes FAP : Frequency Assignment Problems	130
5.1.3	Définition générique	130
5.2	L'affectation de fréquences pour des satellites de télécommunications multifaisceaux	133
5.2.1	Variables de décision	133
5.2.2	Les contraintes du problème	135
5.3	Propriétés des contraintes binaires de non-réutilisation de la ressource spectrale pour les couvertures multifaisceaux	138
5.3.1	Les contraintes binaires d'exclusion dans les programmes linéaires en nombres entiers	139
5.3.2	Énumération des cliques maximales dans les graphes d'interférences de systèmes multifaisceaux	141
5.4	Modélisation globale du problème	146
5.5	Approche de résolution par décomposition séquentielle	150
5.5.1	Le sous-problème d'allocation de fréquences et de polarisations	150
5.5.2	Allocation d'amplificateurs haute-puissance à fréquences et polarisation connues	152
5.6	Résultats expérimentaux	155
5.7	Conclusions	159
III	Conclusion	162
	Conclusions générales	163
	Ouverture	168
	Bibliographie	171

Table des figures

1.1	Lien aller d'un système satellitaire multifaisceaux	13
1.2	Plateforme E3000 pour une mission multifaisceaux avec 4 antennes SFPB à réflecteur (tirée de [Wolf 2014])	15
1.3	Chaîne d'alimentation d'une source à gauche, représentation d'un cluster de sources à droite (tirées de [Wolf 2014])	15
1.4	Architecture standard de la charge utile d'un satellite de télécommunications multifaisceaux transparent	16
1.5	Aperçu de la procédure d'optimisation du segment spatial d'un système de télécommunications multifaisceaux	19
1.6	Procédure itérative d'optimisation globale d'un satellite multifaisceaux. En rouge : les problèmes adressés pendant la thèse	24
2.1	Angles "true view" de visibilité des points à la surface de la terre depuis le satellite	29
2.2	Réprésentation projetée des angles "true view"	30
2.3	Lien entre rayon de la Terre, altitude d'un satellite géostationnaire et angle maximal de visibilité depuis le satellite	32
2.4	Erreur relative commise en chaque point de la surface visible de la Terre par le calcul en norme euclidienne de la séparation angulaire au point référence (bleu=erreur nulle, rouge=erreur maximale de $\approx 0,003827$), pour 4 points de référence : (a) $(\theta_x = 0^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (b) $(\theta_x = 3,73^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (c) $(\theta_x = 6,21^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (d) $(\theta_x = 8,7^\circ, \theta_y = 0^\circ)$	33
2.5	Propriété d'invariance de l'erreur relative par symétrie autour de l'axe satellite-centre de la Terre	34
2.6	Représentation d'un bloc de sources Single Feed Per Beam illuminant un réflecteur satellite et de la notion de séparation angulaire résultante	36
2.7	Empilement compact dans le plan de disques identiques, selon le schéma hexagonal	39
2.8	Un "beam layout régulier" obtenu à partir du schéma hexagonal de l'empilement compact sans chevauchement à densité maximale	40
2.9	Allocation des faisceaux à 3 réflecteurs dans un beam layout régulier (une couleur = un réflecteur)	41
2.10	Allocation des faisceaux à 4 réflecteurs dans un beam layout régulier (une couleur = un réflecteur)	42
2.13	Description générique du problème d'optimisation de beam layout irrégulier	44

2.11	Respectivement pour la solution à 117 faisceaux puis celle à 50 faisceaux : (a),(c) Allocation de réflecteurs (une couleur par réflecteur) (b),(d) Charge par faisceau relativement à la limite de charge (bleu = proche de 0, rouge = au-dessus de 1) .	59
2.12	Solution irrégulière : (a) Allocation de réflecteurs (une couleur par réflecteur) (b) Charge par faisceau relativement à la limite de charge (bleu = proche de 0, rouge = au-dessus de 1)	60
2.14	Approximation de l'épigraphe de la fonction carré par l'intersection de demi-espaces définis par des points d'approximation sur la courbe $y = x^2$	60
3.1	Ensemble continu $\mathcal{A}_{\min,stations}$ des points permettant de couvrir géométriquement au moins $N_{\min} = 1$ (jaune) ou $N_{\min} = 2$ (rouge) des N_S stations utilisateurs représentées par des points noirs	63
3.2	Discrétisation de l'ensemble continu de centres admissibles pour $N_{\min} = 1$ (stations en noir, centres possibles après échantillonnage en blanc) avec (a) 875 centres possibles (b) 3554 centres possibles (c) 14226 centres possibles	64
3.3	Configuration pire cas de l'approche discrète par rapport à l'approche continue pour le problème de cercle couvrant minimum : stations à couvrir en rouge, centres discrets autorisés en orange, centre optimal continu en bleu	65
3.4	Procédure d'optimisation de beam layout irrégulier par discrétisation des centres, pré-détermination des diamètres, et approche gloutonne multi-start	69
3.5	(a) Demandes individuelles des stations utilisateurs, et ensemble admissible continu des centres en trait plein blanc (b) Pré-détermination du diamètre à utiliser en chaque position discrète de faisceau selon l'algorithme 1	72
3.6	Algorithme de beam layout irrégulier par approche gloutonne multi-start randomisée après discrétisation des centres et pré-détermination des diamètres	75
3.7	(a) First-fit appliqué à l'ordre [1,2,3,4,5,6,7,8], 4 couleurs nécessaires (b) First-fit appliqué à l'ordre [7,6,2,5,4,8,3,1], 3 couleurs nécessaires	78
3.8	Discrétisation des directions du plan euclidien selon les racines $n_{directions}$ - ièmes de l'unité pour $n_{directions} = 8$	80
3.9	Approximation du disque \mathcal{D} du plan euclidien par les polygones réguliers \mathcal{P} et \mathcal{P}' à $n_{directions}$ côtés	82
3.10	(a) Evolution de l'aire des polygones approximatifs \mathcal{P} et \mathcal{P}' par rapport à l'aire du disque \mathcal{D} (b) Exemples de valeurs apparaissant dans les courbes	84
3.11	Exemples d'analyses surfaciques pour le calcul de majorants du nombre de faisceaux pouvant être placé sur la zone de service (a) Pour la contrainte antenne avec $\kappa = \sqrt{3}$ (b) Pour la contrainte de non-chevauchement avec $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$	87
3.12	Ensemble $\mathcal{A}_{contraintes}$ continu admissible des centres induit par les contraintes (3.51) en noir, et ensemble $\mathcal{A}_{\min,stations}$ induit par les contraintes (3.58) en orange ($N_{\min} = 1$) et en blanc ($N_{\min} = 2$)	93
3.13	Première modèle linéaire mixte continu-entier d'optimisation de beam layout irrégulier par approximation de la norme euclidienne	94
3.14	(a) Distribution normale de demande avant application du flou gaussien (b) Distribution de demande après flou gaussien	97

3.15 (a) Forte hétérogénéité de demande (b) Faible hétérogénéité de demande (c) Zone de service étroite (d) Zone de service étendue	98
3.16 Influence du nombre de directions $n_{\text{directions}}$ sur la qualité des solutions et l'efficacité de résolution	101
3.17 Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_1	102
3.18 Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_2	103
3.19 Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_3	104
3.20 Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_4	105
3.21 Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_5	105
3.22 Exemple de solution optimale produite par le programme linéaire mixte de placement de faisceaux	106
4.1 Restriction d'un faisceau à la cellule de Voronoï caractérisant le cluster auquel il appartient : intersection de $k - 1$ demi-espaces	112
4.2 Pour un cluster donné, exemple de stations dans la cellule (a) et de stations atteignables (b)	113
4.3 Cône angulaire de visibilité pour une station atteignable en dehors de la cellule de Voronoï	114
4.4 (a) Intervalle angulaire égal à π pour deux clusters partageant une arête (b) Intervalle angulaire inférieur à π pour deux clusters disjoints	115
4.5 Modèle de programmation linéaire mixte d'optimisation de beam layout basé sur une partition en k -moyennes des stations utilisateurs	117
4.6 Limitations sur les domaines des centres résultant des contraintes (4.22) sur les figures (a) et (b), et celles résultant des contraintes (4.30) sur les figures (c) et (d)	118
4.7 Partitionnement en k -moyennes de la zone de service ($k = 50$) et domaines admissibles pour les centres : les cellules de Voronoï en noir, les domaines résultant des contraintes (4.22) en orange, et ceux résultant des contraintes (4.30) en blanc	119
4.8 Programme linéaire mixte de maximisation du nombre de faisceaux actifs dans le cluster i	120
4.9 Évolution du nombre de variables des différents programmes linéaires avec le nombre de clusters	121
4.10 Évolution du nombre de contraintes des différents programmes linéaires avec le nombre de clusters	122
4.11 Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_1	123
4.12 Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_2	124
4.13 Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_3	125
4.14 Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_4	126
4.15 Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_5	127

4.16	Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique au modèle avec clustering heuristique et à l'heuristique gloutonne, instances de forte hétérogénéité et de tailles élevées	128
5.1	(a) Faisceaux voisins, seuil de séparation à $3r$ (b) Stables, seuil de séparation à $3r$ (c) Faisceaux voisins, seuil de séparation à $2r\sqrt{3}$ (d) Stables, seuil de séparation à $2r\sqrt{3}$	143
5.2	Cliques maximales de taille 4 pour un faisceau donné, sous hypothèse de listes d'adjacence du motif 4 couleurs	145
5.3	Exemple d'exécution d'un travail sur les machines	151
5.4	(a) Une instance de graphe d'allocation de TWTs (b) Solution sous-optimale (c) Solution optimale	153
5.5	Programme linéaire en variables binaires de minimisation du nombre de chemins couvrants dans la graphe d'allocation de TWT	154
5.6	(a) Couverture multifaisceaux, canaux, et polarisations (b) Fréquences et TWTs	157
5.7	Comparaison de (AG) et (DM) en termes de statistiques de temps d'exécution pour des instances de $N_C = 4$ à $N_C = 12$	159
5.8	Comparaison de (AG) et (DM) en termes de fonction objectif pour des instances de $N_C = 4$ à $N_C = 12$	160
5.9	Temps d'exécution pour (S_1) et (S_2)	161

Liste des notations

- LNA Low Noise Amplifier, page 15
- TWT Amplificateur “Travelling Wave Tube”, ou tubes à ondes progressives, page 15
- Θ Ensemble des valeurs prises par la première coordonnée des points de la surface de la terre dans le système “angles true view”, page 29
- Φ Ensemble des valeurs prises par la seconde coordonnée des points de la surface de la terre dans le système “angles true view”, page 29
- Θ_x Ensemble des valeurs prises par la première coordonnée des points de la surface de la terre dans le système “angles true view projetés”, page 29
- Θ_y Ensemble des valeurs prises par la seconde coordonnée des points de la surface de la terre dans le système “angles true view projetés”, page 29
- \mathcal{P} Ensemble des points de la surface de la Terre visibles depuis le satellite, page 29
- $\delta_{\theta_{\text{réelle}}}$ Séparation angulaire réelle entre deux points à la surface de la Terre, page 31
- $\delta_{\theta_{\text{approx}}}$ Séparation angulaire entre deux points à la surface de la Terre approchée par norme euclidienne, page 31
- $\theta_{\text{max,géo}}$ Angle maximum entre un point visible à la surface de la terre et le centre de la terre, du point de vue d’un satellite géostationnaire, page 31
- $H_{\text{géo}}$ Altitude d’un satellite géostationnaire, page 31
- R_{terre} Rayon moyen de la terre, page 31
- arcsin Bijection réciproque de la fonction trigonométrique sinus restreinte à l’intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, page 32
- SFPB Technologie antenne Single Feed Per Beam, page 35
- Δ_{θ} Séparation angulaire minimale à respecter pour deux faisceaux transmis par le même réflecteur satellite, page 36
- κ Coefficient de proportionnalité entre le diamètre moyen de deux faisceaux sur le même réflecteur et leur séparation angulaire minimale Δ_{θ} , page 36
- $\tilde{\Delta}_{\theta}$ Séparation angulaire minimale à respecter pour deux faisceaux quelconques, page 38
- ε Coefficient de proportionnalité entre le diamètre moyen de deux faisceaux et leur séparation angulaire minimale $\tilde{\Delta}_{\theta}$, page 38
- arccos Bijection réciproque de la fonction trigonométrique cosinus restreinte à l’intervalle $[0, \pi]$, page 39
- $\Lambda_{\text{régulier}}$ Rapport de la distance entre deux centres adjacents sur le diamètre des faisceaux pour un beam layout régulier, page 39

N_B	Nombre maximum de faisceaux pouvant être placés, page 43
\mathcal{B}	Ensemble indiquant les faisceaux pouvant être placés, page 43
N_S	Nombre de stations utilisateurs à couvrir, page 43
\mathcal{S}	Ensemble indiquant les stations à couvrir, page 43
T_s	Demande en trafic de la station s , page 43
$S_{\text{coord},s} = (X_{\text{stations},s}, Y_{\text{stations},s})$	Coordonnées de la station s dans le référentiel des angles “true view projetés”, page 43
N_W	Nombre de diamètres possibles pour les faisceaux, page 43
W_i	Valeur en unité d’angle du $i^{\text{ème}}$ diamètre possible, page 44
\mathcal{W}	Ensemble indiquant les diamètres possibles, page 44
N_R	Nombre de réflecteurs disponibles dans la charge utile du satellite, page 44
\mathcal{R}	Ensemble indiquant les réflecteurs de la charge utile du satellite, page 44
N_{\min}	Nombre minimum de stations que doit couvrir un faisceau actif, page 44
Γ_{ω}	Charge maximale pour un faisceau utilisant le diamètre ω , page 44
CCP	Le “Circle Covering Problem”, page 45
DBL	Le problème “Décision Beam Layout”, page 45
PLNE	Programmation Linéaire en Nombres Entiers, page 53
PNLM	Programmation Non-Linéaire Mixte, page 46
\mathbb{S}^n	Matrices carrées de taille n réelles symétriques, page 54
$\mathbb{S}_{\geq 0}^n$	Matrices réelles semi-définies positives de taille n , page 54
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}_{\geq 0}^n}$	Produit scalaire standard sur les matrices semi-définies positives, page 54
$\text{Tr}(M)$	Trace de la matrice M , page 54
l_1	Norme 1 de \mathbb{R}^n , page 55
l_2	Norme euclidienne de \mathbb{R}^n , page 55
l_{∞}	Norme infinie de \mathbb{R}^n , page 55
$\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$	Ensemble continu des points depuis lesquels il est possible de couvrir au moins N_{\min} stations, page 62
$\text{card}()$	Opérateur cardinalité, qui renvoie le cardinal de l’ensemble fini sur lequel il agit, page 62
δc	Distance entre deux centres consécutifs dans le maillage régulier du domaine continu des centres en approche discrète pour le problème de beam layout, page 63
$r_{\min, \text{continu}}$	Rayon du disque couvrant minimal en approche continue, page 65
$r_{\min, \text{discret}}$	Rayon du disque couvrant minimal en approche discrète, page 65

TABLE DES FIGURES

α_{approx}	Coefficient d'approximation de l'approche discrète par rapport à l'approche continue sur le problème de disque couvrant minimum, page 65
$\mathcal{S}_{c,\omega}$	Ensemble des stations de \mathcal{S} couvertes géométriquement par un faisceau de diamètre ω placé en c , page 66
$\mathcal{C}_{\Delta,\omega,\omega'}$	Ensemble des couples de centres discrets pour lesquels deux faisceaux de diamètres ω et ω' respecteraient la distance de séparation dictée par le coefficient Δ , page 67
G_{Δ}	Graphe de disque caractérisé par la distance $\Delta \in \mathbb{R}^+$ associé à l'ensemble discret de centres possible \mathcal{C} , page 67
V	Ensemble des nœuds du graphe G_{Δ} , page 67
E_{Δ}	Ensemble des arêtes du graphe G_{Δ} , page 67
$T_{c,\omega}$	Demande en trafic cumulée des stations proches du centre $c \in \mathcal{C}$ d'une distance inférieure à $\frac{1}{2}W_{\omega}$ pour $\omega \in \mathcal{W}$, page 68
GRASP	Greedy Randomized Adaptive Search Procedures, page 74
\mathcal{C}'	Ensemble des centres admissibles se réduisant au cours d'une construction gloutonne, page 76
\mathcal{S}'	Ensemble des stations utilisateurs à couvrir se réduisant au cours d'une construction gloutonne, page 76
$n_{\text{candidats}}$	Nombre de positions sélectionnées avant tirage aléatoire pour le placement d'un nouveau faisceau dans l'approche gloutonne, page 76
$n_{\text{directions}}$	Nombre de directions discrétisées du plan euclidien, page 79
\mathcal{U}	Ensemble indiquant les directions discrétisées du plan euclidien, page 79
U_i	La $i^{\text{ème}}$ direction discrétisée, vecteur de \mathbb{R}^2 , page 80
$\mathcal{A}_{\text{min,stations,étendu},\Delta}$	Ensemble étendu de $\mathcal{A}_{\text{min,stations}}$ pour analyses surfaciques des contraintes de séparation caractérisées par un coefficient Δ , page 87
S_{Δ}	Aire d'un disque de contraintes de séparation associées au coefficient Δ , page 88
U_{antenne}	Majorant obtenu par analyse surfacique du nombre de faisceaux pouvant être placés sur la zone de service étant donné les contraintes des antennes SFPB, page 88
$U_{\text{chevauchement}}$	Majorant obtenu par analyse surfacique du nombre de faisceaux pouvant être placés sur la zone de service étant donné les contraintes de non-chevauchement, page 88
$\lfloor \cdot \rfloor$	Fonction partie entière, page 88
k -moyennes	Technique particulière de clustering, où k est le nombre de clusters visé pour les éléments traités, page 107
Ω_i	Barycentre du cluster i (point de \mathbb{R}^2) obtenu après un clustering en k -moyennes, page 107
Ω_{ih}	Composante $h \in \{1, \dots, 2\}$ (dans \mathbb{R}) du vecteur $\Omega_i \in \mathbb{R}^2$, page 107

$\tilde{\mathcal{S}}_i$	Sous-ensemble de \mathcal{S} des stations utilisateurs rattachées au cluster i , après un clustering en k -moyennes de \mathcal{S} , page 107
$\mathcal{N}_{i,j}$	Vecteur de \mathbb{R}^2 du barycentre i vers le barycentre j (barycentres de clusters obtenus après clustering en k -moyennes), page 107
$\mathcal{H}_{i,j}$	Hyperplan séparant le cluster i du cluster j , après un clustering en k -moyennes, page 107
Λ_{ij}	Membre de droite dans la définition de $\mathcal{H}_{i,j}$, page 107
\mathcal{V}_i	Cellule de Voronoï associée au cluster i , après un clustering en k -moyennes, page 107
\mathcal{N}_i	Nombre maximum de faisceau pour le cluster de stations i , après un clustering en k -moyennes, page 111
\mathcal{S}_i	Ensemble des stations de \mathcal{S} atteignables depuis le cluster de stations i , après un clustering en k -moyennes, page 111
\mathcal{B}_s	Ensemble de faisceaux inclus dans \mathcal{B} pouvant couvrir la station $s \in \mathcal{S}$, page 111
\mathcal{B}_s	Ensemble des faisceaux pouvant couvrir la station $s \in \mathcal{S}$, page 111
$\mathcal{U}'_{s,i}$	Sous-ensemble de l'ensemble de directions \mathcal{U} suffisant pour les contraintes associés au cluster i et à la station s , page 111
$\mathcal{U}'_{b,b'}$	Sous-ensemble de l'ensemble de directions \mathcal{U} suffisant pour les contraintes associées aux faisceaux b et b' , page 111
B	Sous-ensemble de l'ensemble des couples de faisceaux, chaque élément correspond à une nécessité de définir une variable binaire, page 111
\mathcal{V}'_i	Domaine final des centres admissibles pour les faisceaux du cluster i , page 111
UIT	Union Internationale des Télécommunications, page 130
FAP	<i>Frequency Assignment Problems</i> : classe de problèmes d'optimisation de l'allocation de fréquences dans les systèmes de télécommunications, page 130
$G = (\mathcal{B}, E)$	Graphe d'interférences pour l'ensemble des faisceaux \mathcal{B} reliés par des arêtes E en cas d'impossibilité de réutiliser la même couleur, page 130
$G' = (\mathcal{B}, E)$	Graphe d'interférences pour l'ensemble des faisceaux \mathcal{B} reliés par des arêtes E en cas d'impossibilité de réutiliser la même fréquence, page 130
$\mathcal{P}_{\text{RELSTAB}}(G)$	Relaxation du polytope des stables du graphe G , page 130
$\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$	Polytope des stables du graphe G , page 130
c_b	Centre du faisceau $b \in \mathcal{B}$ dans \mathbb{R}^2 , page 130
Γ_b	Ensemble des faisceaux voisins du faisceau $b \in \mathcal{B}$ selon le graphe d'interférences, page 130
N_C	Nombre de canaux dans le système pour le problème d'allocation de fréquences, page 147
C_b	Sous-ensemble de canaux (inclus dans C) définis dans le faisceau $b \in \mathcal{B}$, page 147
C	Ensemble d'indices égal à $\{1, \dots, N_C\}$, page 147

TABLE DES FIGURES

N_F	Nombre de slots fréquentiels définis par subdivision du spectre total disponible, page 147
F	Ensemble d'indices égal à $\{1, \dots, N_F\}$, page 147
N_T	Nombre maximum de TWTs, page 147
T	Ensemble d'indices égal à $\{1, \dots, N_T\}$, page 147
N_P	Nombre de polarisations, page 147
P	Ensemble d'indices égal à $\{1, \dots, N_P\}$, page 147
AG	Approche globale pour l'allocation conjointe de fréquences-polarisations-TWTs, page 151
(S_1)	Sous problème d'allocation de fréquences et de polarisations, page 151
MD	Méthode de décomposition pour l'allocation conjointe de fréquences-polarisations-TWTs, page 151
(S_2)	Sous problème d'allocation de TWTs à fréquences et polarisations connues, page 151
n_b	Nombre de canaux définis dans le faisceau $b \in B$, égal à $\text{card}(C_b)$, page 151
$n_{\text{max,canaux}}$	Nombre maximum de canaux pouvant parcourir un même TWT, page 151

Première partie

Introduction

Introduction générale et objectifs de la thèse

Dès leur conception, les systèmes spatiaux sont soumis aux nombreuses contraintes inhérentes à l'environnement spatial. Notamment, l'accès à l'espace se fait par le biais de lanceurs dont les capacités sont limitées à la fois en termes de volume disponible sous la coiffe mais aussi par rapport à la masse maximale supportée au décollage. Autrement dit, le choix d'un lanceur donné se traduit directement par des contraintes spécifiques qui restreignent d'emblée le champ des possibles pour le véhicule spatial dont il aurait la responsabilité de mise en orbite. Une fois mis à poste, ces systèmes doivent produire et stocker en autonomie les ressources en énergie électrique nécessaires au bon déroulement de leurs missions, dans des quantités qui là aussi plafonnent bien plus tôt que pour les systèmes terrestres. Cette puissance disponible à bord est à considérer dès la phase de dimensionnement de tels systèmes, en tant que ressource limitée à distribuer intelligemment en vue de certaines performances dépendantes de la mission et donc de l'application. Ensuite, l'espace est hostile à tout objet qui y est envoyé, à de nombreux égards : des températures extrêmes très éloignées des conditions idéales de fonctionnement des équipements embarqués, des risques de collisions avec des débris spatiaux (naturels ou non), le rayonnement cosmique qui interfère avec l'électronique embarquée, ou encore la dépressurisation due au vide qui risque d'endommager tout équipement contenant, par erreur de fabrication, de l'air ou du gaz. Ainsi, il faut prévoir toute une variété de méthodes et technologies de protection contre ces phénomènes pouvant compromettre le bon fonctionnement du système spatial. Nécessairement, ces solutions ont une consommation énergétique, un volume et une masse qu'il faut leur réserver dans les trois budgets correspondants, souvent aux dépens de la mission elle-même. En orbite, les systèmes spatiaux sont extrêmement sensibles aux dysfonctionnements et aux pannes des équipements embarqués, dans la mesure où réparer ou remplacer n'est pas une option. Cela soulève de réels enjeux de fiabilité, et donne lieu à des procédures de production, d'assemblage, d'intégration et de tests des véhicules spatiaux particulièrement minutieuses et contraignantes pour éviter toute erreur irréversible. En phase de conception, des stratégies de redondance d'équipements peuvent également être mises en place pour renforcer cette fiabilité. Pour dimensionner la charge utile d'un système spatial de la façon la plus adaptée possible au vu des spécificités de sa mission, il faut ainsi composer avec un ensemble conséquent de nombreuses contraintes technologiques et avec des ressources limitées et déjà en partie consommées par d'autres sous-systèmes du satellite pour prévoir l'accès et la résistance à l'environnement spatial. Il s'agit là d'un défi récurrent chez les industriels du spatial, et les fabricants de satellites de télécommunications n'échappent pas à la règle.

Face à tant de contraintes de conception, remettre en question les systèmes existants et innover devient une condition nécessaire pour espérer concrétiser des projets de télécommunications spatiales qui, depuis le milieu du XX^{ème} siècle, ne cessent d'être de plus en plus ambitieux. Les satellites profitent certes d'avantages exclusifs et invariables pour fournir des

services de télécommunications : des couvertures géographique très étendues et affranchies des difficultés d'accès par voie terrestre, une capacité de diffusion qui en une transmission sert tous les utilisateurs, ou encore la robustesse par rapport aux catastrophes naturelles sur Terre. Cependant, certains verrous subsistent quand il s'agit d'atteindre par satellite des capacités de communications à la hauteur d'une demande de plus en plus prononcée dans notre société ultra-connectée, qu'il soit question de contenu multimédia, de téléphonie, ou bien d'internet. Effectivement, s'aligner sur les performances des solutions de télécommunications des réseaux terrestres actuels, en termes de débit offert par exemple, constitue un réel défi pour l'industrie des satellites de télécommunications. Elle doit cependant le relever pour s'affirmer en tant que complément crédible et efficace aux solutions terrestres là où elles ne sont pas ou peu déployées. D'un point de vue industriel, l'objectif de cette thèse a donc été de s'inscrire dans ce mouvement de maximisation des performances des satellites de télécommunications actuels, dans le cas particulier des systèmes satellitaires multifaisceaux.

Dans une démarche d'optimisation des choix d'équipements à embarquer et d'exploitation de la ressource résultante dans la charge utile satellite, les ingénieurs système en charge du dimensionnement doivent définir clairement les objectifs visés, les degrés de liberté qu'ils s'octroient, les contraintes auxquelles ils doivent se soumettre de façon stricte, et celles qu'ils souhaitent aborder avec plus de souplesse. Ainsi, les ingénieurs s'inscrivent déjà dans une logique de modélisation presque mathématique des décisions qu'ils cherchent à prendre. Un pont naturel apparaît ainsi entre l'expertise des systèmes satellitaires de télécommunications, et la recherche opérationnelle. Avec les exigences grandissantes des missions de télécommunications, les satellites se complexifient au point de devenir extrêmement difficiles à concevoir à la main et sans appui algorithmique. Ces travaux de thèse ont donc exploité cette compatibilité de disciplines scientifiques, en prenant pour objectif la définition d'approches de décision algorithmiques, qui permettent une recherche explicite de performance à l'échelle du système de télécommunications global, tout en combinant les nombreuses contraintes de la charge utile et de la plateforme. Par ailleurs, un des grands enjeux de ces travaux de recherche a été de positionner les problématiques mathématiques ainsi soulevées dans le vaste univers des problèmes d'optimisation déjà connus, et de définir des solutions à la fois industriellement adaptées et académiquement innovantes.

Organisation du manuscrit et contributions

Le premier chapitre 1 revient sur un certain nombre de définitions essentielles : les systèmes satellitaires multifaisceaux d'abord, de leurs éléments constitutifs à leur architecture standard, puis la charge utile des satellites de télécommunications avec des détails sur les sous-systèmes centraux que sont les antennes et le répéteur. Les enjeux industriels de la phase de conception de tels systèmes sont ensuite exposés. Cette discussion débouche sur une revue de littérature sur la question de l'augmentation de la capacité des systèmes de télécommunications multifaisceaux, ce qui permet une mise en contraste de l'approche d'optimisation particulière adoptée dans cette thèse. Effectivement, les travaux engagés au cours de cette dernière se démarquent de l'essentiel des démarches d'optimisation existantes par la prise en compte conjointe au cours d'une même optimisation des différents sous-systèmes du satellite qui se contraignent mutuellement. Traditionnellement, ces différents sous-systèmes sont plutôt optimisés de manière indépendante : design fin des antennes, problématiques brutes d'allocation de fréquences, ou encore maximisation de bilans de liaison de télécommunications... A l'inverse, on s'intéresse dans cette thèse à un dimensionnement global du système satellitaire, tâche que ce chapitre se propose de décrire dans toute sa complexité. Cela permet de constater qu'il ne serait pas raisonnable numériquement de viser une résolution algorithmique directe d'un problème de conception global, qui couvrirait à la fois la charge utile du satellite et ses interfaces au sol, à savoir les terminaux utilisateurs et les stations passerelles. La conclusion qui en est tirée est qu'il est nécessaire d'envisager des stratégies de décomposition du problème global en un flot préférentiellement itératif de sous-problèmes interconnectés, mais de complexités respectives cette fois compatibles avec des résolutions numériques. Une procédure d'optimisation globale de ce type est alors concrètement proposée et justifiée. Cet éclatement en une suite de problèmes d'optimisation interdépendants a fait émerger des problèmes de dimensionnement phares, adressés par l'angle de la recherche opérationnelle dans les trois chapitres suivants : l'optimisation du placement de faisceaux et l'optimisation des plans de fréquence. Ce travail de définition d'approche de dimensionnement sur un système multifaisceaux complexe a donné lieu à une publication : [[Camino 2016a](#)].

La première étape de la procédure d'optimisation des systèmes de télécommunications multifaisceaux décrite dans le chapitre 1 est l'optimisation du placement des faisceaux du satellite, soit, dans le vocabulaire des télécommunications par satellite, l'optimisation du "beam layout". Le problème est ici posé dans le cas général d'une demande non-uniforme de la part des utilisateurs dans les régions de la Terre que le satellite a pour objectif de servir. Par rapport à ce problème d'optimisation bien particulier, les objectifs du chapitre 2 sont multiples. D'abord, il est question d'y définir formellement ce qu'est un beam layout multifaisceaux. Dans une logique d'adaptation des systèmes satellitaires à des missions spécifiques en termes de zone de couverture et de quantité de service requis, l'importance cruciale que revêt ce

problème est notamment démontrée au travers de principes et exemples clés. Ensuite, les différents liens de ce problème avec le dimensionnement de certaines classes d'équipements de la charge utile sont explicités, puis exprimés sous forme de contraintes de faisabilité et de critères de qualité à intégrer aux algorithmes d'optimisation mis en place pour le résoudre. Une revue des caractéristiques et propriétés des solutions classiques à la question du placement de faisceaux est ensuite proposée. En réponse aux limites de ces dernières, une formalisation du problème d'optimisation précis qui a concentré les efforts de recherche est fournie, suivie d'une démonstration du caractère NP-difficile du problème ainsi posé. Cette clarification du contexte mathématique a également permis d'élargir l'état de l'art proposé à tous les problèmes voisins, c'est-à-dire avec lesquels le problème de placement de faisceaux partage un nombre de significatif de caractéristiques. Aussi, cette définition du problème à résoudre met en évidence un besoin intrinsèque de gérer des variables continues dans le plan euclidien : les centres des faisceaux. Ces variables sont soumises à la fois à des contraintes de séparation et à des contraintes de proximité en distance euclidienne. Un état de l'art spécifique est alors développé sur le traitement des variables continues de points euclidiens impliquées dans des contraintes faisant apparaître des distances euclidiennes entre certains de ces points. A noter que ces variables peuvent cohabiter ou non avec d'autres variables discrètes selon l'application.

La suite naturelle proposée au travail d'état de l'art sur la problématique de placement de faisceaux est la définition de solution algorithmiques innovantes dans le chapitre 3, lesquelles s'appuient sur la linéarisation des contraintes en norme euclidienne. Parmi les méthodes existantes de la littérature, le principe de discrétisation des domaines continus qui fait basculer la non-linéarité euclidienne en pré-calcul a été identifié comme adaptable à la problématique de placement de faisceaux, donnant ainsi lieu à un premier algorithme de résolution publié dans [Camino 2014] : une heuristique gloutonne randomisée qui incorpore de la coloration de graphe traitée par recuit simulé. Enfin, une méthodologie inédite de traitement de ces contraintes continues est présentée : la linéarisation des distances euclidiennes par discrétisation des directions du plan. Cet ensemble générique de principes est lui aussi appliqué à la problématique de placement optimal de faisceaux, ce qui permet d'aboutir à un deuxième algorithme de résolution qui prend cette fois intégralement appui sur la programmation linéaire mixte. Ce travail sur la linéarisation de la norme euclidienne a été soumis, et est disponible sous forme d'article consultable ici : [Camino 2016b]. Les deux approches sont enfin confrontées dans une première campagne d'expérimentations sur le problème de beam layout.

Le chapitre 4 s'intéresse aux faiblesses de la méthode de linéarisation des contraintes euclidienne par discrétisation des directions du plan, et propose de les gommer en partie en recourant en amont à un clustering en k -moyennes. Cette méthode de clustering, dont nous rappelons le fonctionnement et les algorithmes classiques, est appliquée aux stations utilisateurs définissant la zone de couverture du système. La demande à satisfaire par le système dans le cadre de sa mission de télécommunications s'exprime depuis cet ensemble de points à la surface de la Terre. Ces travaux ont ainsi permis de démontrer qu'un partitionnement de type k -moyennes de l'ensemble des stations à couvrir, en amont de l'optimisation, permettait

de réduire le nombre de variables, de contraintes et de symétries des modèles obtenus par application de la méthodologie de linéarisation caractérisée par la discrétisation des directions du plan. Le chapitre détaille ainsi toutes les nouvelles propriétés issues de cette combinaison du clustering de stations et de la modélisation en programmation linéaire mixte du problème de placement de faisceaux. Pour celui-ci, deux nouveaux algorithmes découlent de ces résultats, ces derniers ne différant que par leur capacité à conserver de façon plus ou moins fidèle l'intégralité de l'espace des solutions accessibles originellement avec le modèle sans clustering. De nouvelles expérimentations croisées permettent de conclure sur l'ensemble des quatre algorithmes de résolution du problème de placement de faisceaux qui ont été développés au cours de cette thèse.

En aval du problème de placement de faisceaux dans la procédure d'optimisation du système proposée en chapitre 1 se situe la problématique d'allocation de bande aux différents faisceaux du satellite. Il s'agit du sujet des derniers travaux de recherche effectués, lesquels sont recensés dans le chapitre 5. Ce problème, en grande partie défini par les sorties du problème de placement de faisceaux, va lui aussi conditionner très directement les bonnes performances du système satellite : chaque faisceau est caractérisé par une demande en bande qui doit être satisfaite, sous certaines contraintes, pour que les utilisateurs qui s'y trouvent reçoivent la quantité et la qualité souhaitées de service. Notre approche se distingue de la littérature sur les problèmes d'allocation de fréquences connus par une définition explicite et intégrée de la charge utile qui devra assurer les distributions de bande produites par l'optimisation, notamment en termes d'équipements requis. Typiquement, cela a rendu possible l'approche que nous avons développée de minimisation du nombre d'amplificateurs haute-puissance devant être embarqués. Le choix de cet angle d'optimisation se justifie par le fait que cette ressource est notamment lourde, chère, gourmande en puissance, et contraignante thermiquement. Toutes les caractéristiques de ce nouveau problème de co-dimensionnement sont synthétisées dans ce chapitre en termes de variables, contraintes, et objectif mathématique. Un état de l'art est ensuite proposé pour expliciter les points communs et spécificités par rapport aux problèmes connus de la classe des problèmes d'affectation de fréquences, les *Frequency Assignment Problems* (FAP). Puis sont introduits des modèles mathématiques qui mettent à l'honneur l'existence d'architectures de charge utile réalisables pour les solutions d'allocation de bande produites, avec un contrôle de la complexité du répéteur satellite par contraintes et objectif. Parmi les contraintes qui garantissent le bon niveau de performances de télécommunications des plans de fréquences générés, les contraintes de non-interférences entre faisceaux se modélisent parfaitement à l'aide de graphes non-orientés. Il est alors prouvé dans ce chapitre que l'énumération des cliques maximales de ces graphes est un atout accessible pour la modélisation du problème. Cette modélisation aboutit notamment à une démonstration de la NP-complexité de l'optimisation de plans de fréquence de satellites multifaisceaux, et deux méthodes de résolution sont ensuite comparées : une méthode globale est une méthode décomposée. A la fois la programmation par contraintes et la programmation linéaire en nombre entiers ont été expérimentées sur les problèmes d'optimisation ainsi définis, les discussions et conclusions résultant de ces campagnes de tests étant également détaillées dans ce chapitre. Ce travail sur le problème particulier d'allocation de fréquences dans le cas particulier de satellites de télécommunications multifaisceaux dont on cherche à minimiser la complexité a donné lieu à

la publication [[Camino 2015b](#)], sélectionnée pour une version étendue [[Camino 2015a](#)].

Deuxième partie

Chapitres

Le dimensionnement de satellites de télécommunications multifaisceaux

Sommaire

1.1	Définition des systèmes satellitaires multifaisceaux	9
1.1.1	Généralités sur les satellites de télécommunications	9
1.1.2	Système multifaisceaux : principe et architecture standard	11
1.1.3	Segment spatial : la charge utile des satellites de télécommunications multifaisceaux	14
1.2	La conception de systèmes satellitaires multifaisceaux	17
1.2.1	Mission de télécommunications	17
1.2.2	Défis et approche pour la conception optimale de systèmes de télécommunications spatiales adaptés pour des missions spécifiques	18
1.3	Contexte scientifique : optimisation des systèmes spatiaux	18
1.3.1	Recours à l'optimisation dans l'ingénierie des systèmes spatiaux	19
1.3.2	Approches d'optimisation par rupture technologique ou de concept	20
1.3.3	Approches d'optimisation dédiées à un ou plusieurs sous-systèmes d'un satellite de télécommunications	20
1.4	Définition d'une procédure d'optimisation globale d'un système multifaisceaux	21
1.4.1	Notion de co-design de la charge utile et du système de télécommunications	21
1.4.2	Approche globale itérative pour la conception d'un système de télécommunication spatiales	23
1.4.3	Sélection d'un cadre mathématique d'optimisation	23
1.5	Conclusions	26

1.1 Définition des systèmes satellitaires multifaisceaux

1.1.1 Généralités sur les satellites de télécommunications

N'importe quel utilisateur se trouvant dans la zone de couverture d'un système de télécommunications spatiales peut, sous réserve de souscription, profiter du service qu'il propose. Pour les télécommunications, la médiation par le satellite permet ainsi de s'affranchir des difficultés d'accès que pourrait rencontrer un réseau terrestre : en mer, en haute montagne, ou encore au voisinage des pôles Nord et Sud par exemple. Par ailleurs, les régions couvertes par les satellites peuvent être très étendues : trois satellites géostationnaires suffisent par exemple à couvrir la

quasi-totalité de la Terre. De plus, le satellite dispose d'une propriété dite de "diffusion" qui lui permet en une seule transmission de délivrer l'information à l'intégralité des utilisateurs qu'il couvre. Combinée à des couvertures régionales larges, cette propriété de diffusion fait toute la force des services de télévision et de radio par satellite, ou services "broadcast", qui sont très largement dominants dans le marché des télécommunications spatiales. Le spectre complet des applications de télécommunications accessibles par satellite est cependant bien plus large. On retrouve notamment la téléphonie par satellite qui permet l'utilisation d'un téléphone portable n'importe où sur Terre, notamment en dehors des zones desservies par les réseaux cellulaires terrestres. Une autre sous-classe d'applications par satellite est la collecte de données, pour des services de détection de balises de détresse par exemple, ou encore pour l'internet des objets au sens large. Enfin, la dernière application mentionnée ici est celle qui a grandement inspiré les travaux de recherche conduits dans cette thèse : l'accès internet haut-débit par satellite. Les autorités réglementaires sur l'utilisation des radiofréquences ont autorisé, pour ce type d'applications, l'accès à des bandes fréquentielles larges qui permettent de définir des systèmes satellitaires à fortes capacités : on parle ainsi de satellites "broadband". Dans ce contexte, le satellite représente un avantage certain pour des zones rurales isolées et relativement peu demandeuses en débit, qui sont peu rentables pour les opérateurs internet terrestres qui refusent d'y déployer leurs réseaux. A l'inverse, dans les zones urbaines plus denses, les solutions satellitaires ne sont ni nécessaires, ni suffisamment compétitives pour concurrencer de façon crédible les réseaux terrestres. Ainsi, l'industrie des satellites cherche naturellement à se positionner en tant que complément efficace aux infrastructures terrestres. Cela suppose cependant d'être capable de fournir un service de niveau comparable en termes de capacité globale des systèmes de télécommunications. Corollairement, les capacités des systèmes satellitaires vont également devoir évoluer au même rythme que celles des réseaux terrestres. Dans cette logique-ci, l'introduction de la technologie multifaisceaux décrite dans le paragraphe suivant a permis entre le début des années 2000 et celui des années 2010 d'atteindre avec les premières générations de systèmes satellitaires haut-débit des capacités avoisinant les 100 Gigabits par secondes. Cela correspond à des débits descendants pour les utilisateurs autour des 13-15 Megabits par seconde, qui sont donc du même ordre de grandeur que ceux offerts par l'ADSL2+ terrestre. Depuis, la fibre optique s'est significativement développée dans les réseaux terrestres, au point de devenir la nouvelle référence à viser pour les systèmes de télécommunications spatiales. Or, pour approximativement les mêmes coûts du côté des utilisateurs, l'ordre de grandeur d'augmentation des débits via cette technologie par rapport à l'ADSL2+ est un facteur dix, définissant ainsi les nouveaux objectifs des systèmes satellitaires autour du Terabit par seconde. Face à ce défi technologique, les fabricants de satellites ont naturellement décidé d'intensifier le travail d'innovation, que l'on pourrait classer selon deux axes : l'innovation sur les technologies et les concepts intégrés aux systèmes satellitaires, et l'innovation sur la façon d'exploiter des technologies existantes dans un contexte de dimensionnement qui se complexifie. Cette thèse s'inscrit dans cette deuxième catégorie, en favorisant ainsi l'objectif d'atteindre les plus hautes performances et les meilleurs coûts possibles avec des technologies de charge utile dont les bonnes propriétés sont connues pour les satellites multifaisceaux. Parfois même, l'enjeu consistera simplement à produire des solutions réalisables à la place de l'ingénieur qui ne peut plus résoudre à la main les problèmes de dimensionnement étant donné la combinatoire grandissante qu'affichent les systèmes multifaisceaux. Pour réaliser ces différents objectifs, l'approche proposée dans ces travaux est l'optimisation mathématique.

1.1.2 Système multifaisceaux : principe et architecture standard

1.1.2.1 Principe phare des systèmes multifaisceaux

Le concept de satellite multifaisceaux est aujourd'hui la solution privilégiée pour repousser les limites des capacités des systèmes de télécommunications spatiales. Cette technologie a notamment permis au début des années 2000 la transition des satellites de services fixes traditionnels vers la première génération de satellites haut débit. Essentiellement, cette rupture technologique consiste en une utilisation d'une pluralité de faisceaux radiofréquence pour couvrir la zone de service d'un satellite, là où les approches plus classiques recourent elles à un unique faisceau large recouvrant l'intégralité de cette région d'intérêt. Un exemple est fourni dans la figure 1.1, commentée plus en détails dans le paragraphe suivant, avec une couverture multifaisceaux impliquant 13 faisceaux sur l'Europe. Donnons ici quelques règles qui permettent de comprendre le gain substantiel permis par l'approche multifaisceaux. Un faisceau représente la concentration de la puissance électromagnétique émise par une certaine source radiofréquence, sur une région cible de la Terre qui peut être plus ou moins étendue. On peut extraire de cette première définition une interprétation géométrique de la notion de faisceau : c'est la zone de la Terre sur laquelle l'antenne produisant ce faisceau a réussi à concentrer la puissance au-delà d'un certain niveau. Ainsi, à chaque faisceau va correspondre une forme géométrique, et celle que l'on rencontre le plus fréquemment dans ce type d'applications est le disque (dans le système de coordonnées décrit en section 2.1.2), comme représenté dans la figure 1.1. Ensuite, notons qu'à puissance égale en entrée de l'antenne, un faisceau illuminant une zone géographique large affichera une densité de puissance électromagnétique réduite par rapport à un faisceau étroit, qui concentrerait en effet la même puissance mais sur une plus petite région. Ainsi, l'une des forces de l'approche multifaisceaux se dessine, à savoir que les utilisateurs au sol profitent de signaux émis par le satellite qui sont plus puissants et qui peuvent ainsi transporter efficacement plus d'informations : on parle d'amélioration du bilan de liaison de télécommunications. De plus, dans une couverture satellitaire composée de plusieurs faisceaux étroits, certains d'entre eux se retrouvent suffisamment éloignés pour qu'il soit possible d'y utiliser simultanément la même bande de fréquences sans risque d'interférences. Cela permet d'augmenter considérablement le débit système total (en bits par seconde) que l'on peut en effet considérer, en première approche, proportionnel au cumul (en Hertz) des bandes allouées dans chaque faisceau du système.

1.1.2.2 Architecture du système global

Bien que les méthodologies et raisonnements avancés dans cette thèse soient en grande partie transposables à d'autres applications de télécommunications spatiales, nous nous sommes particulièrement intéressés dans ces travaux aux systèmes haut débit permettant de fournir une connexion internet aux utilisateurs par l'intermédiaire d'un satellite géostationnaire. Rappelons qu'un satellite géostationnaire possède une orbite circulaire particulière grâce à laquelle ce dernier apparaît comme un point fixe dans le ciel depuis n'importe quelle position sur Terre où le satellite est visible. Pour une telle application, une connexion bi-directionnelle est nécessaire entre les terminaux utilisateurs et les stations sol, ou passerelles, qui sont en interface avec la dorsale internet terrestre. En effet, au centre d'un réseau en étoile, le satellite reçoit les requêtes des utilisateurs sur sa zone de service, les transmet à la ou les stations passerelles, lesquelles

recupèrent le contenu souhaité via une connexion terrestre à l'internet, le renvoient au satellite, qui finalement le relaie aux utilisateurs. Plus précisément, les fonctions essentielles du satellite au sein de ce système sont les suivantes :

- 1) Recevoir les signaux émis depuis le sol
- 2) Les convertir en fréquence pour pouvoir les retransmettre sans brouiller les signaux entrants
- 3) Les amplifier pour compenser les pertes subies lors du long trajet jusqu'au satellite (à une altitude de 35786 kilomètres)
- 4) Et les retransmettre vers le sol, en direction soit des utilisateurs soit des stations passerelles

On qualifie ces satellites de “transparent”, pour faire écho à cette simple fonction de relai qu'ils occupent dans ces systèmes, sans jamais lire ni retravailler l'information contenue dans les signaux qui les traversent.

Dans la terminologie des télécommunications spatiales, on parle alors d'une décomposition du système en trois segments :

- **Le segment sol** : le segment sol d'un satellite “broadband” comprend une ou plusieurs stations passerelles, ou “gateways”, réparties sur la zone de service du satellite. Leur rôle est d'interfacer le réseau satellitaire au réseau terrestre par des liens de télécommunications directs avec la dorsale internet. Ces stations sol comprennent classiquement des antennes d'émission et de réception équipées de mécanismes de pointage et de suivi du satellite, des équipements d'amplification des signaux reçus et émis, des équipements de multiplexage/démultiplexage, des équipements de conversion de fréquence, de modulation/démodulation, ainsi que des modules d'interconnexion et d'interopérabilité avec le réseau terrestre. A de nombreux égards, le dimensionnement de ces stations sol diffère de celui du satellite. Effectivement, peu de limites pèsent sur les stations passerelles en termes de taille des antennes, de puissance électrique consommée, de thermique ou encore de masse totale. Aussi, toute station en panne peut être réparée voire complètement remplacée par d'autres stations prévues à cet effet. Cependant, il est important de soigner leur conception étant donné les grandes quantités de trafic qui transitent par ces stations : leurs bonnes performances sont déterminantes pour celles du système global.
- **Le segment utilisateur** : le segment utilisateur est essentiellement constitué des terminaux utilisateurs. Ces derniers sont équipés d'antennes paraboliques relativement petites, qui en règle générale ne dépassent pas les 2-3 mètres de diamètre, et qui travaillent aussi bien en émission qu'en réception (pour être compatible avec l'application d'internet par satellite qui requiert, comme discuté, cette dualité de liens). Egalement dans la partie extérieure du terminal, on trouve des équipements assurant des fonctionnalités d'amplifi-

cation et de conversion de fréquence. Quant à la partie intérieure du terminal, elle prend la forme d'un boîtier électronique qui remplit des fonctions de modulation/démodulation et de distribution locale de l'internet (Wi-Fi, routeur) et de différents services annexes (téléphonie et télévision sur IP par exemple). En phase dimensionnement d'un système satellitaire multifaisceaux complet, les décisions à prendre se limiteront souvent au choix du type de terminaux existants que le système intégrera, en fonction de leurs caractéristiques et de leurs coûts.

· **Le segment spatial** : section dédiée en 1.1.3

Cette architecture standard du système global est représentée en figure 1.1, où n'apparaît cependant que le lien dit "aller", ou "forward", depuis les stations passerelles jusqu'aux utilisateurs. Ce choix est volontaire dans la mesure où, dans ces systèmes, on constate une très forte asymétrie entre ce lien aller, très demandeur, et son complémentaire, le "lien retour" des utilisateurs aux passerelles. Cela s'explique par exemple par la popularité des contenus multimédia en streaming qui ne nécessitent que de simples requêtes en voie retour mais de lourds flux vidéo en voie aller. Les défis les plus durs à relever vont donc se situer sur ce lien où il va falloir atteindre des capacités globales élevées et surtout inédites. Sans pour autant ignorer l'existence du lien retour et son impact sur la charge utile notamment en termes de ressources à lui réserver, nos travaux d'optimisation dans cette étude ont ainsi porté sur le dimensionnement de la voie aller. Dans la

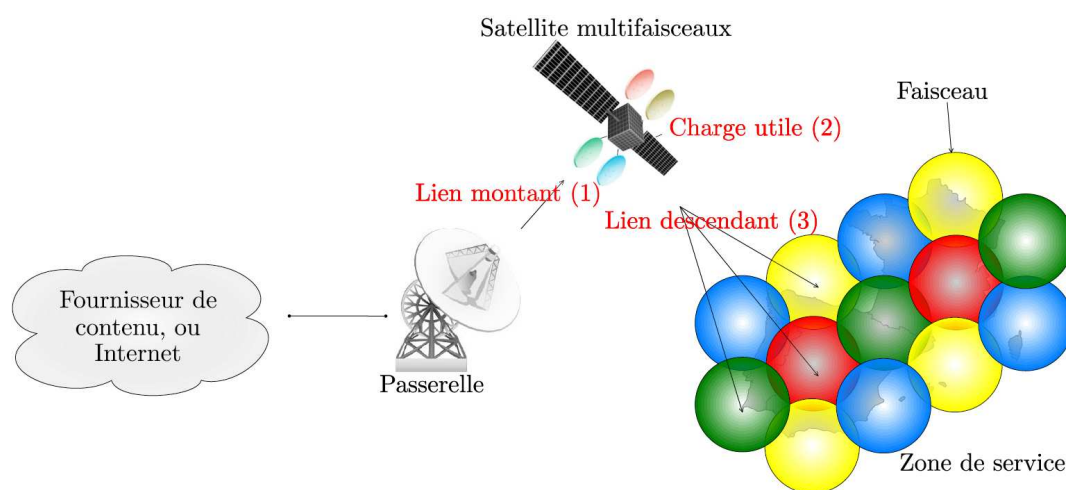


FIGURE 1.1 – Lien aller d'un système satellitaire multifaisceaux

figure 1.1, on y observe qu'une ou plusieurs stations passerelles sont connectées à l'internet via les réseaux de télécommunications terrestres. Des signaux radiofréquence sont émis par ces stations en direction du satellite dans le "lien montant" (1), le charge utile satellite est alors traversée (2) par ces signaux selon les étapes essentielles listées ci-dessus, lesquels sont ensuite retransmis via le "lien descendant" (3) dans les différents faisceaux du système qui recouvrent l'intégralité de la région où se situent les utilisateurs. Sous les hypothèses retenues dans ces travaux pour la technologie antenne, chaque faisceau est associé à exactement un réflecteur parabolique du

satellite, qui sont au nombre de 4 sur la figure 1.1, un pour chaque couleur.

1.1.3 Segment spatial : la charge utile des satellites de télécommunications multifaisceaux

Ce paragraphe fournit des définitions et détails sur les deux modules essentiels que nous distinguons dans la charge utile d'un satellite de télécommunications : les antennes et le répéteur.

1.1.3.1 Le sous-système des antennes

Le rôle d'une antenne est de concentrer l'énergie électromagnétique des sources radiofréquences de la manière la plus directive possible vers les régions de la Terre visées, à l'inverse de ce que ferait par exemple une source isotrope qui équirépartirait la puissance en entrée de la source dans toutes les directions de l'espace. Le gain antenne est une mesure de cette concentration de la puissance relativement à ce qu'aurait donné une répartition uniforme dans toutes les directions : il s'agit ainsi d'une valeur définie dans toutes les directions de l'espace 3D. Un faisceau se définit alors géométriquement comme étant la représentation d'un certain niveau de dégradation de gain antenne : c'est la zone en dehors de laquelle les gains de l'antenne affichent une dégradation du gain pic plus élevée qu'un certain seuil défini en dB (relativement à ce gain maximum). En première approximation, la règle est que le gain diminue quand la distance angulaire entre la direction considérée et la direction du gain maximum grandit. A noter également que, plus le faisceau est large, moins le gain pic sera élevé pour ce faisceau, ce qui explique pourquoi les systèmes multifaisceaux sont attractifs par rapport aux systèmes plus traditionnels qui couvrent des régions large avec un seul faisceau très large. Du point de vue du satellite, en regardant dans la direction de la Terre, les designs d'antenne classiques donnent lieu à des faisceaux qui peuvent être représentés par des disques à la surface de la Terre. Cela permet de définir la "largeur de faisceau" qui correspond au diamètre de ces disques, grandeur alors homogène à un angle.

Bien qu'il faille repenser pour chaque système la configuration antenne de manière à épouser au mieux ses particularités en termes de services et de besoins, on peut tout de même identifier ici une configuration particulièrement fréquente dans les systèmes multifaisceaux : les antennes à réflecteurs. Ces dernières permettent en fonction de la taille du réflecteur parabolique de viser de fortes concentration de puissance (plus le réflecteur est grand, plus on concentre l'énergie, et plus on est directif) : on génère alors des faisceaux de diamètres étroits. L'utilisation de plusieurs réflecteurs embarqués (au nombre 3 ou 4, pour donner un ordre de grandeur) est monnaie courante pour la classe des satellites multifaisceaux. Pour ce qui est de la solution d'illumination des réflecteurs par des sources radiofréquences, nous considérerons uniquement dans cette thèse la technologie Single Feed Per Beam, décrite en détails dans [Wolf 2014] par exemple. Il s'agit de la technique la plus simple pour illuminer les réflecteurs dans le sens où à chaque faisceau correspond exactement une source, qui lui est dédiée et à laquelle il peut donc s'identifier. Dans une architecture multifaisceaux, plusieurs faisceaux sont rattachés à un moment réflecteur et donc plusieurs sources cherchent à l'illuminer : cela se traduit par des contraintes de positions relatives des faisceaux, discutées notamment en section 2.1.3.3.



FIGURE 1.2 – Plateforme E3000 pour une mission multifaisceaux avec 4 antennes SFPB à réflecteur (tirée de [Wolf 2014])

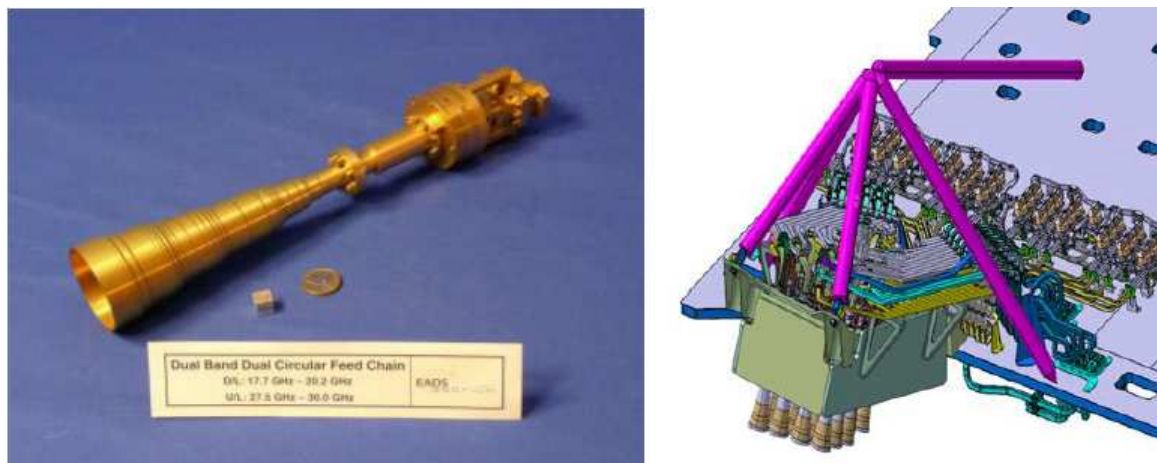


FIGURE 1.3 – Chaîne d’alimentation d’une source à gauche, représentation d’un cluster de sources à droite (tirées de [Wolf 2014])

1.1.3.2 Le sous-système répéteur

Après les antennes, le deuxième module majeur de la charge utile d’un satellite de télécommunications multifaisceaux est le “répéteur”. Dans le cas des architectures dites transparentes considérées dans ces travaux, son rôle est essentiellement de convertir en fréquence les signaux reçus par les antennes, de les amplifier pour compenser les pertes subies dans le voyage depuis la Terre jusqu’au satellite géostationnaire, puis de s’interfacer correctement avec les antennes d’émission (routage des signaux vers les bonnes sources radiofréquence) pour servir les faisceaux utilisateur sur le lien descendant. Nous décrivons rapidement dans ce paragraphe les éléments essentiels d’un répéteur d’une charge utile transparente, en nous appuyant sur la figure 1.4 qui en est une illustration. On trouve tout d’abord la section d’entrée où a lieu une première étape

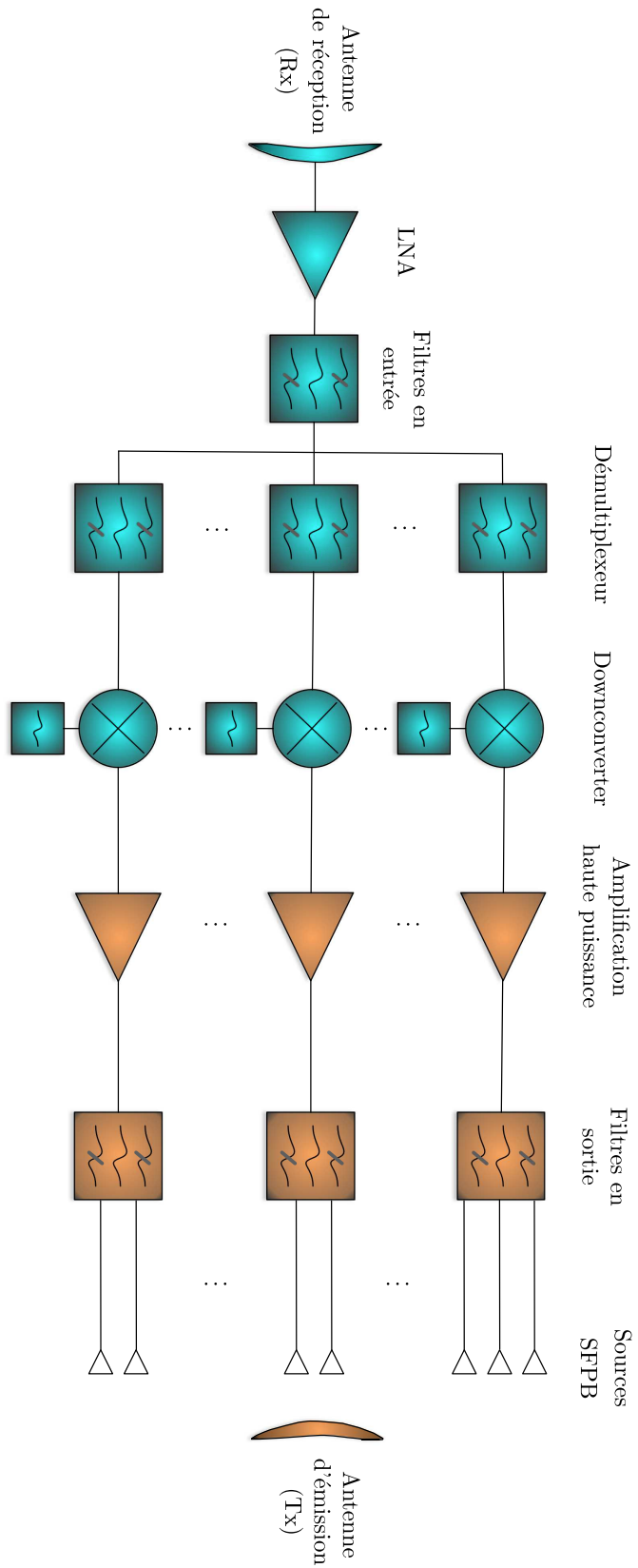


FIGURE 1.4 – Architecture standard de la charge utile d'un satellite de télécommunications multifaisceaux transparent

de filtrage et d'amplification des faibles signaux reçus par les antennes de réception, ou antennes "(Rx)". Le "Low Noise Amplifier" (LNA) est le premier élément rencontré : il amplifie les signaux reçus avec pour propriété d'être à l'origine de très peu de bruit, lequel serait absolument problématique pour les signaux faibles provenant des stations passerelles. Cette amplification est suivie d'une première opération de filtrage qui permet de rejeter les signaux provenant de la partie émission du satellite, ces signaux étant heureusement et volontairement transmis à des fréquences distinctes de celles des signaux entrants. Ensuite, les signaux traversent un démultiplexeur qui divise les signaux en plusieurs canaux qui vont chacun définir une voie d'amplification. L'idée phare est que la puissance d'un amplificateur est partagée sur tous les signaux qui le traversent. Ainsi, séparer les signaux sur plusieurs amplificateurs leur permet de percevoir individuellement plus de puissance, car cette dernière est moins partagée. Ensuite, comme discuté, il faut séparer en fréquence les signaux reçus des signaux transmis par le satellite. Il faut ainsi procéder à une conversion en fréquences qui est assurée par les "downconverters", eux aussi représentés dans la figure 1.4. A noter que dans cette figure, le changement de couleur du bleu au orange correspond au changement de fréquences des signaux traversant la charge utile. Dans chacun des canaux définis par le démultiplexage, les signaux traversent alors un amplificateur haute puissance. Une technologie commune pour cette classe de satellites est le tube à ondes progressives (Travelling Wave Tube amplifier, ou "TWT"), décrit par exemple dans [Maral 2011a]. Enfin, les filtres en section de sortie filtrent le bruit thermique et les harmoniques générées en dehors des bandes des signaux par les amplificateurs haute puissance, avant routage des signaux vers les sources radio-fréquence adéquates dans la partie antenne "(Tx)". Tous ces éléments du répéteur sont connectés physiquement par des guides d'ondes ou des câbles coaxiaux. Enfin, notons que quand nous parlerons de faisceau dans un contexte qui fait référence à des équipements du répéteur, il faudra comprendre qu'il s'agit d'une référence aux signaux et donc bandes de fréquences destinées à ce faisceau, lesquels parcourent une certaine route au sein du répéteur. La différence est forte avec le contexte "antenne" où le faisceau a une forme géométrique en tant que représentation de la concentration de l'énergie électromagnétique permise par l'antenne.

1.2 La conception de systèmes satellitaires multifaisceaux

1.2.1 Mission de télécommunications

Les objectifs à satisfaire dans le cadre d'une mission de télécommunications spatiales peuvent être de différents types. Décrits de façon générale, ils prennent la forme d'une série de services spécifiques qui doivent être fournis à des régions identifiées et précisément délimitées à la surface de la Terre : télévision, radio, téléphone, ou applications large bande (internet par satellite, vidéoconférences)... A la fois la qualité et la quantité de ces services peuvent être spécifiées. Par ailleurs, il peut par exemple exister des contraintes de coût sur le satellite voire le système de télécommunications global. Comme déjà introduit en paragraphe 1.1.1, nous rappelons que nous proposons dans ces travaux de nous concentrer sur les applications "broadband", en supposant que les objectifs de la mission de télécommunications se traduisent en une série de demandes élémentaires définies pour toutes les stations utilisateur de la zone de service. A partir de ce besoin, les fabricants de systèmes satellitaires doivent proposer une solution complète qui comprend des détails à la fois sur le segment sol (passerelles, centres de contrôle), le segment utilisateur (les

terminaux satellite), et bien sûr le segment spatial constitué dans nos travaux d'un satellite multifaisceaux.

1.2.2 Défis et approche pour la conception optimale de systèmes de télécommunications spatiales adaptés pour des missions spécifiques

Chacun de ces trois systèmes complexes peut lui-même être subdivisé en différents sous-systèmes possédant leurs particularités et leurs défis en phase de conception. Ainsi, il n'est pas raisonnable d'avoir pour ambition de résoudre directement et conjointe ces trois segments : il y a trop de décisions à prendre sur un grand nombre de sous-systèmes qui interagissent, et qui impliquent des simulations des systèmes numériquement très coûteuses pour évaluer la qualité des designs sélectionnés. L'approche naturelle pour gérer une telle complexité est la division du problème global en des questions de dimensionnement de complexité plus accessible, lesquelles sont choisies de manière à définir une série de sous-problèmes à résoudre qui soient les plus indépendants possible. Ce principe mène naturellement à la division de la conception du système de télécommunications spatiales en trois problématiques de design distinctes, respectivement pour les segments sol, utilisateur, et spatial. Dans nos travaux de recherche, nous avons fait l'hypothèse que les segments sol et utilisateurs sont déjà définis et donc que les grands compromis pouvant impacter le segment spatial ont été figés : le nombre de stations passerelles, leurs puissances, leurs positions, la bande radiofréquence totale du système, le type de terminaux utilisateurs disponibles... Il est alors possible de se concentrer exclusivement sur le segment spatial et d'amorcer la réflexion sur les approches qui vont permettre de gérer les différentes contraintes (faisabilité technologique) et critères (complexité, coût, poids) de la charge utile du satellite, et celles dictées par les spécifications de la mission de télécommunications : ceci est illustré dans la figure 1.5.

On finira par rappeler un constat parfaitement applicable aux systèmes de télécommunications satellitaires multifaisceaux : les décisions prises en phase d'une conception, dite phase A, d'un système spatial conditionnent irrémédiablement le coût final du système, comme discuté notamment dans [Jilla 2004], [Shishko 1995] et [Bearden 1999]. Le conseil international en ingénierie des systèmes estime à ce titre que jusqu'à 75% des coûts d'un système complexe sont déterminés après seulement 10 – 20% du temps de développement. Ainsi, dans une logique de compétitivité, une stratégie prometteuse voire nécessaire est bien le recours à l'optimisation dans les prises de décision, et ce au plus tôt en phase de conception. C'est exactement ce que nous proposons au travers des travaux d'optimisation développés dans cette thèse.

1.3 Contexte scientifique : optimisation des systèmes spatiaux

L'optimisation mathématique est une discipline connue des ingénieurs travaillant sur des systèmes spatiaux. Comme détaillé en paragraphe 1.3.1, les applications et exemples sont nombreux et sur un large spectre de systèmes différents. Dans le cas particulier de l'augmentation de la capacité et de l'efficacité des systèmes de télécommunications satellitaires, on distingue essentiellement deux approches : les approches d'innovations technologiques et conceptuelles des systèmes, détaillées en 1.3.2, et les approches d'optimisation mathématiques stricto sensu

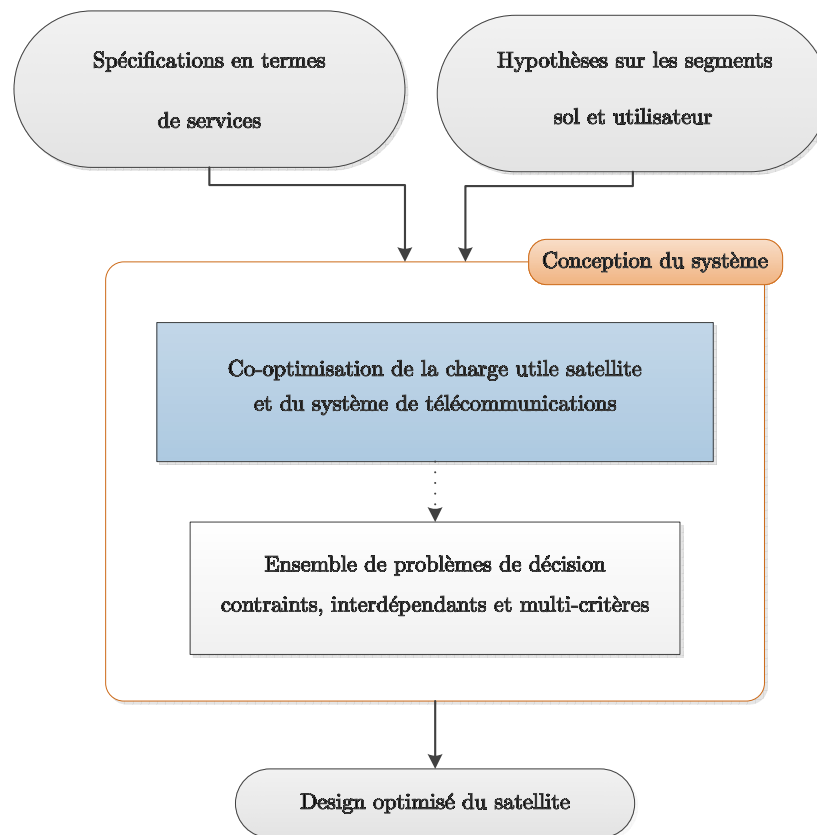


FIGURE 1.5 – Aperçu de la procédure d’optimisation du segment spatial d’un système de télécommunications multifaisceaux

qui sont en général uniquement appliquées à des sous-systèmes du satellite pour des raisons de complexité des problèmes à résoudre (détails en paragraphe 1.3.3).

1.3.1 Recours à l’optimisation dans l’ingénierie des systèmes spatiaux

La question de l’optimisation conjointe des objectifs des missions, de leur sécurité, de la faisabilité technologique et de l’efficacité en termes de coût, a été présente dès les premiers jours dans l’activité spatiale. Bien que les ambitions soient continuellement grandissantes dans ce domaine, les innovations scientifiques qui ont lieu en parallèle au sein de la communauté de recherche en optimisation mathématique sont à l’origine d’outils et d’algorithmes génériques, de plus en plus efficaces, qui sont parfois directement utilisables pour définir et optimiser missions de demain. Quand ce n’est pas le cas, la recherche en optimisation reste une solution à privilégier pour produire à partir de briques algorithmiques existantes des solutions inédites et adaptées tirant partie des toutes les forces connues des différents cadres mathématiques à disposition : optimisation convexe, non-convexe, discrète, continue, linéaire, non-linéaire...

A la manière de ce qui est proposé dans le travail de synthèse [Fasano 2012], nous pro-

posons ici un rapide tour d’horizon des problématiques d’optimisation rencontrées en ingénierie des systèmes spatiaux. Parmi les applications les plus connues, on peut citer l’optimisation des trajectoires interplanétaires, par exemple traitées dans [D’Amario 1982] et [Cage 1994] par méthode de Newton et par des métaheuristiques. On cite également [Conway 2010] et [YONG 2008] pour des travaux de synthèse complets sur le sujet. Les auteurs de [Junge 2005], [Tillerson 2002], [De Queiroz 2000] optimisent eux des lois de contrôle pour coordonner des satellites volant en formation et devant se soumettre à des manœuvres de reconfiguration, avec prise en compte intégrée dans les algorithmes de la dynamique non-linéaire du système. Les auteurs de [Ho 2013] s’intéressent quant à eux à l’optimisation de la logistique au sein de la station spatiale internationale pour optimiser le temps que va pouvoir passer l’équipage à bord.

Si on s’intéresse plus spécifiquement aux systèmes satellitaires en orbite autour de la Terre, et en particuliers aux systèmes autres que les systèmes de télécommunications, on peut citer les travaux d’optimisation des missions des satellites d’observation. Sur le sujet de l’optimisation des constellations de cette classe de satellites, on peut par exemple citer [Budianto 2004], [Feringer 2006] ou encore [Feringer 2007]. Par exemple, les auteurs de [Frank 2001], [Lemaître 2002] et [Gabrel 2003] s’intéressent à l’ordonnancement des nombreuses requêtes de prises de vue auxquelles sont soumises les constellations de satellites d’observation de la Terre.

1.3.2 Approches d’optimisation par rupture technologique ou de concept

Réussir à atteindre les très haut débits aujourd’hui visés dans les services de télécommunications est un réel défi à l’échelle système pour les satellites multifaisceaux qui a donc motivé un nombre significatif de travaux de recherche dans la communauté des télécommunications spatiales. Les standards de définition des systèmes actuels sont ainsi remis en question pour laisser place à de nouvelles technologies et de nouveaux concepts dont les objectifs sont de faire franchir de nouveaux paliers aux systèmes satellitaires en termes de capacités délivrées. Par exemple, les auteurs de [Vidal 2012] proposent un état de l’art de ces systèmes et un ensemble de techniques pour en améliorer les performances : allocation de plus de bande, schémas de réutilisation de fréquences, dimensionnement du lien “feeder” entre les stations passerelles et le satellite, et techniques d’atténuation d’interférences. Dans [Poulenard 2014], les auteurs mettent en évidence l’intérêt de recourir à des communications optiques et non plus aux radiofréquences pour le lien “feeder” des satellites géostationnaires, et proposent une méthodologie et des algorithmes pour adresser les différents défis de conception que ces architectures innovantes soulèvent. Les auteurs de [Christopoulos 2015] analysent des systèmes multifaisceaux qui utilisent deux satellites co-localisés qui se coordonnent pour fournir des performances accrues et plus robustes.

1.3.3 Approches d’optimisation dédiées à un ou plusieurs sous-systèmes d’un satellite de télécommunications

De façon plus fréquente, et pour des raisons évidentes de complexité des problèmes à résoudre, on trouve dans la littérature un nombre importants de travaux qui s’intéressent à l’optimisation de certains sous-systèmes des satellites multifaisceaux. Par exemple, les auteurs de

[Touya 2008] investiguent des algorithmes d'optimisation d'un certain type d'antennes multifaisceaux. Pour une architecture système et une charge utile satellite données, la littérature est également riche sur la question de l'allocation des ressources comme la puissance du satellite and la bande radio du système : [Aravanis 2015], [Kiatmanaroj 2016], [Kiatmanaroj 2013], [Park 2012], [Touati 2003], ou encore [Wang 2014] par exemple. L'optimisation est également présente quand il s'agit d'apporter des réponses aux situations de panne de certains équipements de la charge utile des satellites multifaisceaux, par exemple les travaux présentés dans [Stathakis 2012] et [Stathakis 2013] proposent une optimisation de la reconfiguration de la charge utile de télécommunications en cas de panne. Dans un registre connexe, les travaux [Boche-Sauvan 2014] se concentrent eux sur l'optimisation du séquençement des nombreuses et longues phases de test des satellites auxquelles les satellites doivent se soumettre avant d'être autorisés à être lancés.

1.4 Définition d'une procédure d'optimisation globale d'un système multifaisceaux

1.4.1 Notion de co-design de la charge utile et du système de télécommunications

Idéalement, toutes les variables, contraintes et critères de définition de la charge utile et d'interfaçage avec le reste du système de télécommunications devraient être manipulées conjointement : on parle alors de co-design de la charge utile et du système de télécommunication. Concrètement, cela veut dire qu'il faut embarquer et allouer la ressource en fonction des performances visées au niveau du système de télécommunications (donc en considérant très directement les besoins des utilisateurs en termes de capacité et de disponibilité des liens), mais en veillant à ce que les contraintes technologiques des antennes soient vérifiées, et que les différents choix faits correspondent à une configuration du répéteur qui soit réalisable et compatible de la plateforme satellite retenue. En pratique, les questions auxquelles il est nécessaire de répondre en phase d'un dimensionnement d'un satellite multifaisceaux sont les suivantes :

- Combien de faisceaux pouvons-nous embarquer ?
- Combien et quelles tailles de réflecteurs pouvons-nous envisager ?
- Quelles sont les tailles de faisceaux admissibles résultantes ?
- Quel réflecteur émet quel faisceau ?
- Quelle technologie antenne utiliser pour optimiser les performances ? Quelles sont les contraintes résultantes ?
- Quel faisceau sert quelle station ? Avec quelles performances ?
- Quelle passerelle alimente quel faisceau ?

- Quelle est la demande perçue par chaque faisceau ?
- Quelle quantité de bande allouons-nous à chaque faisceau ? Selon quelle occupation du spectre disponible ?
- Combien de filtres sont nécessaires ?
- Quel amplificateur haute puissance amplifie quel faisceau ? Quelle est la puissance reçue par canal ?
- Combien devons-nous embarquer d'équipements de conversion en fréquence ?
- ...

La complexité du design provient alors de l'apparition de critères très directement antagonistes quand nous cherchons à apporter des réponses pertinentes à ces différentes questions, par exemple :

- Une façon d'améliorer les performances des communications au niveau des utilisateurs finaux est d'augmenter les gains des antennes. Or, de meilleurs gains sont obtenus avec des faisceaux plus petits dont la formation nécessite des réflecteurs paraboliques plus grands qui risquent d'atteindre les limites de la plateforme et du lanceur en termes de volume et de masse. D'autre part, des faisceaux plus petits ont par définition une étendue géographique amoindrie : couvrir l'intégralité de la zone de service va demander plus de faisceaux, qui sont pourtant en nombre limité pour des questions de puissance et d'aménagement interne de la charge utile du satellite.
- Un nombre de faisceaux qui n'est pas aussi grand que l'on aurait pu le souhaiter, pour les raisons juste évoquées, peut se traduire par des demandes en bande à installer sur chaque faisceau difficiles à satisfaire. Il faut alors aller chercher toutes les marges de manœuvre possibles pour proposer une solution conforme à ces besoins élevés, avec un impact direct sur le répéteur, par exemple : les discontinuités des bandes allouées coûtent en filtres, les déséquilibres d'utilisation des différentes fréquences coûtent en équipement de conversion et en amplificateurs haute puissance, donc en coût, en masse, en consommation électrique ...
- Un nombre de faisceau qui serait même trop petit peut se traduire par des demandes résultantes dans les faisceaux trop fortes pour qu'il existe une architecture répéteur permettant de router la bande reçue par les passerelles aux différents faisceaux côté utilisateur dans les quantités requises.

Nous avons donc affaire à des sous-systèmes individuellement complexes et profondément interconnectés. L'approche conjointe serait donc la voie à privilégier si on ne venait pas se heurter à

une complexité numérique malheureusement trop élevée. Ceci explique la définition de l’approche globale décomposée itérative du paragraphe suivant.

1.4.2 Approche globale itérative pour la conception d’un système de télécommunication spatiales

Pour adresser la complexité du co-design mise en évidence dans le paragraphe précédent, nous avons imaginé et implémenté la procédure décomposée de dimensionnement d’un satellite multifaisceaux proposée en figure 1.6. Toute la force de cette dernière réside dans la capacité à lier les différents problèmes par les contraintes et objectifs mathématiques de chaque étape. Concrètement, nous avons fait en sorte que chaque étape intègre dans son déroulement un volet de préparation des problèmes qui suivent dans le flot de problèmes de décision de la figure 1.6. De façon complémentaire à ce principe, chaque étape reçoit les solutions des optimisations des étapes précédentes en tant qu’entrées à respecter strictement, sans jamais les remettre en question jusqu’à l’évaluation finale du design complet. Cette dernière valide ou invalide la solution produite et identifie des causes du manque de qualité ou d’absence de faisabilité technologique, qui sont intégrées directement aux différentes briques d’optimisation dans l’itération suivante. Le choix a été d’initialiser le dimensionnement par le problème dit de “beam layout”, l’importance de ce choix étant notamment détaillé dans les chapitres 2, 3, 4. Comprenons simplement que le statut de premier problème résolu dont hérite le beam layout est essentiellement une réponse à la forte sensibilité des performances du système de télécommunications à ce paramètre : on ne peut pas compenser pas les faiblesses d’un beam layout plus loin dans la chaîne de dimensionnement, par exemple si des faisceaux sont trop chargés ou si des stations ne sont géométriquement pas couvertes. La problématique d’allocation de fréquences et d’optimisation du répéteur en termes de filtres, d’amplificateurs, et d’équipements de conversion est elle traitée en chapitre 5, sa bonne résolution ayant été jugée particulièrement déterminante pour les performances vis-à-vis de la mission de télécommunications : alors que les besoins sont uniquement définis par faisceau au moment du “beam layout”, la problématique d’allocation de bande apporte elle une réponse concrète au besoin des utilisateurs en distribuant la ressource spectrale embarquée.

1.4.3 Sélection d’un cadre mathématique d’optimisation

1.4.3.1 La besoin en souplesse des modèles mathématiques

Le contexte industriel qui a motivé ce travail de recherche incite au développement de méthodologies d’optimisation les plus adaptatives possibles. En effet, les besoins des systèmes futurs sont incertains et difficiles à anticiper, tout comme leur traduction en termes de contraintes sur les ressources et les équipements avec lesquels les ingénieurs système devront composer en phase de conception. Autrement dit, les règles de dimensionnement des satellites de télécommunications vont évoluer selon un rythme dicté à la fois par les innovations sur les technologies embarquées, mais aussi par la perception fluctuante du marché des télécommunications par les opérateurs qui actionnent les fabricants. En conséquence directe, les problèmes d’optimisation du dimensionnement des satellites de télécommunications résolus aujourd’hui ont de grandes chances de changer significativement, que ce soit en termes de critères mathématiques, de nombre et types de contraintes et variables. Ce constat a naturellement dirigé les efforts de recherche de cette

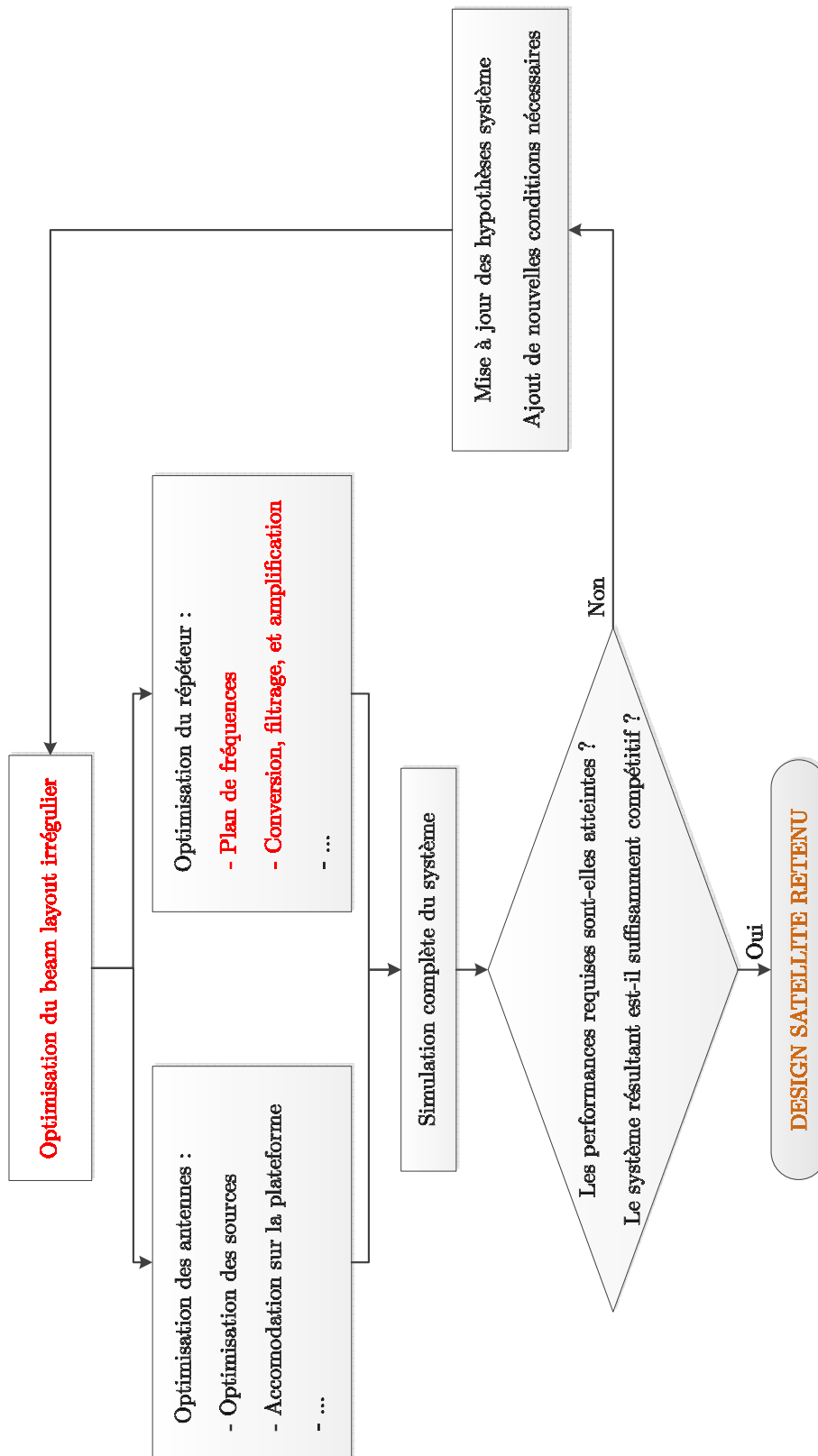


FIGURE 1.6 – Procédure itérative d’optimisation globale d’un satellite multifaisceaux. En rouge : les problèmes adressés pendant la thèse

thèse vers les cadres d'optimisation proposant le meilleur compromis entre ces besoins d'une part de souplesse et d'autre part de performance et si possible d'exactitude de résolution.

Ce contexte particulier a conditionné la façon de penser les algorithmes de résolution proposés. Typiquement, ce besoin d'avoir des algorithmes évolutifs est celui qui a orienté le travail de recherche vers, notamment, la programmation linéaire mixte et la programmation par contraintes. Il existe effectivement un mouvement de recherche extrêmement actif qui produit continûment des algorithmes génériques applicables à tout modèle mathématique conforme aux règles de modélisation de ces deux cadres d'optimisation particuliers. Ce constat est rassurant d'un point de vue industriel : on ne devra pas repenser intégralement les heuristiques dédiées qui auraient été définies pour un problème précis en termes de variables et de contraintes, et on pourra à l'inverse se permettre d'en ajouter et d'en enlever aux modèles existants. Cette approche par delta de modèles répond donc à un besoin pratique de faire évoluer en permanence les algorithmes d'optimisation de dimensionnement des satellites multifaisceaux du côté d'Airbus Defence and Space (partenaire industriel de cette thèse CIFRE).

1.4.3.2 Choix de l'optimisation mono-objectif en contexte multi-critères

Nous avons entrevu dans les paragraphes précédents que les problèmes de dimensionnement des satellites multifaisceaux devraient en toute rigueur être adressés par de l'optimisation multi-objectif ([[Deb 2016](#)] en synthétise notamment la théorie). Effectivement, nous avons évoqué différents critères d'optimisation : maximisation du service offert aux utilisateurs, minimisation du nombre de filtres, minimisation du nombre d'amplificateurs haute puissance, minimisation du nombre d'équipements de conversion, minimisation du nombre de faisceaux, ou encore minimisation des difficultés à venir dans les problèmes d'optimisation suivants dans le flot de la figure 1.6...

Finalement, dans cette thèse, nous avons décidé de mettre en œuvre une méthodologie classique pour revenir à de l'optimisation mono-critère, l'objectif ici étant notamment de garder ouverte la possibilité de recourir à la programmation linéaire mixte et à la programmation par contraintes. La technique en question a pour nom "méthode epsilon-contrainte" dans la littérature : [[Laumanns 2005](#)], [[Mavrotas 2009](#)]. Elle consiste à faire le choix d'optimiser un des nombreux critères, celui sur lequel on dispose d'une certaine liberté, tout en contraignant les autres critères pour lesquels il est plus naturel de définir des valeurs minimales ou maximales. La méthode propose en réalité une approche itérative qui permet sous certaines conditions de définir des solutions prouvées Pareto-optimales. Ici, nous nous contentons de l'itération 0, à savoir de la réflexion permettant d'aboutir à un sous-ensemble de critères qui basculent en contraintes, et à des bornes sur les valeurs que peuvent prendre ces critères. Il s'avère qu'il s'agit là d'une approche nativement compatible des problèmes d'optimisation que nous avons à résoudre. Il est par exemple naturel de maximiser le nombre de stations couvertes et de contraindre le nombre de faisceaux à sa limite supérieure, issue de la plateforme satellite envisagée. De la même manière, cela fait sens de contraindre strictement le nombre de certains équipements comme les réflecteurs du satellite, les équipements de conversion, ou même les filtres : cela permet de se conformer à des limites rigides de budget ou de complexité de la

charge utile...

1.5 Conclusions

Ce premier chapitre a permis d'introduire la problématique industrielle. Les systèmes satellitaires multifaisceaux ont été définis et présentés, avec un niveau de détails accru pour le segment spatial. Le caractère aussi crucial que complexe de la phase de conception des satellites multifaisceaux a été démontré et a donné lieu à une subdivision estimée nécessaire à la fois du dimensionnement du système complet de télécommunication, mais aussi du dimensionnement du segment spatial, lui-même déjà trop complexe pour être optimisé directement dans sa globalité. Ainsi, après un état de l'art établi sur les différents mouvements de recherche cherchant à faire reculer les limites des systèmes de télécommunications satellitaires actuels, nous avons défini et fourni une procédure d'optimisation globale itérative, et nous avons précisé le cadre mathématique retenu pour les thématiques d'optimisation qui font l'objet des chapitres suivants, à savoir : l'optimisation mono-critère qui s'appuie de façon préférentielle sur des cadres d'optimisation souples par rapport aux variables et objectifs des problèmes. Dans le chapitre suivant, cette dernière est appliquée au premier problème de la procédure d'optimisation globale introduite dans ce chapitre : l'optimisation du placement irrégulier de faisceaux.

Le problème d’agencement de faisceaux : définition et état de l’art

Sommaire

2.1	Le beam layout d’un système multifaisceaux : définition, enjeux, contraintes et solutions existantes	27
2.1.1	Définition et enjeux d’un beam layout de satellite multifaisceaux	28
2.1.2	Système de coordonnées considéré	29
2.1.3	Contraintes et critère de co-design pour la définition d’un beam layout multifaisceaux	34
2.1.4	Une solution classique : le beam layout régulier	38
2.1.5	Vers des solutions irrégulières optimisées	42
2.2	État de l’art : l’optimisation de beam layout, les problèmes voisins, et la gestion des contraintes en norme euclidienne	46
2.2.1	Solutions existantes au problème d’optimisation de beam layout irrégulier	47
2.2.2	Problèmes voisins de la littérature et solutions associées	47
2.2.3	Les contraintes inégalités continues en norme euclidienne dans les programmes mathématiques	53
2.3	Conclusions	58

2.1 Le beam layout d’un système multifaisceaux : définition, enjeux, contraintes et solutions existantes

Uniquement entrevue dans les sections précédentes, ce chapitre propose d’affiner la définition du “beam layout irrégulier” d’un système multifaisceaux, selon la terminologie communément admise dans le milieu des satellites de télécommunications. Notamment, les variables de ce problème sont définies et permettent d’aboutir à une formulation mathématique des différentes contraintes à considérer pour le co-dimensionnement d’un système de télécommunications par satellite et de la charge utile de ce dernier (en section 2.1.1). Dans ce but, il a également été nécessaire de choisir un système de coordonnées adéquat pour manipuler les variables continues des centres des faisceaux. Pour cela, nous approfondissons la démonstration d’un résultat connu dans l’industrie des satellites de télécommunications : l’approximation des distances angulaires par la norme euclidienne dans le système de coordonnées dit des “angles true view”, en paragraphe 2.1.2. Un critère mathématique d’optimisation est également fixé et justifié, avant que les solutions algorithmiques classiques chez les fabricants de tels satellites soient analysées en

section 2.1.3 et 2.1.4. Dans 2.1.5, on retour sur les enjeux du beam layout ainsi qu'une discussion critique sur ces premières solutions simples débouchent sur la définition et un état de l'art sur le problème d'optimisation de beam layout tel qu'il a été étudié dans cette thèse. De plus, sa complexité numérique est démontrée dans ce même paragraphe : optimiser un beam layout irrégulier sous les contraintes et le critère considérés est NP-difficile.

2.1.1 Définition et enjeux d'un beam layout de satellite multifaisceaux

2.1.1.1 Définition d'un beam layout

Dans le milieu des satellites de télécommunications multifaisceaux, un "beam layout", dont la traduction française la plus proche pourrait être le très peu usité "agencement de faisceaux", est caractérisé par :

- Un nombre de faisceaux,
- Le centre de ces faisceaux, dans un certain système de coordonnées,
- Le diamètre des faisceaux,
- La relation de ces faisceaux avec les équipements de la partie antenne les produisant,
- Les associations entre les stations utilisateur et les faisceaux ainsi placés.

Construire un beam layout se résume à la définition de ces cinq points. Cependant, il est loin d'être facile de parvenir à les déterminer en assurant une qualité de solution satisfaisante par rapport aux objectifs de la mission, mais aussi en conservant la faisabilité technologique. Il s'agit donc de respecter toutes les contraintes de la charge utile et de la plateforme, tout en faisant en sorte de pouvoir assurer une qualité de service satisfaisante, voire optimale selon un certain critère, aux utilisateurs de la zone de couverture.

2.1.1.2 Enjeux du beam layout pour le système global

L'optimisation du beam layout est à la source de la procédure itérative d'optimisation du dimensionnement global d'un système multifaisceaux proposée dans le chapitre 1.4. Autrement dit, au sein de cette décomposition de la conception du système, un certain nombre de choix sont faits au moment de l'optimisation du beam layout et, pour une itération de dimensionnement donnée, ne sont pas remis en question par la suite. Ceci peut s'avérer problématique dans le sens où certains paramètres définis lors de l'optimisation du beam layout constituent directement des entrées à d'autres problèmes situés en aval dans la chaîne de dimensionnement que nous avons proposée. Par exemple, le nombre de faisceaux et l'allocation des stations aux faisceaux impactent très directement l'optimisation du répéteur, notamment au travers du problème de plan de fréquences étudié en partie 5. En plus de porter directement la responsabilité des stations qui ne sont pas servies car non-couvertes par les faisceaux retenus, un beam layout peut aussi voir sa qualité chuter si les demandes cumulées par faisceau qui en résultent induisent un trop grand

nombre de violations des contraintes à respecter dans le problème de plan de fréquences qui suit ce placement de faisceaux. Ceci est un défaut de l'approche par décomposition du problème global qui se généralise au-delà même du cas particulier de l'optimisation de beam layout : en approche décomposée de dimensionnement, il est possible de mal anticiper en quoi les choix faits à l'étape courante peuvent se transformer en des difficultés voire des impossibilités impossibles à compenser dans les étapes suivantes. Dans cette thèse, l'objectif de contrer ces phénomènes désavantageux pour le dimensionnement du satellite a directement guidé la définition des problèmes d'optimisation à résoudre, et l'optimisation du beam layout en est un premier exemple.

2.1.2 Système de coordonnées considéré

2.1.2.1 Définition des angles "true view"

Ce paragraphe décrit le système de coordonnées utilisé dans cette étude pour identifier les points à la surface de la Terre. Un système particulièrement utilisé dans le contexte des communications satellitaires (voir [Maral 2011b] par exemple) est le système de coordonnées $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur le satellite, représenté sur la figure 2.1 : les points de la Terre visibles depuis le satellite sont identifiés à des angles dits "true view". Les avantages de ce système de coordonnées sont passés en revue ci-dessous.

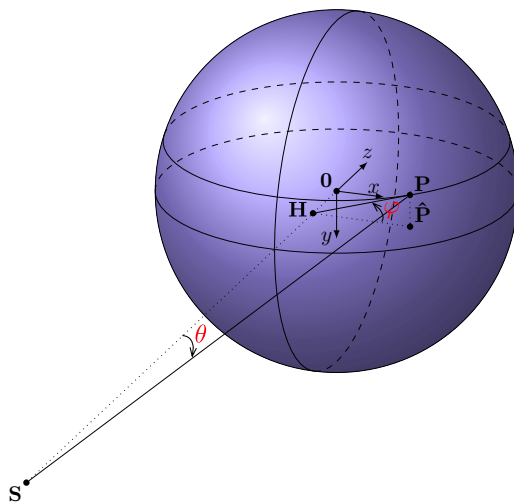


FIGURE 2.1 – Angles "true view" de visibilité des points à la surface de la terre depuis le satellite

L'axe \vec{z} est selon la direction satellite-Terre, l'axe \vec{x} est perpendiculaire au plan méridien du satellite (défini par le nord, l'axe \vec{z} et la position du satellite) et est orienté vers l'est, et l'axe \vec{y} est perpendiculaire au plan équatorial et est orienté de manière à compléter le trièdre orthonormé direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, ce qui correspond donc au sud pour un satellite géostationnaire. Sur la figure 2.1, S représente le satellite, O le centre de la Terre, P un point à la surface de la Terre et \hat{P} sa projection sur le plan équatorial. Notons \mathcal{P} l'ensemble des points à la surface de la Terre visibles depuis le satellite. Soit aussi Θ l'ensemble des angles possibles entre la direction \vec{z} et les directions \vec{SP} quand $P \in \mathcal{P}$, et soit Φ l'ensemble des angles (\vec{HP}, \vec{HP}) obtenus lorsque $P \in \mathcal{P}$, H

étant la projection de P sur la direction \overrightarrow{SO} . Alors, une propriété forte est qu'il existe un certain sous-ensemble \mathcal{Z} de $\Theta \times \Phi$ et une bijection de \mathcal{P} dans \mathcal{Z} qui permet d'utiliser le couple d'angles dits "true view" $(\theta, \varphi) \in \mathcal{Z}$ pour identifier totalement tout point $P \in \mathcal{P}$. Cette propriété est celle illustrée dans la figure 2.1. Cette dernière fournit également un exemple concret de la notion de séparation angulaire de deux points à la surface de la Terre du point de vue du satellite, cruciale dans le problème de placement de faisceaux. En effet, nous observons une séparation angulaire d'angle θ entre le point sub-satellite (projection du point S sur la surface de la Terre) et le point P . Notons qu'il y a parfaite correspondance entre les angles "true view" et les angles de longitude et de colatitute du système de coordonnées sphériques rattaché au repère cartésien $(S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. A la différence des coordonnées sphériques classiques, ces deux angles suffisent à décrire tout point $P \in \mathcal{P}$ car nous disposons dans ce cas particulier d'une information supplémentaire : ici, nous décrivons exclusivement des points situés à la surface de la Terre. Ainsi, la troisième coordonnée sphérique standard de distance au centre S du repère se déduit des deux angles (θ, φ) , de la distance satellite-Terre, et du rayon de la Terre (en hypothèse de Terre strictement sphérique).

Il existe une représentation particulièrement pratique de ces angles "true view" dans le plan xy . Aux deux angles $(\theta, \varphi) \in \mathcal{Z}$ définissant un certain point $P \in \mathcal{P}$, on peut associer les angles dits "true view projetés" $\theta_x \in \Theta_x$ et $\theta_y \in \Theta_y$ définis comme suit :

$$\theta_x = \theta \cos \varphi \tag{2.1}$$

$$\theta_y = \theta \sin \varphi \tag{2.2}$$

Ceci définit bijectivement Θ_x et Θ_y à partir de \mathcal{Z} , comme le montre la figure 2.2.

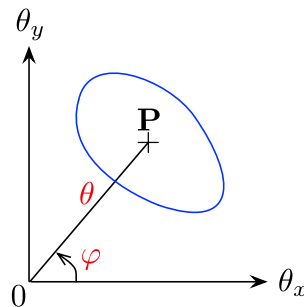


FIGURE 2.2 – Représentation projetée des angles "true view"

Dans cette représentation, l'angle θ correspond à la longueur du segment OP et l'angle φ est l'angle entre la direction $\overrightarrow{O\theta_x}$ et le vecteur \overrightarrow{OP} . Un des intérêts de cette représentation est sa capacité à traduire efficacement tout mouvement apparent de P sur la surface de la Terre visible depuis le satellite. Par exemple, si P se déplace vers le sud à la surface de la Terre, ceci se traduit par une simple translation verticale du point P (vers les valeurs positives de θ_y) dans cette représentation plane des angles "true view". Idem pour un mouvement vers l'est sur la

sphère Terre, pour lequel on observe dans cette représentation une translation horizontale vers les valeurs positives de θ_x . Enfin, un mouvement de P dans \mathcal{P} à θ constant est représenté par un arc de cercle.

2.1.2.2 Approximation des séparations angulaires par norme euclidienne : caractère négligeable de l'erreur commise

Cette représentation projetée est cependant inexacte dans le sens où les distances angulaires entre les points ne sont pas respectées. En effet, soit P' un autre point de \mathcal{P} , la représentation projetée suggère que la séparation angulaire $\delta_{\theta_{\text{réelle}}}$ entre P et P' du point de vue du satellite peut être donnée par :

$$\delta_{\theta_{\text{approx}}} = \sqrt{(\theta_x - \theta'_x)^2 + (\theta_y - \theta'_y)^2} \quad (2.3)$$

$$= \sqrt{\theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos \varphi \cos \varphi' - 2\theta\theta' \sin \varphi \sin \varphi'} \quad (2.4)$$

Ce qui serait particulièrement pratique puisque de nombreuses distances angulaires vont devoir être calculées pour optimiser le placement de faisceaux, et qu'une telle formule réduit ces calculs à de simples évaluations de la norme euclidienne dans le repère des angles "true view projetés". Seulement, de simples règles de trigonométrie nous permettent d'affirmer que, dans le repère cartésien $(S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les deux points P et P' sont vus respectivement depuis le satellite selon les directions :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi' \sin \theta' \\ \sin \varphi' \sin \theta' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Et un simple produit scalaire permet d'aboutir à :

$$\delta_{\theta_{\text{réelle}}} = \arccos(\cos \varphi \cos \varphi' \sin \theta \sin \theta' + \sin \varphi \sin \varphi' \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \quad (2.6)$$

Dans la littérature évoquant les systèmes de coordonnées utilisés dans le contexte des télécommunications spatiales, seul l'ouvrage [Maral 2011b] aborde la question de l'approximation des distances angulaires réelles par les angles $\Theta_x \times \Theta_y$. Le caractère négligeable de l'erreur commise par la première expression approchée y est illustré, mais uniquement sur un sous-ensemble des couples de points à la surface de la Terre entre lesquels nous pourrions souhaiter calculer une distance angulaire. Ici, nous proposons ici une démonstration étendue à l'ensemble complet des jeux de deux points de la Terre visibles depuis le satellite. Pour quantifier l'importance de l'erreur d'approximation, nous définissons l'erreur relative pour tout couple de points de \mathcal{P} comme suit

$$\forall P, P' \in \mathcal{P}, \quad \varepsilon_{\text{relative}}(P, P') = \left| \frac{\delta_{\theta_{\text{approx}}} - \delta_{\theta_{\text{réelle}}}}{\delta_{\theta_{\text{réelle}}}} \right| \quad (2.7)$$

Pour évaluer ce niveau d'erreur, nous proposons une analyse pour un satellite géostationnaire placé à une longitude de 0° : les conclusions sont parfaitement généralisables par symétrie de révolution autour de l'axe de rotation de la Terre. Dans un premier temps, rappelons que l'angle maximum $\theta_{\text{max, géo}}$ entre la direction définie par le satellite et le centre de la Terre et celle définie

par le satellite et un point visible à la surface de cette dernière s'exprime comme suit

$$\theta_{\max,\text{géo}} = \arcsin\left(\frac{R_{\text{terre}}}{H_{\text{géo}} + R_{\text{terre}}}\right) \quad (2.8)$$

avec $R_{\text{terre}} = 6378 \text{ km}$ le rayon de la terre et $H_{\text{géo}} = 35786 \text{ km}$ l'altitude d'un satellite géostationnaire. Cette relation est illustrée en figure 2.3, et elle conduit finalement à une valeur de $\theta_{\max,\text{géo}} \approx 8,7^\circ$.

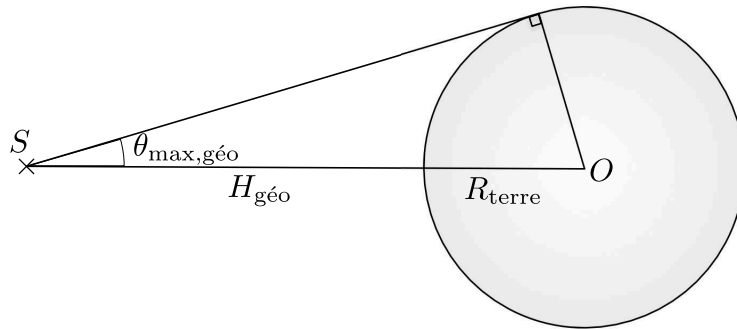


FIGURE 2.3 – Lien entre rayon de la Terre, altitude d'un satellite géostationnaire et angle maximal de visibilité depuis le satellite

Pour comparer les calculs exact et approché de la distance angulaire, on propose d'abord de s'intéresser à l'ensemble des points de la surface de la Terre qui vérifient $\theta_x \geq 0$ et $\theta_y = 0$. Pour un point donné de cet ensemble, l'idée est de calculer selon les deux formules sa séparation angulaire avec tous les autres points visibles de la surface de la terre : on pourra représenter ainsi en chaque point $P \in \mathcal{P}$ l'erreur relative par rapport à ce point référence. Plutôt que de traiter l'intégralité du segment ($\theta_x \geq 0, \theta_y = 0$), on se contente de présenter en figure 2.4 les résultats pour 4 points de θ_x croissant, entre les valeurs 0 et $\theta_{\max,\text{géo}}$, les conclusions y étant déjà apparentes. Dans les représentations de cette figure, le bleu foncé correspond à une erreur relative nulle là où, à l'extrême opposé, le rouge correspond à la plus forte valeur d'erreur relative rencontrée, à savoir $\epsilon_{\text{relative,max}} \approx 0,003827$. Pour des valeurs de θ_x proches de 0 pour le point référence, on constate que l'erreur relative reste nulle ou presque nulle pour tout point de la surface visible de la terre. À l'inverse, c'est vers les plus grandes valeurs de θ_x que les erreurs les plus marquées sont observées. Ainsi, pour $\theta_x = \theta_{\max,\text{géo}}$, $\epsilon_{\text{relative}}$ atteint le maximum annoncé quelques lignes plus haut. Ce pire cas correspond à un erreur angulaire absolue de $0,026^\circ$, ce qui dans les applications de dimensionnement de satellite de télécommunications visées ici est parfaitement négligeable.

La généralisation à l'ensemble complet des couples de points de la surface visible de la terre s'obtient directement grâce à une propriété d'invariance de la fonction d'erreur relative par révolution autour de l'axe \vec{z} . En effet, soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, et soient également $P'_1 \in \mathcal{P}$ et $P'_2 \in \mathcal{P}$

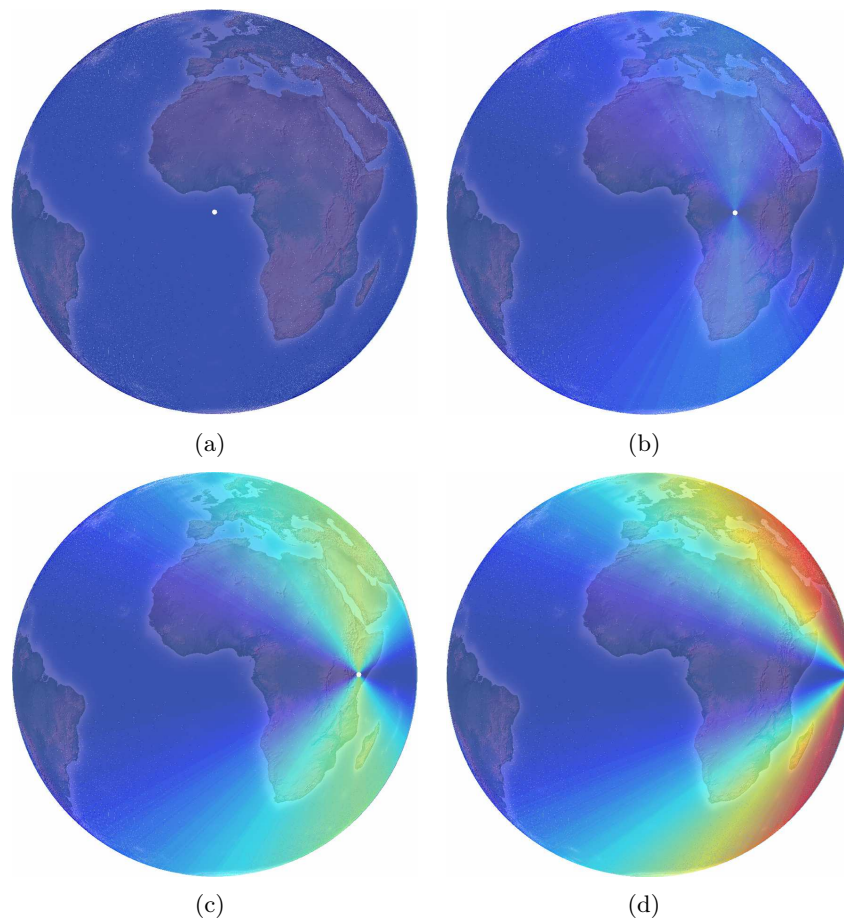


FIGURE 2.4 – Erreur relative commise en chaque point de la surface visible de la Terre par le calcul en norme euclidienne de la séparation angulaire au point référence (bleu=erreur nulle, rouge=erreur maximale de $\approx 0,003827$), pour 4 points de référence : (a) $(\theta_x = 0^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (b) $(\theta_x = 3,73^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (c) $(\theta_x = 6,21^\circ, \theta_y = 0^\circ)$ (d) $(\theta_x = 8,7^\circ, \theta_y = 0^\circ)$

obtenus respectivement par rotation de P_1 et de P_2 d'un certain angle $\alpha \in [0, 2\pi]$, alors on a dans ce cas $\epsilon_{\text{relative}}(P_1, P_2) = \epsilon_{\text{relative}}(P'_1, P'_2)$. Cette propriété est illustrée en figure 2.5 où deux points de référence liés par une simple rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{z} sont utilisés pour construire deux cartes complètes des erreurs relatives en tout point de \mathcal{P} : la propriété d'invariance y est très directement observable (le rouge correspondant cette fois à la valeur maximale pour ces deux points de référence).

Finalement, la valeur d'erreur pire cas constatée sur le segment $(\theta_x \geq 0, \theta_y = 0)$ est donc une valeur pire cas globale. Ainsi, il vient d'être démontré que le système de coordonnées $\Theta_x \times \Theta_y$ permet de calculer des séparations angulaires via de simples évaluations de normes euclidiennes qui sont de précision suffisante. Ce système de coordonnées a donc été privilégié dans cette étude, et il est à l'origine du travail détaillé dans les parties suivantes sur le traitement des contraintes inégalités faisant intervenir des normes euclidiennes sur des variables continues.

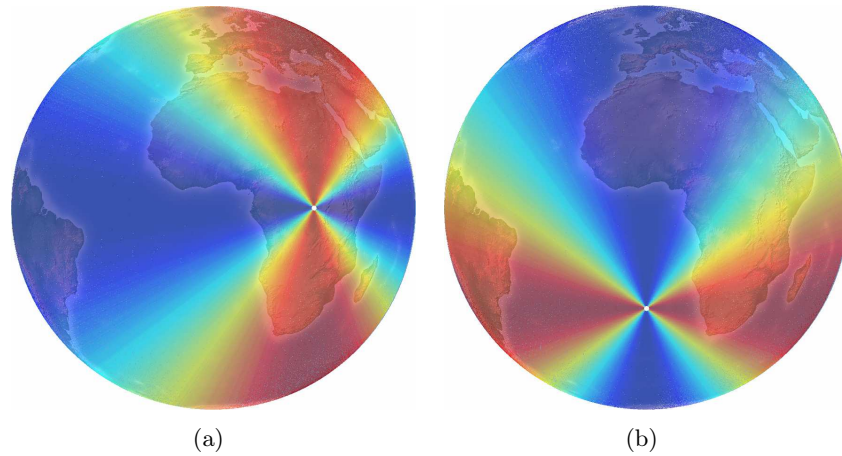


FIGURE 2.5 – Propriété d'invariance de l'erreur relative par symétrie autour de l'axe satellite-centre de la Terre

2.1.3 Contraintes et critère de co-design pour la définition d'un beam layout multifaisceaux

Cette section recense les objectifs de qualité et les contraintes technologiques auxquels doit se soumettre la définition d'un beam layout multifaisceaux.

2.1.3.1 Le critère d'optimisation : la maximisation du trafic capté par les faisceaux

Comme détaillé en chapitre 1, les exigences d'une mission de télécommunications satellitaires peuvent être de différents types. Dans leur forme la plus générale, elles consistent en une série de services spécifiques qui doivent être fournis à des régions désignées de la Terre : télévision, radio, téléphone, applications large bande (internet, vidéoconférences...) pour citer quelques unes de ces applications. A la fois la quantité et la qualité de ces services peuvent être spécifiées par l'organisme (opérateur commercial, agences spatiales institutionnelles...) qui sollicite le fabricant de satellites. Dans le cadre de ces travaux sur la définition du beam layout, nous avons fait l'hypothèse d'une mission inspirée des applications large bande où chaque point défini sur la zone de service a sa propre demande en trafic, exprimée en Megabits par secondes, qu'il faut satisfaire au mieux. Seulement, le niveau de définition du système satellitaire à la sortie d'une optimisation de beam layout est insuffisant pour pouvoir établir une analyse précise des performances du système de télécommunications. Cette analyse fine n'est possible qu'une fois l'intégralité des antennes et du répéteur dimensionnés : les différentes allocations de puissance, de spectre, et d'équipements de la charge utile sont nécessaires pour simuler précisément les bilans de liaison et donc ces valeurs de trafic offert. Ainsi, un des enjeux de la définition mathématique du problème d'optimisation de beam layout est de décider d'un critère à optimiser qui soit favorable au critère réel du système global dont le calcul est impossible à ce stade. Dans cette étude, la réponse proposée est une maximisation du trafic couvert par les différents faisceaux placés, l'objectif idéal étant 100%. Le trafic couvert d'un faisceau est défini ici comme étant la somme des demandes des stations géométriquement couvertes par ce faisceau et associées à ce faisceau (une station pouvant être couverte géométriquement par un faisceau sans y être associée pour

autant) que nous limitons à la charge maximale autorisée par faisceau (discuté en paragraphe 2.1.3.4).

2.1.3.2 Contraintes de la plateforme : nombre maximum de faisceaux et de réflecteurs

La première contrainte de la plateforme du satellite que nous avons considérée dans la modélisation mathématique du problème de beam layout est la limite sur le nombre de faisceaux qui peuvent être embarqués. Ceci peut être dû à des limites en puissance, en coût, et en masse, mais peut aussi être le résultat de contraintes de volume et d'accommodation de la charge utile du satellite. Cette limite supérieure au nombre de faisceaux a été explicitement intégrée à nos algorithmes d'optimisation du beam layout.

Ensuite, pour des raisons similaires, il existe une limite physique au nombre d'antennes à réflecteur pouvant être embarquées dans la charge utile du satellite : elles affectent très directement la masse du satellite et les possibilités d'accommodation de ce dernier dans la coiffe du lanceur qui l'accueillera. En pratique, nous travaillerons dans cette étude à nombre de réflecteurs fixé à l'avance, à la limite de ces contraintes de masse et de volume.

2.1.3.3 Technologie antenne considérée et contraintes associées

Pour les satellites de télécommunications multifaisceaux, la technologie antenne Single Feed per Beam SFPB (présentée en section 1.1.3.1) est certainement la plus maîtrisée, et ses bonnes performances ont démontré leur fiabilité au fil des différents programmes satellites où elle a été implantée. Dans cette étude, nous avons ainsi fait l'hypothèse d'une utilisation de cette technologie dont les contraintes spécifiques ont fortement orienté la définition des algorithmes d'optimisation de beam layout que nous avons proposés. On rappelle que pour ce type d'antenne, chaque faisceau correspond à une et une seule source radiofréquence, laquelle est installée dans le plan focal d'un des réflecteurs paraboliques du satellite. La figure 2.6 donne ainsi un exemple en Single Feed per Beam de trois sources d'un même réflecteur, chacune à l'origine d'un faisceau qui lui est propre : les faisceaux orange, bleu et vert. La contrainte de faisabilité technologique principale associée à ce type de configurations est que, pour tout beam layout, il doit exister une association des faisceaux aux réflecteurs (c'est-à-dire une application de l'ensemble des faisceaux dans l'ensemble des réflecteurs) pour laquelle les positions et tailles des sources requises pour produire ce beam layout n'entraînent pas de collisions de sources dans les blocs de sources. Cela se traduit par une séparation angulaire minimale du point de vue du satellite entre deux faisceaux associés au même réflecteur, cet écartement étant une fonction de la taille des deux sources correspondantes. Cette contrainte est illustrée dans la figure 2.6 où certains éléments de la géométrie antenne considérée (antenne à réflecteur parabolique en offset) ont été représentés : le foyer O , la distance focale F , la distance focale oblique F_s , le centre de l'ouverture projetée S , le diamètre D de la projection de la parabole sur le plan focal, et la distance angulaire Δ_θ à respecter du fait de la distance inter-sources $\Delta_{i,j}$. De l'article [Lo 1960] où la notion de "facteur de déviation de faisceau" est définie, on retient le résultat suivant, valide pour les architectures

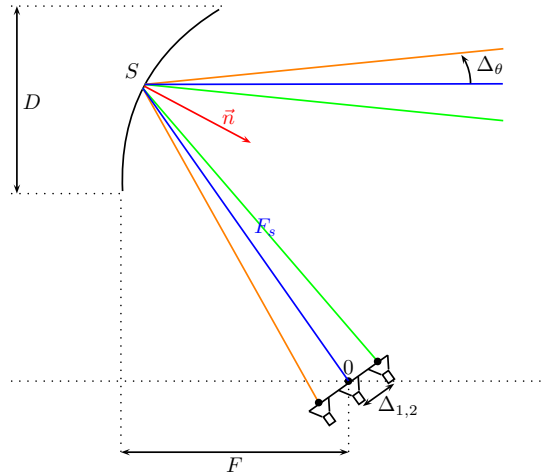


FIGURE 2.6 – Représentation d'un bloc de sources Single Feed Per Beam illuminant un réflecteur satellite et de la notion de séparation angulaire résultante

respectant $\frac{F_s}{D} > 1,5$, ce qui est le cas nos systèmes multifaisceaux :

$$\Delta_\theta = \arctan\left(\frac{\Delta_{i,j}}{F_s}\right) \quad (2.9)$$

On observe ainsi que plus les sources sont éloignées, plus la séparation angulaire résultante est marquée. Par ailleurs, générer des faisceaux plus larges nécessite des sources également plus larges qui permettent de concentrer l'illumination sur une surface réduite du réflecteur : plus la surface effective illuminée du réflecteur est grande, plus il y a concentration de l'énergie, et plus les faisceaux résultants sont étroits. Ces sources pour faisceaux plus larges sont ainsi à l'origine de distances plus grandes entre les centres de sources, et donc entraînent de plus grandes séparations angulaires. Pour modéliser concrètement ce comportement dans cette étude sans avoir à rentrer dans le design fin des sources SFPB, nous avons fait l'hypothèse que la séparation angulaire minimale à respecter pour deux faisceaux transmis par le même réflecteur est directement proportionnelle à la moyenne des deux diamètres de faisceaux (ces derniers étant directement en lien avec la distance entre les sources), selon un coefficient $\kappa \in \mathbb{R}^+$ que nous restreindrons en pratique à l'intervalle suivant

$$\frac{3}{2} \leq \kappa \leq \sqrt{3} \quad (2.10)$$

Nous avons défini cet intervalle de valeurs pour κ de manière à capter au mieux l'essentiel des configurations fréquentes et industriellement maîtrisées pour les antennes Single Feed per Beam. Finalement, cela conduit à la distance angulaire minimale suivante pour deux faisceaux associés au même réflecteur satellite :

$$\Delta_\theta = \frac{1}{2} \kappa (\text{diamètre}_1 + \text{diamètre}_2) \quad (2.11)$$

Concrètement, tendre vers la borne inférieure de cet intervalle de valeurs pour κ suppose d'être de plus en plus capable de rapprocher les sources générant les faisceaux, ce qui veut dire qu'il faut produire dans ce cas les mêmes tailles de faisceaux avec des sources plus petites : cela complexifie le design fin de la source et se paie en performances de l'antenne jusqu'à la limite de tolérance définie par la valeur minimale $\kappa = \frac{3}{2}$. Ce coefficient de séparation est fixé en amont pour chaque instance testée.

2.1.3.4 L'anticipation du plan de fréquences par contrôle de la charge par faisceau

De façon intégrée dans l'optimisation du beam layout, les stations utilisateur à la surface de la Terre sont associées aux faisceaux qui les couvrent, ce qui conduit à une demande cumulée pouvant être définie par faisceau. Ces demandes ainsi obtenues matérialisent le lien du beam layout avec les problèmes de dimensionnement à venir dans la procédure d'optimisation du système de télécommunications. Effectivement, un des objectifs principaux de la définition du répéteur qui suit est la mise en place d'une architecture capable d'allouer à chaque faisceau la quantité de bande qu'il requiert. Cependant, si les demandes des stations ponctuelles sont mal réparties entre les faisceaux, notamment sur les zones "chaudes" de la couverture à forte densité surfacique de demande, certains faisceaux peuvent se retrouver avec une demande en trafic pour lequel il n'existe pas d'architecture répéteur faisable (contraintes technologiques), ou acceptable (coût, complexité), permettant de l'assurer. Dans cette logique de co-dimensionnement, nous proposons de contrer ce phénomène en imposant une borne supérieure sur la charge que peut supporter un faisceau. Pour un faisceau dont la charge atteint cette limite, une des conséquences de cette approche est soit une impossibilité d'offrir du trafic à toutes les stations qu'il couvre géométriquement, soit une impossibilité d'offrir à chacune de ces stations l'intégralité de sa demande en trafic. Notons que cette limite est définie en fonction de la taille du faisceau, puisque les faisceaux les plus étroits peuvent espérer des valeurs de trafic maximales plus élevées que les faisceaux plus larges, par meilleure concentration de la puissance satellite sur les zones qu'ils couvrent. Les mécanismes précis de quantification de bornes pertinentes pour nos expérimentations sont détaillés plus loin, dans la section 3.3.1 qui expose la démarche suivie pour définir intégralement les instances du problème d'optimisation résolues.

2.1.3.5 Intérêt et limites du chevauchement de faisceaux : les contraintes retenues

Cette section développe la stratégie choisie par rapport au chevauchement des faisceaux : elle vise à conserver les effets positifs et à discriminer les effets néfastes sur les antennes et le répéteur. D'un point de vue strictement géométrique, il s'agit de définir une politique sur le niveau d'intersection autorisé pour les disques représentant les faisceaux dans le plan $\Theta_x \times \Theta_y$. Un beam layout présentant beaucoup de chevauchement de faisceaux va nécessairement avoir besoin de plus de faisceaux pour couvrir l'intégralité de la zone de service, pour de simples raisons de couverture surfacique. Cela peut vite devenir problématique pour le segment spatial puisque cela implique plus de sources radiofréquence, donc plus de masse, plus de puissance requise et plus d'équipements de routage des signaux dans le répéteur. A l'inverse, deux faisceaux se chevauchant sur un ensemble de stations utilisateur fortement demandeuses peut parfois faciliter la satisfaction de la contrainte de charge maximale par faisceau décrite dans le paragraphe

précédent : la demande locale élevée est distribuée sur les deux faisceaux ce qui permet de ne violer aucune des deux limites de charge. Aussi, pour avoir une couverture contiguë d'une région dense en stations utilisateur, il est géométriquement nécessaire d'avoir des faisceaux qui se chevauchent au moins partiellement. Finalement, il faut donc autoriser le chevauchement mais le limiter, par exemple selon une certaine séparation angulaire minimale $\tilde{\Delta}_\theta$ entre les faisceaux. Pour exprimer ce besoin, nous introduisons le coefficient $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ et exigeons que tout couple de faisceaux présente une séparation angulaire d'au moins

$$\tilde{\Delta}_\theta = \frac{1}{2}\varepsilon(\text{diamètre}_1 + \text{diamètre}_2) \quad . \quad (2.12)$$

En pratique, nous avons estimé que pour converger vers des solutions de beam layout satisfaisantes d'un point de vue industriel, l'intervalle suivant convenait

$$\frac{1}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad . \quad (2.13)$$

Puisque tout couple de faisceaux est soumis à cette contrainte de non-chevauchement, cette contrainte de séparation se distingue bel et bien de celle décrite en paragraphe 2.1.3.3 pour la faisabilité des antennes SFPB, qui elle ne concerne que des couples de faisceaux associés à un même réflecteur du satellite. De plus, ε et κ varient dans deux intervalles disjoints.

2.1.3.6 Rentabilité des équipements : nombre minimum de stations par faisceau

D'un point de vue industriel, il n'est pas satisfaisant d'embarquer des équipements sous-utilisés, ou d'allouer de la ressource non entièrement exploitée. En ce sens, on exige que chaque faisceau couvre un nombre minimum d'utilisateurs au sol, ce nombre étant un paramètre d'entrée.

2.1.3.7 Complexité de production : nombre limité de diamètres différents de faisceaux

Tous les faisceaux d'un même diamètre sont caractérisés par le même ensemble de spécificités de production des sources radiofréquence correspondantes. Augmenter le nombre de diamètres augmente donc directement le nombre de cas particuliers de production, complexité que l'on souhaite naturellement limiter. Dans nos algorithmes de dimensionnement, nous avons traduit ce critère en une limite sur le nombre de tailles différentes de faisceaux pouvant apparaître dans les solutions de beam layout produites. Nous considérons que ce nombre de tailles est connu, et que les tailles en question elles-mêmes le sont aussi.

2.1.4 Une solution classique : le beam layout régulier

2.1.4.1 Définition d'un layout régulier

La complexification de la charge utile résultant de l'utilisation de plusieurs tailles distinctes de faisceau dans un beam layout (juste discuté en paragraphe 2.1.3.7) a encouragé les ingénieurs dimensionnant ces systèmes multifaisceaux à exploiter d'abord et au mieux les solutions n'utilisant qu'un seul diamètre, commun à tous les faisceaux. Dans ces applications, la première

question qui s'est posée historiquement est celle de la couverture intégrale et contigüe d'une zone de service donnée avec un nombre minimal de faisceaux de même diamètre, qui sont pour rappel identifiables à des disques dans $\Theta_x \times \Theta_y \subset \mathbb{R}^2$. Il existe ainsi un lien fort avec le domaine de l'empilement compact qui traite des stratégies d'agencement des cercles dans le plan ou des sphères dans l'espace permettant de maximiser leur densité, et ce sans que les chevauchements soient autorisés entre cercles ou sphères. En espace euclidien infini, on trouve dans [Chang 2010] la preuve que l'agencement de forme hexagonale est celui qui maximise la densité de couverture du plan avec des disques identiques qui ne s'intersectent pas. Cette organisation des disques est représentée en figure 2.7 où r est le rayon commun à tous les disques et δ la longueur d'un côté du triangle équilatéral caractérisant l'agencement hexagonal. Cependant, pour une couverture

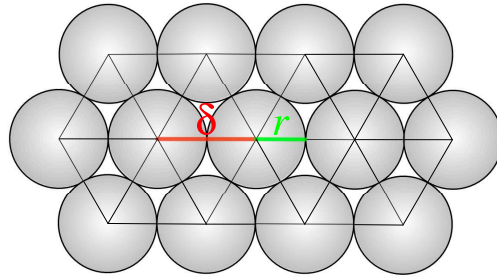


FIGURE 2.7 – Empilement compact dans le plan de disques identiques, selon le schéma hexagonal

contigüe de la zone de service par des faisceaux de rayon r , il est nécessaire de modifier légèrement la configuration de la figure 2.7 de manière à combler les trous entre chaque triplé de disques adjacents dont les centres forment le triangle équilatéral de côté δ . Pour ce faire, le chevauchement est dorénavant autorisé par réduction de la distance δ entre les centres des disques. Soit $\Lambda = \frac{\delta}{2r}$ le rapport de la distance entre centres adjacents sur le diamètre du faisceau, on montre par simple géométrie euclidienne que le pourcentage $\mathcal{A}_\%$ de l'aire du triangle équilatéral couvert par les trois disques est donné par

$$\mathcal{A}_\% = \frac{\sqrt{3}}{\Lambda} \left(\frac{\pi}{6\Lambda} + \sqrt{1 - \Lambda^2} - \frac{\arccos(\Lambda)}{\Lambda} \right) . \quad (2.14)$$

Dans le cas de la figure 2.7 et donc pour une valeur de $\Lambda = 1$, la valeur de densité de l'agencement hexagonal annoncée par [Chang 2010] est retrouvée : $\mathcal{A}_\% = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Enfin et surtout, on obtient une couverture totale $\mathcal{A}_\% = 100\%$ du triangle équilatéral pour

$$\Lambda_{\text{régulier}} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad (2.15)$$

Ce qui permet de définir ce qui est communément appelé un “beam layout régulier”, représenté en figure 2.8.

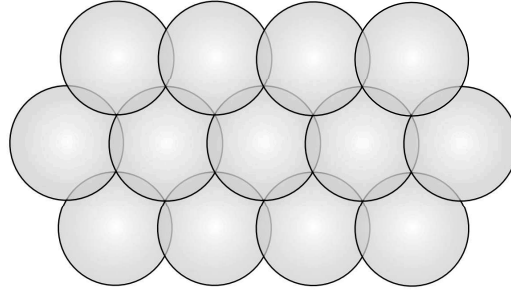


FIGURE 2.8 – Un “beam layout régulier” obtenu à partir du schéma hexagonal de l’empilement compact sans chevauchement à densité maximale

2.1.4.2 Avantages et limites de la solution régulière

Essentiellement, l’intérêt du beam layout régulier réside dans la possibilité de fournir systématiquement avec une telle approche une couverture géométrique totale de la zone de service, quitte à adapter le nombre ou la taille des faisceaux. Ceci était d’ailleurs la propriété recherchée au moment même de l’élaboration du concept de beam layout régulier. Par ailleurs, une autre force de cette organisation régulière est sa compatibilité validée en pratique sur différents satellites existants avec les contraintes d’antennes SFPB décrites en 2.1.3.3, pour des configurations à 3 ou 4 réflecteurs embarqués, ce que nous détaillons dans la suite.

Dans le premier cas avec donc 3 réflecteurs disponibles dans la charge utile satellite, et pour une contrainte de séparation dictée par $\kappa = \frac{3}{2}$, il existe systématiquement une allocation des faisceaux aux 3 réflecteurs qui permet de satisfaire ces séparations angulaires : on parlera de “motif 3-couleurs régulier” pour faire référence à ce schéma d’allocation de réflecteurs particulier présenté en figure 2.9. En s’appuyant sur l’organisation sous-jacente en triangle équilatéraux présentée en figure 2.7, on montre aisément que deux faisceaux assignés au même réflecteur sur la figure 2.9 sont distants de

$$2\delta \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\delta \tag{2.16}$$

$$= 2r\sqrt{3}\Lambda_{\text{régulier}} \text{ (par définition de } \Lambda_{\text{régulier}}) \tag{2.17}$$

$$= 3r \text{ (car } \Lambda_{\text{régulier}} = \frac{\sqrt{3}}{2}) \tag{2.18}$$

$$= \frac{3}{4} (\text{diamètre}_1 + \text{diamètre}_2) \text{ (car } \text{diamètre}_1 = \text{diamètre}_2 = 2r) \tag{2.19}$$

$$= \Delta_{\theta} \text{ (car } \kappa = \frac{3}{2}) \tag{2.20}$$

Ce qui garantit ainsi la satisfaction de la contrainte antenne de séparation angulaire.

Si maintenant 4 réflecteurs sont disponibles dans la charge utile satellite, et que l’on fixe

le coefficient de séparation de la contrainte antenne à $\kappa = \sqrt{3}$, on peut également définir un “motif 4-couleurs régulier”, représenté en figure 2.10. Pour deux faisceaux assignés au même réflecteur sur la figure 2.10, la lecture de la figure 2.7 donne cette fois une distance entre les deux centres de

$$2\delta = 4r\Lambda_{\text{régulier}} \quad (2.21)$$

$$= 2\sqrt{3}r \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}(\text{diamètre}_1 + \text{diamètre}_2) \quad (2.23)$$

$$= \Delta_{\theta} \text{ (car } \kappa = \sqrt{3}\text{)} \quad (2.24)$$

Ce qui valide ce schéma d'allocation à 4 réflecteurs par rapport à la contrainte de séparation des antennes SFPB.

En ce qui concerne le chevauchement des faisceaux, on constate encore une fois sur la figure 2.7 que, pour deux faisceaux adjacents, la distance entre leurs centres est de

$$\delta = 2r\Lambda_{\text{régulier}} \quad (2.25)$$

$$= \sqrt{3}r \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{diamètre}_1 + \text{diamètre}_2) \quad (2.27)$$

$$\geq \tilde{\Delta}_{\theta} \text{ (car } \varepsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\text{)} \quad (2.28)$$

Ainsi, quelle que soit la valeur du coefficient de séparation de la contrainte de chevauchement ε dans son intervalle admissible $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, le beam layout régulier respecte la contrainte correspondante, telle qu'elle a été définie en paragraphe 2.1.3.5.

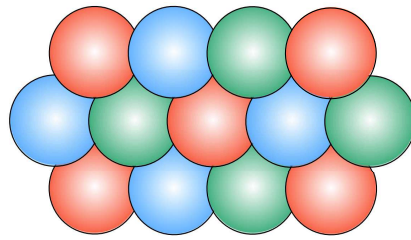


FIGURE 2.9 – Allocation des faisceaux à 3 réflecteurs dans un beam layout régulier (une couleur = un réflecteur)

Nous fournissons maintenant deux exemples de beam layout qui permettent d'appréhender qualitativement les points faibles de cette approche régulière. Les deux solutions proposées répondent à la même carte de demande, c'est-à-dire au même sous-ensemble fini de stations à servir dans $\Theta_x \times \Theta_y$ et à leurs demandes propres en Mégabits par seconde. Le premier beam layout est com-

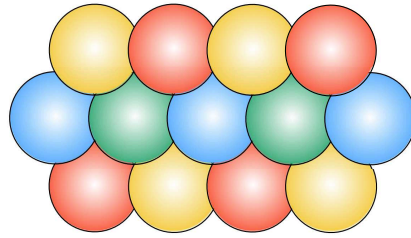


FIGURE 2.10 – Allocation des faisceaux à 4 réflecteurs dans un beam layout régulier (une couleur = un réflecteur)

posé de 117 faisceaux de $0,3^\circ$, tandis que le second comprend 50 faisceaux de $0,5^\circ$. Ces exemples ont été soumis à une hypothèse de 4 réflecteurs disponibles dans la charge utile du satellite. Les charges maximales par faisceaux ont été définies selon la stratégie détaillée plus loin dans la section 3.3.1 sur la génération des instances. Les deux solutions sont représentées dans la figure 2.11, où les sous-figures de gauche fournissent l'allocation des faisceaux aux réflecteurs (une couleur par réflecteur, selon le motif 4-couleurs déjà rencontré en figure 2.10), et où celles de droite fournissent la charge cumulée observée par chaque faisceau relativement à sa limite de charge (bleu pour les valeurs proches de 0, de rouge vif à rouge foncé pour celles au-dessus de 1). Notons que pour ces exemples, chaque station est allouée à son plus proche faisceau la couvrant géométriquement : il s'agit d'un degré de liberté supplémentaire en temps normal. Comme détaillé précédemment, dans le cas d'un beam layout régulier, la contrainte de non-chevauchement est naturellement satisfaite et le motif 4-couleurs d'allocation de réflecteurs permet de satisfaire systématiquement la séparation angulaire des faisceaux sur un même réflecteur. Bien que dans les deux cas les faisceaux couvrent géométriquement plus de 99% des stations, plusieurs faisceaux excèdent significativement leur limite de charge (rouge vif à rouge foncé dans les sous-figures de droite dans 2.11) : cette contrainte étant violée pour ces faisceaux, la quantité de trafic satisfait effectif est inférieure à la quantité de trafic couvert géométriquement. En ce sens, ces solutions régulières ne sont pas satisfaisantes car elles ne permettent pas répartir de façon agile la charge des zones les plus demandeuses sur plusieurs faisceaux, de sorte à ne dépasser aucune des limites de demande. Par ailleurs, la solution à 117 faisceaux a beau n'avoir qu'un seul faisceau en situation d'excès de charge, ce nombre de faisceaux dépasse le nombre de faisceaux maximum fixé pour ces exemples. Finalement, il faudrait réussir à répartir les demandes sur moins de faisceaux, en adaptant les tailles en fonction de la densité surfacique de demande au sol, tout en continuant de respecter les contraintes antenne : c'est tout l'enjeu des solutions irrégulières optimisées qui sont proposées dans la section suivante.

2.1.5 Vers des solutions irrégulières optimisées

Pour contrer les limites des couvertures régulières détaillées dans le paragraphe précédent, nous définissons formellement dans cette section l'optimisation d'un beam layout irrégulier, après un exemple illustratif des bonnes propriétés recherchées dans nos solutions. Une analyse de complexité est fournie ainsi qu'une revue des algorithmes de la littérature traitant ce problème

ou des problèmes très voisins.

2.1.5.1 Un premier exemple de solution irrégulière : intérêts et enjeux

D'abord, nous proposons de reprendre l'exemple de l'instance traitée en figure 2.11 par deux solutions régulières, pour démontrer tout l'intérêt de briser la régularité du schéma hexagonal à un seul diamètre de faisceau. En effet, en plus de comprendre moins de faisceaux que chacune des deux solutions régulières analysées dans la section précédente, la solution irrégulière combinant les deux tailles de faisceau $0,3^\circ$ et $0,5^\circ$ proposée en figure 2.12 équilibre notablement mieux la charge des stations au sol sur les différents faisceaux. L'utilisation de petits faisceaux à plus grande capacité sur des zones denses et de faisceaux plus larges sur les zones moins denses permet de construire une solution où aucun faisceau ne voit sa demande perçue excéder sa demande limite (aucun faisceau de charge relative rouge dans 2.12(b)). À noter que par ailleurs le non-chevauchement dicté par $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a lui bien été bien respecté. Par contre, briser la régularité rend bien plus délicate la gestion des contraintes antenne de séparation pour les faisceaux alloués au même réflecteur. De ce point de vue, la solution de la figure 2.12 n'est pas acceptable puisque certains couples de faisceaux de la même couleur sur 2.12(a) sont séparés d'une distance inférieure à Δ_θ pour $\kappa = \sqrt{3}$. Cependant, la faible degré de violation de ces contraintes permet d'envisager de définir, à partir de cette première presque-solution, une solution réalisable qui en serait voisine. L'un des grands intérêts des algorithmes développés dans cette thèse sur ce problème d'optimisation de beam layout irrégulier, formalisé dans le paragraphe suivant, est de produire directement ce type de solutions irrégulières réalisables.

2.1.5.2 Formalisation du problème d'optimisation de beam layout irrégulier

Le but de ce paragraphe est de fournir une description générique du problème d'optimisation de beam layout irrégulier tel qu'il a été résolu dans ces travaux de thèse. Il s'agit ainsi d'une synthèse de toutes les contraintes présentées précédemment qui permet par la même occasion d'introduire des notations pour les différents paramètres du problème. Cette formulation conceptuelle précède ainsi la formulation PLNE proposée dans le chapitre suivant.

On rappelle ainsi que le problème est de définir les positions d'un certain nombre maximum N_B de faisceaux, et de leur associer à la fois des utilisateurs (stations au sol) et des équipements de la charge utile du satellite. Cet ensemble de faisceaux sera noté $\mathcal{B} = \{1, \dots, N_B\}$. À noter que, intrinsèquement, ces variables de position des faisceaux varient dans des ensembles continus de valeurs. Certains de ces faisceaux peuvent être désactivés : le nombre de faisceaux actifs, inférieur ou égal au nombre maximum de faisceaux, est celui qui détermine le nombre de faisceaux embarqués dans la charge utile du satellite. Avec ces faisceaux, l'objectif est de fournir un service à N_S stations utilisateurs positionnées dans la zone de couverture. Chaque station s dans l'ensemble des stations $\mathcal{S} = \{1, \dots, N_S\}$ est caractérisée à la fois par sa demande propre en trafic $T_s \in \mathbb{R}^+$ (en Mégabits par seconde par exemple), et par ses coordonnées $S_{\text{coord},s} = (X_{\text{stations},s}, Y_{\text{stations},s}) \in \mathbb{R}^2$ dans le référentiel des angles "true view projetés" $\Theta_x \times \Theta_y$. Le critère de l'optimisation est la maximisation du trafic cumulé offert à ces stations. On fait l'hypothèse d'un nombre fini N_W de diamètres possible pour les faisceaux avec ces diamètres

$W_1, \dots, W_{N_W} \in \mathbb{R}^+$ fixés en amont de l'optimisation. On notera $\mathcal{W} = \{1, \dots, N_W\}$. On fait également l'hypothèse que N_R réflecteurs sont disponibles dans la charge utile du satellite, lesquels sont indicés par l'ensemble $\mathcal{R} = \{1, \dots, N_R\}$. Soit également N_{\min} le nombre minimum de stations que doit couvrir tout faisceau actif sur la couverture. Finalement, pour chaque diamètre de faisceau possible $\omega \in \mathcal{W}$, on définit une charge maximale $\Gamma_\omega \in \mathbb{R}^+$ pour tout faisceau utilisant le diamètre ω . Tous ces paramètres permettent de définir le problème d'optimisation non-linéaire de la figure 2.13 pour l'optimisation de beam layout irrégulier.

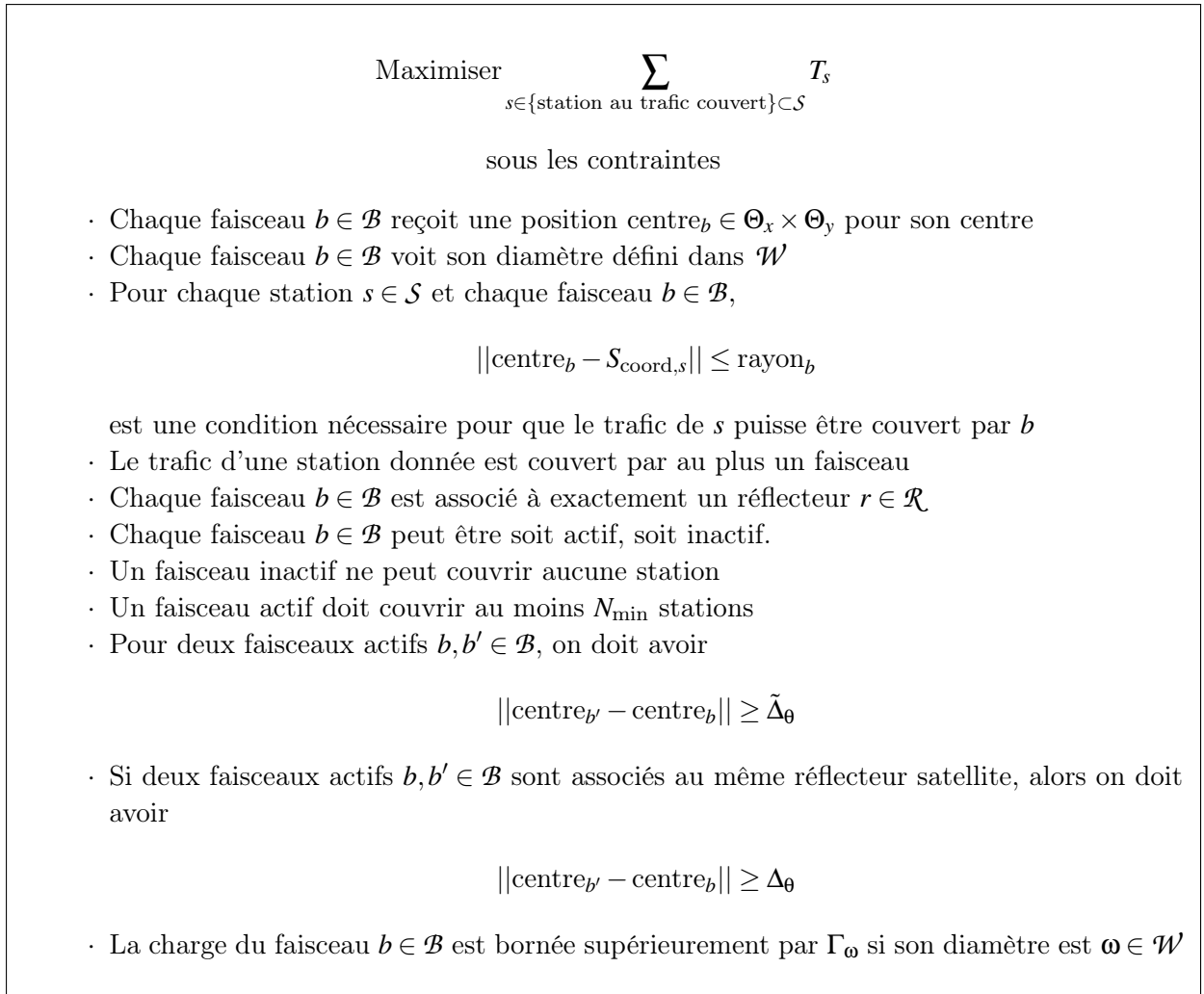


FIGURE 2.13 – Description générique du problème d'optimisation de beam layout irrégulier

2.1.5.3 NP-difficulté de l'optimisation d'un beam layout irrégulier

Le lien entre l'optimisation de beam layout irrégulier et les problèmes de localisation d'entrepôts est discuté plus en détails dans la section 2.2 à venir. Pour la preuve de complexité proposée dans ce paragraphe, on se contente de faire référence à un des problèmes de cette

classe : le “Circle Covering Problem” (CCP), étudié par exemple dans [Megiddo 1984]. Il est défini comme le problème de décision suivant :

Définition 1 (Circle Covering Problem - CCP).

Soient $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^2$ n disques unitaires (de rayon 1) dans le plan Euclidien et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le Circle Covering Problem cherche à répondre à la question : pouvons-nous trouver p points du plan $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^2$ de telle sorte que chaque disque contienne au moins un point ?

Ou, de manière équivalente :

Définition 2 (Circle Covering Problem, définition équivalente).

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ n points du plan Euclidien et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le Circle Covering Problem cherche à répondre à la question : pouvons-nous trouver p disques unitaires $D_1, \dots, D_p \subset \mathbb{R}^2$ de telle sorte que chaque point soit contenu par au moins un disque ?

L'article [Megiddo 1984] fournit également une preuve du caractère NP-complet du (CCP). Nous allons utiliser ce résultat pour démontrer que le problème d'optimisation de beam layout irrégulier de la figure 2.13 est lui NP-difficile. Pour cela, on introduit le problème (DBL) “Décision Beam Layout” comme étant le problème de décision associé à ce problème d'optimisation, à savoir

Définition 3 (Décision Beam Layout - DBL).

Soit $\zeta \in \mathbb{R}^+$. Le problème “Décision Beam Layout” cherche à répondre à la question : est-ce que le trafic couvert cumulé $\sum T_s$ peut être plus grand ou égal à ζ sous les contraintes de 2.13 ?

Proposition 1.

CCP peut se réduire polynomialement à DBL. Le problème d'optimisation de beam layout irrégulier est donc NP-difficile.

Preuve. Soient n et p deux entiers positifs définissant une instance I de CCP. On cherche une instance I' de DBL polynomialement définie à partir I et telle que :

$$I \text{ vraie} \Leftrightarrow I' \text{ vraie}$$

Soit alors I' définie comme suit :

- $N_S = n$
- Pour tout $s \in \mathcal{S}$, la position de la station s dans le plan coïncide avec le $s^{\text{ème}}$ point de I
- $\forall s \in \mathcal{S}, T_s = 1$
- $\zeta = n$
- $N_B = p$
- $N_R = N_B$
- $\kappa = 0$
- $\varepsilon = 0$
- $N_W = 1, W_1 = 2$ et $\Gamma_1 = n$
- $N_{\min} = 0$

Cet ensemble de valeurs de paramètres pour I' désactive certaines contraintes et le problème devient : est-ce que toutes les N_S stations peuvent être couvertes géométriquement par N_B faisceaux de rayon 1 (sans autre contrainte) ? Ainsi, l'équivalence avec I est claire.

□

A noter que dans le problème d'optimisation de beam layout, on reconnaît également des contraintes caractéristiques d'autres problèmes combinatoires complexes : des contraintes binaires similaires à celles présentes dans les problèmes de coloration de graphe (deux faisceaux trop proches doivent utiliser deux couleurs différentes, où les couleurs s'identifient ici aux réflecteurs du satellite), ainsi que des contraintes de capacité des ressources (les bornes supérieures de trafic par faisceau). Cela apporte au problème de la complexité supplémentaire par rapport à celle associée à la couverture géométrique des stations (utilisée dans la démonstration ci-dessus).

2.2 État de l'art : l'optimisation de beam layout, les problèmes voisins, et la gestion des contraintes en norme euclidienne

Dans la section précédente de définition du problème de beam layout irrégulier, les variables continues de position des faisceaux dans le système de coordonnées $\Theta_x \times \Theta_y$ ont été introduites. La notion de couverture géométrique d'une station utilisateur a également été rencontrée : pour être considérée couverte géométriquement par un faisceau, une station doit avoir une séparation angulaire avec le centre de ce dernier inférieure à son rayon. Concrètement, cette condition s'exprime à l'aide d'une norme euclidienne bornée supérieurement. À l'inverse, les contraintes de non-chevauchement et les contraintes des antennes SFPB imposent à certains couples de faisceaux d'avoir leurs centres suffisamment écartés angulairement, ce qui s'exprime cette fois par une borne inférieure sur une norme euclidienne. Finalement, dans notre application, il apparaît ainsi naturellement un besoin de composer avec des contraintes de séparation et des contraintes de proximité en norme euclidienne. Ces calculs de norme 2 sur des variables continues existent intrinsèquement dans les contraintes ou l'objectif de plusieurs problèmes dans la littérature de l'optimisation mathématique, définissant possiblement des régions admissibles ou des fonctions coût non-convexes. Le sous-ensemble de ces problèmes qui va nous intéresser tout particulièrement est celui où ces variables continues cohabitent avec des variables à domaine discret. De tels problèmes s'inscrivent dans la classe générique de la programmation non-linéaire mixte (PNLM) non-convexe, reconnue comme étant l'un des cadres d'optimisation cumulant le plus de complexité. Après une revue de la littérature sur l'optimisation de beam layout irrégulier à proprement parler, les liens forts de ce problème avec certaines autres de classes de problèmes sont explicités : les problèmes de localisation d'entrepôts, de localisation de capteurs, et de configuration de machines à rayons gamma. Dans la continuité directe de l'examen de ces problèmes de la littérature, cette section propose ensuite une synthèse des différentes méthodologies existantes dans la littérature pour traiter les contraintes de proximité et de séparation sur les variables continues. Ainsi, quelques généralités sur les MINLP et la programmation semi-définie positive sont fournies. Finalement, plusieurs méthodes de linéarisation de la norme euclidienne sont exposées : approximations par les normes 1 et "infinie", échantillonnage des valeurs possibles pour les variables continues, et échantillonnage des valeurs possibles de distances.

2.2.1 Solutions existantes au problème d'optimisation de beam layout irrégulier

Les travaux sur le placement irrégulier des faisceaux d'un système satellitaire multifaisceaux sont en nombre limité dans la littérature, et ne se placent jamais exactement sous des hypothèses de résolution strictement identiques à celles que nous avons exposées en chapitre 2.1. Les auteurs de [Angeletti 2012] proposent de répartir la charge émanant des stations au sol sur les différents faisceaux du système multifaisceaux par ajustement de leurs tailles, l'idée principale ayant guidé ce choix étant que les déséquilibres des demandes de trafic par faisceau peuvent se traduire par des stations trop peu ou trop servies, sous certaines hypothèses d'allocation de spectre aux faisceaux. La méthode proposée recourt à une partition de la région en des sous-parties polygonales de charge équivalente. L'hypothèse est faite qu'un seul faisceau doit être placé dans chacun de ces polygones ainsi définis, et les taille et position de chacun de ces faisceaux sont déterminées par analyse de la forme et de la surface du polygone correspondant. Dans ce travail, la question de l'association des faisceaux aux réflecteurs du satellite n'est pas abordée. De plus, les auteurs de [Kyrgiazos 2013] ont observé qu'un désavantage majeur de cette méthode est que plusieurs zones se retrouvent peu ou pas couvertes géométriquement par les faisceaux. Pour contrer ce problème, ce même papier propose de recourir à des réseaux de neurones artificiels et plus précisément à des cartes auto-organisatrices qui traitent toutes les demandes en trafic individuelles des stations au sol pour définir des sous-zones, chaque sous-zone étant associée à une des tailles de faisceau admissibles. Les auteurs justifient cette approche par le fait qu'utiliser des faisceaux étroits sur les zones les plus denses est une façon d'améliorer les gains des antennes et le potentiel de réutilisation des fréquences là où c'est le plus nécessaire, tout en utilisant des faisceaux plus larges sur des zones moins denses où cela peut s'avérer suffisant pour être conforme à la demande. Les faisceaux sont ensuite placés dans chaque sous-zone de manière à minimiser les zones non-couvertes géométriquement, le schéma hexagonal régulier étant utilisé de façon répétée localement. Une fois que les faisceaux sont placés sur la zone, les auteurs adressent la question de la configuration antenne avec une allocation des faisceaux aux réflecteurs du satellite qui s'appuie sur une maximisation des séparations angulaires entre les faisceaux transmis par le même réflecteur, ce problème NP-difficile étant résolu de façon heuristique. L'inconvénient majeur de ce traitement séquentiel du positionnement des faisceaux puis de leur allocation aux réflecteurs est qu'il est tout à fait possible de découvrir que, pour des positions de faisceaux déterminées sans considération de la contrainte antenne, même les allocations de réflecteur optimales (en un certain sens, par exemple la maximisation des distances de séparation des faisceaux de même réflecteur) peuvent s'avérer incompatibles avec les contraintes antenne SFPB. D'où l'intérêt des approches intégrées de placement de faisceaux et d'allocation de réflecteurs proposées dans cette thèse.

2.2.2 Problèmes voisins de la littérature et solutions associées

Il n'existe pas dans la littérature de l'optimisation mathématique de problème combinant strictement toutes les caractéristiques fortes du problème de beam layout, à savoir :

- Des variables continues définissant un certain nombre de points du plan (centre des

faisceaux),

- Des contraintes convexes en norme euclidienne sur ces variables continues (proximité des stations aux centres des faisceaux),
- Des contraintes non-convexes en norme euclidienne sur ces variables continues, conditionnées par la simultanéité d'utilisation d'une certaine ressource (séparation des faisceaux sur le même réflecteur),
- Des contraintes non-convexes en norme euclidienne sur ces variables continues, systématiques cette fois (séparation des faisceaux pour non-chevauchement),
- Une notion de ressource à capacité limitée définie pour chaque point du plan placé continûment (charge maximale par faisceau),
- Un nombre limité de ressources placées continûment dans le plan sont en nombre limité (nombre maximal de faisceaux),
- Des demandes émanant d'utilisateurs ponctuels dans le plan, auxquels l'accès depuis les ressources est conditionné par les positions (variables) dans le plan de celles-ci (condition de couverture géométrique des stations pour pouvoir les servir).

Il faut donc se contenter d'une revue de la littérature portant sur des problèmes qui ne combinent que des sous-ensembles de ces différentes caractéristiques, ce qui est proposé dans les paragraphes suivants.

2.2.2.1 Problèmes de localisation d'entrepôts

Décrits de façon sommaire, les problèmes de localisation d'entrepôts sont ceux qui s'intéressent au placement d'un ou plusieurs entrepôts qui doivent répondre à des demandes provenant de clients dont les positions sont connues. Dans la continuité de l'analogie entre le problème de beam layout et le "Circle Covering Problem" (CCP) proposée en paragraphe 2.1.5.3, les entrepôts peuvent être ainsi assimilés aux faisceaux et les clients aux stations utilisateurs.

Le problème de k -center continu

A noter que dans le CCP défini dans [Megiddo 1984], qui est le premier problème voisin du problème de beam layout que nous avons identifié dans cette classe, les centres des disques peuvent être placés n'importe où dans \mathbb{R}^2 . Ainsi, les variables continues et les contraintes de proximité en norme Euclidienne sont dans ce cas les caractéristiques communes avec le problème d'optimisation de beam layout. Peu de littérature porte directement sur la résolution du CCP car ce dernier n'est en fait que le problème de décision associé à un problème d'optimisation bien plus connu : le problème de k -center continu. Ce dernier est défini comme suit :

Définition 4 (k -center continu).

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ n points du plan Euclidien et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quel est le plus petit rayon $r \in \mathbb{R}^+$

pour lequel il existe k disques $D_1, \dots, D_k \subset \mathbb{R}^2$ de rayon r tels que chaque point soit contenu par au moins un disque ?

Les applications de ce problème sont multiples, les positions optimales pouvant correspondre à des casernes de pompiers, des hôpitaux, des stations de police, ou effectivement à des entrepôts. L'objectif mathématique peut donc s'interpréter comme un besoin d'associer les villes à servir aux centres fournissant le service de manière à minimiser le plus grand temps requis d'un centre à une ville. Les techniques les plus performantes à ce jour reposent sur la procédure de branch-and-bound décrite dans [Fayed 2013] laquelle s'appuie sur des algorithmes de cercle couvrant minimum (c'est-à-dire sur la détermination du plus petit disque couvrant un ensemble de points du plan, étudié par exemple dans [Welzl 1991] et [Yildirim 2008]), ou sur de l'optimisation par essais particuliers comme proposé dans [Rabie 2013]. A noter qu'il est possible d'envisager des normes autres que la norme euclidienne pour évaluer l'écartement d'une ville à un centre, comme proposé dans [Riedl] avec la norme 1 et la norme "infinie".

***k*-center robuste avec points non-couverts**

Un autre problème dérivé du problème standard de *k*-center continu est le problème de *k*-center robuste avec points non-couverts, dont l'objectif est de couvrir un maximum de points par des disques de rayon identique, la valeur de ce rayon étant cette fois fixée à l'avance :

Définition 5 (Le problème de *k*-center robuste avec points non-couverts).

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ n points du plan Euclidien, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $r \in \mathbb{R}^+$. Combien de points x_i pouvons-nous couvrir au maximum avec k disques $D_1, \dots, D_k \subset \mathbb{R}^2$ de rayon r ?

Ce problème est notamment étudié dans [Charikar 2001], [Gandhi 2004] et [Xiao 2003] où sont proposés des algorithmes d'approximation combinant des raisonnements gloutons et des approches géométriques. Dans le sens où les disques sont de tailles potentielles prédéterminées dans l'optimisation du beam layout irrégulier, le *k*-center robuste avec points non-couverts en est sûrement plus proche que le *k*-center continu standard.

Euclidean Multifacility Location Problem

Dans le problème de *k*-center continu, l'objectif de l'optimisation est une distance maximale en norme euclidienne entre un client et un centre. Un autre problème connu de la littérature sur le placement d'entrepôts propose lui aussi de placer continûment des entrepôts mais avec cette fois un critère qui s'exprime comme une somme de différentes normes euclidiennes : le "Euclidean Multifacility Location Problem" (EMFL). Il s'agit en effet de définir les positions de n nouveaux entrepôts par rapport à m entrepôts existants. La fonction coût minimisée est une combinaison linéaire de distances euclidiennes entre des paires de nouveaux entrepôts et des paires constituées d'un nouvel entrepôt et d'un entrepôt existant. Plus précisément :

Définition 6 (Euclidean Multifacility Location Problem).

Soient $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^2$ m points du plan Euclidien, soient w_{ji} pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $i = 1, 2, \dots, m$, et v_{jk} pour $1 \leq j < k \leq n$ des réels non négatifs. On cherche un point $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T \in (\mathbb{R}^2)^n$ qui minimise

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} \|x_j - a_i\| + \sum_{1 \leq j < k \leq n} v_{jk} \|x_j - x_k\| \quad (2.29)$$

On montre que cette fonction objectif possède des dérivées partielles ne pouvant pas être définies au niveau des interactions entre deux nouveaux entrepôts ($x_j = x_k$), ou de celles entre un nouvel et un ancien entrepôt ($x_j = a_i$). Ainsi, les premières méthodes proposées dans la littérature recouraient à une procédure d'approximation de la fonction objectif par un hyperboloïde totalement différentiable : [Eyster 1973] et [Radó 1988]. Le résultat énonçant que le dual du problème est une minimisation d'une fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires et des contraintes quadratiques convexes, démontré dans [Xue 1996], a motivé la définition de solutions s'appuyant sur des techniques de points intérieurs qui donnent ainsi lieu à des algorithmes polynomiaux, comme celui décrit dans [Xue 1997].

Le problème de k -center discret

La littérature est significativement plus abondante sur le problème de k -center dans sa version où les positions possibles des entrepôts à placer sont confondues avec les positions des villes à servir. Dans ce cas, cet ensemble de possibilités pour les positions des entrepôts est discret et fini, ce qui permet ainsi quitter le cadre de l'optimisation continue. Sous cette hypothèse, le problème devient donc :

Définition 7 (k -center discret).

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet avec des poids sur les arêtes $w_e \in \mathbb{R}^+$ ($e \in E$) vérifiant $w_{(v,v)} = 0$ pour $v \in V$ et la propriété d'inégalité triangulaire pour tout triplet $i, j, k \in V$: $w_{(i,j)} + w_{(j,k)} \geq w_{(i,k)}$. On cherche un sous-ensemble $S \subseteq V$ de taille maximum k qui minimise

$$f(S) = \max_{i \in V} \min_{j \in S} w_{(i,j)} \quad (2.30)$$

A noter que l'hypothèse d'inégalité triangulaire sur le poids des arêtes inclut le cas qui nous intéresse où les sommets du graphe sont en bijection avec autant de points du plan euclidien, et où le poids d'une arête correspond à la distance euclidienne entre les points du plan des deux sommets définissant cette arête. Pour le problème nominal juste décrit, l'algorithme de 2-approximation de Hochbaum présenté dans [Hochbaum 1985] fait école. Par contre, les multiples extensions de ce problème continuent d'alimenter la recherche sur le sujet. Parmi celles-ci, les plus pertinentes en vue de l'analogie avec le problème d'optimisation de beam layout sont :

- Le k -center discret avec contraintes de capacité par centre : chaque centre se voit limité sur le nombre maximum de villes qu'il peut couvrir. Cette contrainte fait écho à la contrainte de charge maximale par faisceau dans le problème de beam layout. Cette version du problème de k -center a par exemple été étudiée dans [Khuller 2000] où des algorithmes d'approximation en temps polynomial sont proposés pour le résoudre.
- Le k -center discret avec contraintes de minimum de villes servies par centre : tout entrepôt doit couvrir un certain nombre minimal de villes. Cette contrainte rappelle la contrainte de nombre minimum de stations par faisceau, qui a été définie pour des raisons de rentabilité d'équipement. Ce problème est étudié notamment dans [Lim 2004].

Le problème k -median

Pour un problème discret qui, comme le Euclidean Multifacility Location Problem en continu, adresse aussi une fonction objectif qui est non pas une distance euclidienne maximale mais une somme de certaines distances euclidiennes, un problème particulièrement connu de la littérature est le problème de k -median. Par rapport au k -center discret, il ne diffère que par la fonction objectif :

Définition 8 (k -median).

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet avec des poids sur les arêtes $w_e \in \mathbb{R}^+$ ($e \in E$) vérifiant $w_{(v,v)} = 0$ pour $v \in V$ et la propriété d'inégalité triangulaire pour tout triplet $i, j, k \in V$: $w_{(i,j)} + w_{(j,k)} \geq w_{(i,k)}$. On cherche un sous-ensemble $S \subseteq V$ de taille maximum k qui minimise

$$f(S) = \sum_{i \in V} \min_{j \in S} w_{(i,j)} \quad (2.31)$$

Dans [Charikar 1999], les auteurs construisent un algorithme d'approximation en exploitant une relaxation linéaire du problème par des arrondis entiers et des techniques de filtrage pour sélectionner les centres à ouvrir. D'autres solutions présentées dans [Jain 2001] exploitent le schéma primal-dual et la relaxation lagrangienne pour définir des algorithmes d'approximation. Dans [Arya 2004], des heuristiques s'appuyant sur de la recherche locale sont décrites.

2.2.2.2 Problèmes de localisation de capteurs

Une autre classe de problèmes s'est avérée particulièrement pertinente dans ce travail de confrontation de l'optimisation de beam layout aux problématiques voisines de la littérature. Il s'agit du problème de localisation de capteurs sans-fil.

Le recours à des réseaux de capteurs sans-fil pour récolter et transmettre en autonomie des données environnementales (température, niveaux de bruit, ou lumière par exemple) s'intensifie au rythme de la baisse de leur coût et de celle des tailles individuelles de capteurs. De nombreuses problématiques émergent en ce qui concerne de le déploiement de tels ensembles de capteurs, un axe d'optimisation privilégié étant par exemple la maximisation de la durée de vie : [Castaño 2016], [Lersteau 2016] ou encore [Castaño 2015]. Seulement, les données renvoyées par un capteur ne sont pertinentes qu'à condition de savoir à quel lieu elles font référence. Connaître les positions des capteurs sans-fil est donc impératif. Or, l'utilisation systématique de la technologie GPS sur chaque capteur est une solution trop onéreuse pour répondre à cette contrainte. Le compromis a donc été de considérer que la position serait connue pour certain sous-ensemble restreint de capteurs, mais qu'il était nécessaire de mettre en place une procédure d'estimation des positions inconnues, en exploitant des distances relatives entre capteurs : une synthèse complète des méthodes de mesure employées et des approches d'exploitation de ces informations pour la localisation des capteurs est proposée dans l'article [Mao 2007]. Ces données de distances peuvent être dérivées d'informations de dates d'arrivée de signaux entre capteurs, d'intervalles de temps entre émission-réception de ces signaux, ou de puissance des signaux à la réception. En termes de contraintes mathématiques pour le problème d'optimisation de l'estimation des positions inconnues, cela signifiera par exemple que pour deux

capteurs identifiés comme étant suffisamment proches pour communiquer par radiofréquences, la distance entre leurs deux positions devra être inférieure à cette portée de communication. Cela s'exprime par une norme euclidienne sur des variables continues bornée supérieurement : l'analogie est directe avec la contrainte de couverture géométrique des stations utilisateurs par les faisceaux dans le problème de beam layout. Par ailleurs, il est également possible d'avoir en entrée des informations exactes de distances entre deux capteurs donnés, cette égalité de distance s'exprimant par la conjonction d'une contrainte de proximité et d'une contrainte de séparation : les contraintes de séparation des variables continues sont donc aussi présentes et rappellent les contraintes de séparation angulaire depuis le satellite dans le problème de beam layout.

Concernant les méthodes de résolutions employées dans la littérature pour résoudre ce problème de localisation, on retrouve fréquemment un recours à la programmation semi-définie positive qui permet de modéliser naturellement des contraintes de proximité en norme euclidienne : [Biswas 2006], [Biswas 2004]. Dans ce cas, les contraintes de séparation sont relâchées juste assez pour être compatibles avec le cadre d'optimisation semi-défini positif. Dans [Gentile 2005], ces contraintes de séparation ne sont cette fois plus relâchées mais approchées par des contraintes linéaires d'inégalité triangulaire. On retrouve également des méthodes de résolution gloutonnes comme par exemple dans [Shi 2010], ou encore des métaheuristiques comme le recuit simulé dans [Kannan 2006].

2.2.2.3 Problème de configuration de machine de stéréo-radiothérapie

Le problème de la littérature le plus proche de l'optimisation de beam layout au sens des caractéristiques listées précédemment est le problème dit d'optimisation de la configuration d'une machine à rayons gamma. L'application est alors la radiochirurgie, ou stéréo-radiothérapie, qui permet de traiter des malformations comme des tumeurs sans intervention chirurgicale. Effectivement, l'appareil dit "Gamma Knife" génère des faisceaux de rayons gamma concentrés sous la forme de sphères au voisinage de la malformation à traiter, afin de la résorber. Ces sphères peuvent être de différentes tailles, mais ces diamètres varient dans un ensemble discret et fini défini par les équipements disponibles : cette caractéristique est analogue à celle du nombre fini de diamètres possibles pour les faisceaux dans l'optimisation de beam layout. Le nombre de sphères auquel il est possible de recourir pour couvrir l'intégralité de la zone à traiter est également limité et rappelle le nombre maximum de faisceaux utilisables dans notre application aux systèmes satellitaires. Il est important de trouver une couverture efficace de la tumeur par cet ensemble de sphères afin de faciliter la planification des différents dosages requis. Ainsi, le problème est la couverture de formes irrégulières de l'espace par des sphères en nombre limité et aux diamètres variables. À noter que la notion de couverture d'un point par une sphère fait naturellement appel à la notion de contrainte de proximité : pour être couvert par une sphère, un point doit être proche du centre de la dite sphère d'une distance inférieure à son rayon. On retrouve également des contraintes de couverture d'un nombre minimal de point par les sphères, analogue de la contrainte de couverture d'un nombre minimal de stations par les faisceaux. Enfin, dans certains travaux, des contraintes de non-chevauchement des sphères ou de chevauchement autorisé paramétrable existent, apportant au problème la notion de contrainte

de séparation non-convexe très caractéristique de notre problème de beam layout.

Quant aux algorithmes de résolution mis en place pour résoudre ce problème de couverture par des sphères, les auteurs de [Sutou 2002] proposent des heuristiques d'amélioration de l'extension naturelle du branch-and-bound de la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) au cas non-linéaire mixte (discuté en 2.2.3.1), en exploitant les structures particulières du problème. Dans [Liberti 2009], des modèles de programmation non-linéaire mixtes sont proposés puis approché par un modèle linéaire mixte par discrétisation des valeurs possibles de la norme euclidienne. Enfin, dans [Pinto 2015], le problème non-convexe non-linéaire dans sa version la plus brute est résolu directement par différents solveurs de programmation non-linéaire mixte (COUENNE, BONMIN, Xpress-SLP), puis par des méthodes heuristiques.

2.2.3 Les contraintes inégalités continues en norme euclidienne dans les programmes mathématiques

2.2.3.1 Programmation non-linéaire mixte non-convexe

De par sa capacité à capturer une très large variété de problèmes d'optimisation, la programmation non-linéaire mixte (PNLM) ne cesse d'attirer l'attention de la communauté de l'optimisation mathématique. Sur la dernière décennie, on a observé une intensification de l'intérêt des chercheurs pour les nombreux défis théoriques et pratiques que pose cette classe de problèmes d'optimisation. Essentiellement, la difficulté provient de la présence simultanée de non-linéarités qui peuvent notamment causer une perte de propriété de convexité, et des contraintes d'intégrité de certaines variables. Sur la définition précise de cette classe d'optimisation, notons qu'un problème mixte non-linéaire non-convexe peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sous les contraintes} \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$x \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n \tag{2.33}$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I \tag{2.34}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec donc $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, et $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$. Enfin, un MINLP est dit convexe (respectivement non-convexe) quand la région admissible de sa relaxation continue est un ensemble convexe (respectivement non-convexe). Pour des MINLP convexes, il est théoriquement plus facile de résoudre les relaxations continues du problème. Ainsi, plusieurs solutions exactes pour les MINLP convexes ont été développées autour de ce principe : décomposition de Benders généralisée, branch-and-bound, méthode de plans sécants étendue, branch-and-cut. Par contre, dans le cas où les fonctions f et g ne sont pas convexes, la relaxation continue est elle-même un problème d'optimisation global (présence potentielle de plusieurs minima locaux) pouvant être NP-difficile. Par ailleurs, résoudre de façon sous-optimale cette relaxation endommagerait directement les principes qui font la force des procédures de type branch-and-bound, dans le sens où déclencher un élagage d'une partie

de l'arborescence en fonction d'une borne inférieure qui n'en est pas strictement une pourrait se traduire par la perte de solutions faisables voire optimales. Aussi, certaines techniques de coupes perdent leur applicabilité dans un cadre non-convexe, lequel fait en effet courir le risque de perdre des parties la région admissible avec par exemple des coupes linéaires. Pour plus de développements sur ces méthodes de résolutions pour les MINLP convexes et non-convexes, le lecteur est invité à se référer à ces articles : [Burer 2012], [Belotti 2013], [D'Ambrosio 2010], [D'Ambrosio 2013], [Lee 2011], [Nowak 2006].

Pour en revenir au cas particulier de l'optimisation du beam layout d'un système multifaisceaux, le problème de la figure 2.13 se range parfaitement dans la catégorie des problèmes modélisables par la programmation mixte non-linéaire non-convexe. En effet, les contraintes d'intégrité apparaissent sur les choix de diamètres de faisceaux, de réflecteurs, mais aussi sur les associations entre faisceaux et stations utilisateurs. Les variables continues correspondent aux centres des faisceaux. Les non-linéarités proviennent des contraintes inégalités sur les distances euclidiennes entre ces centres, ou entre centres et stations. Enfin, la non-convexité est le résultat des contraintes de séparation en norme euclidienne.

Parmi les problèmes voisins de l'optimisation de beam layout, le problème d'optimisation de la configuration d'une machine à rayons gamma est celui pour lequel il existe des travaux le résolvant directement par programmation non-linéaire mixte, soit au travers de procédures de branch-and-bound, ou bien directement par utilisation de solveurs de PNLM : [Sutou 2002], [Pinto 2015].

2.2.3.2 Programmation semi-définie positive

La programmation semi-définie positive, cas particulier de la programmation conique (tout comme la programmation linéaire), est d'intérêt dans nos applications car elle permet notamment de traiter les contraintes de proximité en norme euclidienne. Soit \mathbb{S}^n l'ensemble des matrices carrées de taille n réelles symétriques, on dira que $X \in \mathbb{S}^n$ est semi-définie positive si et seulement si $x^T X x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et ce sous-ensemble des matrices symétriques réelles sera noté $\mathbb{S}_{\succeq 0}^n$. Cette semi-définie positivité pour X se note également $X \succeq 0$. On munit ensuite $\mathbb{S}_{\succeq 0}^n$ d'une structure euclidienne en y définissant le produit scalaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}_{\succeq 0}^n} : (M, N) \in \mathbb{S}_{\succeq 0}^n \times \mathbb{S}_{\succeq 0}^n \mapsto \langle M, N \rangle_{\mathbb{S}_{\succeq 0}^n} = \text{Tr}(MN) = \sum_{ij} M_{ij} N_{ij} \quad (2.35)$$

où $\text{Tr}(MN)$ est donc la trace du produit matriciel MN . Soient $A_1, \dots, A_m, C \in \mathbb{S}_{\succeq 0}$ et $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Avec ces notations, nous pouvons fournir les deux écritures standard d'un programme semi-défini positif. La première est :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle_{\mathbb{S}_{\geq 0}^n} \\ \text{sous les contraintes} \quad & \\ \langle A_i, X \rangle_{\mathbb{S}_{\geq 0}^n} = b_i \quad & i = 1 \cdots m \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$X \succeq 0 \tag{2.37}$$

Qui peut se réécrire de façon équivalente comme suit :

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{sous la contrainte} \quad & \\ C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dans cette dernière formulation, on parle d'inégalité matricielle linéaire pour faire référence à cette expression compacte des contraintes sous forme d'une exigence de semi-définie positivité d'une certaine combinaison linéaire des matrices de $\mathbb{S}_{\geq 0}^n$ définissant le problème. Sur cette dernière écriture, on observe aussi clairement que la programmation semi-définie positive généralise la programmation linéaire, puisque la forme canonique d'un programme linéaire est retrouvée dès lors que les matrices A_1, \dots, A_m, C sont diagonales à coefficients réels. Quant aux méthodes de résolution, elles s'appuient essentiellement sur les méthodes de points intérieurs de l'optimisation convexe adaptées à ce cadre particulier. De nombreux documents de synthèse sur le sujet sont disponibles dans la littérature : [Vandenberghe 1996], [Alizadeh 1995], [Helmberg 1996], [Wolkowicz 2012].

L'intérêt de la programmation semi-définie positive en vue de gérer des contraintes en norme euclidienne sur des variables continues réside dans sa capacité à modéliser naturellement des contraintes quadratiques convexes. Par exemple, les contraintes de proximité de deux variables continues font partie de cette classe de contraintes. C'est exactement dans cet objectif que la programmation semi-définie positive est employée dans les articles [Biswas 2004], [Biswas 2006], [Gentile 2005] sur l'optimisation de la localisation de capteurs.

2.2.3.3 Approximations de l_2 par des combinaisons de l_1 et l_∞

Dans l'objectif de rendre les contraintes inégalités en norme euclidienne sur des variables continues compatibles avec la programmation linéaire, une piste d'intérêt est celle de la linéarisation de cette norme euclidienne l_2 définie, pour rappel, comme suit :

$$\| \cdot \|_2 : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{2.39}$$

Pour cela, redonnons la définition des deux autres normes classiques en dimension finie. D'abord, la norme dite "norme 1" notée l_1 :

$$\| \cdot \|_1 : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (2.40)$$

Puis la norme infinie, notée l_∞ :

$$\| \cdot \|_\infty : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (2.41)$$

Pour un programme mathématique où interviennent des variables continues représentant des points de \mathbb{R}^n , il est possible de définir des ensembles de variables et de contraintes permettant d'accéder linéairement à des distances en norme 1 ou en norme infinie entre des couples de tels points. L'exploitation de cette propriété a notamment permis à l'auteur de [Gentile 2005] de gérer les contraintes de séparation non-convexes du problème de localisation de capteurs considéré dans ce travail. Cette approche s'inscrit en fait dans un mouvement de recherche plus général dans le domaine dit des distances digitales sur les façons de remplacer efficacement les calculs relativement lourds de norme euclidienne l_2 par des combinaisons optimisées des normes l_1 et l_∞ , dont les calculs sont moins gourmands en nombre d'opérations (voir par exemple [Barni 1994], [Seol 2008]). Dans les travaux les plus récents ([Celebi 2011], [Mukherjee 2013]), il a été prouvé que dans le plan euclidien, la meilleure erreur relative maximale (estimée empiriquement) d'une combinaison optimisée de l_1 et l_∞ par rapport à l_2 est approximativement égale à 5,6%. Il s'agit donc d'une erreur incompressible quand cette voie de linéarisation de la norme euclidienne est empruntée.

2.2.3.4 Discrétisation du domaine des positions admissibles

Toute la complexité des contraintes de séparation provient du caractère non-convexe du calcul de normes euclidiennes sur des variables continues. Une solution naturelle pour contrer cette difficulté est de limiter les domaines de ces variables continues à des ensembles finis, par le biais d'un échantillonnage dont la finesse ajustable. Effectivement, il est possible dans ce cas de pré-calculer toutes les distances euclidiennes entre deux points quelconques de l'ensemble des positions possibles discrétisées pour les variables anciennement continues, ou entre un point possible de cet ensemble et d'autres points faisant partie des données d'entrée définissant le problème. Ainsi, pour chaque choix de position, des informations tabulées en amont de l'optimisation permettent de conclure quant à la satisfaction ou non des contraintes de proximité ou de séparation rattachées à cette variable de position.

Essentiellement, ces techniques de discrétisation sont celles qui ont donné naissance, à partir du problème de k -center continu, aux problèmes de k -center discret et de k -median décrits dans le paragraphe 2.2.2.1. Par ailleurs, ce même type de discrétisation est notamment utilisé dans [Pinto 2015], pour résoudre le problème continu non-linéaire non-convexe de configuration de machine à rayons gamma, dans sa version qui comprend à la fois des contraintes de proximité et des contraintes de séparation.

2.2.3.5 Approximation linéaire par morceaux du carré des variables continues

Une autre méthode permettant de linéariser les distances euclidiennes a été proposée dans [Liberti 2009], pour l'optimisation de la configuration d'une machine à rayons gamma. Il s'agit d'une technique de linéarisation des contraintes de proximité entre une variable continue et un certain point du plan (ou de l'espace) dont les coordonnées sont connues. Cette méthode repose sur un échantillonnage des valeurs possibles de chaque carré de coordonnée de point placé continûment : on s'intéresse ainsi à la fonction carré sur un domaine réduit correspondant aux plus grandes bornes rencontrées sur les différentes variables continues. Concrètement, supposons que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ soit une variable continue et que $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ soit un point aux coordonnées connues. Supposons alors que x soit soumise à la contrainte $\|x - u\| \leq \delta$ pour un certain $\delta \in \mathbb{R}^+$. On a les équivalences suivantes :

$$\|x - u\| \leq \delta \iff \|x - u\|^2 \leq \delta^2 \quad (2.42)$$

$$\iff \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2u_i x_i + u_i^2) \leq \delta^2 \quad (2.43)$$

Définissons maintenant n nouvelles variables $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. L'implication au cœur de la méthodologie proposée dans cet article est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, n\}, s_i \geq x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n (s_i - 2x_i u_i + u_i^2) \leq \delta^2 \end{array} \right\} \implies \|x - u\| \leq \delta \quad (2.44)$$

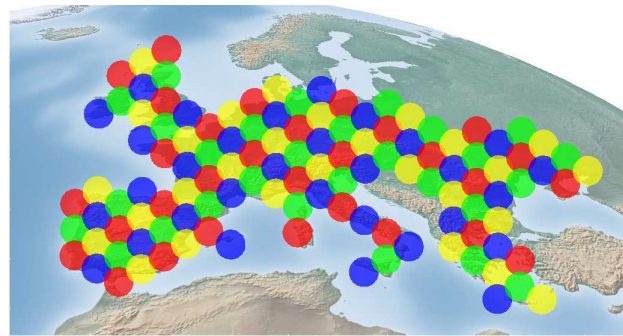
Elle découle directement de l'équivalence (2.43). Reste donc à avoir une expression linéaire de la contrainte $s_i \geq x_i^2$, qui est obtenue par approximation de la fonction carré par une fonction linéaire par morceaux définie à partir d'un ensemble de points échantillonnés sur la courbe $y = x^2$. Une façon de visualiser l'erreur commise avec une telle approximation est de remarquer que l'on vient d'approcher l'épigraphe de la fonction carré par un ensemble plus petit, construit par intersection de demi-espaces issus des couples de points consécutifs dans l'échantillonnage de la courbe $y = x^2$: ceci est représenté en figure 2.14. Pour chaque coordonnée continue $i \in \{1, \dots, n\}$ d'un certain point $x \in \mathbb{R}^n$, on note m le nombre de points échantillonnant la fonction carré, dont les abscisses sont $\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,m} \in \mathbb{R}$. Pour finaliser la linéarisation de la contrainte de proximité, on utilise enfin le résultat suivant :

$$\{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{2, \dots, m\}, s_i \geq (\bar{x}_{i,j} + \bar{x}_{i,j-1})x_i - \bar{x}_{i,j}\bar{x}_{i,j-1}\} \implies s_i \geq x_i^2 \quad (2.45)$$

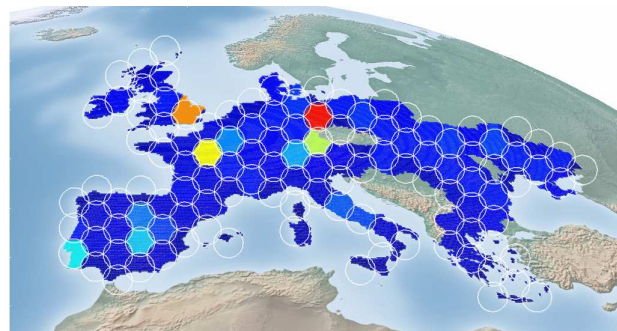
Finalement, cette méthode requiert la déclaration de n variables continues et de nm contraintes supplémentaires par variable de \mathbb{R}^n impliquée dans une telle contrainte de proximité. Les expérimentations des auteurs les ont amenés à conclure que cette technique donnait au mieux des résultats pratiques raisonnables, au pire des résultats insatisfaisants. Son extension aux contraintes de proximité entre deux variables continues, ainsi qu'à tout type de contraintes de séparation, est malheureusement impossible.

2.3 Conclusions

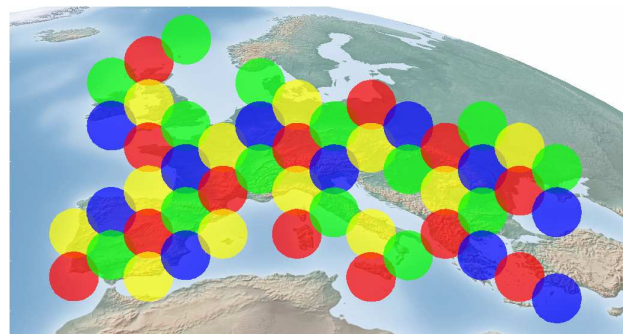
Ce chapitre a permis de définir formellement la notion de “beam layout” et le problème d’optimisation qui lui est associé. La liste des contraintes technologiques qui doivent être respectées en résolvant ce problème a été fournie et commentée. Elle a permis d’aboutir à un modèle mathématique conceptuel, détaché de tout cadre d’optimisation précis, qui a cependant suffi à prouver le caractère NP-difficile du problème. Les solutions classiques ont été présentées, et l’intérêt de recourir à des couvertures irrégulières illustré. Nous avons également tâché de mettre en évidence le lien fort qu’unissait ce problème de beam layout avec les problèmes qui suivent dans le flot d’optimisation de la figure 1.6, en particulier avec le problème d’allocation de fréquences adressé en chapitre 5. Nous avons également insisté sur la nécessité de manipuler des contraintes en norme euclidienne pour traduire des contraintes de séparation ou de proximité angulaire. Ces contraintes particulières classent le problème dans une catégorie de problèmes réputés très durs à résoudre, à savoir la programmation non-linéaire non-convexe mixte. Elles ont ainsi fait l’objet d’un état de l’art dédié, duquel nous nous sommes inspirés en chapitre 3 pour définir des solutions algorithmiques inédites au problème de placement irrégulier de faisceaux.



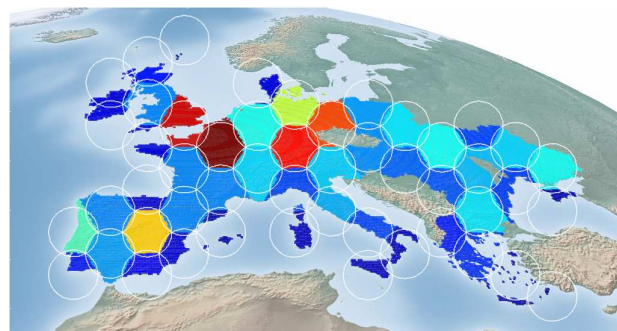
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 2.11 – Respectivement pour la solution à 117 faisceaux puis celle à 50 faisceaux : (a),(c) Allocation de réflecteurs (une couleur par réflecteur) (b),(d) Charge par faisceau relativement à la limite de charge (bleu = proche de 0, rouge = au-dessus de 1)

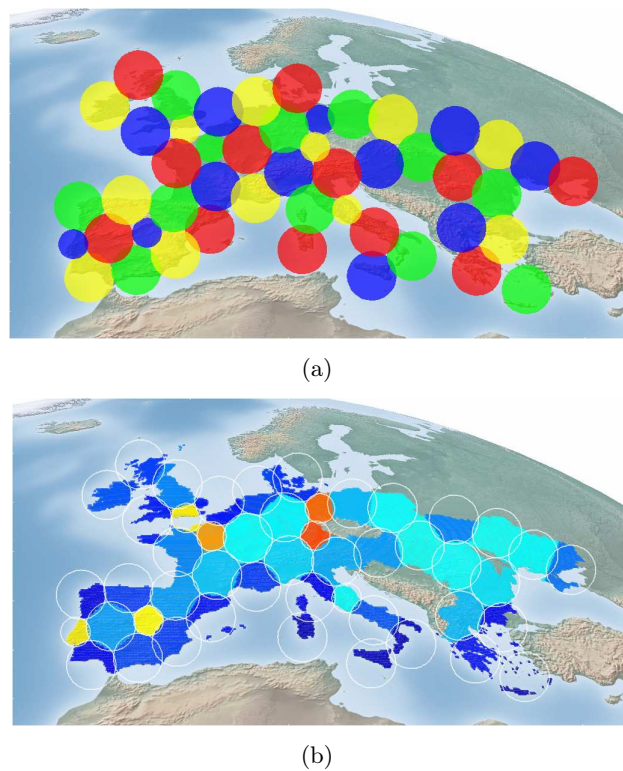


FIGURE 2.12 – Solution irrégulière : (a) Allocation de réflecteurs (une couleur par réflecteur) (b) Charge par faisceau relativement à la limite de charge (bleu = proche de 0, rouge = au-dessus de 1)

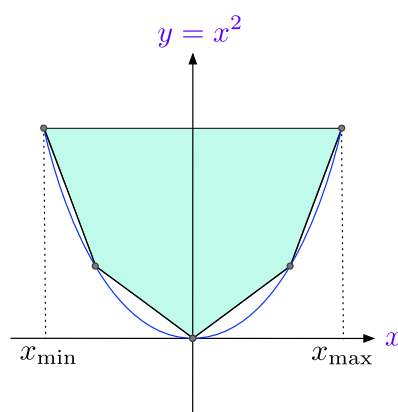


FIGURE 2.14 – Approximation de l'épigraphe de la fonction carré par l'intersection de demi-espaces définis par des points d'approximation sur la courbe $y = x^2$

Nouvelles linéarisations de la norme euclidienne et application au placement de faisceaux

Sommaire

3.1	Externalisation des évaluations de l_2 par discrétisation des positions des centres des faisceaux, et résolution gloutonne	61
3.1.1	Intérêt et mise en œuvre de la discrétisation du domaine des centres des faisceaux	62
3.1.2	Premier algorithme de placement de faisceaux : heuristique randomisée de construction gloutonne avec coloration de graphe	68
3.1.3	Perspectives d'amélioration de l'heuristique	78
3.2	Linéarisation des évaluations de l_2 par discrétisation des directions du plan	79
3.2.1	Principe de la linéarisation de la norme euclidienne par discrétisation des directions du plan	79
3.2.2	Extension des principes de linéarisation aux dimensions supérieures	83
3.2.3	Définition d'un programme linéaire mixte pour le placement de faisceaux	85
3.3	Confrontation de la méthode gloutonne au modèle de programmation linéaire mixte	95
3.3.1	Définition des instances du problème d'optimisation de beam layout	95
3.3.2	Les différents types d'instances testées	96
3.3.3	Expérimentations croisées des deux algorithmes de placement de faisceaux	98
3.4	Conclusions	102

3.1 Externalisation des évaluations de l_2 par discrétisation des positions des centres des faisceaux, et résolution gloutonne

La modélisation générique du problème d'optimisation de beam layout irrégulier proposée en chapitre 2.1, résumée en figure 2.13, positionne le problème dans une des classes d'optimisation les plus difficiles : la programmation non-linéaire mixte non-convexe. Parmi les différentes solutions pour contrer cette complexité qui ont été examinées dans notre revue de la littérature du chapitre 2.2, nous proposons dans ce chapitre d'adapter le principe de discrétisation des domaines des variables continues du problème, à savoir les centres des faisceaux. On revient ainsi dans ce chapitre sur l'intérêt d'une telle discrétisation et analysons l'approximation commise

par rapport au problème originel. Une heuristique de type gloutonne multi-start randomisée est ensuite présentée pour résoudre le problème combinatoire résultant. Cette dernière incorpore notamment une procédure d'allocation de réflecteurs aux faisceaux par coloration de graphe.

3.1.1 Intérêt et mise en œuvre de la discrétisation du domaine des centres des faisceaux

L'intérêt de la discrétisation des variables continues d'un programme non-linéaire présentant des contraintes de séparation et de proximité en norme euclidienne a déjà été partiellement discuté en 2.2.3.4. Essentiellement, le caractère fini des possibilités pour les valeurs des variables anciennement continues permet d'avoir une approche de calcul exhaustif de toutes les distances euclidiennes pouvant apparaître dans ces contraintes. Ainsi, ces calculs non-linéaires et parfois non-convexes sont externalisés de l'optimisation, car calculés en amont avant que celle-ci ne démarre. Ainsi, avec ces méthodes, la non-linéarité est absorbée par du pré-calcul. Nous revenons dans cette section sur ces avantages en les illustrant concrètement dans le cas de l'optimisation de beam layout irrégulier.

3.1.1.1 Définition d'un ensemble de centres admissibles discret et fini

Considérons un ensemble \mathcal{S} de stations utilisateurs réparties à la surface de la Terre, identifiées par leurs coordonnées $\mathcal{S}_{\text{coord},s} \in \Theta_x \times \Theta_y$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. On considère également un certain ensemble fini \mathcal{W} de diamètres possibles pour les faisceaux. Soit $W_{\text{max}} \in \mathbb{R}^+$ le plus grand de ces diamètres. On suppose que le nombre minimum de stations à couvrir par faisceau actif est $N_{\text{min}} > 1$. Ainsi, il faut exclure toute position de centre pour laquelle il n'existe aucun diamètre permettant de couvrir depuis cette position au moins N_{min} stations utilisateurs. Cela définit un domaine admissible continu $\mathcal{A}_{\text{min},\text{stations}}$ pour les centres des faisceaux, illustré en figure 3.1 à la fois pour $N_{\text{min}} = 1$ et pour $N_{\text{min}} = 2$, dans le cas d'un nombre de stations réparties sur une partie de l'Europe valant $N_S = 1290$ et pour $W_{\text{max}} = 0,5^\circ$. De façon plus formelle, on a donc

$$\mathcal{A}_{\text{min},\text{stations}} = \left\{ X \in \Theta_x \times \Theta_y \mid \text{card} \left(\left\{ s \in \mathcal{S} \mid \|X - \mathcal{S}_{\text{coord},s}\| \leq \frac{1}{2} W_{\text{max}} \right\} \right) \geq N_{\text{min}} \right\} \quad (3.1)$$

En pratique, notre approche a été d'échantillonner cet ensemble continu avec une finesse ajustable en entrée. Plus précisément, un maillage régulier de points à l'intérieur du domaine admissible continu est produit avec une densité surfacique de points paramétrée selon la stratégie décrite dans le paragraphe 3.1.1.2 ci-dessous. Ceci est représenté en figure 3.2 où trois discrétisations de finesse croissante sont proposées pour le domaine continu correspondant à une contrainte de couverture d'au moins $N_{\text{min}} = 1$ des mêmes N_S points en Europe qu'en figure 3.1.

3.1.1.2 Paramétrage de la finesse d'échantillonnage par confrontation au problème de cercle minimum

Cet échantillonnage des positions possibles pour les centres des faisceaux définit finalement un nouveau problème d'optimisation qui est plus contraint que le problème originel. Toute solution du problème discret correspond trivialement à une solution du problème continu de même

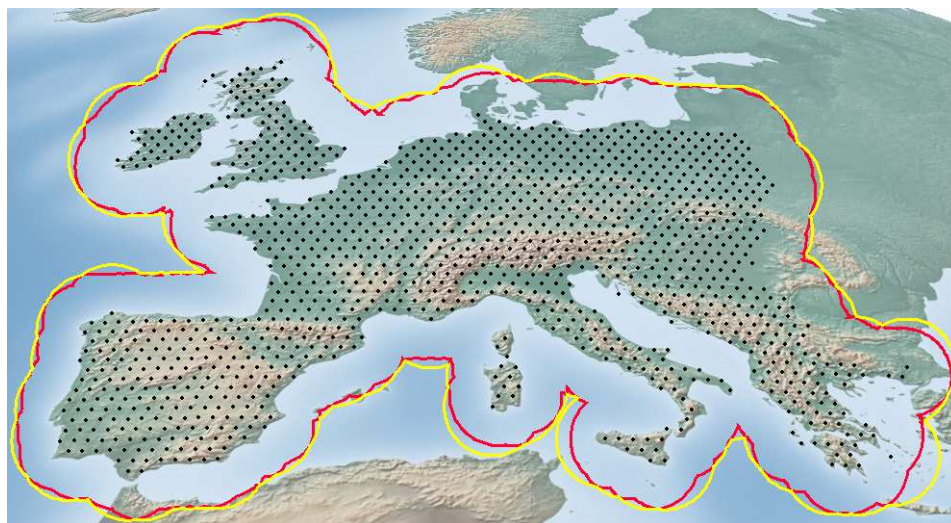
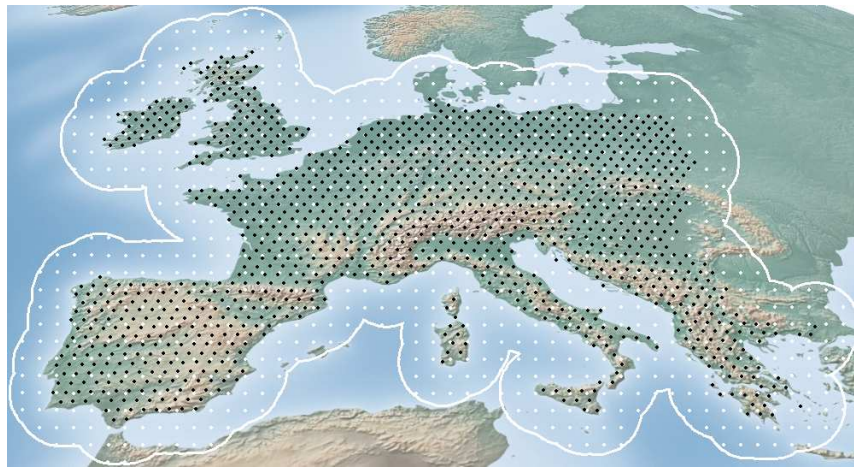
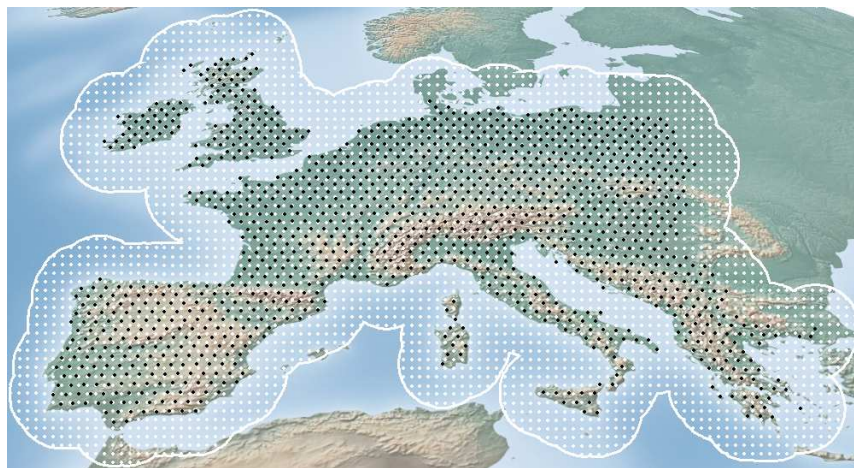


FIGURE 3.1 – Ensemble continu $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$ des points permettant de couvrir géométriquement au moins $N_{\min} = 1$ (jaune) ou $N_{\min} = 2$ (rouge) des N_S stations utilisateurs représentées par des points noirs

coût. Par contre, toute solution du problème originel continu n'est pas nécessairement une solution accessible pour le problème discret si les positions d'un ou plusieurs centres ne font pas partie de l'ensemble fini des centres possibles. En tant que relaxation du problème discret, le problème originel aura donc un optimum au moins aussi bon et même potentiellement strictement meilleur que l'optimum du problème discret. Il s'agit donc d'une limite de cette approche par discrétisation. A noter que cette détérioration de l'optimum est d'autant plus réduite que le maillage du domaine continu est dense. Cependant, on ne peut pas se permettre d'augmenter ce nombre de points jusqu'à des valeurs trop élevées, au risque de subir des lenteurs dans les calculs en amont de l'optimisation, mais aussi et surtout, car la combinatoire résultante dans le problème discret croîtrait exponentiellement. Nous proposons ici une approche qui permet d'augmenter ce nombre de centres possibles juste assez pour atteindre la précision souhaitée, définie paramétriquement, du modèle discret par rapport au modèle continu. Pour cela, l'idée a été d'appuyer le raisonnement sur un problème simple de couverture géométrique : le problème de cercle minimum. Pour un certain ensemble de points du plan, ce problème consiste à trouver le disque de plus petit rayon tel que tous ces points sont contenus dans ce disque. Plusieurs algorithmes, dont des algorithmes de complexité linéaire, ont été conçus pour le résoudre : [Chrystal 1885], [Shamos 1975], [Megiddo 1983], [Welzl 1991]. Ici, l'objectif est de comparer sur ce problème référence l'optimum de la formulation continue avec l'optimum dégradé d'une approche discrète, en fonction de la finesse d'échantillonnage. Pour définir cet échantillonnage, on fait en sorte que les centres possibles discrets forment une grille régulière de finesse caractérisée par la distance $\delta c \in \mathbb{R}^+$ entre deux centres consécutifs. Dans le cas du problème de beam layout et pour une contrainte de proximité d'un faisceau à une station par exemple, la perte de liberté de mouvement autour d'un centre possible due à la discrétisation, constante et liée à δc , est d'autant plus ressentie que le rayon du faisceau est petit : le rapport des distances de l'erreur de



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.2 – Discrétisation de l'ensemble continu de centres admissibles pour $N_{\min} = 1$ (stations en noir, centres possibles après échantillonnage en blanc) avec (a) 875 centres possibles (b) 3554 centres possibles (c) 14226 centres possibles

mouvement sur le seuil de proximité y est le plus défavorable. On va ainsi s'intéresser au plus petit diamètre de l'ensemble \mathcal{W} . Ensuite, nous proposons d'identifier la configuration "pire cas" pour laquelle l'optimum discret est le plus mauvais possible relativement à l'optimum continu. L'idée est de dimensionner la finesse de discrétisation, c'est-à-dire δc , de manière à avoir un pire cas théorique pour le modèle discret qui soit de qualité suffisante, ce niveau de qualité minimal étant paramétrable. Cette configuration pire cas est représentée en figure 3.3 où les stations à couvrir sont matérialisées par des points rouges.

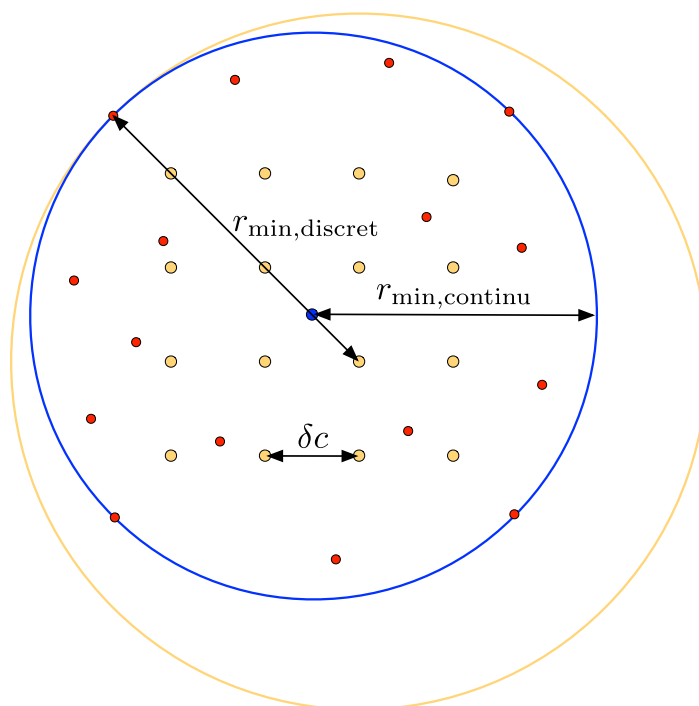


FIGURE 3.3 – Configuration pire cas de l'approche discrète par rapport à l'approche continue pour le problème de cercle couvrant minimum : stations à couvrir en rouge, centres discrets autorisés en orange, centre optimal continu en bleu

Le maillage régulier, correspondant aux centres possibles discrets, apparaît sous forme d'une série de points orange. Le point bleu correspond au centre du disque optimal de rayon $r_{\min, \text{continu}} \in \mathbb{R}^+$ du modèle continu : dans cette configuration pire cas, il est le barycentre des quatre centres discrets les plus proches. Le plus petit cercle centré sur une des positions discrètes permettant de couvrir toutes les stations est également représenté en orange, et son rayon est noté $r_{\min, \text{discret}} \in \mathbb{R}^+$. Cette situation constitue un pire cas car, d'une part la distance du centre continu optimal à son plus proche centre discret autorisé correspond à la plus grande distance possible entre un point quelconque du plan et son plus proche point discret (à savoir $\frac{\sqrt{2}}{2}\delta c$), et d'autre part car les stations sont disposées de telle sorte que la plus grande distance du centre discret optimal à une station à couvrir est exactement la somme de $\frac{\sqrt{2}}{2}\delta c$ et du rayon optimal continu $r_{\min, \text{continu}} \in \mathbb{R}^+$. Ensuite, on définit un coefficient d'approximation $0 < \alpha_{\text{approx}} \ll 1$, et

on cherche δc permettant de vérifier :

$$r_{\min,\text{discret}} \leq (1 + \alpha_{\text{approx}})r_{\min,\text{continu}} \quad (3.2)$$

Pour cela, on remarque que

$$r_{\min,\text{discret}} = r_{\min,\text{continu}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta c \quad (3.3)$$

Ce qui conduit à la condition

$$\delta c \leq \sqrt{2}r_{\min,\text{continu}}\alpha_{\text{approx}} \quad (3.4)$$

Et pour ne pas définir plus de centres que nécessaire avec une trop forte densité de points, on pose directement

$$\delta c = \sqrt{2}r_{\min,\text{continu}}\alpha_{\text{approx}} \quad (3.5)$$

On veut que cette qualité d'approximation par le modèle discret reste vraie pour toutes les distances de proximité testées dans notre problème, et donc en particulier on veut qu'elle soit vérifiée pour un disque optimal continu (représentant un faisceau) de diamètre exactement égal au plus petit diamètre de \mathcal{W} . Finalement, la finesse de maillage que nous utiliserons pour définir notre problème de beam layout discret sera la suivante :

$$\delta c = \sqrt{2}\alpha_{\text{approx}} \min_{\omega \in \mathcal{W}} W_{\omega} \quad (3.6)$$

Pour revenir sur revenir sur les exemples de maillages du domaine continu de centres admissibles de la figure 3.2, on peut signaler que les trois figures ont été obtenues pour $\alpha_{\text{approx}} = 0,25$, $\alpha_{\text{approx}} = 0,10$, et $\alpha_{\text{approx}} = 0,05$, dans cet ordre-ci et avec une hypothèse de $\min_{\omega \in \mathcal{W}} W_{\omega} = 0,3^\circ$.

3.1.1.3 Intérêt du nombre fini de positions possibles pour un faisceau vis-à-vis des contraintes en norme euclidienne

Notons $\mathcal{C} \subset \Theta_x \times \Theta_y$ la discrétisation de cardinal fini de l'ensemble $\mathcal{A}_{\min,\text{stations}}$. On note $c = (C_x, C_y)^T$ pour tout $c \in \mathcal{C}$. Toute la force de l'approche discrétisée réside dans la possibilité de prédéterminer pour chaque variable anciennement continue son comportement par rapport aux contraintes en norme euclidienne. Typiquement, soit $c \in \mathcal{C}$ un centre et $\omega \in \mathcal{W}$ un diamètre de faisceau, on est entièrement capable de calculer à l'avance l'ensemble $\mathcal{S}_{c,\omega}$ des stations de \mathcal{S} qui seraient couvertes géométriquement par un faisceau de diamètre ω placé en c :

$$\mathcal{S}_{c,\omega} = \left\{ s \in \mathcal{S} \mid \|c - \mathcal{S}_{\text{coord},s}\| \leq \frac{1}{2}W_{\omega} \right\} \quad (3.7)$$

Dans le modèle continu originel, détecter si une certaine station est couverte géométriquement par au moins un faisceau passe par l'analyse intégrée dans l'optimisation des distances euclidiennes entre cette station et les différents centres de faisceaux (variables continues), pour identifier un faisceau proche de la dite station d'une distance inférieure à son rayon. Avec une telle discrétisation des positions de ces centres, la détection au cours de l'optimisation de la couverture géométrique d'une station donnée se résume à un test d'utilisation par au moins un faisceau actif d'un des couples $(c, \omega) \in \mathcal{C} \times \mathcal{W}$ tels que $s \in \mathcal{S}_{c,\omega}$. L'information de satisfaction ou non des

contraintes de proximité est donc obtenue de manière bien plus directe dans le modèle discrétisé.

Il en est de même pour les contraintes de séparation. En effet, pour un couple de diamètres $(\omega, \omega') \in \mathcal{W}^2$ donné, il est possible de déterminer tous les couples de centres possibles $\mathcal{C}_{\varepsilon, \omega, \omega'}$ qui, si utilisés par deux faisceaux de tailles ω et ω' , permettraient de respecter la distance de non-chevauchement dictée par ε :

$$\mathcal{C}_{\varepsilon, \omega, \omega'} = \left\{ (c, c') \in \mathcal{C}^2 \mid \|c - c'\| \geq \frac{1}{2}\varepsilon(W_\omega + W_{\omega'}) \right\} \quad (3.8)$$

En substituant ε par κ , on obtient l'ensemble des couples de centres qui, quand sélectionnés par deux faisceaux utilisant ces deux positions de centres ainsi que les diamètres ω et ω' , sont assez éloignés pour être compatibles avec l'utilisation du même réflecteur satellite par les deux faisceaux correspondants (contrainte d'antenne SFPB) :

$$\mathcal{C}_{\kappa, \omega, \omega'} = \left\{ (c, c') \in \mathcal{C}^2 \mid \|c - c'\| \geq \frac{1}{2}\kappa(W_\omega + W_{\omega'}) \right\} \quad (3.9)$$

Finalement, ces ensembles définissent des incompatibilités de sélection simultanée de certains couples de centres discrets. Supposons maintenant que pour tout centre discret nous connaissions le diamètre à utiliser pour un faisceau actif qui y serait positionné, alors ces incompatibilités d'utilisation de centres appellent naturellement la notion de graphe, et plus précisément de graphe de disque. Un graphe de disque est un graphe d'intersection d'un ensemble de disques du plan euclidien. Autrement dit, les nœuds d'un graphe de disque sont associés bijectivement aux disques d'un certain ensemble de disques, et une arête est positionnée entre tout couple de nœuds dont les disques correspondants ont une intersection non-vidée. La littérature sur ce type de graphes est riche, et revisite notamment les problèmes classiques de la théorie des graphes (coloration, recherche de stables, de cliques, d'ensembles dominants) dans ce contexte particulier : [Fishkin 2003], [Clark 1990], [Marathe 1995], [Breu 1998], [Wu 2006], [Gräf 1998]. Conformément à l'hypothèse faite dans ce paragraphe, pour tout centre $c \in \mathcal{S}$ notons $W_c \in \{W_1, \dots, W_{N_W}\}$ le diamètre qu'un faisceau placé en c devrait utiliser. Pour $\Delta \in \mathbb{R}^+$, on peut alors définir le graphe $G_\Delta = (V, E_\Delta)$ où V est un ensemble de nœuds en bijection avec l'ensemble des centres possibles \mathcal{C} (chaque $v \in V$ correspond à un centre $c_v \in \mathcal{C}$) et où E_Δ est défini comme suit

$$E_\Delta = \left\{ (v, v') \in V^2 \mid \|c_v - c_{v'}\| \leq \frac{\Delta}{2}W_{c_v} + \frac{\Delta}{2}W_{c_{v'}} \right\} \quad (3.10)$$

Ainsi, G_Δ est bien le graphe d'intersection des disques

$$D_c = \left\{ x \in \Theta_x \times \Theta_y \mid \|x - c\| \leq \frac{\Delta}{2}W_c \right\} \quad (3.11)$$

définis pour $c \in \mathcal{C}$. On remarque alors que choisir N_B centres de faisceaux dans \mathcal{C} en respectant la contrainte de non-chevauchement équivaut à la sélection d'un stable de G_ε de cardinal N_B . De même, choisir N_B centres et définir le réflecteur transmettant chaque faisceau placé en chacun de ces centres de manière à respecter les distances de séparation de la contrainte antenne se ramène de façon équivalente à la sélection d'un sous-graphe N_R -colorable de G_κ , chaque couleur

d'une telle coloration représentant l'allocation à un des N_R réflecteurs disponibles dans la charge utile satellite.

Ces propriétés d'expression simplifiée du problème en cas de connaissance a priori des diamètres à utiliser par centre discret a entièrement motivé l'heuristique par décomposition séquentielle décrite ci-dessous en paragraphe 3.1.2.

3.1.2 Premier algorithme de placement de faisceaux : heuristique randomisée de construction gloutonne avec coloration de graphe

Comme discuté dans le paragraphe précédent, une fois que l'ensemble continu des centres admissibles pour les faisceaux a été discrétisé, fixer les diamètres à utiliser en chaque centre potentiel permet d'avoir une formulation simplifiée au niveau notamment des contraintes en norme euclidienne pour le reste du problème de beam layout irrégulier, à savoir le choix de centres pour les faisceaux actifs, le choix de leurs réflecteurs et l'allocation des stations utilisateurs aux faisceaux placés. Dans une logique d'exploitation de cette propriété, nous avons défini notre premier algorithme de beam layout irrégulier selon la procédure décrite dans la figure 3.4. Dans le flot d'étapes proposé, la discrétisation du domaine continu des centres ainsi que la définition des graphes G_ε et G_κ une fois que les diamètres ont été fixés au niveau des centres discrets sont des points que nous avons déjà détaillés en paragraphes 3.1.1 et 3.1.1.3. L'étape 2 de définition du diamètre à utiliser en chaque centre discret selon une certaine stratégie est développée en paragraphe 3.1.2.1. L'algorithme glouton multi-start randomisé correspondant à l'étape 4 est quant à lui présenté dans le paragraphe 3.1.2.2.

3.1.2.1 Détermination a priori du diamètre à utiliser en chaque centre discret

Les différentes tailles de faisceau sont des variables permettant notamment de s'adapter aux disparités de demande de trafic au sol. Par exemple, dans l'espoir de fournir l'intégralité du service requis par les stations utilisateurs situées dans les zones les plus denses, il va être préférable de recourir aux faisceaux les plus étroits qui sont capables d'endosser un trafic requis cumulé plus élevé que les faisceaux larges (pour rappel $\Gamma_\omega > \Gamma_{\omega'}$ quand $W_\omega < W_{\omega'}$). Par ailleurs, cette variabilité des tailles permet d'absorber une partie de la complexité provenant de la limite sur le nombre de faisceaux : utiliser un faisceau large sur une zone où la demande perçue cumulée n'excède pas la charge limite de ce dernier permet de couvrir efficacement toute une région étendue avec un seul faisceau. Nous proposons ainsi d'utiliser les faisceaux les plus étroits dès que cela est nécessaire, et les faisceaux plus larges dès que possible, et ce sur un critère de densité de demande au voisinage de chaque centre. Concrètement, cela revient à analyser pour chaque centre $c \in \mathcal{C}$ et chaque diamètre $\omega \in \mathcal{W}$ la demande perçue par les faisceaux placés en ce centre avec ce diamètre (en supposant que toutes les stations accessibles géométriquement sont associées aux faisceaux potentiels testés), notée $T_{c,\omega} \in \mathbb{R}^+$:

$$T_{c,\omega} = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \text{ tels que} \\ \|c - S_{\text{coord},s}\| \leq \frac{1}{2}W_\omega}} T_s \quad (3.12)$$

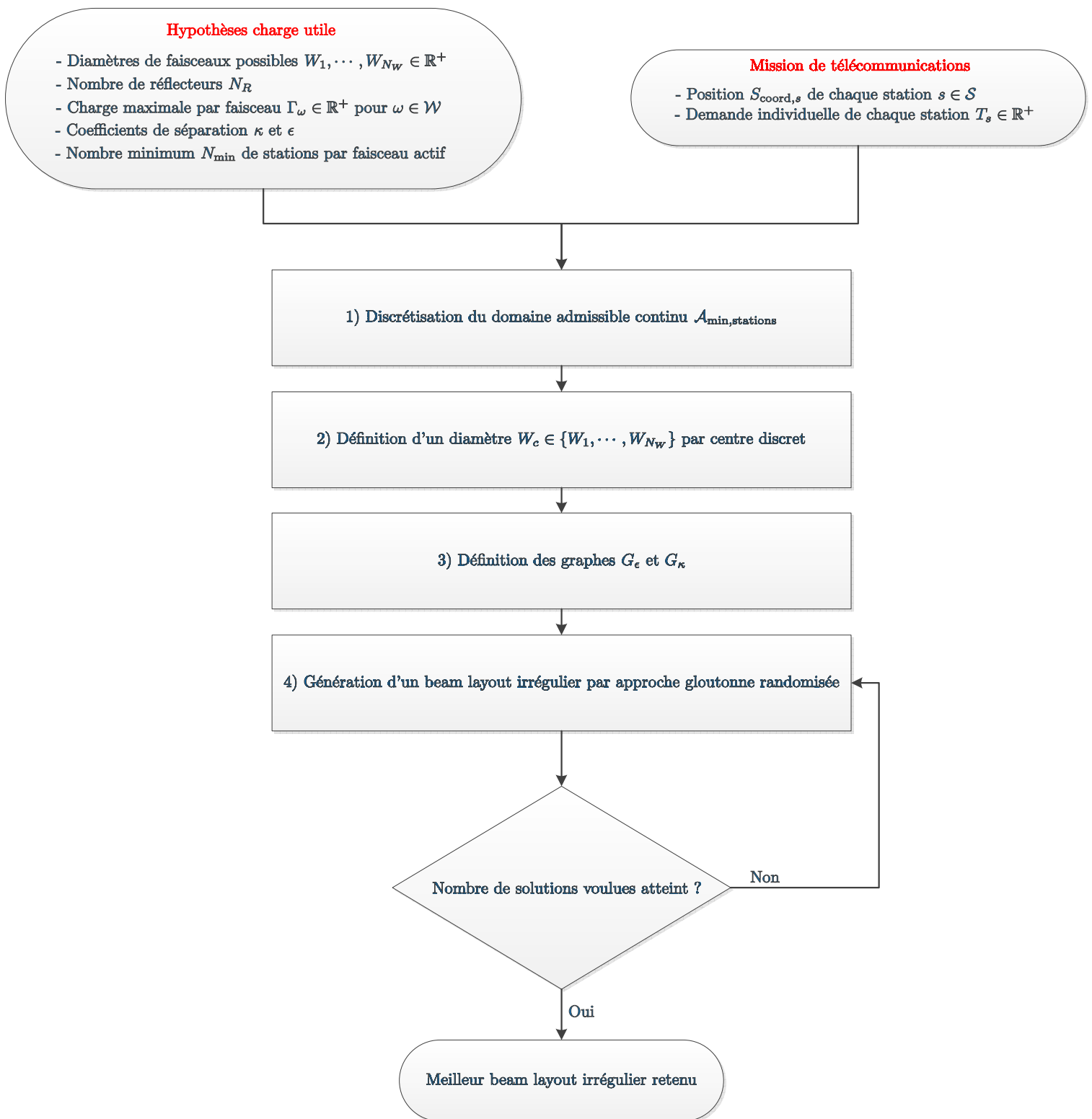


FIGURE 3.4 – Procédure d’optimisation de beam layout irrégulier par discrétisation des centres, pré-détermination des diamètres, et approche gloutonne multi-start

Tous les diamètres sont ensuite testés dans l'ordre croissant : quitte à réordonner \mathcal{W} , on suppose que $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_{N_W}$. Pour un centre c , si la somme des demandes des stations dans le faisceau de plus petit diamètre dépasse la charge maximale d'un tel faisceau, c'est-à-dire si

$$T_{c,1} > \Gamma_1 \tag{3.13}$$

alors on pose $W_c = W_1$ car ce diamètre est celui qui fournirait le service le moins insuffisant aux stations puisque $\Gamma_1 = \max_{\omega \in \mathcal{W}} \Gamma_\omega$. Si maintenant

$$T_{c,1} \leq \Gamma_1 \text{ et } T_{c,2} > \Gamma_2 \tag{3.14}$$

alors la deuxième taille de faisceau est incapable de gérer la demande cumulée et on continue de poser $W_c = W_1$, configuration pour laquelle la limite de charge n'est pas excédée. Par contre, si

$$T_{c,1} \leq \Gamma_1 \text{ et } T_{c,2} \leq \Gamma_2 \tag{3.15}$$

on va préférer sélectionner le diamètre W_2 en c avec lequel le faisceau ne voit pas sa demande dépasser le seuil de charge maximale. En fait, W_2 ne sera sélectionné que si W_3 n'est pas une option acceptable, sinon ce dernier sera choisi pour couvrir plus de surface et de stations de la zone de service avec un seul faisceau. Il faut donc se poser récursivement N_W fois les mêmes questions que celles analysées ci-dessus pour les deux premiers diamètres, ce qui est résumé dans l'algorithme 1 de détermination du diamètre à utiliser en chaque centre discret, de complexité en $O(N_W N_C)$:

Algorithme 1 : Algorithme de pré-définition du diamètre de \mathcal{W} à utiliser en chaque centre discret de \mathcal{C} en cas de sélection par un faisceau actif

Données : L'ensemble de cardinal fini des centres possibles $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, les diamètres possibles $W_\omega \in \mathbb{R}^+$ pour $\omega \in \mathcal{W}$ (rangés par ordre croissant), la charge maximale Γ_ω pour $\omega \in \mathcal{W}$, la demande cumulée $T_{c,\omega}$ par couple $(c, \omega) \in \mathcal{C} \times \mathcal{W}$

Résultat : Pour tout $c \in \mathcal{C}$, le diamètre à utiliser $W_c \in \mathbb{R}^+$

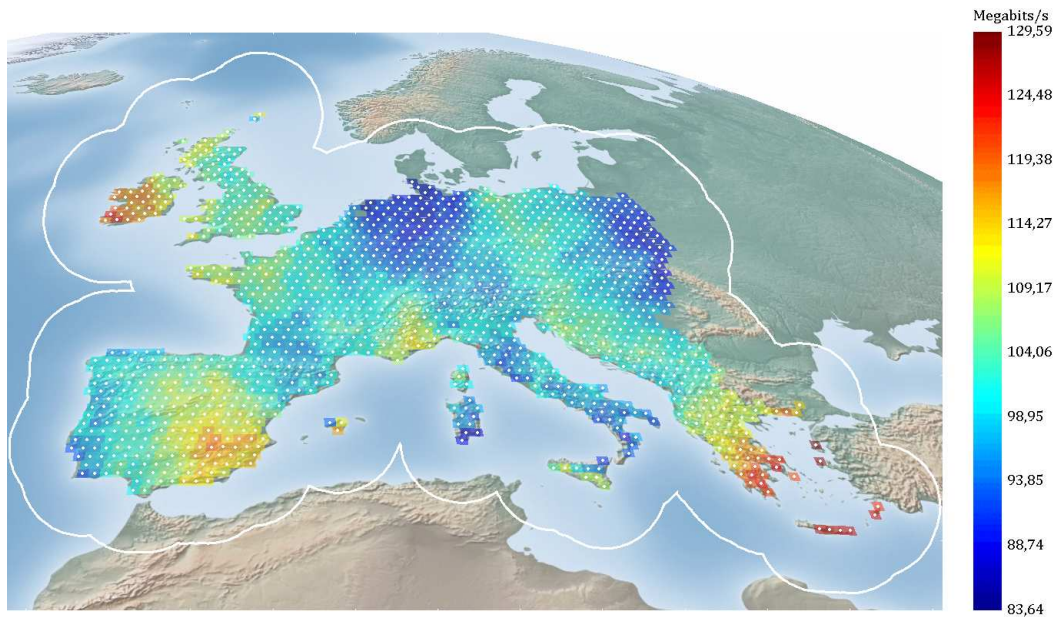
```

1 début
2   pour  $c \in \mathcal{C}$  faire
3      $\omega \leftarrow 1$ 
4      $W_c \leftarrow \text{définitionDiamètre}(c, \omega)$ 
5 Fonction  $\text{définitionDiamètre}(c, \omega)$  :
6   si  $T_{c,\omega} > \Gamma_\omega$  alors
7     si  $\omega = 1$  alors
8       retourner  $W_\omega$ 
9     sinon
10      retourner  $W_{\omega-1}$ 
11  sinon
12    si  $\omega = N_W$  alors
13      retourner  $W_\omega$ 
14    sinon
15       $\omega \leftarrow \omega + 1$ 
16      retourner  $\text{définitionDiamètre}(c, \omega)$ 

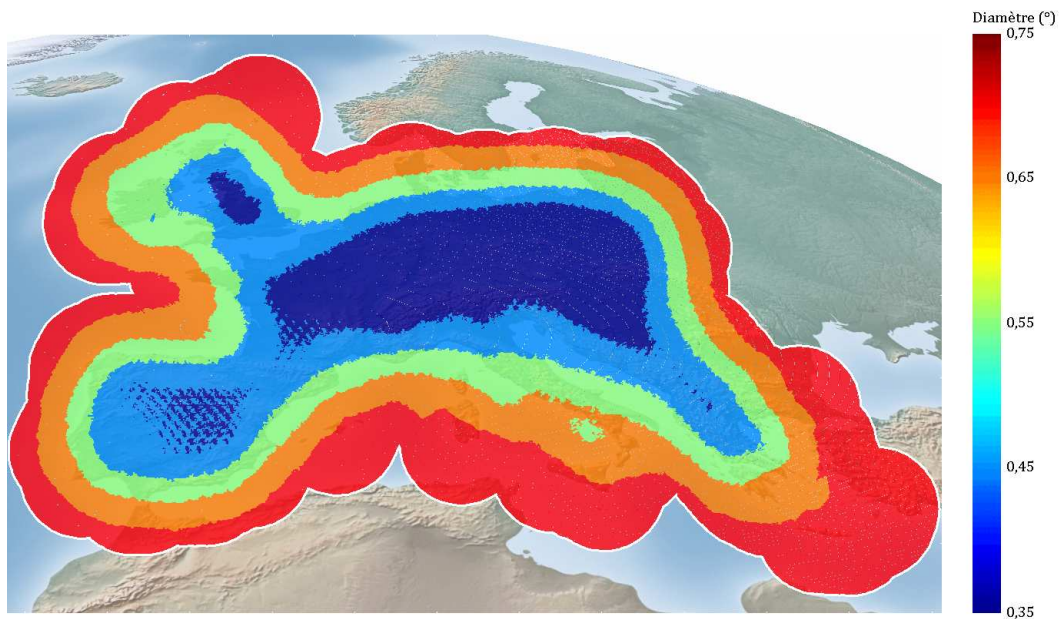
```

Un exemple illustrant l'application de cet algorithme de détermination des diamètres à utiliser est fourni en figure 3.5. On y observe $N_S = 1485$ stations utilisateurs dont les demandes individuelles T_s en Mégabits par seconde, fournies en figure 3.5(a), varient entre 83Mbps et 130Mbps. Le domaine (continu) admissible des centres de faisceaux est le résultat d'un nombre minimum de stations à couvrir par faisceau actif fixé à $N_{\min} = 1$. Cinq diamètres sont autorisés : $\{0,35^\circ, 0,45^\circ, 0,55^\circ, 0,65^\circ, 0,75^\circ\}$. Un échantillonnage \mathcal{C} volontairement très fin de $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$ est proposé dans cet exemple : 370111 centres possibles. Pour chacune de ces positions potentielles, le diamètre qu'un faisceau actif devrait y utiliser est déterminé selon l'algorithme 1, dont le résultat est représenté en figure 3.5(b).

On remarque qu'à proximité de la frontière de $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, le trafic capté par les faisceaux les plus larges est suffisamment faible pour que l'algorithme 1 sélectionne cette taille maximale de faisceau pour les centres potentiels en bord de domaine. Ainsi, il y a une compatibilité naturelle avec la contrainte de couvrir au moins N_{\min} stations qui, en bord de couverture, ne peut être satisfaite qu'en recourant à des faisceaux larges pour atteindre géométriquement les stations utilisateurs. Par ailleurs, il convient de noter que cette pré-détermination des diamètres rend nécessairement la résolution du problème de beam layout heuristique car une partie de l'ensemble admissible devient inaccessible. Notamment, on se prive de certaines situations où la liberté sur



(a)



(b)

FIGURE 3.5 – (a) Demandes individuelles des stations utilisateurs, et ensemble admissible continu des centres en trait plein blanc (b) Pré-détermination du diamètre à utiliser en chaque position discrète de faisceau selon l’algorithme 1

les diamètres pourrait résoudre certaines configurations difficiles par rapport aux contraintes de séparation. Cette faiblesse de l’heuristique de choix de diamètres proposée s’explique par le fait qu’elle a été bâtie exclusivement par exploitation de la contrainte de charge limite par faisceau en fonction du diamètre, or, les diamètres interviennent aussi très directement dans les contraintes

de non-chevauchement et d'antennes SFPB. Par exemple, choisir dès que possible la taille de faisceau la plus large comme cela est proposé dans l'algorithme 1 engendre les contraintes de séparation les plus marquées (par proportionnalité au diamètre du faisceau dans Δ_θ et $\tilde{\Delta}_\theta$) : cela pourra se traduire par l'impossibilité d'utiliser certains centres là où d'autres choix de diamètres l'auraient permis, l'impact sur l'objectif mathématique pouvant être évidemment négatif. Par contre, on s'attend à une complexité réduite par rapport aux contraintes de charge grâce à de tels choix de diamètres, et surtout, on profite de la possibilité d'avoir une approche par graphes en recourant à G_ε et G_κ .

3.1.2.2 Heuristique gloutonne multi-start randomisée avec coloration de graphe

Algorithmes de construction : choix d'une approche gloutonne pour le placement de faisceaux

Dans la procédure de résolution en approche discrète de la figure 3.4, l'étape 4 est en charge de la définition :

- Du nombre de faisceaux actifs
- Du centre de ces faisceaux
- De l'allocation des stations utilisateurs à ces faisceaux
- De l'allocation des faisceaux aux réflecteurs disponibles dans la charge utile

Il s'agit ainsi du problème de beam layout irrégulier de la figure 2.13 pour lequel l'ensemble des centres a été échantillonné, et pour lequel les diamètres de faisceaux ne sont plus des variables mais des conséquences directes des choix de centres des faisceaux actifs. La première remarque qu'il convient de faire à ce stade est qu'il est ici question de produire intégralement des solutions de beam layout irrégulier. Autrement dit, en partant des données de l'instance à résoudre et d'une solution vide (aucune variable instanciée), on cherche une solution complète au sens des quatre catégories de variables d'optimisation listées ci-dessus. On souhaite par ailleurs que cette solution soit satisfaisante du point de vue du critère mathématique, et qu'elle respecte l'intégralité des contraintes du problème. Naturellement, ce besoin de génération de solutions ex nihilo a motivé une revue de la littérature sur les méthodes dites de "construction" pour l'optimisation combinatoire. Cette classe comprend les algorithmes exacts d'exploration exhaustive de l'espace d'état qui construisent des solutions "de zéro" par arbre de recherche : on peut citer par exemple la programmation par contraintes ou la programmation linéaire en nombre entiers. Cependant, dans le cas particulier de l'optimisation de beam layout irrégulier, la discrétisation des centres possibles combinée au nombre intrinsèquement élevé de stations utilisateurs conduirait à des modèles de très grande taille pour gérer les différents types d'allocations : faisceaux aux centres possibles, stations aux faisceaux, faisceaux aux réflecteurs. Nous avons ainsi décidé de ne pas investiguer prioritairement ces méthodes, au profit d'approches de construction heuristiques qui permettent d'espérer plus d'efficacité de résolution. Au cœur de celles-ci, il est très fréquent de retrouver des adaptations du concept

d'algorithme glouton, lequel est en effet nativement compatible avec ce besoin de construire rapidement (en temps polynomial par exemple) des solutions de bonne qualité. Un algorithme glouton construit variable après variable, ou sous-ensemble de variables après sous-ensemble de variables, une solution complète qui respecte les contraintes du problème. Pour que la solution ainsi construite soit intéressante vis-à-vis du critère mathématique, l'algorithme repose sur une série de choix localement optimaux : à chaque étape, les nouvelles variables instanciées voient leurs valeurs choisies de manière à impacter le plus positivement possible la fonction coût, et ce sans jamais remettre en question les choix des étapes précédentes. On montre facilement que cette approche ne peut pas systématiquement fournir des optima globaux. Par contre, elle permet d'accéder rapidement à des optima au moins locaux avec une efficacité qui a été constatée à de nombreuses reprises dans la littérature de l'optimisation mathématique, sur un spectre très large d'applications : pour les problèmes de couverture par ensembles dans [Slavík 1996], pour les problèmes de sac à dos dans [Akçay 2007], en biologie pour l'alignement des séquences d'ADN [Zhang 2000] et la reconstruction de structure de protéine [Tuffery 2005], en scheduling par exemple dans [Ruiz 2007] et [Kahraman 2010], en théorie des graphes pour la recherche de couplage parfait dans [Reingold 1981], de sous-graphes denses dans [Charikar 2000] ou encore pour la recherche de stables de poids maximum dans [Sakai 2003]. En particulier, les problèmes de localisation d'entrepôts ont eux aussi été abordés dans différents travaux par l'angle des algorithmes gloutons : [Mahdian 2001],[Jain 2002],[Jain 2003],[Chrobak 2005],[Mahdian 2006]. Nous proposons d'en faire de même sur le problème de placement de faisceaux, en exploitant une version randomisée de l'algorithme glouton qui permet de générer une multitude de solutions au lieu de se contenter de l'unique solution produite par le glouton traditionnel. L'algorithme que nous proposons est très inspiré de l'algorithme GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedures) décrit notamment dans [Feo 1995],[Martí 2003],[Resende 2006], et [Tomazic 2008]. Ce dernier propose une approche itérative d'optimisation : chaque itération produit une nouvelle solution selon un critère glouton revisité de façon à intégrer une notion de choix aléatoire, puis cette solution est améliorée par une procédure de recherche locale. La composante stochastique, à la fois dans les choix gloutons mais aussi potentiellement dans la recherche locale, permet de générer des solutions distinctes d'une itération sur l'autre, en écartant la solution courante des choix déterministes qu'aurait faits un algorithme glouton standard. Naturellement, la meilleure solution parmi toutes les solutions produites est celle qui est conservée. Dans l'adaptation de cette approche au problème de beam layout irrégulier, nous nous sommes contentés de définir une progression gloutonne guidée par des choix aléatoires, sans mettre en place de procédure de recherche locale pour améliorer la solution produite à chaque itération. Ce choix s'explique par la difficulté de définir un voisinage de solutions réalisables pour une certaine solution construite par l'approche gloutonne (discuté en paragraphe 3.1.2.2).

L'algorithme glouton multi-start randomisé d'optimisation de beam layout irrégulier implémenté

L'algorithme glouton multi-start que nous avons implémenté est décrit dans ses grandes lignes dans la figure 3.6. On y observe que l'algorithme cible un certain nombre de solutions de beam layout irrégulier, qu'il construit une à une par approche gloutonne, en partant de solutions vides.

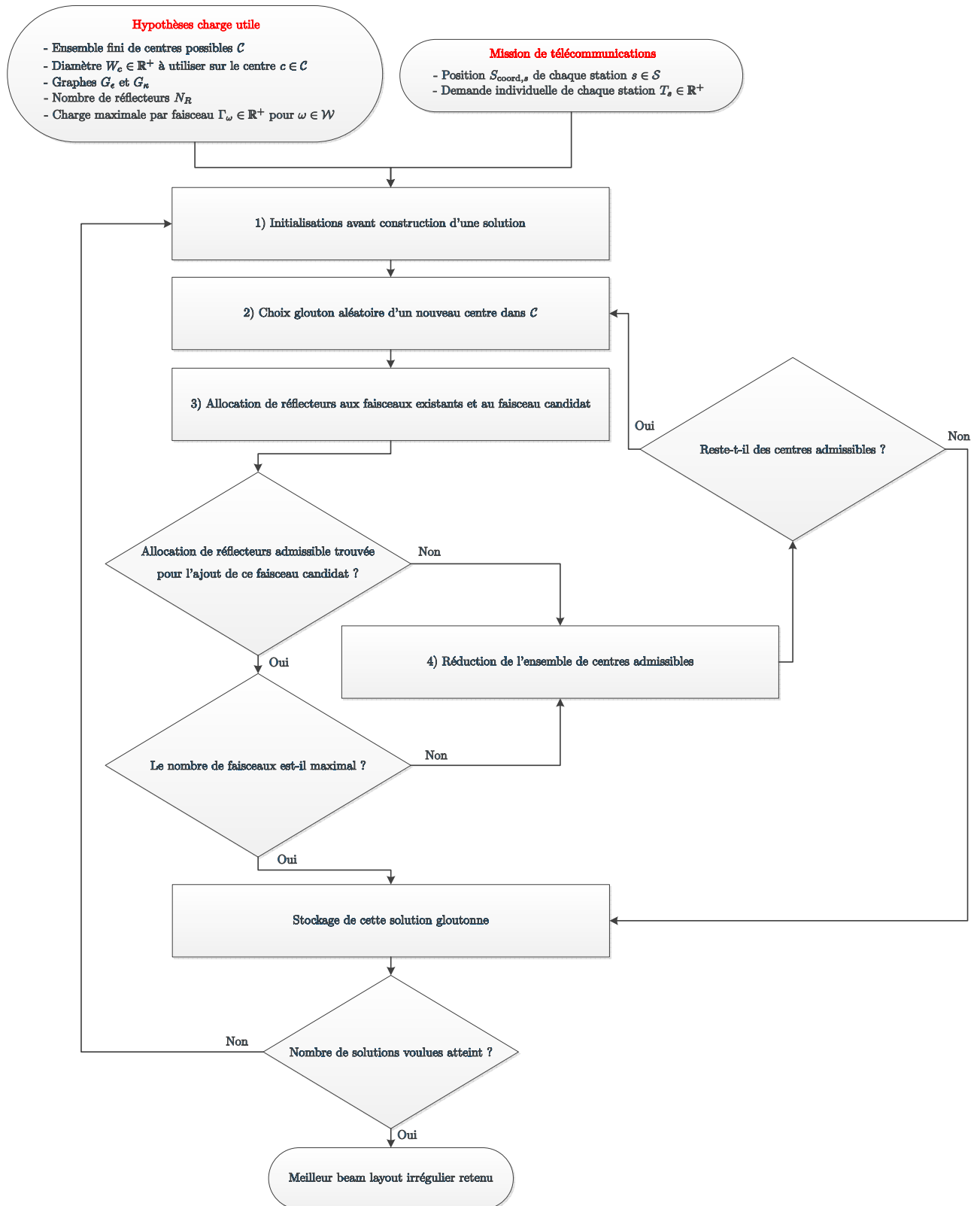


FIGURE 3.6 – Algorithme de beam layout irrégulier par approche gloutonne multi-start randomisée après discrétisation des centres et pré-détermination des diamètres

Les paragraphes qui suivent détaillent les étapes clés de l'algorithme.

1) Initialisations avant construction d'une solution

Cette première étape comprend deux classes d'actions : celles qui sont à exécuter une unique fois et qui restent valides pour toutes les différentes solutions produites, et celles à répéter à chaque fois qu'une nouvelle construction de solution est engagée. Dans la première classe, on peut inclure certaines opérations présentées comme des entrées dans la figure 3.6 : la définition de $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, sa discrétisation en un ensemble fini de positions possibles \mathcal{C} , la pré-détermination des diamètres en ces positions selon l'algorithme 1, et la définition des graphes G_ϵ et G_κ . En ce qui concerne les actions à répéter au début de chaque construction, on retrouve

- L'initialisation de la solution courante à la solution vide,
- L'initialisation de l'ensemble des centres admissibles $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ pour les faisceaux à l'intégralité de \mathcal{C} , cet ensemble admissible se réduisant à mesure que les différents faisceaux de la solution sont placés (étape 4 de l'algorithme 3.6),
- L'initialisation de l'ensemble des stations utilisateurs qui sont encore à couvrir $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ à l'intégralité de \mathcal{S} .

2) Choix glouton aléatoire d'un nouveau centre dans \mathcal{C}

Cette étape est l'étape clé pour la définition des centres des faisceaux des solutions produites par l'algorithme. Dans l'esprit des approches multi-start, on cherche à établir une liste de positions candidates pour le prochain faisceau dans le but d'en sélectionner une aléatoirement. La taille $n_{\text{candidats}}$ de cette liste est un paramètre ajustable de l'algorithme. Chaque position de \mathcal{C}' est ensuite analysée, et en chacune d'elle on fait l'hypothèse que toutes les stations de \mathcal{S}' à la portée du faisceau en cette position lui sont allouées : cela permet de définir l'incrément que représenterait ce faisceau sur la fonction de coût additive que nous optimisons (en le bornant supérieurement par la limite de charge du faisceau), à savoir la somme du trafic couvert par les faisceaux. Les $n_{\text{candidats}}$ positions les plus prometteuses du point de vue de cet incrément forment alors la liste de positions dans laquelle est sélectionnée aléatoirement celle du nouveau faisceau placé. A noter que cette approche stochastique fait d'autant plus de sens qu'à chaque faisceau placé, il est tout à fait possible qu'un nombre significatif d'options distinctes soient localement optimales du point de vue de l'incrément sur la fonction objectif : cela permet de lever une indétermination à laquelle serait confronté le glouton standard. A l'instar des méthodes multi-start de la littérature, c'est précisément ce mécanisme aléatoire de choix qui permet de générer des solutions distinctes d'une construction de solution à la suivante.

3) Allocation de réflecteurs aux faisceaux existants et au faisceau candidat

Une fois la position du faisceau candidat déterminée, la question à laquelle nous essayons d'apporter une réponse est celle de l'allocation de réflecteurs aux faisceaux existants et au faisceau candidat, conformément aux contraintes de séparation des antennes SFPB. Pour cela, on s'intéresse au sous-graphe $G'_\kappa = (V', E'_\kappa)$ de G_κ où $V' \subset V$ est l'ensemble des nœuds

correspondants aux centres des faisceaux placés et au centre du faisceau candidat, et où E'_κ comprend toutes les arêtes de E_κ dont les deux extrémités sont dans V' . Etant donné l'algorithme proposé, le sous-graphe formé par les faisceaux déjà existants est nécessairement N_R -colorable, sinon ils n'auraient pas été sélectionnés. Le premier test que nous proposons de faire consiste ainsi à exploiter la coloration des faisceaux existants trouvée à l'itération précédente pour déterminer s'il existe naturellement au moins une couleur non-utilisée par les voisins du nouveau nœud candidat. Si c'est le cas, la couleur la moins utilisée jusqu'alors parmi ces couleurs admissibles lui est attribuée et ce faisceau candidat est définitivement conservé : S' est alors mis à jour par suppression des stations utilisateurs couvertes par ce nouveau faisceau. Dans ce cas-là, si le nombre de faisceaux n'est pas maximal, l'algorithme se dirige vers l'étape 4 de réduction du domaine des centres admissibles pour définir de nouveaux faisceaux, sinon, la solution gloutonne est stockée et l'algorithme peut soit s'arrêter si assez de solutions ont été produites, soit repartir dans la construction d'une solution inédite. Par contre, s'il n'existe pas naturellement de réflecteur permettant de satisfaire les contraintes de séparation pour le faisceau, nous proposons une heuristique de décoloration-recoloration pour essayer de trouver une coloration admissible intégrant le faisceau candidat. Effectivement, nous n'avons aucune garantie sur la qualité de la coloration à l'itération précédente une fois que le nouveau nœud évalué intègre le graphe à colorer. A noter que la coloration de graphe est un problème NP-complet très connu en théorie des graphes, on peut ainsi citer les références suivantes sur les différentes méthodes mises en œuvre pour le résoudre, de la génération de colonnes aux approches par métaheuristiques, en passant par les formulations SAT et, plus récemment, les algorithmes distribués : [Hertz 1987],[Mehrotra 1996],[Eiben 1998],[Klotz 2002],[Velev 2007],[Jensen 2011],[Barenboim 2013] ou encore [Furini 2017]. Pour rappel, dans l'application considérée ici, les couleurs représentent les réflecteurs disponibles dans la charge utile satellite, et les arêtes les impossibilités pour les faisceaux représentés par les nœuds d'appartenir au même réflecteur sans violer une contrainte des antennes SFPB. L'algorithme de coloration que nous avons décidé d'implémenter repose d'abord sur une décoloration du plus grand sous-graphe connexe de G'_κ contenant le nœud candidat. Ce dernier est ensuite coloré par un algorithme de type "first-fit" ([Gyárfás 1988],[Lovász 1989]) s'appuyant sur une procédure de recuit simulé. Le principe d'un algorithme de coloration first-fit est de suivre une liste ordonnée de nœuds devant être colorés, de les traiter un par un en allouant la première couleur disponible dans un ensemble illimité et ordonné de couleurs. L'ordre dans lequel les nœuds sont colorés est déterminant pour le nombre de couleurs qui va finalement être nécessaire pour colorier légalement le graphe : ceci est illustré dans la figure 3.7 pour l'ordre rouge<bleu<jaune<vert. L'algorithme de recuit simulé ([Hwang 1988],[Eglese 1990]) est uniquement utilisé en tant que recherche locale sur l'ordre des nœuds à explorer quand l'algorithme first-fit ne fournit pas naturellement une coloration légale. A l'issue de ces procédures de recoloration que nous limitons en temps, si la meilleure coloration obtenue requiert strictement plus de N_R couleurs, cela signifie qu'aucune allocation de réflecteurs admissible n'a été trouvée et le faisceau candidat est alors rejeté. Sinon, le faisceau est conservé, S' est mis à jour et l'algorithme poursuit la construction de la solution, ou en démarre une nouvelle, ou encore s'arrête si le nombre de solutions objectif est atteint.

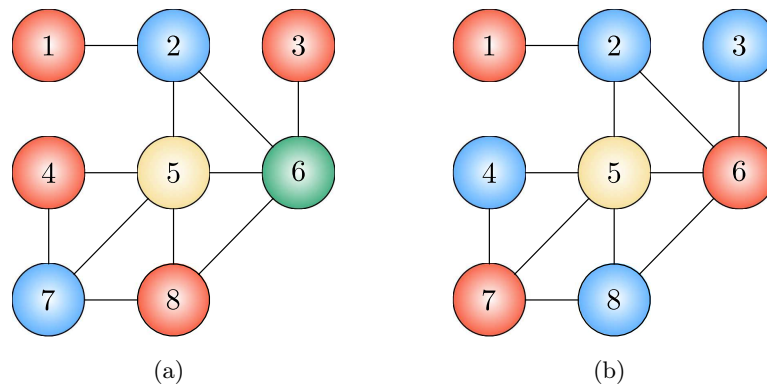


FIGURE 3.7 – (a) First-fit appliqué à l'ordre $[1,2,3,4,5,6,7,8]$, 4 couleurs nécessaires (b) First-fit appliqué à l'ordre $[7,6,2,5,4,8,3,1]$, 3 couleurs nécessaires

4) Réduction de l'ensemble de centres admissibles

Au cours d'une construction de solution, il existe deux chemins menant à cette étape de réduction de l'ensemble des centres admissibles. Quand un faisceau candidat vient d'être rejeté après échec des algorithmes d'allocation de réflecteurs, alors nous choisissons d'interdire pour les itérations futures à la fois la sélection du centre du faisceau qui n'a pas été retenu (il est supprimé de C'), mais nous interdisons aussi dans C' la sélection d'un certain ensemble de centres qui lui sont voisins : l'idée est d'éviter de se retrouver dans des situations probablement toutes autant problématiques pour l'allocation de réflecteurs. Quand maintenant un faisceau a été accepté et que le nombre maximal de faisceaux n'est pas atteint, l'étape essentielle de mise à jour des centres admissibles consiste à supprimer tous les centres de C' qui partagent dans G_ε une arête avec au moins un des centres des faisceaux sélectionnés : c'est de cette manière que la contrainte de non-chevauchement est assurée.

3.1.3 Perspectives d'amélioration de l'heuristique

A ce stade dans le travail de recherche, et avant même les résultats expérimentaux de la partie 3.3.3, on peut noter que l'heuristique gloutonne implémentée possède un certain nombre de voies potentielles d'amélioration. On peut citer par exemple :

- Définir des stratégies plus fines de discrétisations du domaine continu des centres. On pourrait par exemple imaginer un maillage non-régulier à densité de positions possibles adaptative, pour proposer par exemple plus de solutions dans les zones les plus denses où il est difficile de ne pas perdre de trafic par surcharge des faisceaux.
- Les algorithmes de coloration de graphe implémentés à ce stade ne sont pas au niveau de l'état de l'art : on pourrait essayer d'intégrer des techniques de génération de colonne ou des formulations SAT pour réussir plus fréquemment à placer des faisceaux en des

positions prometteuses.

- Etendre l’approche multi-start à une approche GRASP complète avec recherche locale une fois qu’une nouvelle solution a été construite : cela supposerait d’être capable de générer des solutions voisines réalisables, et donc de déplacer des faisceaux sans rompre la propriété de colorabilité par N_R couleurs qui est pourtant particulièrement sensible.

3.2 Linéarisation des évaluations de l_2 par discrétisation des directions du plan

Dans la littérature proposée en chapitre 2.2 sur les programmes mathématiques intégrant des contraintes en norme euclidienne sur des variables continues, seulement deux méthodes proposent des linéarisations des normes euclidiennes permettant de se ramener au cadre efficace d’optimisation qu’est la programmation linéaire mixte. La première repose sur l’approximation de la norme l_2 par des combinaisons optimisées des normes l_1 et l_∞ , lesquelles sont naturellement linéarisables quitte à rajouter des variables et des contraintes au problème. Dans le plan, l’erreur maximale relative commise par de telles approximations par rapport aux distances l_2 réelles est au mieux de 5,6% dans la littérature, ce que nous avons jugé insuffisant par rapport à notre application, tant pour les contraintes de proximité (couverture des stations utilisateurs) que pour les contraintes de séparation (non-chevauchement des faisceaux et contraintes des antennes). L’autre technique que nous avons décrite en chapitre 2.2 est la linéarisation des termes quadratiques sur les variables continues dans les contraintes en norme euclidienne. Cette dernière permet en effet de se ramener à la programmation linéaire mixte, mais uniquement pour les problèmes pour lesquels les contraintes en norme euclidienne sont convexes (contraintes de proximité). Dans ce chapitre, nous proposons ainsi une nouvelle méthode répondant à cette ambition de travailler avec des variables continues pour le placement des faisceaux, tout en profitant de toutes les forces de la programmation linéaire mixte par approximation des contraintes inégalités en norme euclidienne à la fois convexes et non-convexes. La méthode proposée repose sur une discrétisation des directions du plan. L’erreur commise sur l’approximation de la norme euclidienne est maîtrisée en paramètre d’entrée, et peut ainsi converger vers zéro au prix d’une augmentation de la complexité des modèles. Nous discuterons ainsi dans ce chapitre de la précision d’approximation requise dans l’application de placement de faisceaux d’un système de télécommunications multifaisceaux.

3.2.1 Principe de la linéarisation de la norme euclidienne par discrétisation des directions du plan

3.2.1.1 Discrétisation des directions du plan euclidien et résultats géométriques utiles

Nous avons ainsi cherché une procédure de linéarisation des distances euclidiennes qui soit compatible avec une expression du problème de beam layout irrégulier dans le formalisme de la programmation linéaire mixte. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur deux résultats

géométriques. Ils reposent tous deux sur une discrétisation paramétrée des directions du plan euclidien, qui sont autrement caractérisées par le domaine continu $[0, 2\pi[$. En pratique, pour un certain $n_{\text{directions}}$ vérifiant $n_{\text{directions}} \geq 3$, et pour tout $i \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U} = \{1, \dots, n_{\text{directions}}\}$, on notera

$$U_i = \begin{pmatrix} U_{i,x} \\ U_{i,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2(i-1)\pi}{n_{\text{directions}}}\right) \\ \sin\left(\frac{2(i-1)\pi}{n_{\text{directions}}}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.16)$$

la $i^{\text{ème}}$ direction discrétisée. Ces racines $n_{\text{directions}}$ – ièmes de l'unité fournissent une discrétisation régulière des directions du plan euclidien, chaque direction résultante représentant un sous-intervalle exclusif de $[0, 2\pi[$ de taille $\frac{2\pi}{n_{\text{directions}}}$. La figure 3.8 fournit un exemple de ce type de discrétisation. A noter que par définition, on a :

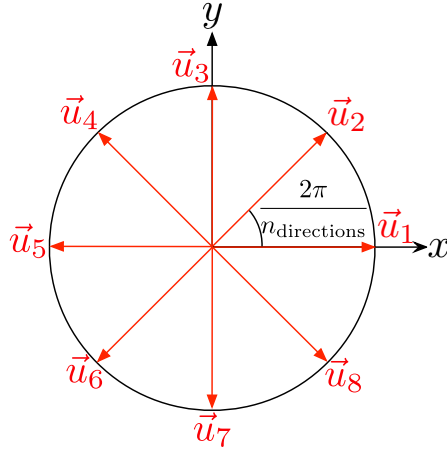


FIGURE 3.8 – Discrétisation des directions du plan euclidien selon les racines $n_{\text{directions}}$ – ièmes de l'unité pour $n_{\text{directions}} = 8$

$$\forall i \in \mathcal{U}, \quad \|U_i\| = 1 \quad (3.17)$$

En pratique, la *Proposition 1* décrite ci-dessous permet de définir une procédure basée sur des opérations linéaires pour déterminer si deux points du plan $u, v \in \mathbb{R}^2$ sont plus proches qu'une certaine distance. Pour cela, on propose de vérifier que les projections du vecteur $u - v$ selon les directions U_i sont toutes inférieures à une distance seuil précise. Le fait que u et v seront correspondront dans notre problème d'optimisation à des variables de décision (position des centres des faisceaux en l'occurrence) est à avoir en mémoire pour comprendre la nature linéaire de la procédure proposée.

Proposition 1 :

 Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et soit $d \in \mathbb{R}^+$,

$$[\forall i \in \mathcal{U}, \langle u - v \mid U_i \rangle \leq d] \implies \|u - v\| \leq \frac{d}{\cos(\theta_{\max})} \quad (3.18)$$

 où $\theta_{\max} = \frac{\pi}{n_{\text{directions}}}$
Démonstration :

Supposons alors que

$$\forall i \in \mathcal{U}, \langle u - v \mid U_i \rangle \leq d \quad (3.19)$$

 Puisque deux directions consécutives sont séparées d'un angle d'exactlyment $\frac{2\pi}{n_{\text{directions}}}$, on a nécessairement

$$|(u - v, U_{i_{\min}})| \leq \frac{\pi}{n_{\text{directions}}} = \theta_{\max} \quad (3.20)$$

 où la direction $i_{\min} \in \mathcal{U}$ est définie comme étant la plus proche direction discrétisée du vecteur $u - v$ en termes de séparation angulaire. Ainsi, puisque $\|U_{i_{\min}}\| = 1$ et puisque $\theta_{\max} \in [0, \frac{\pi}{3}]$:

$$\cos(\theta_{\max}) \|u - v\| \leq \langle u - v, U_{i_{\min}} \rangle \quad (3.21)$$

 et puisque $i_{\min} \in \mathcal{U}$ et vérifie donc l'équation (3.19) :

$$\|u - v\| \leq \frac{d}{\cos(\theta_{\max})} \quad (3.22)$$

□

 En complément naturel de la proposition précédente, la *Proposition 2* définit une procédure linéaire pour vérifier cette fois que deux points $u, v \in \mathbb{R}^2$ sont suffisamment séparés, étant donné une distance requise de séparation $d \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 2 :

 Soient à nouveau $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Alors, nous avons l'implication suivante

$$[\exists i \in \mathcal{U}, \langle u - v \mid U_i \rangle \geq d] \implies \|u - v\| \geq d \quad (3.23)$$

 D'un point de vue pratique, quand nous devons s'assurer que deux points sont suffisamment séparés, cela veut dire qu'il suffit de trouver, parmi les $n_{\text{directions}}$ directions discrétisées, une direction pour laquelle ce produit scalaire est suffisamment grand.

Démonstration :

C'est une conséquence directe de l'inégalité de the Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire

canonique de \mathbb{R}^2 . Soit i la direction telle que $\langle u - v \mid U_i \rangle \geq d$, alors :

$$\|u - v\| = \|u - v\| \cdot \|U_i\| \quad (\text{car } \|U_i\| = 1) \quad (3.24)$$

$$\geq |\langle u - v \mid U_i \rangle| \quad (3.25)$$

$$\geq d \quad (3.26)$$

□

3.2.1.2 Contrôle de l'erreur et alternatives d'approximation

Dans la cas de la *Proposition 1* (la même analyse pourrait être conduite pour la *Proposition 2*), supposons que nous essayions de déterminer si la distance $d_{uv} \in \mathbb{R}^+$ entre deux points $u, v \in \mathbb{R}^2$ est inférieure à $\Delta \in \mathbb{R}^+$. Dans la formulation actuelle de la *Proposition 1*, il suffit que tous les produits scalaires soient inférieurs ou égaux à Δ pour que l'on considère, parfois inexactement, que $d_{uv} \leq \Delta$. La seule garantie résultant de la vérification de toutes les inégalités sur les produits scalaires est que la distance entre les deux points est inférieure à Δ_{lim} avec

$$\Delta_{\text{lim}} = \frac{\Delta}{\cos(\theta_{\text{max}})} \quad (3.27)$$

Cela signifie que les deux points pourraient en fait être séparés d'une distance comprise entre Δ et Δ_{lim} et être tout de même considérés comme proches d'une distance inférieure à Δ selon la procédure de la *Proposition 1*. C'est exactement ce qui est représenté dans la figure 3.9 : \mathcal{D} est

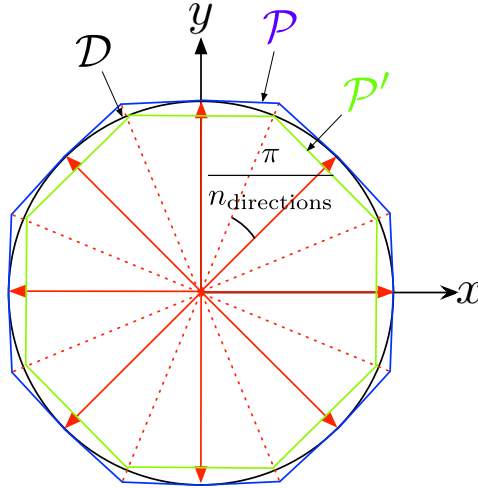


FIGURE 3.9 – Approximation du disque \mathcal{D} du plan euclidien par les polygones réguliers \mathcal{P} et \mathcal{P}' à $n_{\text{directions}}$ côtés

un disque de rayon Δ dont le centre est confondu avec un certain $v \in \mathbb{R}^2$, et \mathcal{P} est l'ensemble des points vérifiant toutes les inégalités de produit scalaire par rapport au point v , c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall i \in \mathcal{U}, \langle u - v \mid U_i \rangle \leq \Delta\} \quad (3.28)$$

Ainsi, $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ est ce nous pourrions appeler l'ensemble extérieur d'approximation, qui est donc l'ensemble des points qui sont considérés à une distance de v inférieure à Δ alors qu'ils ne le sont pas. Notons qu'il existe une autre manière d'exploiter la *Proposition 1* en comparant tous les produits scalaires à $\cos(\theta_{\max})\Delta$ et non plus directement à Δ . Dans ce cas, quand toutes les inégalités sont vérifiées, on a cette fois la garantie que la distance entre les deux points analysés est inférieure ou égale à Δ . Par contre, il est possible de trouver des situations où la distance entre les deux points est comprise entre $\cos(\theta_{\max})\Delta$ et Δ et où un des produits scalaires a une valeur supérieure à $\cos(\theta_{\max})\Delta$, ce qui se traduit par une impossibilité de conclure que les deux points sont Δ -proches selon la procédure de la *Proposition 1*. Cela définit l'ensemble intérieur d'approximation $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}'$ avec

$$\mathcal{P}' = \{u \in \mathbb{R}^2 / \forall i \in \mathcal{U}, \langle u - v | U_i \rangle \leq \cos(\theta_{\max})\Delta\} \quad (3.29)$$

également représenté en figure 3.9. Finalement, nous devons choisir entre deux conséquences indésirables de notre approximation linéaire : accepter des points proches incorrects, ou ne pas détecter des points proches corrects. Concernant ces deux effets, on remarque que les deux membres de droite analysés ici ($\cos(\theta_{\max})\Delta$ et Δ qui ont permis de définir respectivement \mathcal{P}' et \mathcal{P}) correspondent aux deux situations extrêmes. En fonction de l'application considérée, on pourrait vouloir essayer de trouver un compromis entre les deux effets d'approximation en choisissant un membre de droite dans $[\cos(\theta_{\max})\Delta, \Delta]$. A propos de l'amplitude de l'erreur causée par l'approximation linéaire, le lien est direct avec le nombre de directions discrétisées $n_{\text{directions}}$: l'erreur tend vers zéro relativement rapidement quand $n_{\text{directions}}$ croît. Une façon de quantifier cette convergence est de comparer les aires de \mathcal{D} , \mathcal{P} et \mathcal{P}' avec un nombre de directions variables, ce qui est proposé en figure 3.10.

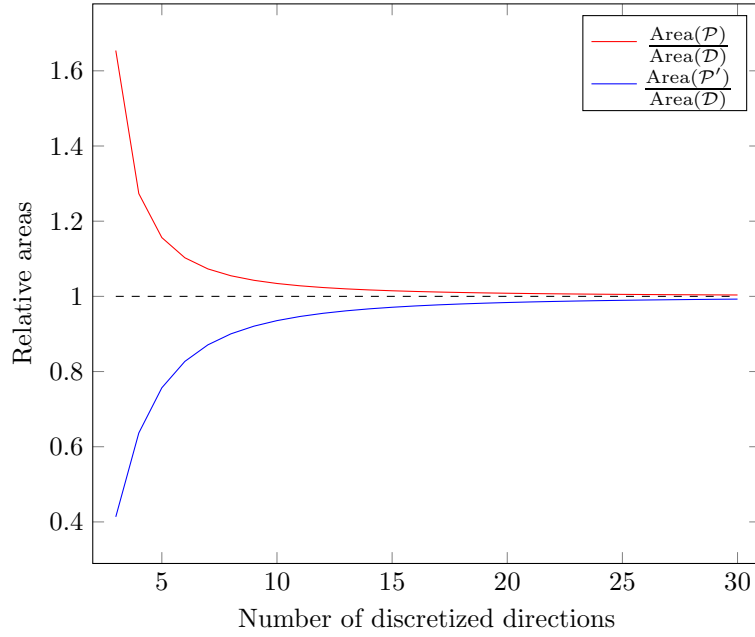
3.2.2 Extension des principes de linéarisation aux dimensions supérieures

Une autre façon d'interpréter ce choix que nous avons fait de recourir aux racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{R}^2 pour discrétiser les directions du plan euclidien est d'observer qu'elles sont une solution au problème suivant : quel sous-ensemble de taille $n_{\text{directions}}$ du cercle unité de \mathbb{R}^2 minimise la distance angulaire maximale entre un point quelconque du cercle unité et le point qui en est le plus proche angulairement parmi les $n_{\text{directions}}$ points sélectionnés ? Mathématiquement, ce problème s'exprime comme suit

$$\min_{\substack{\mathcal{X} \subset \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|=1\} \\ \text{tel que } \text{card}(\mathcal{X})=n_{\text{directions}}}} \mathcal{J}(\mathcal{X}) = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^2 \\ \text{s.t. } \|u\|=1}} \min_{u' \in \mathcal{X}} (u, u') \quad (3.30)$$

et il admet effectivement la distribution uniforme définie par les racines n -ièmes de l'unité ($\mathcal{X} = \mathcal{U}$) comme solution optimale de valeur $\mathcal{J}(\mathcal{U}) = \theta_{\max}$ (l'intégralité de l'ensemble des solutions optimales s'obtenant par rotation des racines n -ièmes de l'unité d'un angle dans $\left[0, \frac{2\pi}{n_{\text{directions}}}\right]$, chaque valeur dans cet intervalle donnant lieu à une solution distincte).

Là où cela est trivial dans \mathbb{R}^2 de discrétiser uniformément les directions du plan pour un certain nombre cible de directions $n_{\text{directions}}$, il est loin d'être évident de définir un ensemble de taille prédéterminée de points uniformément distribués à la surface de la sphère unité dans



(a)

$n_{\text{directions}}$	$\frac{\text{Area}(\mathcal{P})}{\text{Area}(\mathcal{D})}$	$\frac{\text{Area}(\mathcal{P}')}{\text{Area}(\mathcal{D})}$
4	1.273	0.637
8	1.055	0.900
12	1.023	0.955
16	1.013	0.974
20	1.008	0.984
24	1.006	0.989
28	1.004	0.992

(b)

FIGURE 3.10 – (a) Evolution de l’aire des polygones approximatifs \mathcal{P} et \mathcal{P}' par rapport à l’aire du disque \mathcal{D} (b) Exemples de valeurs apparaissant dans les courbes

\mathbb{R}^3 . Pour certaines valeurs de $n_{\text{directions}}$, il est même parfois possible de prouver qu’il n’existe pas de solution de distribution strictement uniforme des points à la surface de la sphère. Ainsi, ce problème très simple a motivé un mouvement de recherche dédié et se caractérise par une littérature riche sur les différentes méthodes développées pour le résoudre : [Peake 2014], [Saff 1997], [Harman 2010], [Erber 1991]. Pour une application dans \mathbb{R}^3 de notre procédure de linéarisation des inégalités en norme euclidienne, nous devons donc étendre nos principes aux discrétisations non-uniformes des directions de l’espace. Pour cela, une façon de faire est de résoudre au mieux dans \mathbb{R}^3 le problème précédemment défini dans \mathbb{R}^2 :

$$\min_{\substack{\mathcal{X} \subset \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|=1\} \\ \text{tel que } \text{card}(\mathcal{X})=n_{\text{directions}}}} \mathcal{J}(\mathcal{X}) = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^3 \\ \text{s.t. } \|u\|=1}} \min_{u' \in \mathcal{X}} (u, u') \quad (3.31)$$

Dans une partie de la littérature évoquée quelques lignes plus haut, ce problème est exactement celui adressé. Par contre, certains travaux s'intéressent eux à des variantes proches du problème (3.31) qui considèrent d'autres critères inspirés de phénomènes physiques comme l'équilibre électrostatique par exemple. Du point de vue de notre application, résoudre ce problème d'optimisation peut être interprété comme la recherche du traitement discret le plus isotrope possible de toutes les directions de l'espace \mathbb{R}^3 avant approximation linéaire des distances euclidiennes. Soit alors \mathcal{U} une solution optimale (ou sous-optimale) de (3.31), alors les propositions 1 et 2 restent valides dans \mathbb{R}^3 en utilisant \mathcal{U} comme ensemble de directions discrètes et en posant $\theta_{\max} = \mathcal{J}(\mathcal{U})$. Puisque l'application qui a motivé ces travaux de recherche se positionne dans le plan euclidien, à savoir l'optimisation de beam layout irrégulier dans un système de télécommunications multifaisceaux, nous n'avons pas effectué d'analyse pour \mathbb{R}^3 comparable à celle fournie pour \mathbb{R}^2 où l'évolution de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de directions discrètes a été proprement quantifié. Pour ce faire, il suffirait d'implémenter un algorithme de résolution de (3.31) et de l'appliquer à chaque nombre de directions $n_{\text{directions}}$ testé.

Enfin, on notera également que certains travaux s'intéressent à la question de l'échantillonnage uniforme des hypersphères en dimension $n > 3$ (par exemple [Cook 1957] et [Muller 1959]), ce qui permettrait d'étendre nos principes à des dimensions encore plus élevées que \mathbb{R}^3 en appliquant exactement le même raisonnement.

3.2.3 Définition d'un programme linéaire mixte pour le placement de faisceaux

3.2.3.1 Détermination d'une borne supérieure du nombre de faisceaux pouvant être placés

Dans le programme linéaire mis en place plus loin dans le paragraphe 3.2.3.2 pour l'optimisation de beam layout irrégulier, il est nécessaire de connaître à l'avance le nombre maximum de faisceaux pouvant être utilisés puisque chaque faisceau aura des variables et des contraintes dédiées. Le nombre de faisceaux pouvant être embarqués dans la charge utile satellite peut être limité pour des raisons de masse, d'accommodation ou même de coût. Dans ce paragraphe, on montre que le nombre de faisceaux pouvant être placés est également limité par la forme de la zone de service à cause des contraintes de séparation et de couverture d'un nombre minimal de stations par faisceau actif.

Pour appréhender cette limite géométrique sur le nombre de faisceaux actifs, considérons l'ensemble admissible continu $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$ de positions pour les centres permettant de couvrir géométriquement un certain nombre N_{\min} de stations. Etant donné cet ensemble admissible de centres, à la fois les contraintes de séparation des antennes SFPB et les contraintes de non-chevauchement font qu'il est impossible de placer un nombre trop important de faisceaux : les faisceaux étant confinés dans ce domaine restreint, ils se chevauchent de plus en plus quand leur nombre augmente jusqu'à ce que les contraintes de séparation soient nécessairement violées. Ainsi, nous avons besoin d'une méthodologie d'estimation du nombre maximum de faisceaux couvrant au moins une station pouvant être placé en respectant les différentes contraintes

de séparation. Plus précisément, nous allons ici nous contenter de définir une stratégie qui donne efficacement accès à un majorant de ce nombre maximum de faisceaux, en faisant en sorte qu'il soit de qualité : on cherche un écart le plus faible possible à ce nombre maximum recherché. Le but est de comparer ce nombre maximum géométrique au nombre maximum de faisceaux dicté par la plateforme et les limitations de coût, le plus petit des deux étant le nombre de faisceaux pour lesquels des variables devraient être déclarées. Soient $b, b' \in \mathbb{R}^2$ les centres de deux faisceaux distincts et $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^+$ leurs diamètres. Rappelons que les contraintes de séparation s'expriment comme suit :

$$\|b' - b\| \geq \kappa \left(\frac{\omega + \omega'}{2} \right) \quad \text{si } (b, b') \text{ sont alloués au même réflecteur} \quad (3.32)$$

$$\|b' - b\| \geq \varepsilon \left(\frac{\omega + \omega'}{2} \right) \quad \text{pour tout } (b, b') \quad (3.33)$$

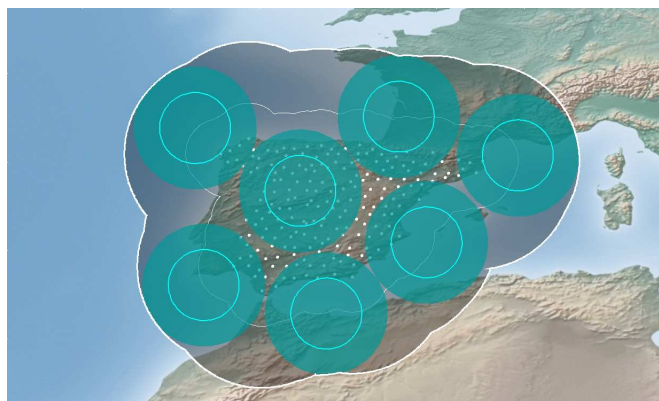
On observe que plus les faisceaux considérés sont larges, plus les contraintes de séparation angulaire sont prononcées. Autrement dit, avec des faisceaux étroits sur la couverture, l'impact spatial de ces contraintes est moindre, ce qui augmente les chances d'être capable de placer d'autres faisceaux dans le domaine continu $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$. En pratique, cela veut dire que pour trouver le nombre maximum de faisceaux qui peuvent être placés sur une certaine zone de service, il faut s'intéresser aux faisceaux de plus petite taille.

Pour la contrainte antenne, le principe clé que nous exploitons ici est le fait que le nombre maximum de faisceaux pouvant être placés sur une certaine zone de service avec un nombre de réflecteurs disponibles $N_R > 1$ est nécessairement inférieur ou égal au nombre de réflecteurs N_R fois le nombre maximum de faisceaux k pouvant être placés avec exactement 1 réflecteur. En effet, supposons cette propriété fautive, alors, toute solution avec N_R réflecteurs et strictement plus de kN_R faisceaux placés peut servir à définir une solution avec un réflecteur et au moins $k + 1$ faisceaux (puisque il existe nécessairement un réflecteur utilisé strictement plus que k fois), ce qui est absurde par définition de k . Ce résultat est intéressant dans la mesure où il est plus simple d'évaluer le nombre maximum de faisceaux pouvant être placés avec 1 réflecteur par rapport au cas général avec N_R réflecteurs. Par contre, cette approche est une première cause d'approximation supérieure du nombre maximum de faisceaux : raisonner ainsi ne donnera dans le cas général qu'un majorant nombre maximum de faisceaux pouvant être placés sur une certaine région sous contraintes antenne avec N_R réflecteurs. Appliquons tout de même ce principe en supposons qu'un seul réflecteur est disponible dans la charge utile satellite. Dans ce cas, pour une solution comprenant N_B faisceaux dans $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$ tous de diamètre minimal ω et respectant les contraintes des antennes SFPB, si nous définissions pour chacun de ces faisceaux un disque concentrique de diamètre $\kappa\omega$, alors tous les disques ainsi construits sont disjoints : une intersection non vide de deux de ces disques correspondrait en effet à une violation de contrainte de séparation. On note que $\kappa\omega$ est le plus grand diamètre pour lequel cette propriété reste vraie. En pratique, la possibilité de définir ces disques qui ne s'intersectent pas à partir de toute solution réalisable est utilisée dans sa version contraposée : s'il est impossible de définir N_B disques disjoints de diamètre $\kappa\omega$ dans $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, alors on sait qu'il est impossible de placer N_B faisceaux sur cette zone de service (pour exactement un réflecteur de disponible). La

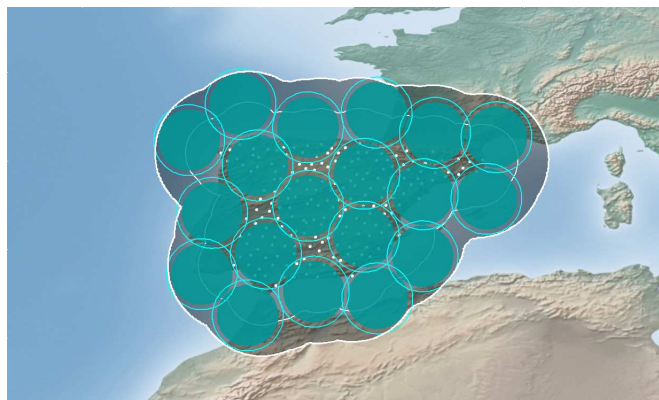
dernière brique manquante pour atteindre une procédure efficace de calcul de bons majorants du nombre maximum de faisceaux pouvant être placés est une condition simple permettant d'affirmer que, pour un certain nombre de faisceaux N_B , il est effectivement impossible de placer N_B disques de diamètre $\kappa\omega$ dans $\mathcal{A}_{\min,stations}$. L'idée que nous proposons ici est de recourir à une analyse des surfaces disponible et requise. La surface disponible est obtenue en définissant un ensemble de points étendu par rapport à $\mathcal{A}_{\min,stations}$:

$$\mathcal{A}_{\min,stations,\text{étendu},\kappa} = \left\{ X \in \Theta_x \times \Theta_y \mid \min_{Y \in \mathcal{A}_{\min,stations}} \|X - Y\| \leq \kappa \frac{\omega}{2} \right\} \quad (3.34)$$

Cette extension de $\kappa \frac{\omega}{2}$ est nécessaire pour prévoir un capital de surface pour les faisceaux qui seraient placés à une distance du bord de $\mathcal{A}_{\min,stations}$ inférieure à $\kappa \frac{\omega}{2}$. $\mathcal{A}_{\min,stations,\text{étendu},\Delta}$ est



(a)



(b)

FIGURE 3.11 – Exemples d'analyses surfaciques pour le calcul de majorants du nombre de faisceaux pouvant être placé sur la zone de service (a) Pour la contrainte antenne avec $\kappa = \sqrt{3}$ (b) Pour la contrainte de non-chevauchement avec $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

représenté en trait épais blanc dans les figures 3.11(a) et 3.11(b), respectivement pour $\Delta = \kappa$ et $\Delta = \varepsilon$, alors que $\mathcal{A}_{\min,stations}$ est dans les deux cas représenté en trait fin blanc. Pour construire

l'exemple présenté dans cette figure, on a fait l'hypothèse que $\kappa = \sqrt{3}$ et que l'unique taille de faisceau autorisée est $\omega = 0,4^\circ$. Dans la figure 3.11(a), nous avons ainsi réussi à placer 7 faisceaux dont les disques de contraintes correspondants (les disques turquoises transparents dans la figure) ne s'intersectent pas, les faisceaux ayant des centres appartenant bien à $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$. Avec le domaine $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa}$ ainsi construit, on sait que si N_B faisceaux peuvent être placés sur la zone considérée, alors, N_B fois l'aire d'un disque $S_\kappa = \frac{\pi \kappa^2 \omega^2}{4}$ est nécessairement inférieure ou égale à l'aire de $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa}$ (car tous les disques sont disjoints et inclus dans $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa}$). Nous avons finalement utilisé l'implication contraposée :

$$\text{Aire}(\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa}) < N_B S_\kappa \implies \text{Nombre maximum de faisceaux sur un réflecteur} < N_B \quad (3.35)$$

La méthode proposée pour calculer un majorant U_{antenne} du nombre de faisceaux pouvant être placés sur la zone de service tout en respectant les contraintes des antennes SFPB consiste simplement à poser :

$$U_{\text{antenne}} = N_R \left\lfloor \frac{\text{Aire}(\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa})}{S_\kappa} \right\rfloor \quad (3.36)$$

Dans l'exemple de la figure 3.11, on a

$$\frac{\text{Aire}(\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \kappa})}{S_\kappa} \approx 10,18 \quad (3.37)$$

et cette information nous conduirait donc à déclarer, pour $N_R = 4$, $U_{\text{antenne}} = 40$ variables de faisceaux. Le caractère imparfait de ce majorant peut déjà être constaté sur cet exemple : 7 faisceaux ont été placés sur la figure 3.11(a) sans que les disques de contraintes ne s'intersectent, et il semble impossible d'ajouter sans violer ces contraintes les 3 faisceaux qui permettraient d'atteindre le total de 10 faisceaux détecté par la procédure de majoration. Finalement, on retrouve une propriété qui avait été théoriquement annoncée : l'analyse surfacique fournit un majorant du nombre maximum de faisceaux, mais pas nécessairement le plus petit de ces majorants, à savoir le nombre maximum de faisceaux pouvant être placés lui-même.

Pour la contrainte de non-chevauchement, on peut appliquer exactement le même type de raisonnement, à la différence que la notion de réflecteur est dans ce cadre caduque puisque tous les couples de faisceaux actifs sont maintenant concernés par cette contrainte de séparation. A partir de l'ensemble des centres admissibles $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, on définit cette fois $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \varepsilon}$ par extension du domaine initial d'une distance de $\varepsilon \frac{\omega}{2}$. L'aire d'un disque de contrainte est dorénavant de $S_\varepsilon = \frac{\pi \varepsilon^2 \omega^2}{4}$ et le majorant $U_{\text{chevauchement}}$ du nombre de faisceaux pouvant être placés sur la zone associé à cette contrainte se calcule cette fois comme suit :

$$U_{\text{chevauchement}} = \left\lfloor \frac{\text{Aire}(\mathcal{A}_{\min, \text{stations}, \text{étendu}, \varepsilon})}{S_\varepsilon} \right\rfloor \quad (3.38)$$

Sur la même zone de service que celle considérée précédemment pour la contrainte antenne, la figure 3.11(b) fournit un exemple de placement de 19 faisceaux qui respectent la contrainte de

non-chevauchement dictée par $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les calculs d'aires conduisent dans l'exemple à

$$\frac{\text{Aire}(\mathcal{A}_{\text{min,stations,étendu},\varepsilon})}{S_\varepsilon} \approx 28,06 \quad (3.39)$$

Et cette information entraînerait la déclaration de $U_{\text{chevauchement}} = 28$ variables de faisceaux. Comme précédemment, cette borne est critiquable dans le sens il semble difficile de rajouter 9 faisceaux dont les disques de contraintes ne s'intersectent pas, mais à ce stade nous n'avons cependant pas prouvé qu'il était impossible de placer ce total de 28 faisceaux.

Finalement, le nombre de faisceaux que nous décidons de déclarer dans nos modèle mathématiques est le minimum de U_{antenne} et $U_{\text{chevauchement}}$. Dans l'exemple de la figure 3.11, $U_{\text{chevauchement}}$ aurait donc été le majorant guidant la définition des variables, à condition qu'il ne soit pas par ailleurs dominé par le nombre maximum de faisceaux pouvant être supportés par la charge utile du satellite.

3.2.3.2 Premier programme linéaire mixte d'optimisation de beam layout irrégulier

Dans ce paragraphe, le premier modèle linéaire mixte du problème de la figure 2.13 que nos techniques de linéarisation de la norme euclidienne ont permis d'atteindre est détaillé. Toutes les équations du modèle sont regroupées dans la figure 3.13.

Objectif mathématique : maximisation du trafic offert aux stations

Pour gérer concrètement le critère d'optimisation du trafic couvert, la variable $\alpha_{s,b} \in \{0,1\}$ est définie pour tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $b \in \mathcal{B}$, et elle caractérise l'allocation potentielle de la station s au faisceau b : $\alpha_{s,b} = 1$ si et seulement si b fournit à s son trafic requis. Cela permet d'exprimer linéairement l'objectif mathématique de l'optimisation, ce qui est fait dans l'équation (3.47) de la figure 3.13. Encore une fois, nous supposons qu'une station ne peut être associée qu'à un faisceau au plus, ce qui se traduit par l'ensemble de contraintes (3.48).

Choix d'un diamètre pour chaque faisceau

Contrairement à la méthode gloutonne étudiée en paragraphe 3.1.2, les diamètres des faisceaux ne sont plus prédéterminés et ont donc des variables de décision dédiées. Effectivement, chaque faisceau $b \in \mathcal{B}$ doit être associé à exactement un diamètre $w \in \mathcal{W}$, cette allocation étant matérialisée par les variables $\omega_{b,w} \in \{0,1\}$ et les contraintes (3.49).

Choix d'un réflecteur pour chaque faisceau

Pour intégrer la contrainte qu'un faisceau doit être assigné à exactement un réflecteur de la charge utile satellite, on introduit pour tout $b \in \mathcal{B}$ et pour tout $r \in \mathcal{R}$ la variable d'allocation $\rho_{b,r} \in \{0,1\}$, ainsi que les contraintes correspondantes (3.50).

Positions continues des faisceaux et couverture géométrique des stations

Pour un faisceau $b \in \mathcal{B}$, $x_b \in \mathbb{R}$ et $y_b \in \mathbb{R}$ sont des variables qui correspondent aux coordonnées de son centre, respectivement dans les directions Θ_x et Θ_y . Pour $s \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathcal{B}$, si $\alpha_{s,b} = 1$, alors

le faisceau b doit notamment couvrir géométriquement la stations s . A partir de ce point dans le modèle, le problème résolu devient une approximation du problème originel de la figure 2.13 puisque nous sommes sur le point de recourir à la procédure de linéarisation des contraintes de proximité décrite en paragraphe 3.2.1.1. Sous l'hypothèse que $n_{\text{directions}}$ directions discrétisées ont été définies, la Proposition 1 conduit aux contraintes (3.51) qui permettent donc d'approcher la distance euclidienne entre la station et le centre du faisceau par la projection du vecteur station-centre sur la direction la plus proche angulairement. Dans cet ensemble de contraintes, considérons celles concernant une certaine station $s \in \mathcal{S}$. Soit alors un coefficient réel positif $M_s \in \mathbb{R}^+$. Pour $b \in \mathcal{B}$, si $\alpha_{s,b} = 1$, alors le faisceau b se voit forcé par les contraintes (3.51) d'être à une distance de la station s inférieure au rayon du faisceau fois le facteur d'approximation $\cos\left(\frac{\pi}{n_{\text{directions}}}\right)^{-1}$ (l'approximation des disques par la famille de polygones \mathcal{P} de la figure 3.9 étant celle retenue ici), ce qui assure la couverture de la station par le faisceau (l'approximation linéaire sur ces distances étant négligeable pour une telle application télécom pour un nombre de directions supérieur à 8). Si maintenant $\alpha_{s,b} = 0$, alors $M_s \geq 0$ est nécessaire pour relâcher ces contraintes de couverture géométrique. Notons que quelle que soit la valeur donnée à M_s , les équations (3.51) exprimeront toujours une contrainte de proximité entre la station et le faisceau considérés. En pratique, ce coefficient M_s sera grand, et notamment significativement plus grand que les diamètres des faisceaux, et imposera ainsi une distance maximale entre la station s et les faisceaux. Pour éviter des comportements numériques désavantageux, il est cependant préférable de choisir une valeur pour M_s aussi faible que possible. Par contre, il faut que cette valeur du coefficient soit suffisamment grande pour préserver la possibilité pour un faisceau b de choisir des centres qui permettent de couvrir toute autre station que la station s de toutes les manières possibles : toute station devrait pouvoir coïncider avec n'importe quel point du disque représentant le faisceau b , quel que soit son diamètre. Autrement dit, il ne faut pas que ces contraintes de proximité viennent réduire l'ensemble des centres possibles défini par $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$. La plus petite valeur de M_s qui permet de vérifier cette propriété est $M_s = \max_{s' \in \mathcal{S}} \|\mathcal{S}_{\text{coord}, s'} - \mathcal{S}_{\text{coord}, s}\|$.

Variables et contraintes pour les exigences de séparation angulaire

Pour gérer linéairement les contrainte des antennes SFPB pour deux faisceaux associés au même réflecteur, ainsi que les contraintes de non-chevauchement, nous avons besoin d'introduire de nouvelles variables. D'abord, pour $b, b' \in \mathcal{S}$ tels que $b' > b$, on définit les variables binaires $\beta_{b,b'} \in \{0, 1\}$. L'objectif est d'exprimer par le biais de contraintes linéaires l'équivalence suivante pour deux faisceaux actifs b et b' :

$$\beta_{b,b'} = 0 \Leftrightarrow b \text{ et } b' \text{ doivent être séparés spatialement selon le coefficient } \kappa \quad (\text{Equiv. 1})$$

Notons que pour deux faisceaux actifs associés au même réflecteur, la contrainte antenne représente un complément de séparation par rapport à la séparation déjà requise par la contrainte de non-chevauchement, qui doit systématiquement être satisfaite pour tout couple de faisceaux actifs. A propos de cette notion de faisceau actif, les variables $a_b \in \{0, 1\}$ modélisent le caractère actif ($a_b = 1$) ou inactif ($a_b = 0$) des faisceaux b , et sont discutées dans le paragraphe 3.2.3.2 qui suit. L'idée que nous proposons alors est d'introduire pour tout couple de faisceaux $b, b' \in \mathcal{B}$ des variables continues d' "étirement" $\lambda_{b,b'} \in \mathbb{R}^+$ pour modéliser ce surplus de séparation :

$\lambda_{b,b'}$ vaudra 0 si les deux faisceaux ne partagent pas le même réflecteur mais sera égale au complément de séparation requis, à savoir $\kappa - \varepsilon$ fois la moyenne des diamètres de b et b' , si c'est le cas et que les deux faisceaux sont actifs. C'est exactement le rôle des contraintes (3.52) où les variables $\lambda_{b,b'}$ sont minorées par ce complément de séparation quand $\beta_{b,b'} = 0$, là où à l'inverse $\beta_{b,b'} = 1$ relâche la contrainte en s'assurant que la borne inférieure soit une valeur négative. Ensuite, pour appliquer concrètement les séparations en norme euclidienne, nous avons besoin d'un autre ensemble de variables binaires $\gamma_{b,b',u} \in \{0,1\}$ définies pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$ tels que $b' > b$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$. Ces variables permettent d'exploiter la procédure de linéarisation des contraintes de séparation de la Proposition 2 par le biais des contraintes (3.53). Plus précisément :

- Pour deux faisceaux actifs b et b' , nous devons avoir pour au moins un $u \in \mathcal{U}$ (c'est-à-dire une des directions du plan discrétisées) $\gamma_{b,b',u} = 1$: c'est assuré par les contraintes (3.53). Cette direction u sera celle selon laquelle la projection du vecteur centre de b à centre de b' sera contrainte d'être plus élevée qu'un certain seuil de séparation qui dépend de $\lambda_{b,b'}$.
- Pour $u \in \mathcal{U}$, la valeur $\gamma_{b,b',u} = 0$ sera utilisée pour relâcher la contrainte de séparation selon les directions u : voir les contraintes (3.54).

Ce comportement par rapport aux valeurs des variables $\gamma_{b,b',u}$ est garanti par les contraintes (3.54). Pour relâcher la contrainte de séparation quand elle n'est pas requise, c'est-à-dire quand $\gamma_{b,b',u} \neq 1$, le coefficient $N \in \mathbb{R}^+$ est nécessaire. Si nous posons $N = N_1 + N_2$ où N_1 est le plus grand espacement pouvant être requis pour deux faisceaux par les différentes contraintes de séparation, et N_2 la plus grande distance possible entre deux centres de faisceaux,

$$N = \underbrace{\kappa \max_{w \in \mathcal{W}} W_w}_{N_1} + \underbrace{\max_{X, X' \in \mathcal{A}_{\min, \text{stations}}} \|X - X'\|}_{N_2} \quad (3.40)$$

alors on vérifie qu'un tel N est le plus petit coefficient qui convient pour la relaxation de contrainte souhaitée. Effectivement, pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$, et quelles que soient les valeurs prises par les variables, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que (puisque les U_i sont des vecteurs unitaires) :

$$\begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \geq -\|\text{centre}_{b'} - \text{centre}_b\| \quad (3.41)$$

$$\geq -N_2 \quad (3.42)$$

De plus, par définition de N_1 :

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b',w} \right) \varepsilon + \lambda_{b,b'} \leq N_1 \quad (3.43)$$

Ainsi, l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b',w} \right) \varepsilon - \lambda_{b,b'} + N \geq 0 \quad (3.44)$$

ce qui garantit la relaxation de la contrainte.

Notion de faisceaux actifs ou non-actifs

Puisque $N_{\mathcal{B}}$ n'est qu'un nombre maximum de faisceaux, chaque faisceau b dans \mathcal{B} peut être soit actif soit non-actif, ce qui est matérialisé par les variables binaires $a_b \in \{0, 1\}$. La valeur $a_b = 0$ correspond à un faisceau non-actif. Un tel faisceau devrait être traité dans le modèle mathématique comme s'il n'existait pas : il ne doit être en interaction avec aucune station utilisateur et aucun faisceau actif. En particulier, quand un faisceau n'est pas actif, toutes les contraintes de séparation correspondantes doivent être relaxées. A l'inverse, la valeur $a_b = 1$ signifie que le faisceau existe et est actif. En s'appuyant sur l'équivalence *Equiv. 1* qui est maintenant vraie grâce aux contraintes (3.52), (3.53), et (3.54), nous avons toujours besoin d'incorporer au modèle pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$ tels que $b' > b$ les implications suivantes, extraites de la formalisation de la figure 2.13, qui permettent de n'activer les contraintes de séparation antenne que quand cela est nécessaire :

$$b \text{ et } b' \text{ sont tous deux actifs et sont associés au même réflecteur} \Rightarrow \beta_{b,b'} = 0 \quad (3.45)$$

$$b \text{ ou } b' \text{ est inactif, ou les deux, ou ils n'utilisent pas le même réflecteur} \Rightarrow \beta_{b,b'} \text{ non contraint} \quad (3.46)$$

Ces implications sont intégrées au modèle par le biais des contraintes (3.55). Pour réduire le nombre de contraintes, on n'exige pas explicitement que $\beta_{b,b'} = 1$ quand le surplus de séparation n'est pas nécessaire : puisque dans ce cas nous avons fait en sorte que la valeur $\beta_{b,b'} = 1$ soit une valeur possible, alors, au cours de l'exploration de l'espace de recherche, si le solveur de programmation linéaire mixte est attiré par une solution avec des séparations angulaires nécessitant $\beta_{b,b'} = 1$, il pourra faire ce choix de valeur.

L'interaction des faisceaux non-actifs avec les stations utilisateurs doit être interdites : un faisceau qui n'est pas actif ne peut servir aucune station. Ceci est exprimé à l'aide des contraintes (3.56).

Contraintes sur la faisabilité du répéteur

Les contraintes (3.57) exprime l'impossibilité pour un faisceau d'assurer un trafic cumulé supérieur à la limite Γ_w définie par diamètre de faisceau (voir les contraintes répéteur décrites en paragraphe 2.1.3.4).

Contraintes sur le nombre minimum de stations servies par faisceau actif

Le dernier ensemble de contraintes (3.58) impose à tout faisceau actif de couvrir au moins N_{\min} stations, ce nombre minimum étant paramétrable en entrée pour le modèle mathématique. En pratique, nous ne travaillerons toujours avec $N_{\min} > 1$. Sur la figure 3.12, on a représenté

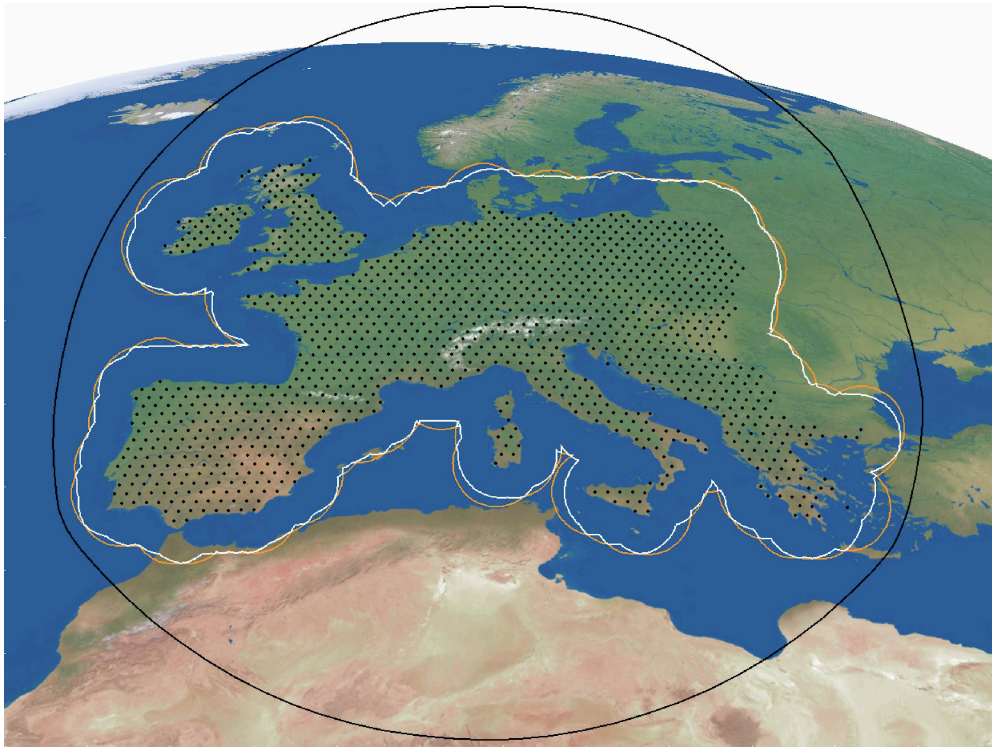


FIGURE 3.12 – Ensemble $\mathcal{A}_{\text{contraintes}}$ continu admissible des centres induit par les contraintes (3.51) en noir, et ensemble $\mathcal{A}_{\text{min,stations}}$ induit par les contraintes (3.58) en orange ($N_{\text{min}} = 1$) et en blanc ($N_{\text{min}} = 2$)

l'ensemble $\mathcal{A}_{\text{contraintes}}$ des centres possibles résultant des contraintes (3.51) pour comparaison avec $\mathcal{A}_{\text{min,stations}}$ pour $N_{\text{min}} = 1$ et $N_{\text{min}} = 2$. On vérifie que l'objectif que nous avons précédemment lors de la définition des valeurs pour les coefficients M_s de ne pas réduire l'ensemble $\mathcal{A}_{\text{min,stations}}$ a bien été atteint : ceci est matérialisé par le fait que $\mathcal{A}_{\text{min,stations}} \subset \mathcal{A}_{\text{contraintes}}$.

$$\text{Maximiser } \sum_{(s,b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}} T_s \alpha_{s,b} \quad (3.47)$$

sous les contraintes

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} \alpha_{s,b} \leq 1 \quad (3.48)$$

$$\forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{w \in \mathcal{W}} \omega_{b,w} = 1 \quad (3.49)$$

$$\forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{r \in \mathcal{R}} \rho_{b,r} = 1 \quad (3.50)$$

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall u \in \mathcal{U}, \quad \begin{pmatrix} x_b - X_{\text{stations},s} \\ y_b - Y_{\text{stations},s} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2} \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + (1 - \alpha_{s,b}) M_s \quad (3.51)$$

$$\forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b' > b, \quad \lambda_{b,b'} \geq \frac{\kappa - \varepsilon}{2} \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w (\omega_{b,w} + \omega_{b',w}) - (\kappa - \varepsilon) \max_{w \in \mathcal{W}} W_w \beta_{b,b'} \quad (3.52)$$

$$\forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b' > b, \quad \sum_{u \in \mathcal{U}} \gamma_{b,b',u} \geq a_b + a_{b'} - 1 \quad (3.53)$$

$$\forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b' > b, \forall u \in \mathcal{U},$$

$$\begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b',w} \right) \varepsilon + \lambda_{b,b'} - N(1 - \gamma_{b,b',u}) \quad (3.54)$$

$$\forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b' > b, \forall r \in \mathcal{R}, \quad \beta_{b,b'} + \rho_{b,r} + \rho_{b',r} \leq 2 + (1 - a_b) + (1 - a_{b'}) \quad (3.55)$$

$$\forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_{s,b} \leq N_s a_b \quad (3.56)$$

$$\forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} T_s \alpha_{s,b} \leq \sum_{w \in \mathcal{W}} \Gamma_w \omega_{b,w} \quad (3.57)$$

$$\forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_{s,b} \geq N_{\min} a_b \quad (3.58)$$

Variables : $\alpha_{s,b}, \omega_{b,w}, \rho_{b,r}, a_b, \beta_{b,b'}, \gamma_{b,b',u} \in \{0, 1\}$, $x_b, y_b \in \mathbb{R}$, et $\lambda_{b,b'} \in \mathbb{R}^+$

FIGURE 3.13 – Première modèle linéaire mixte continu-entier d'optimisation de beam layout irrégulier par approximation de la norme euclidienne

3.3 Confrontation de la méthode gloutonne au modèle de programmation linéaire mixte

3.3.1 Définition des instances du problème d'optimisation de beam layout

Une étape nécessaire pour l'évaluation efficace de la qualité de nos solutions algorithmique de placement de faisceaux irréguliers était l'automatisation de la génération d'instances réalistes, pour pouvoir exécuter des expérimentations sur un nombre significatif de cas. Nous avons ainsi défini une procédure pour définir des ensembles réalistes de données d'entrée qui caractérisent intégralement les instances du problème résolu. Dans le cas particulier du problème d'optimisation de beam layout irrégulier, rappelons que les paramètres caractérisant une instance sont les suivants :

- 1) Une zone de service à la surface de la Terre définie par un ensemble de stations utilisateurs
- 2) Une densité surfacique de stations utilisateurs à la surface de la Terre
- 3) Leurs demandes individuelles en trafic (qui définit une certaine hétérogénéité de demande)
- 4) Des charges maximales pour les faisceaux, variant en fonction des diamètres de faisceaux
- 5) Un nombre de réflecteurs disponibles dans la charge utile du satellite
- 6) Une règle de séparation pour les faisceaux transmis par le même réflecteur
- 7) Une règle de séparation pour le non-chevauchement des faisceaux
- 8) Un nombre fini de diamètres possibles
- 9) Un nombre minimum de stations à couvrir par faisceau actif

L'approche que nous avons adoptée pour générer nos séries d'instances a été de fixer tous ces paramètres d'entrée sauf les trois premiers de cette liste : plusieurs grilles de stations de différentes tailles et densités ont été produites, et pour chaque grille, la demande en trafic de chaque station utilisateur a été générée aléatoirement en fonction de différents objectifs d'hétérogénéité de demande sur la zone de service. Cependant, pour que ces demandes en trafic soient réalistes, il est nécessaire de :

- (i) Contrôler l'hétérogénéité de la demande pour être capable de la faire varier dans un intervalle réaliste
- (ii) Éviter des distributions spatialement erratiques : la demande devrait varier de façon lisse en définissant ainsi des zones denses et des zones moins denses similaires à celles que l'on trouverait en analysant par exemple la densité de population

Le besoin (i) est géré par un paramétrage de l'écart-type d'une distribution normale, qui est la loi probabiliste que nous avons choisie pour générer des demandes de trafic initiales. On notera σ l'écart-type de cette loi normale suivie par les valeurs ponctuelles de trafic au sol. Un exemple du type de cartes de demande que l'on obtient de cette manière est donné en figure 3.14(a). où la demande en trafic des stations utilisateurs est exprimée en Mégabits par seconde (le bleu correspond aux demandes les plus faibles alors que le rouge correspond aux demandes les plus fortes). Ensuite, le besoin (ii) nécessite un traitement a posteriori de ces distributions normales par "lissage gaussien" ou "flou gaussien", qui se résume à la convolution de cette carte de demande normale par une fonction gaussienne 2D (définie dans le plan $\Theta_x \times \Theta_y$). Dans la figure 3.14, la carte de demande en trafic (a) est transformée en la carte (b) par cette procédure de lissage.

A propos de la charge maximale par faisceau, nous avons besoin d'une stratégie permettant de définir, pour chaque carte générée aléatoirement, des seuils représentatifs de la complexité des instances réelles. Pour cela, nous avons analysé une banque d'instances réelles disponibles côté industriel dans une phase donc d'étalonnage, dans le but d'exhiber une règle de définition des seuils par taille de faisceau. Sur ces instances réelles, chaque centre possible a été examiné en faisant l'hypothèse d'une utilisation du plus petit diamètre possible : cette analyse permet de déterminer à carte de trafic donnée la plus grande valeur de trafic cumulé que peut percevoir un faisceau de plus petit diamètre, en jouant continûment sur son centre. Pour chaque instances réelle, la limite haute de charge pour les plus petits faisceaux est par ailleurs connue (par exemple en fonction des performances attendues en termes de bilan de liaison). Il est alors possible de comparer pour chaque instance réelle cette limite par faisceau étroit aux charges qu'un tel faisceau perçoit quand son centre balaie tout le domaine admissible continu. Cela a permis de définir la règle qui a été utilisée pour toutes nos expérimentations, à savoir : 95% des positions de centre possibles ont un trafic capté par le plus petit diamètre inférieur à la charge limite. En pratique, pour chaque carte générée aléatoirement, toutes les positions de tous les centres sont analysées et la charge maximale pour le plus petit faisceau est définie comme étant la valeur de trafic correspondant au 95% de la fonction de répartition du trafic capté par position possible. Ensuite, les seuils pour les tailles de faisceau plus grandes sont définis selon une certaine règle de décroissance à partir de la charge maximale du faisceau le plus étroit (car les faisceau plus larges ne peuvent pas endosser autant de trafic que les faisceaux étroits à cause d'efficacités spectrales moindres).

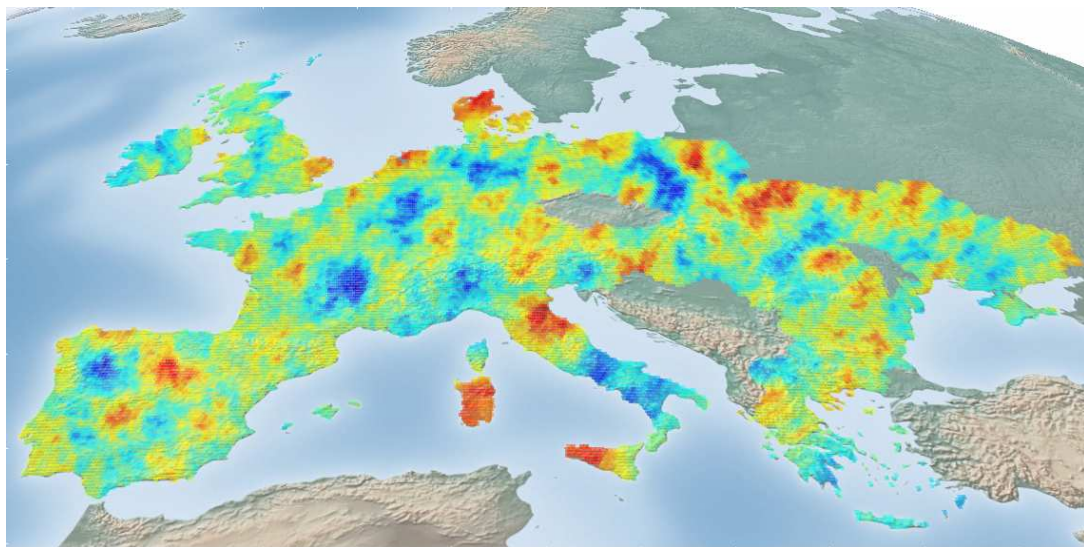
3.3.2 Les différents types d'instances testées

Dans ce contexte expérimental, nous avons voulu évaluer la sensibilité de nos différentes méthodes aux différentes familles d'instances. Deux caractéristiques ont guidé la façon dont nous avons construit nos campagnes de tests :

- La taille de la zone de service à couvrir
- L'hétérogénéité de la demande de trafic



(a)



(b)

FIGURE 3.14 – (a) Distribution normale de demande avant application du flou gaussien (b) Distribution de demande après flou gaussien

Ces paramètres ont tous deux varié pour générer cinq ensembles d'instances caractérisés par des hétérogénéités de demande sur la zone de service décroissantes, les instances de chaque catégorie étant de zone de service à couvrir quant à elle croissante. Concrètement, ces cinq ensembles d'instances, notés H_1, \dots, H_5 , sont obtenus en jouant sur l'écart-type de la loi normale attribuant les valeurs de trafic aux points au sol : $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_5$. Dans les figures 3.15(a) et 3.15(b), on a représenté les deux configurations extrêmes d'hétérogénéité de demande, qui correspondent donc respectivement à σ_1 et σ_5 . Quant aux figures 3.15(c) et 3.15(d), elles sont

la représentation des différences de l'étendue des zones service d'une instance à l'autre au sein d'une catégorie H_i donnée : là aussi il s'agit de cas extrêmes avec respectivement les plus petite et plus grande instances.

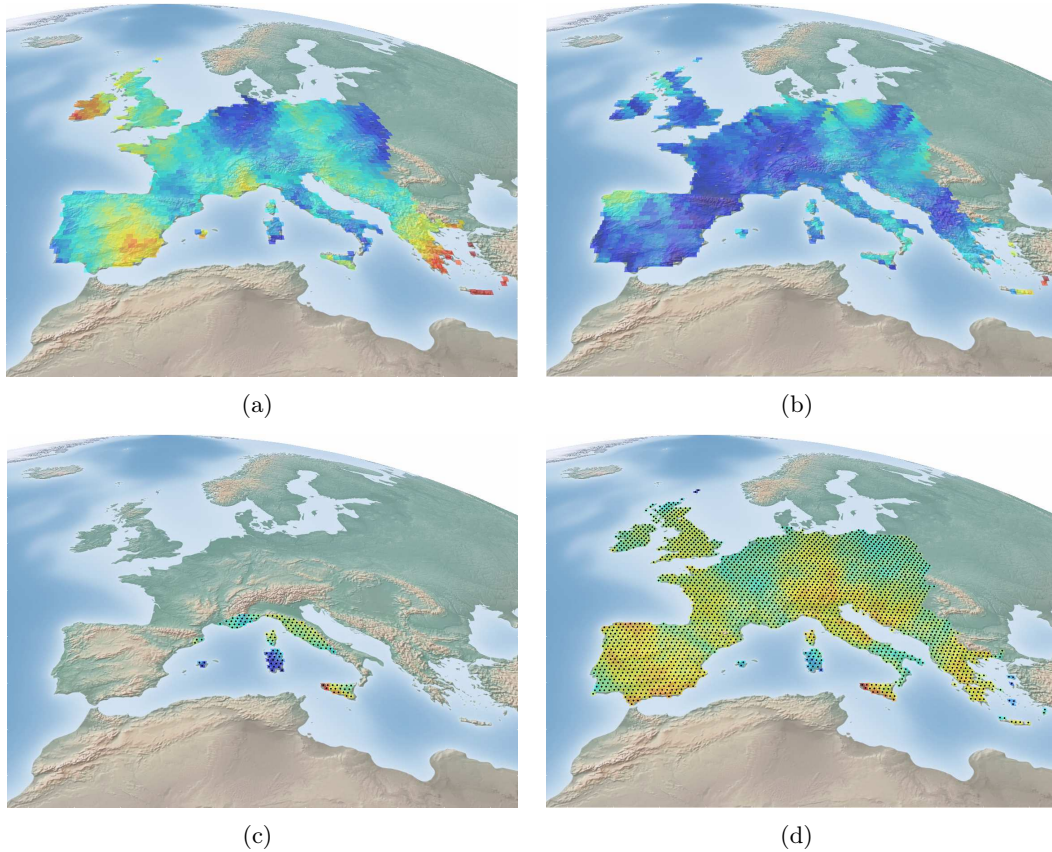


FIGURE 3.15 – (a) Forte hétérogénéité de demande (b) Faible hétérogénéité de demande (c) Zone de service étroite (d) Zone de service étendue

3.3.3 Expérimentations croisées des deux algorithmes de placement de faisceaux

3.3.3.1 Contexte des expérimentations

L'objectif de cette première campagne d'expérimentations est de confronter l'algorithme glouton multistart décrit en section 3.1.2 au modèle de programmation linéaire, obtenu par linéarisation des distances euclidiennes, décrit lui en section 3.2.3. Il est ainsi question de déterminer les forces et faiblesses de chacune des deux approches afin de décider de la suite à donner aux travaux de recherche.

Les expérimentations ont porté sur les cinq catégories d'instances H_1, \dots, H_5 introduites dans le

paragraphe précédent 3.3.2, la distribution de trafic T_s étant alors générée aléatoirement selon $\sigma_1, \dots, \sigma_5$. Quant à l'étendue croissante de la zone de service de chaque catégorie, elle se traduit par des nombres de stations N_S compris entre 100 et 1000. Nous avons fait croître le nombre de faisceaux maximum autorisés avec ce nombre de stations N_S . Le nombre de réflecteurs a été fixé à $N_R = 4$, le nombre de diamètres à $N_W = 2$ ($W_1 = 0.35^\circ$ et $W_2 = 0.5^\circ$), $\kappa = \sqrt{3}$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Le nombre de directions $n_{\text{directions}}$ a fait l'objet d'une analyse paramétrique en amont, détaillée plus bas dans ce paragraphe, pour fixer ce paramètre à une valeur jugée pertinente pour le reste des expérimentations. Pour rappel, l'objectif mathématique est le même dans les deux algorithmes testés ici : la maximisation du trafic couvert par les faisceaux sélectionnés, sous contraintes de faisabilité antenne et de charges maximales dans les faisceaux. Dans les résultats présentés ci-dessous, nous afficherons ainsi les scores obtenus par les deux algorithmes directement en termes de fonction coût. A noter que les expérimentations ont été exécutées sur une machine à 6 cœurs Intel Xeon X5690 @ 3.47 GHz et 24Go de RAM (les runs ayant été limité à deux cœurs).

En ce qui concerne l'algorithme glouton, nous avons constaté que sur les plus grandes instances testées la génération d'une solution gloutonne prenait moins de 3 secondes. Cela a permis de définir le nombre de "restarts" appliqué à chaque instance, c'est-à-dire le nombre de fois où l'on redémarre une construction gloutonne en s'appuyant sur des paramètres aléatoires pour produire des solutions inédites : ce nombre est fixé à 500, quelle que soit l'instance considérée. Finalement, pour chaque instance, parmi les 500 solutions gloutonnes produites par l'algorithme de la figure 3.6, on conserve alors celle de meilleur coût.

Le programme linéaire mixte utilisé pour résoudre chaque instance est celui de la figure 3.13, à la différence près que l'approximation des disques par polygone régulier retenue ici est l'approche conservatrice \mathcal{P}' qui garantit qu'un point détecté "intérieur au disque" par la Proposition 1 le soit vraiment, quitte à manquer la détection de certains de ces points intérieurs (discussion détaillée sur les implications d'un tel choix au niveau des commentaires de la figure 3.9). alors qu'un timeout de 1500 secondes est imposé à chaque exécution du programme linéaire mixte. Pour chaque instance, la meilleure solution gloutonne générée est comparée à la meilleure solution produite par le solveur de PL mixte (Gurobi, version 7.0). Ces scores sont confrontés à la meilleure borne supérieure connue pour chaque instance : à l'heure actuelle, et pour chaque instance, il s'agit naïvement de la somme des demandes individuelles de chaque station. A noter que cette borne naturelle coïncide avec la borne obtenue par la relaxation des contraintes d'intégrité dans le programme linéaire mixte, qui ne fait donc malheureusement pas mieux.

3.3.3.2 Premières expérimentations avec le programme linéaire mixte : choix de $n_{\text{directions}}$

Une sous-classe d'instances a été définie pour étalonner le nombre de directions discrétisées, afin de déterminer de façon empirique où se situe pour $n_{\text{directions}}$ le meilleur compromis entre

efficacité numérique et réduction de l'erreur d'approximation. Pour chaque nombre de stations $N_S \in \{100, 200, 300\}$, 10 instances de même hétérogénéité $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ont été générées, pour des nombres de faisceaux variant simultanément avec N_S dans $\{10, 20, 30\}$. Ces 30 instances ont été testées sur des nombres de directions discrétisées $n_{\text{directions}}$ variant dans l'ensemble $\{3, \dots, 50\}$ avec un timeout de 180 secondes imposé à Gurobi. Les résultats sont fournis en figure 3.16 sous la forme d'écart relatif entre la meilleure solution trouvée par le programme linéaire et la borne naïve (somme des demandes des stations à couvrir). Chaque point de ces trois courbes est une valeur d'écart relatif moyennée sur les 10 instances de la catégorie d'instances correspondante.

On constate comme attendu que plus il y a de faisceaux et de stations, plus la convergence vers les meilleures solutions est difficile, ce qui se matérialise par des écarts relatifs élevés dans la figure 3.16. A noter que les temps d'exécution ont volontairement été laissés courts car le comportement qualitatif déjà présent sur ces courbes était celui qui nous intéressait : il permet d'avoir une meilleure idée de la valeur à donner au paramètre $n_{\text{directions}}$. Effectivement, l'observation essentielle que nous pouvons faire sur ces résultats est que, pour un nombre trop faible de directions ($3 \leq n_{\text{directions}} \leq 8$), l'approximation des disques par les polygones \mathcal{P} (contrainte de séparation) et \mathcal{P}' (contrainte de proximité) est trop grossière et ne permet pas d'atteindre des solutions de bonne qualité. A l'inverse, pour $n_{\text{directions}}$ trop grand ($20 \leq n_{\text{directions}} \leq 50$), les améliorations de solutions permises par le gain en précision sont trop faibles pour justifier leur coût numérique : ceci explique la dégradation des écarts relatifs correspondant à ces valeurs de $n_{\text{directions}}$ dans la figure 3.16. A la lumière de ces résultats, nous avons décidé d'opérer le programme linéaire mixte 3.13 dans cette zone de compromis juste identifiée, à savoir avec un nombre de directions $n_{\text{directions}} = 12$.

3.3.3.3 Résultats des deux algorithmes sur les classes d'instances H_i

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats obtenus par l'algorithme glouton et le programme linéaire sur les catégories d'instances d'hétérogénéité décroissante. A noter qu'il serait préférable d'avoir un algorithme qui se démarque positivement pour les instances les plus hétérogènes (hautes valeurs de σ , petites valeurs de i dans H_i) puisque les solutions classiques comme le "beam layout régulier" sont performantes sur des couvertures homogènes en demande. Les résultats sont donnés sous forme de cinq graphes distincts dans les figures 3.17, 3.18, 3.19, 3.3.3.3 et 3.21.

Plusieurs propriétés apparaissent nettement sur ces différents résultats :

- Premièrement, on observe que la programmation linéaire mixte est efficace sur les plus petites instances, avec des solutions meilleures que celles produites par l'algorithme glouton multistart, avec même parfois des solutions optimales. Cela valide notamment l'approche d'approximation des disques par des polygones régulier, qui n'est pas incom-

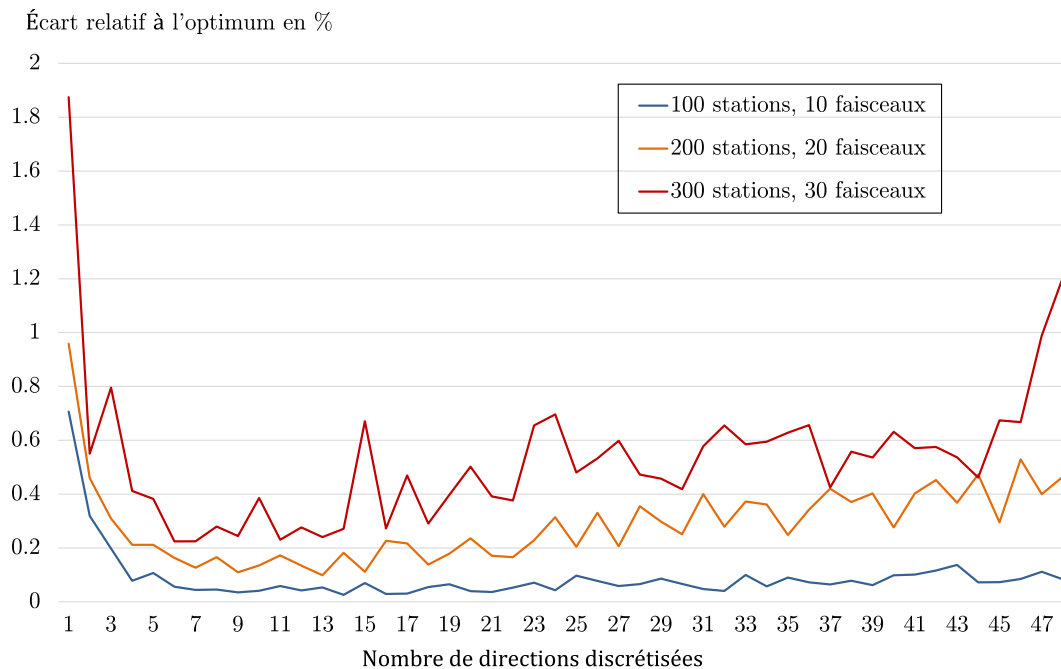


FIGURE 3.16 – Influence du nombre de directions $n_{\text{directions}}$ sur la qualité des solutions et l’efficacité de résolution

patible avec la couverture complète de la zone de service malgré la visibilité perdue sur les stations qui sont dans les disques mais pas dans les polygones correspondants.

- A l’inverse, le comportement se dégrade nettement pour la programmation linéaire mixte quand les instances grandissent en nombres de stations et de faisceau : c’est une conséquence directe de modèle linéaire bien plus volumineux.
- L’algorithme glouton est quant à lui bien moins sensible à cette augmentation de la taille des problèmes, et affiche une constance dans la qualité des solutions produites, pour des temps de résolutions qui cette fois évoluent polynomialement en la taille du problème. Concrètement, l’heuristique sera la seule alternative utilisable en pratique pour les très grandes instances.
- Aussi, on ne constate aucune variation de comportement algorithmique avec ces deux algorithmes quand l’hétérogénéité de la demande au sol varie, ce qui peut être perçu positivement : il n’y a pas de dégradation de performances constatées sur les instances les plus hétérogènes qui sont celles pour lesquelles la définition d’un beam layout irrégulier est la réponse à privilégier.

Pour donner quelques chiffres qui viennent compléter ces constats sur le comportement qualitatif

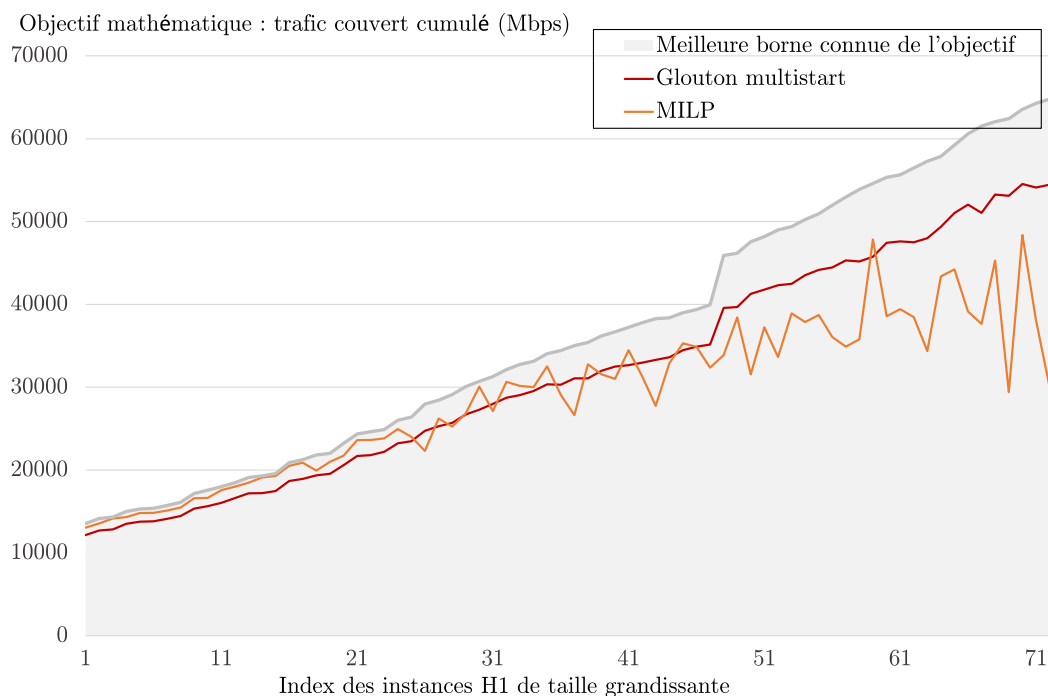
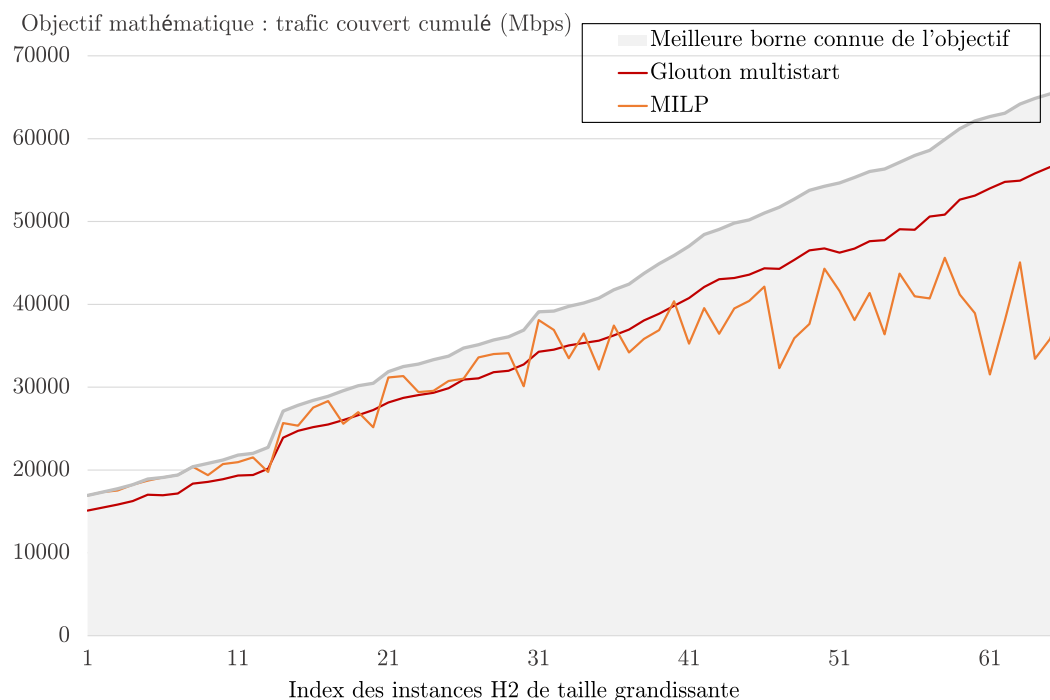


FIGURE 3.17 – Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_1

des algorithmes, nous avons classé les instances exécutées dans cette section en deux catégories, les “petites” instances qui affichent un nombre de stations utilisateur N_S inférieur à une valeur charnière inspirée des figures précédentes, et les “grandes” instances qui sont toutes les autres. Sur toutes les instances résolues puis classées ainsi, on constate finalement que sur les petites instances, la programmation linéaire mixte produit des solutions dont l’objectif est en moyenne 6,7% meilleur que celui produit par l’algorithme glouton. A l’inverse, sur les grande instances, l’algorithme glouton se démarque, avec des objectifs en moyenne 23,1% meilleurs que la programmation linéaire mixte. Finalement, nous disposons ainsi de deux algorithmes aux forces complémentaires : la programmation linéaire mixte est efficace sur les petites instances, et l’algorithme glouton continue de fournir des solutions de bonne qualité même sur les plus grandes instances.

3.4 Conclusions

A titre d’illustration des bienfaits de l’approche de programmation linéaire, qui est exacte à l’approximation des distances euclidiennes près, nous fournissons dans la figure 3.22 un exemple de solution optimale obtenue pour une instance constituée de $N_S = 200$ stations et recourant à $N_B = 20$ faisceaux pour couvrir les stations utilisateur. La séparation des faisceaux utilisant le même réflecteur (une couleur par réflecteur sur la figure) y est parfaitement observable. Les charges maximales par faisceau ont également été respectées. Il s’agit là d’un premier motif de satisfaction : nous disposons donc d’un outil de placement continu de faisceau gérant de


 FIGURE 3.18 – Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_2

façon intégrée les aspects discrets du problème comme l'allocation des stations aux faisceaux ou l'allocation des faisceaux aux réflecteurs, et pouvant résoudre de façon optimale des instances de taille modérée.

Industriellement, il est préférable de privilégier toute solution algorithmique qui a des chances de converger vers des solutions prouvées optimales : tout le processus de décision des designs à retenir pour chaque sous-système de la charge utile est en effet facilité dans ce cas. De plus, il est en pratique tout à fait possible de prévoir un temps de calcul de quelques heures pour produire par exemple un “beam layout irrégulier” tout en restant compatible des délais usuels pour concevoir le reste de la charge utile. Pour ces raisons-ci, nous avons décidé de poursuivre les travaux dans le sens d'une amélioration de cette approche par programmation linéaire mixte : cela fait l'objet du chapitre suivant 4 qui exploite la notion de clustering en k -moyennes pour alléger les modèles linéaires en nombre de contraintes et de variables. Cela ne signifie pas qu'il n'aurait pas été possible d'améliorer les solutions produites par l'heuristique par exemple par les perspectives suivantes :

- Recours à de meilleures solutions de coloration de graphe tirées de la littérature récentes sur le sujet : [Jensen 2011], [Barenboim 2013] ou encore [Furini 2017].
- Remise en question du choix des diamètres fait en amont : détecter à chaque itération quand l'utilisation d'un faisceau plus étroit est possible et satisfaisant pour libérer de

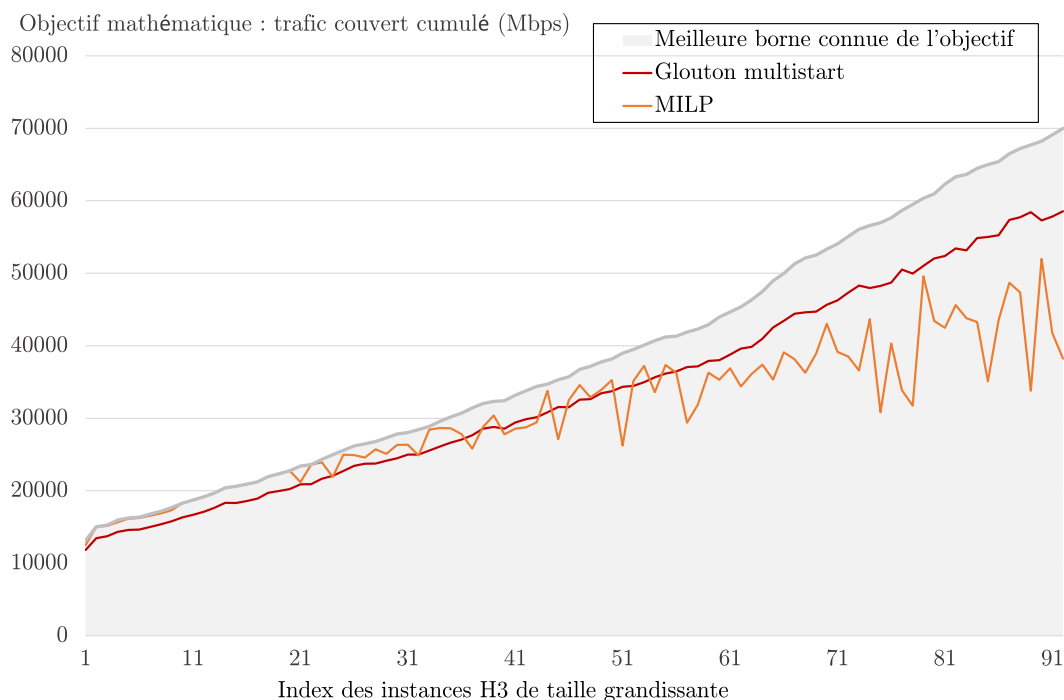


FIGURE 3.19 – Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_3

l'espace au niveau de la contrainte de séparation.

- Ouvrir les choix sur l'allocation des stations aux faisceaux : aujourd'hui les stations sont automatiquement assignées au premier faisceau géométriquement couvrant sélectionné, on pourrait imaginer une procédure qui profite du levier d'optimisation que serait le choix du faisceau servant chaque station, pour celles qui sont à l'intersection de plus d'un faisceau.

Par contre, une faiblesse irréductible de l'approche gloutonne est la difficulté bien plus prononcée qu'avec le programme linéaire d'adaptation de l'heuristique à de nouvelles variables et contraintes, qui pourraient potentiellement déstructurer tous les avantages de la stratégie actuelle. À l'inverse, le modèle linéaire serait lui bien plus flexible à cet égard, de nouvelles variables pouvant aisément cohabiter avec celles déjà présentes. Dans la suite, il va donc être question de retarder le moment où la programmation linéaire mixte se fait devancer par l'algorithme glouton quand les instances grandissent. Il est acquis que, sur les très grandes instances, l'algorithme glouton sera la seule alternative utilisable en pratique. Par contre, il existe aujourd'hui une vraie zone d'intérêt entre les instances bien résolues par le premier programmation linéaire mixte 3.13 et celles qu'il n'est pas raisonnable de vouloir résoudre par programmation mathématique : ces instances sont celles pour lesquelles les bonnes performances sont visées dans le chapitre suivant.

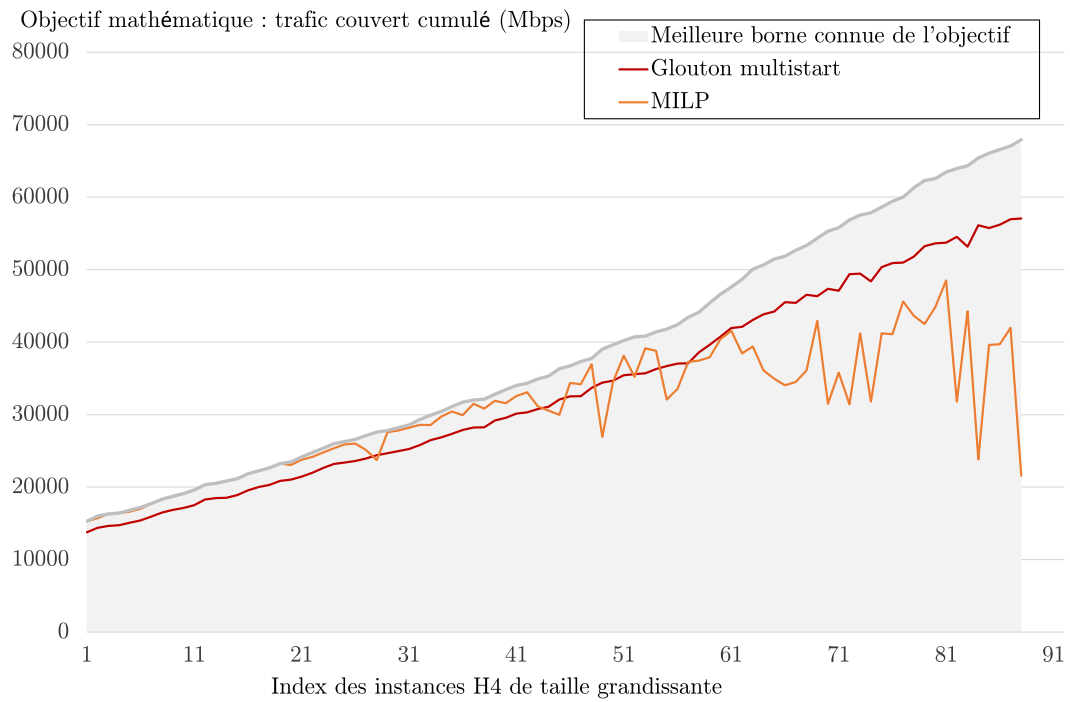


FIGURE 3.20 – Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_4

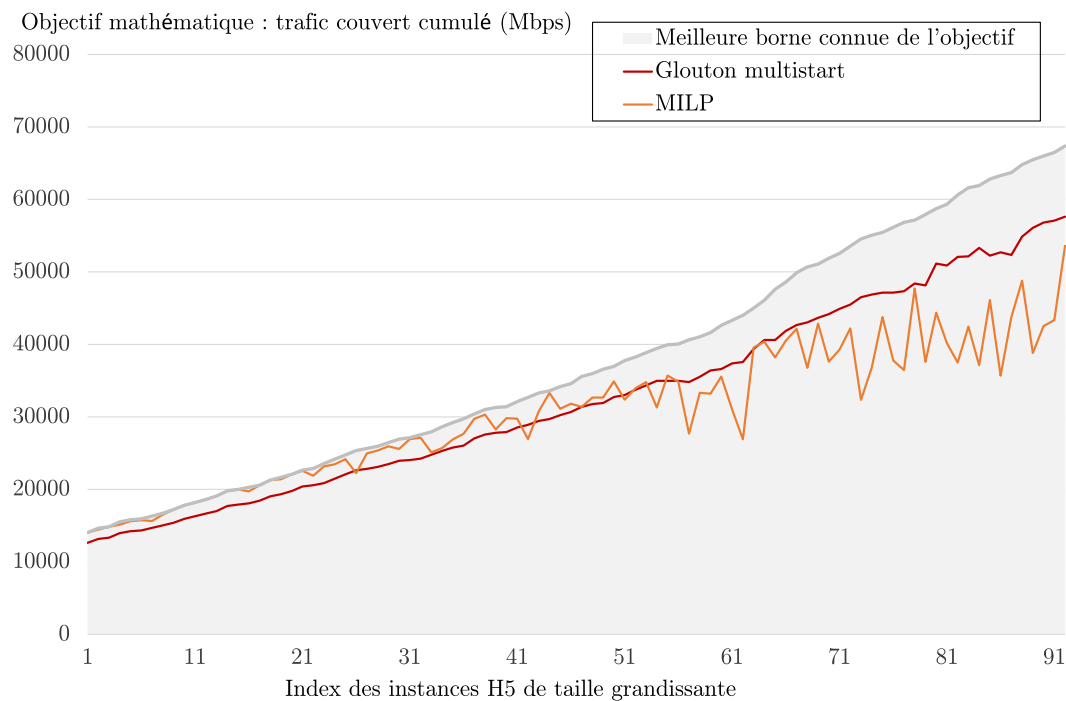


FIGURE 3.21 – Algorithmes de programmation linéaire et glouton, instances H_5

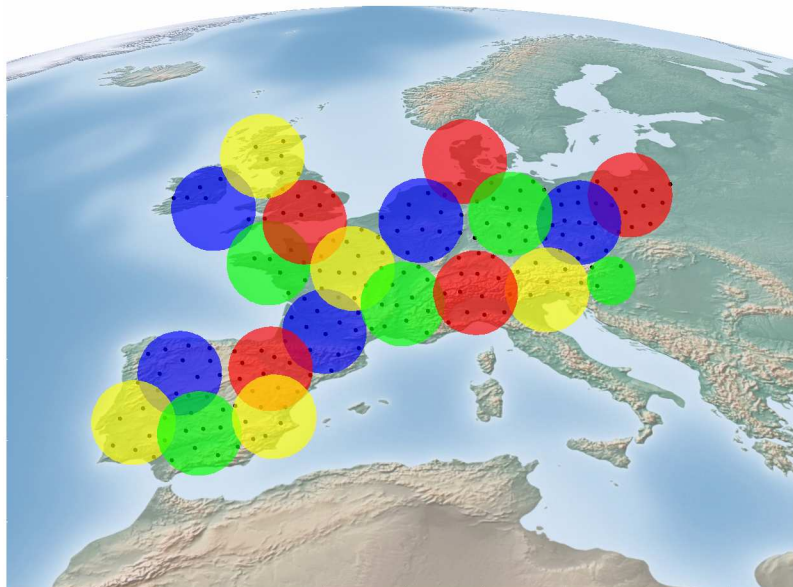


FIGURE 3.22 – Exemple de solution optimale produite par le programme linéaire mixte de placement de faisceaux

Partitionnement en k -moyennes pour la définition d’algorithmes avancés de placement de faisceaux

Sommaire

4.1	Le partitionnement k -moyennes	107
4.1.1	Définition et applications	107
4.1.2	Solution algorithmique classique : l’algorithme de Lloyd	108
4.2	Rupture de symétries et réduction de modèle par partitionnement k -means	110
4.2.1	Partitionnement de la zone de service par clustering k -means	111
4.2.2	Réduction du nombre de variables d’affectation des stations aux faisceaux	111
4.2.3	Réduction du nombre de contraintes station-faisceau-direction	113
4.2.4	Réduction du nombre de variables faisceau-faisceau	113
4.2.5	Modèle de programmation linéaire mixte réduit par partitionnement en k -moyennes	115
4.2.6	Nombre maximum de faisceaux par cluster : approche générale et approche heuristique	119
4.2.7	Optimisation du nombre de clusters	121
4.3	Expérimentations croisées des algorithmes de placement de faisceaux	123
4.4	Conclusions	126

4.1 Le partitionnement k -moyennes

4.1.1 Définition et applications

Le clustering, qui se traduit en français par le peu usité “quantification vectorielle”, est un processus dont l’objectif est de partitionner un ensemble de données en sous-ensembles d’éléments qui sont proches en un certain sens, à déterminer selon l’application. Dans tous les cas, ce groupement vise en effet une maximisation de la similarité dans chaque classe ainsi créée. Les applications du clustering sont nombreuses et surtout très diverses : reconnaissance de formes, analyse des données spatiales, traitement d’images, études de marché, catégorisation de documents, identification de cellules cancéreuses, algorithmes de moteurs de recherche...

Parmi les approches de clustering les plus connues, on retrouve celle qui nous

a été particulièrement utile pour l'amélioration de nos modèles mathématiques d'optimisation de beam layout, à savoir le partitionnement en k -moyennes, très étudié dans la littérature en tant que problème combinatoire complexe : [Pollard 1982],[Lloyd 1982],[Selim 1984],[Bradley 1998],[Kanungo 2002],[Zhao 2009],[Celebi 2013]. Pour un certain ensemble $\mathcal{S} = \{X_1, \dots, X_d\}$ de d vecteurs de \mathbb{R}^n et un certain $k \in \mathbb{N}_+^*$, produire un partitionnement en k -moyennes signifie rechercher une partition de \mathcal{S} en k clusters $\tilde{\mathcal{S}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_k$ qui minimise

$$\sum_{i=1}^k \sum_{X \in \tilde{\mathcal{S}}_i} \|X - \Omega_i\|^2 \quad (4.1)$$

où

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \Omega_i = \frac{1}{\text{card}(\tilde{\mathcal{S}}_i)} \sum_{\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{S}}_i} \tilde{X} \quad (4.2)$$

Il a été prouvé, par exemple dans l'article [Mahajan 2009], que ce problème de clustering particulier était NP-difficile.

4.1.2 Solution algorithmique classique : l'algorithme de Lloyd

4.1.2.1 L'algorithme de Lloyd

Une heuristique classique de résolution du problème d'optimisation du partitionnement en k -moyennes est l'algorithme de Lloyd, introduit dans l'article [Lloyd 1982]. Cet algorithme exploite pleinement une notion de centroïde qui est un point de \mathbb{R}^n que l'on définit pour chacun des k clusters construits à partir des $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ vecteurs en entrée : pour un cluster donné, il s'agit du barycentre de tous les points x_i qu'il contient. Pour démarrer, l'algorithme a besoin d'un jeu initial de k centroïdes $\Omega_1^0, \dots, \Omega_k^0 \in \mathbb{R}^n$, généré selon une certaine stratégie : par exemple selon un choix aléatoire de k vecteurs parmi les d vecteurs x_i . Les deux étapes suivantes, décrites pour une certaine itération $l \in \mathbb{N}$, sont ensuite alternées jusqu'à convergence ou vérification d'un critère d'arrêt :

- (i) Chaque vecteur x_i est associé au centroïde qui lui est le plus proche au sens de la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . Concrètement, il s'agit donc d'un partitionnement des vecteurs selon le diagramme de Voronoï associé à l'ensemble courant de centroïdes :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \tilde{\mathcal{S}}_i^l = \left\{ x \in \{x_1, \dots, x_d\} \mid \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \|x - \Omega_i^l\| \leq \|x - \Omega_j^l\| \right\} \quad (4.3)$$

- (ii) Les nouveaux centroïdes sont alors définis comme étant les barycentres des différents clusters ainsi construits :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \Omega_i^{l+1} = \frac{1}{\text{card}(\tilde{\mathcal{S}}_i^l)} \sum_{X \in \tilde{\mathcal{S}}_i^l} X \quad (4.4)$$

La convergence de l'algorithme est atteinte lorsque d'une itération à l'autre les centroïdes sont inchangés. Sinon, un critère d'arrêt standard est un nombre limite d'itérations. Ainsi, le temps d'exécution de l'algorithme de LLOYD est en $O(kdni)$ où i correspond au nombre d'itérations requises pour converger. Dans les faits, ce nombre d'itérations est souvent limité, l'algorithme de Lloyd est donc souvent considéré de complexité linéaire en pratique, bien qu'il soit clairement d'une complexité pire cas super-polynomiale.

4.1.2.2 Les cellules de Voronoï définies par l'algorithme

La définition de clusters de stations par l'algorithme de Lloyd produit naturellement une partition du plan en diagramme de Voronoï que nous exploitons pleinement par la suite. Considérons alors une partition $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_k$ ainsi produite et soit $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ ($i \neq j$). Nous introduisons les notations suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \Omega_{ik} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{N}_{ij} = \begin{pmatrix} \Omega_{j1} - \Omega_{i1} \\ \vdots \\ \Omega_{jn} - \Omega_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n (\Omega_{jh}^2 - \Omega_{ih}^2) \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{H}_{ij} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle X \mid \mathcal{N}_{ij} \rangle \leq \Lambda_{ij}\} \quad (4.8)$$

Soit également $X \in \tilde{S}_i$ pour un certain $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, le barycentre Ω_i de \tilde{S}_i est le plus proche de ces barycentres du point X en sortie de l'algorithme de Lloyd, donc pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$\|X - \Omega_i\|^2 \leq \|X - \Omega_j\|^2 \quad (4.9)$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{\sum_{h=1}^n \left(\frac{\Omega_{ih}^2}{2} - \frac{\Omega_{jh}^2}{2} - X_h \Omega_{ih} + X_h \Omega_{jh} \right)}_{=\langle X \mid \mathcal{N}_{ij} \rangle - \Lambda_{ij}} \leq 0 \quad (4.10)$$

Ainsi, $X \in \mathcal{H}_{ij}$. Puisque cela est vrai pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, cela veut dire que nous avons

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall X \in \tilde{S}_i, \quad X \in \bigcap_{\substack{j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ j \neq i}} \mathcal{H}_{ij} \stackrel{\text{définition}}{=} \mathcal{V}_i \quad (4.11)$$

Dans la terminologie du clustering en k -moyennes, les ensembles \mathcal{V}_i sont appelés “cellules de Voronoï”. Pour faire en sorte que tous ces ensembles \mathcal{V}_i soient bornés dans \mathbb{R}^n , il suffit d’ajouter les demi-espaces suivants dans leur définition :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall X \in \mathcal{V}_i, \forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_h \geq l_{h,\min} \text{ et } X_h \leq l_{h,\max} \quad (4.12)$$

où les coefficients $l_{1,\min}, \dots, l_{n,\min}$ et $l_{1,\max}, \dots, l_{n,\max}$ sont choisis de manière à avoir des intervalles $l_{h,\max} - l_{h,\min}$ suffisamment grands pour contenir l’intégralité du sous-ensemble de \mathbb{R}^n d’intérêt pour l’application.

4.2 Rupture de symétries et réduction de modèle par partitionnement k -means

Le programme linéaire mixte de la figure 3.13 comprend un nombre conséquent de symétries : à partir de toute solution, on peut construire une autre solution de même coût simplement par permutation des indices des faisceaux, puisqu’ils sont tous libres d’être placés n’importe où dans $\mathcal{A}_{\min,stations}$ (pour rappel, l’ensemble des point de \mathbb{R}^2 depuis lesquels il est possible de couvrir géométriquement au moins une station avec un des diamètres de faisceau disponibles), d’utiliser n’importe quelle taille admissible, et d’utiliser n’importe quel réflecteur. Supposons que chaque faisceau soit limité à un certain sous-ensemble de $\mathcal{A}_{\min,stations}$ pour le positionnement de son centre. Dans ce cas, il est moins naturel, voire impossible dans certaines situations, de générer à partir d’une solution donnée des solutions équivalentes simplement par permutation des indices : le centre du faisceau i peut très bien être interdit pour le faisceau j . En plus de cette rupture de symétries, cela signifie que pour chaque faisceau, certaines stations utilisateurs deviendraient inaccessibles depuis les positions autorisées : moins de variables d’allocation de faisceaux aux stations seraient nécessaires, par suppression de celles représentant des associations impossibles. Les techniques de réduction de la taille des modèles mathématique d’optimisation de placement de faisceaux que nous proposons ici s’appuient pleinement sur ces deux principes. Cependant, ce type de restrictions pour les centres des faisceaux peut se traduire par une perte de généralité de résolution pour le problème d’optimisation : avec des limitations de domaines de centres inappropriées, conjuguées à des nombres maximum de faisceaux par sous-régions mal dimensionnés, certaines solutions de beam layout accessibles avec le modèle originel pourraient ne plus pouvoir être produites. Dans cette section, nous proposons une solution basée sur le clustering k -means pour appliquer concrètement cette rupture spatiale de symétrie. La méthode proposée ouvre la porte à plusieurs réductions possibles de la taille du modèle. On prouve également que sous certaines conditions, que nous détaillons, il n’y pas de perte de généralité de résolution avec le modèle mathématiques exploitant le clustering k -means, dans le sens où il est capable de produire n’importe quelle solution du problème originel de la figure 3.13. Par contre, on montre également qu’accepter de perdre partiellement cette généralité de résolution peut être très efficace à des fins de réduction de taille de modèle mathématique, tout en supprimant uniquement les solutions les moins prometteuses de l’espace de recherche vis-à-vis de l’objectif mathématique. Le nombre de clusters à utiliser est également discuté.

4.2.1 Partitionnement de la zone de service par clustering k -means

Le caractère innovant de la technique proposée ici de réduction de la taille des modèles mathématiques d'optimisation de beam layout réside dans l'exploitation des cellules de Voronoï issues du clustering en k -moyennes des stations utilisateurs, vecteurs de \mathbb{R}^2 . Ces dernières sont directement utilisées en tant que domaines admissibles pour les variables continues de centres de faisceaux du modèle de programmation linéaire mixte d'optimisation de beam layout de la figure 3.13. Cela est parfaitement possible puisque ces cellules sont des intersections de demi-espaces, ce qui correspond aux contraintes les plus naturelles de la programmation linéaire. A noter que pour l'optimisation de beam layout, les coefficients $l_{1,\min}, \dots, l_{n,\min}$ et $l_{1,\max}, \dots, l_{n,\max}$ seront paramétrés de manière à ce que l'union de tous les \mathcal{V}_i contiennent $\mathcal{A}_{\min, \text{stations}}$, pour ne pas réduire l'ensemble des centres atteignables depuis les différents clusters. Cette limitation sur les centres possibles des faisceaux permet d'obtenir un modèle qui est à la fois réduit en taille et qui contient moins de symétries, tout en gardant la possibilité d'avoir un modèle aussi général que le modèle de la figure 3.13 sous certaines conditions détaillées plus bas. Nous discutons également la possibilité de sacrifier cette généralité de résolution afin de réduire encore plus la taille des modèles mathématiques, cette approche heuristique étant comparée aux approches exactes.

En pratique, après le clustering en k -moyennes des stations utilisateurs, on définit pour chaque cluster i un nombre maximum de faisceaux $\mathcal{N}_i \geq 1$, selon la stratégie retenue par rapport à la conservation de la généralité de résolution (discuté en paragraphe 4.2.6). Chaque faisceau $b \in \mathcal{B}$ est maintenant caractérisé par un index de cluster $c_b \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Ensuite, chaque faisceau b est contraint d'appartenir à \mathcal{V}_{c_b} , ce qui se traduit en pratique par la conjonction de $k-1$ contraintes : un exemple est donné dans la figure 4.1 où un certain ensemble de stations utilisateurs (les points sur la figure) est partitionné en 8 clusters, donnant lieu à une intersection de 7 demi-espaces (a)-(g) qui définit le domaine admissible continu pour les faisceaux de ce cluster (en noir en figure (h)).

4.2.2 Réduction du nombre de variables d'affectation des stations aux faisceaux

Une conséquence directe de la restriction du domaine des centres de faisceau aux polyèdres de Voronoï est que, pour un faisceau donné, seules les stations dans ou proches de cette cellule sont accessibles : moins de variables $\alpha_{s,b}$ sont nécessaires par rapport au modèle de la figure 3.13. Plus précisément, pour chaque cluster i , l'ensemble des stations atteignables $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}$ est directement lié à la taille de faisceau maximale :

$$\mathcal{S}_i = \left\{ s \in \mathcal{S} \mid \min_{X \in \mathcal{V}_i} \|S_{\text{coord},s} - X\| \leq \frac{1}{2} \frac{\max_{w \in \mathcal{W}} W_w}{\cos\left(\frac{\pi}{n_{\text{directions}}}\right)} \right\} \quad (4.13)$$

Un exemple de ce type de sous-ensemble de stations est fourni dans la figure 4.2(b) : l'ensemble \mathcal{S}_i est constitué des stations en rouge. Nous introduisons des notations complémentaires par rapport à cette réduction des variables $\alpha_{s,b}$: pour chaque station $s \in \mathcal{S}$, $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}$ désigne l'ensemble des

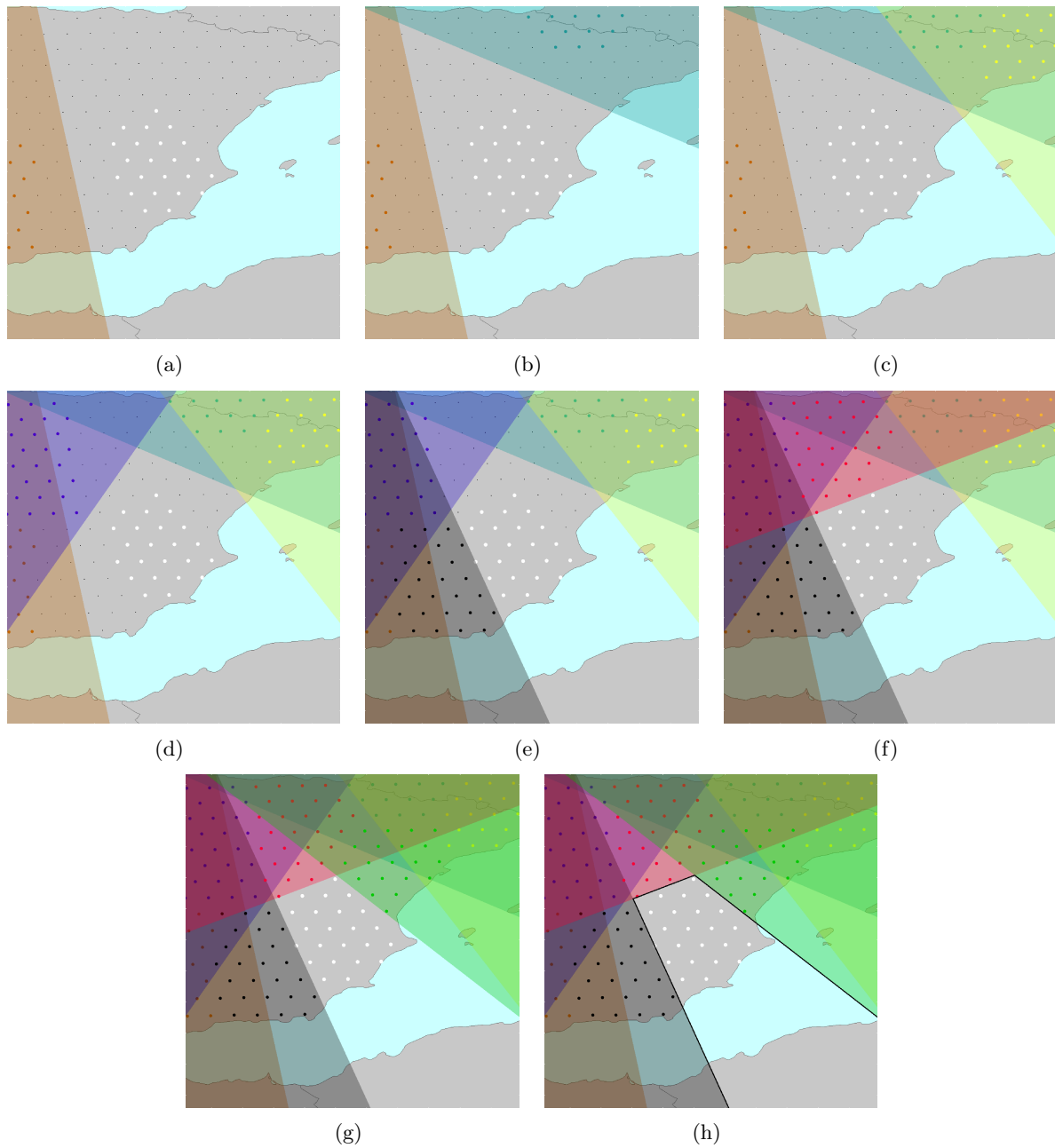


FIGURE 4.1 – Restriction d'un faisceau à la cellule de Voronoï caractérisant le cluster auquel il appartient : intersection de $k - 1$ demi-espaces

faisceaux qui peuvent couvrir la station s et pour chaque faisceau $b \in \mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{S}}_b \subset \mathcal{S}$ désigne l'ensemble des stations pouvant être couvertes par b .

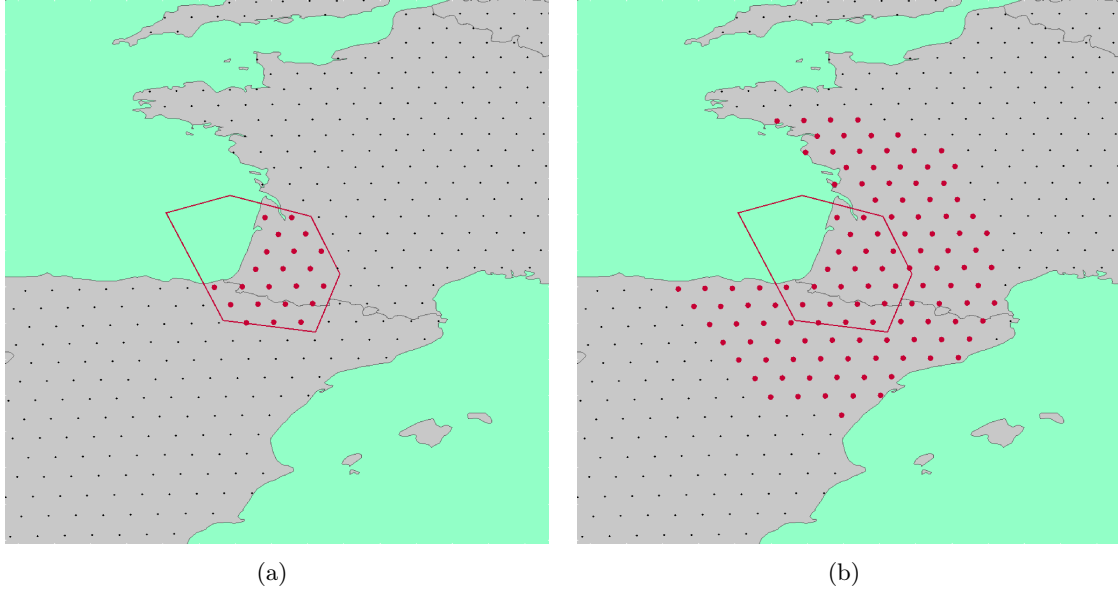


FIGURE 4.2 – Pour un cluster donné, exemple de stations dans la cellule (a) et de stations atteignables (b)

4.2.3 Réduction du nombre de contraintes station-faisceau-direction

Soit i un cluster de stations et soit une station $s \in \mathcal{S}_i$ telle que $\mathcal{S}_{\text{coord},s} \notin \mathcal{V}_i$ (atteignable mais non strictement contenue dans la cellule de Voronoï). Puisque \mathcal{V}_i est un ensemble convexe en tant qu’intersection de demi-espaces fermés (tout comme le singleton $\{\mathcal{S}_{\text{coord},s}\} \in \mathbb{R}^2$), on sait alors par le théorème de séparation des convexes qu’il existe une droite séparant strictement \mathcal{V}_i et $\{\mathcal{S}_{\text{coord},s}\}$. La propriété résultante ici est que l’ensemble des angles possibles $(\mathcal{S}_{\text{coord},s} \mid X)$ quand $X \in \mathcal{V}_i$ est un intervalle de taille inférieure ou égale à π . Un raisonnement par l’absurde permet de montrer que les directions extrêmes qui définissent cet intervalle angulaire font partie des directions $V - \mathcal{S}_{\text{coord},s} \in \mathbb{R}^2$, où V est un point extrême du polyèdre convexe \mathcal{V}_i . La figure 4.3 est une illustration de ce principe. Pour un certain faisceau $b \in \mathcal{B}$ placé en $X \in \mathcal{V}_i$, la propriété intéressante pour nos modèles mathématiques découlant de ce résultat est la suivante : parmi les $n_{\text{directions}}$ directions discrétisées définies pour linéariser les distances euclidiennes, nous avons la garantie que la “plus proche direction” du vecteur $X - \mathcal{S}_{\text{coord},s}$ est une des directions discrètes contenues dans cet intervalle angulaire, ce sous-ensemble de directions étant noté $\mathcal{U}'_{s,i} \subset \mathcal{U}$. Il est ainsi suffisant de ne considérer que ces directions dans les contraintes (3.51) : le nombre de contraintes est réduit. A noter que pour une station $s \in \mathcal{S}_i$ telle que $\mathcal{S}_{\text{coord},s} \in \mathcal{V}_i$, nous aurons $\mathcal{U}'_{s,i} = \mathcal{U}$ puisque cette simplification n’est pas applicable.

4.2.4 Réduction du nombre de variables faisceau-faisceau

En ce qui concerne les couples de faisceaux et les contraintes antenne qui les forcent à être suffisamment séparés s’ils utilisent le même réflecteur satellite (contraintes (3.54) dans la figure 3.13), un avantage significatif du clustering est la garantie que nous avons pour certains couples de faisceaux qu’ils ne pourront jamais être plus proche que le seuil de distance en dessous duquel

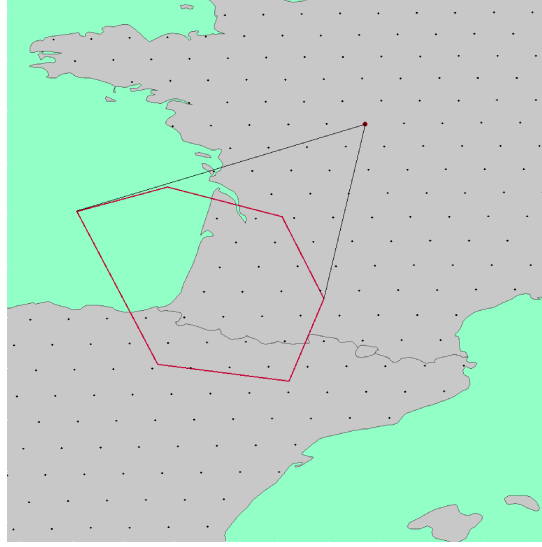


FIGURE 4.3 – Cône angulaire de visibilité pour une station atteignable en dehors de la cellule de Voronoï

ils doivent utiliser deux réflecteurs distincts (ce qui par transitivité, assurée par $\kappa > \varepsilon$, garantit également que les faisceaux ne se chevaucheront jamais trop). Effectivement, pour un faisceau b appartenant à un certain cluster i et b' appartenant au cluster j différent de i , si

$$\min_{X \in \mathcal{V}_i, Y \in \mathcal{V}_j} \|X - Y\| \geq \kappa \max_{w \in \mathcal{W}} W_w \quad (4.14)$$

alors nous sommes sûrs que b et b' seront toujours suffisamment séparés et ne nécessitent pas de variables $\beta_{b,b'}$ et $\lambda_{b,b'}$ spécifiques. Par contre, quand

$$\min_{X \in \mathcal{V}_i, Y \in \mathcal{V}_j} \|X - Y\| < \kappa \max_{w \in \mathcal{W}} W_w \quad (4.15)$$

il est nécessaire de définir à la fois des variables $\beta_{b,b'}$ et des variables $\lambda_{b,b'}$, mais, comme dans le paragraphe précédent 4.2.3 sur les stations hors-cluster, le nombre de variables $\gamma_{b,b',u}$ et les contraintes (3.54) correspondantes peuvent être réduits en ne considérant les directions discrétisées pertinentes, notées $\mathcal{U}'_{b,b'} \subset \mathcal{U}$ pour $(b,b') \in \mathcal{B}^2$. En effet, puisque les différents clusters sont soit disjoints soit n'ont en commun qu'une arête de polyèdre, nous avons également la garantie que cet intervalle angulaire de visibilité de taille inférieure ou égale à π existe pour les vecteurs centre-centre (voir la figure 4.4 pour une illustration). A noter qu'aucune de ces simplifications ne peut être appliquée à un couple de faisceaux appartenant tous deux au même cluster. On note $\mathbf{B} \subset \mathcal{B}^2$ l'ensemble des couples de faisceaux (b,b') (avec $b > b'$ pour éviter des redondances de variables et de contraintes) pour lesquels nous avons besoin de variables $\beta_{b,b'}$ et $\lambda_{b,b'}$ pour exprimer les contraintes antenne.

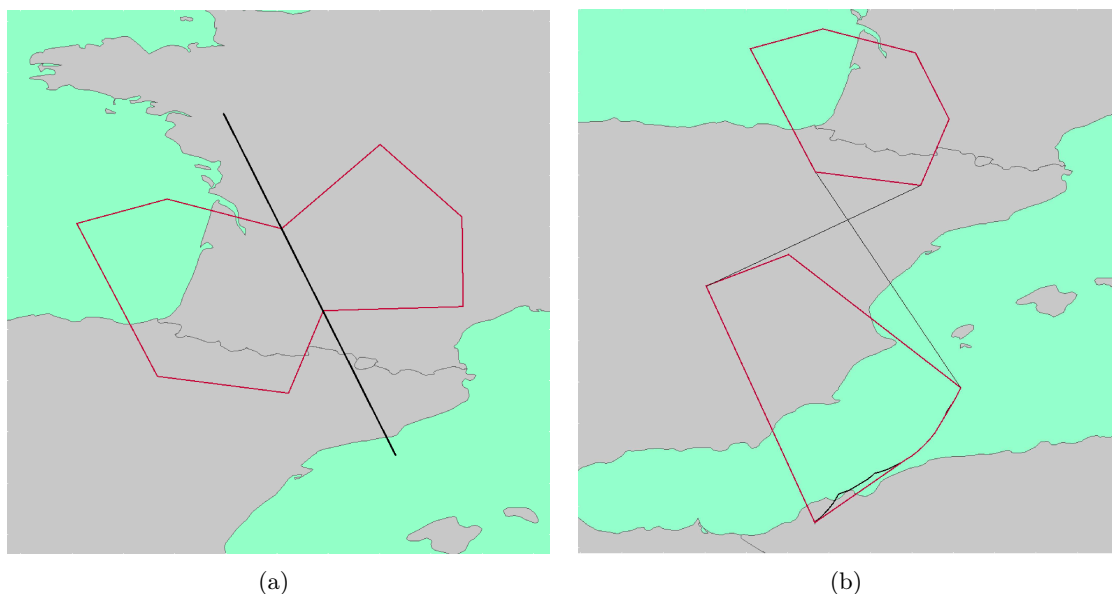


FIGURE 4.4 – (a) Intervalle angulaire égal à π pour deux clusters partageant une arête (b) Intervalle angulaire inférieur à π pour deux clusters disjoints

4.2.5 Modèle de programmation linéaire mixte réduit par partitionnement en k -moyennes

Ces réductions de variables et de contraintes détaillées dans les paragraphes précédents permettent d'aboutir à un modèle d'optimisation de beam layout irrégulier allégé par rapport au modèle de la figure 3.13. Dans ce nouveau modèle, la façon de définir les valeurs des coefficients N et M_s doit être mise à jour pour profiter pleinement du partitionnement en cellules de Voronoï. Pour ces coefficients de relaxation de contraintes, rappelons que plus ils sont petits, meilleures seront les performances numériques des solveurs de programmation linéaire mixte sollicités. Or, la définition de clusters permet justement de resserrer les valeurs de ces coefficients par rapport à celles utilisées dans le modèle de la figure 3.13. En ce qui concerne le coefficient N chargé de la relaxation de la séparation des couples de faisceaux qui ne doivent pas être contraints, il est maintenant défini pour tous $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et fixé à la valeur

$$N_{i,j} = \kappa \max_{w \in \mathcal{W}} W_w + \max_{X \in \mathcal{V}_i, Y \in \mathcal{V}_j} \|X - Y\| \quad (4.16)$$

pour les mêmes raisons que précédemment : somme de la distance de séparation maximale pouvant être exigée et de la plus grande distance possible entre deux points des clusters i et j . Dans le cas des coefficients M_s qui eux relaxent la contrainte de couverture géométrique des stations par les faisceaux, ils sont maintenant définis pour chaque cluster $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et pour chaque station $s \in \mathcal{S}_i$ avec la valeur

$$M_{i,s} = \min \left(\max_{X \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{A}_{\min, \text{stations}}} \|X - S_{\text{coord},s}\|, \max_{s' \in \mathcal{S}_i} \|S_{\text{coord},s'} - S_{\text{coord},s}\| \right) \quad (4.17)$$

là aussi pour les mêmes raisons que précédemment, à savoir pour ne pas réduire l'ensemble des centres possibles pour les faisceaux de ce cluster quand la contrainte est relâchée. Enfin, la contrainte d'avoir un total d'au plus n_{\max} faisceaux actifs est rajoutée : elle n'est plus automatiquement vérifiée dès lors que $\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_i \geq n_{\max}$. On obtient finalement le modèle de la figure 4.5.

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{b \in \mathcal{B}_s} T_s \alpha_{s,b} & (4.18) \\ & \text{sous les contraintes} \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \text{ tel que } i \neq c_b, \quad (\Omega_{i1} - \Omega_{c_b 1})x_b + (\Omega_{i2} - \Omega_{c_b 2})y_b \leq \Lambda_{c_b i} & (4.19) \\ & \forall s \in \mathcal{S}, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_s} \alpha_{s,b} \leq 1 & (4.20) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{w \in \mathcal{W}} \omega_{b,w} = 1 & (4.21) \\ & \forall s \in \mathcal{S}, \forall b \in \mathcal{B}_s, \forall u \in \mathcal{U}'_{s,c_b}, \quad \begin{pmatrix} x_b - X_{\text{stations},s} \\ y_b - Y_{\text{stations},s} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2} \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + (1 - \alpha_{s,b}) M_{c_b,s} & (4.22) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{r \in \mathcal{R}} \rho_{b,r} = 1 & (4.23) \\ & \forall (b, b') \in \mathbf{B}, \quad \lambda_{b,b'} \geq \frac{\kappa - \varepsilon}{2} \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w (\omega_{b,w} + \omega_{b',w}) - (\kappa - \varepsilon) \max_{w \in \mathcal{W}} W_w \beta_{b,b'} & (4.24) \\ & \forall (b, b') \in \mathbf{B}, \quad \sum_{u \in \mathcal{U}'_{b,b'}} \gamma_{b,b',u} \geq 1 & (4.25) \\ & \forall (b, b') \in \mathbf{B}, \forall u \in \mathcal{U}'_{b,b'}, \\ & \begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b,w} + \sum_{w \in \mathcal{W}} W_w \omega_{b',w} \right) \varepsilon + \lambda_{b,b'} - N_{c_b, c_{b'}} (1 - \gamma_{b,b',u}) & (4.26) \\ & \forall (b, b') \in \mathbf{B}, \forall r \in \mathcal{R}, \quad \beta_{b,b'} + \rho_{b,r} + \rho_{b',r} \leq 2 + (1 - a_b) + (1 - a_{b'}) & (4.27) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \hat{\mathcal{S}}_b} \alpha_{s,b} \leq \text{card}(\hat{\mathcal{S}}_b) a_b & (4.28) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \hat{\mathcal{S}}_b} T_s \alpha_{s,b} \leq \sum_{w \in \mathcal{W}} \Gamma_w \omega_{b,w} & (4.29) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{s \in \hat{\mathcal{S}}_b} \alpha_{s,b} \geq N_{\min} a_b & (4.30) \\ & \sum_{b \in \mathcal{B}} a_b \leq n_{\max} & (4.31) \\ & \text{Variables : } \alpha_{s,b}, \omega_{b,w}, \rho_{b,r}, a_b, \beta_{b,b'}, \gamma_{b,b',u} \in \{0, 1\} \text{ and } x_b, y_b \in \mathbb{R} \text{ and } \lambda_{b,b'} \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

FIGURE 4.5 – Modèle de programmation linéaire mixte d'optimisation de beam layout basé sur une partition en k -moyennes des stations utilisateurs

Une fois les valeurs des coefficients $M_{i,s}$ définies, toutes les contraintes pouvant impacter les domaines continus accessibles pour les centres de faisceaux sont entièrement connues, à savoir : la contrainte de couverture des stations par les faisceaux (4.22), la contrainte qu’au moins une station doit être à portée de chaque centre admissible (4.30), et enfin l’appartenance aux polyèdres de Voronoï (4.19). En complément direct de la figure 4.1, la figure 4.6 finit de détailler la façon dont les domaines de centres finaux (noté \mathcal{V}_i' pour chaque cluster i) sont obtenus à partir des contraintes (4.22) et (4.30), le point de départ étant le polyèdre de Voronoï \mathcal{V}_i . Tout l’intérêt du choix précis de valeurs pour les $M_{i,s}$ est de garantir que les contraintes restantes sur les centres en cas de relaxation par $M_{i,s}$ de (4.22) sont dominées (4.19) et (4.30). Ensuite, on remarque que seuls les clusters en bord de la zone de couverture utilisent activement la contrainte “au moins une station couverte par faisceau actif” qui n’intersecte jamais \mathcal{V}_i sinon. Finalement, un exemple complet de clustering et donc d’ensembles continus de centres par cluster est fourni en figure 4.7.

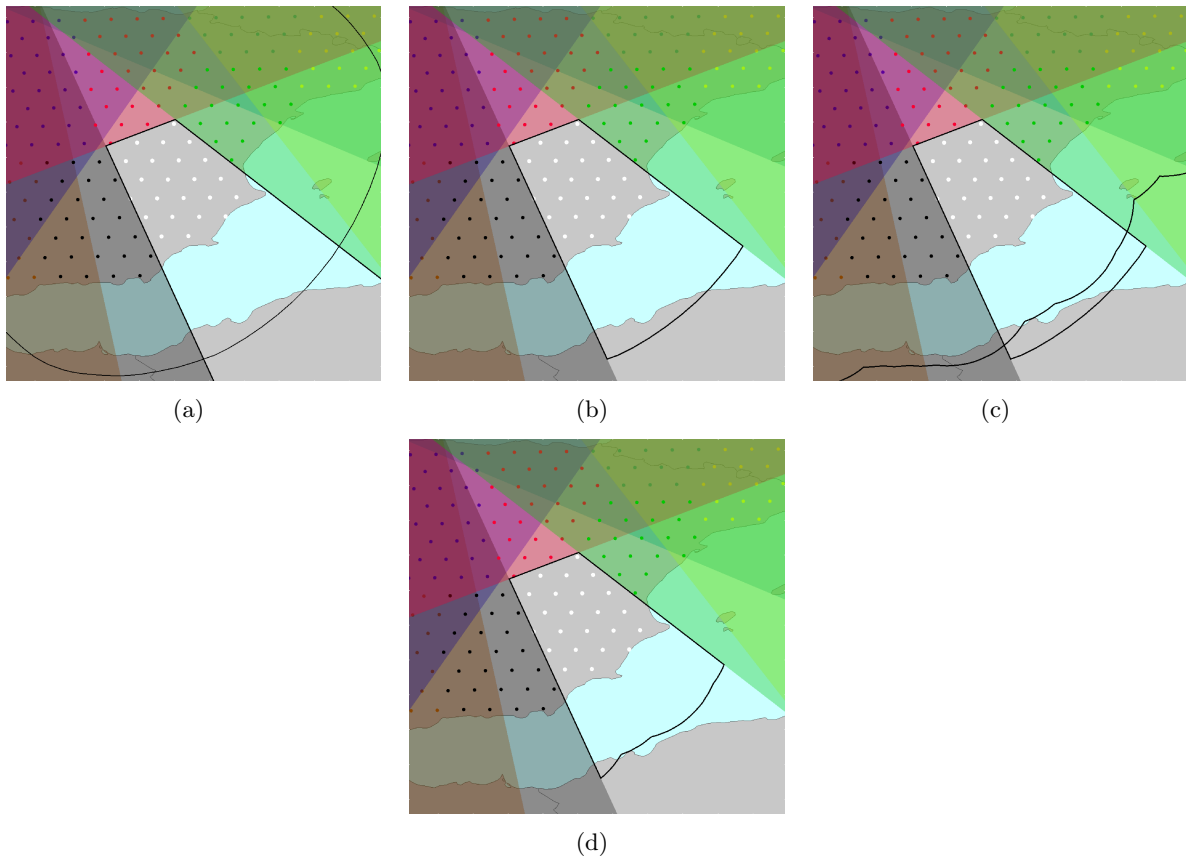


FIGURE 4.6 – Limitations sur les domaines des centres résultant des contraintes (4.22) sur les figures (a) et (b), et celles résultant des contraintes (4.30) sur les figures (c) et (d)

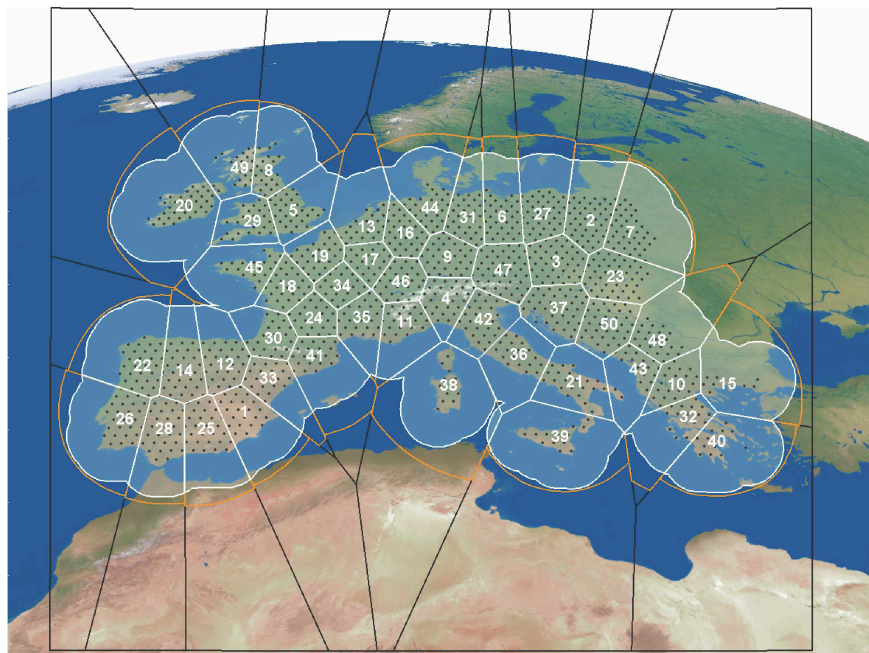


FIGURE 4.7 – Partitionnement en k -moyennes de la zone de service ($k = 50$) et domaines admissibles pour les centres : les cellules de Voronoï en noir, les domaines résultant des contraintes (4.22) en orange, et ceux résultant des contraintes (4.30) en blanc

4.2.6 Nombre maximum de faisceaux par cluster : approche générale et approche heuristique

Il est clair que toute solution produite par le modèle de la figure 4.5 basé sur le clustering correspond à une solution du modèle originel de la figure 3.13 puisque le second peut être vu comme une relaxation du premier. A l’inverse, une solution issue du modèle sans clustering peut n’avoir aucune solution correspondante dans le modèle avec clustering quand, par exemple, la solution en question comprend $m + 1$ faisceaux dans une certaine zone de centres uniquement accessible depuis un certain cluster i pour lequel le nombre maximum de faisceaux \mathcal{N}_i a été fixé à une valeur inférieure ou égale à m . Une façon de faire en sorte que le modèle avec clustering reste général est de fixer pour chaque cluster i le nombre maximum \mathcal{N}_i de faisceaux autorisés dans ce cluster au nombre maximum de faisceaux pouvant géométriquement être placés sur le domaine \mathcal{V}'_i , ou tout du moins à un majorant le plus serré possible de ce nombre maximum. Pour estimer un tel majorant, la première étape de la procédure que nous proposons ici consiste à exploiter, sur le cluster considéré, l’analyse surfacique présentée en paragraphe 3.2.3.1 pour définir un nombre maximum temporaire $\mathcal{N}_{i,\text{temporaire}}$. Ensuite, nous proposons d’améliorer ce majorant avec un programme linéaire mixte directement dérivé de celui de la figure 4.5, dont l’objectif est de déterminer exactement le nombre de faisceaux qui peuvent être placés sur le cluster i en ne considérant que les contraintes antenne et les contraintes de non-chevauchement. Pour ce faire, recourir à un modèle qui inclut toutes les contraintes et variables liées aux stations utilisateurs n’est pas nécessaire, tant que les domaines des centres qu’elles permettent de définir

sont correctement fournis en entrée. En d'autres termes, avoir une représentation sous forme de polyèdre $\mathcal{V}'_{i,\text{polyg}} = \{X \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{A}_i X \leq \mathbf{B}_i\}$ (avec $m_i > 0$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times 2}$ et $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$) de \mathcal{V}'_i permet d'aboutir à un programme linéaire mixte simple qui maximise le nombre de faisceaux actifs sur le cluster i . Dans la plupart des cas (zone intérieure du clustering) \mathcal{V}'_i est naturellement un polyèdre. Seules les cellules en bordure de zone de service donnent lieu à des ensembles admissibles de centres non-polygonaux par intersection avec $\mathcal{A}_{\text{min,stations}}$: dans ce cas nous choisissons de les approcher par des polygones convexes englobants de m_i côtés, ce qui veut dire que nous assurons d'avoir $\mathcal{V}'_i \subset \mathcal{V}'_{i,\text{polyg}}$. Le programme linéaire mixte que nous obtenons ainsi est fourni en figure 5.5. Il est d'abord utilisé avec un nombre maximum de faisceaux $N_B = \mathcal{N}_{i,\text{temporaire}}$ et un seul diamètre de faisceau possible : le plus petit ($W_{\text{min}} \in \mathbb{R}^+$), pour des contraintes de séparation moindres qui permettent de placer plus de faisceaux.

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } \sum_{b \in \mathcal{B}} a_b & (4.32) \\ & \text{sous les contraintes} \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{A}_i \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \leq \mathbf{B}_i & (4.33) \\ & \forall b \in \mathcal{B}, \quad \sum_{r \in \mathcal{R}} \rho_{b,r} = 1 & (4.34) \\ & \forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b \neq b', \quad \lambda_{b,b'} + (\kappa - \varepsilon) W_{\text{min}} \beta_{b,b'} \geq (\kappa - \varepsilon) W_{\text{min}} & (4.35) \\ & \forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b \neq b', \quad \sum_{u \in \mathcal{U}} \gamma_{b,b',u} \geq a_b + a_{b'} - 1 & (4.36) \\ & \forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b \neq b', \forall u \in \mathcal{U}, \\ & \begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U_{u,x} \\ U_{u,y} \end{pmatrix} \geq \varepsilon W_{\text{min}} + \lambda_{b,b'} - N_{i,i}(1 - \gamma_{b,b',u}) & (4.37) \\ & \forall b, b' \in \mathcal{B} \text{ tels que } b \neq b', \forall r \in \mathcal{R}, \quad \beta_{b,b'} + \rho_{b,r} + \rho_{b',r} \leq 2 + (1 - a_b) + (1 - a_{b'}) & (4.38) \\ & \text{Variables : } \rho_{b,r}, a_b, \beta_{b,b'}, \gamma_{b,b',u} \in \{0, 1\} \text{ et } x_b, y_b \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_{b,b'} \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

FIGURE 4.8 – Programme linéaire mixte de maximisation du nombre de faisceaux actifs dans le cluster i

En pratique, chaque instance du problème de la figure 5.5 est résolue par un solveur de programmation linéaire mixte pendant une durée limitée. A l'issue de cette exécution, si l'optimalité est atteinte et prouvée, alors \mathcal{N}_i est fixé à cet optimum, sinon \mathcal{N}_i reste égal à $\mathcal{N}_{i,\text{temporaire}}$ obtenu précédemment par analyse surfacique. Avec cette stratégie de définition de \mathcal{N}_i , nous garantissons la généralité du modèle avec clustering.

A noter que les couples de faisceaux d'un même cluster ne peuvent pas profiter des dif-

férentes techniques de réduction de la taille du modèle introduites dans les paragraphes précédents : il faut systématiquement déclarer toutes les variables et toutes les contraintes concernant ces couples. Ainsi, il peut être intéressant de limiter les valeurs \mathcal{N}_i quitte à compromettre la généralité de résolution, afin de réduire encore plus significativement la taille des modèles à résoudre. Pour ce faire, l’heuristique de définition d’un tel \mathcal{N}_i repose sur une exploitation du nombre maximum de faisceaux n_{\max} , de l’aire du cluster \mathcal{V}_i relativement à l’aire de $\mathcal{A}_{\min,stations}$, et des tailles extrémales de faisceau qui permettent de définir une “densité surfacique maximale de faisceaux” pour les clusters :

$$\mathcal{N}_i = \lceil n_{\max} \left(\frac{\max_{w \in \mathcal{W}} W_w}{\min_{w \in \mathcal{W}} W_w} \right)^2 \frac{\text{Aire}(\mathcal{V}_i)}{\text{Aire}(\mathcal{A}_{\min,stations})} \rceil \quad (4.39)$$

En pratique, cette définition présuppose que nous ne voulons pas favoriser un cluster plus qu’un autre en termes de nombre de faisceaux : le nombre total de faisceaux n_{\max} est réparti sur tous les clusters, avec une marge qui permet aux clusters contenant les plus fortes demandes (en termes de de trafic requis par les stations utilisateurs) d’utiliser plus de faisceaux et donc notamment une pluralité de faisceaux étroits.

4.2.7 Optimisation du nombre de clusters

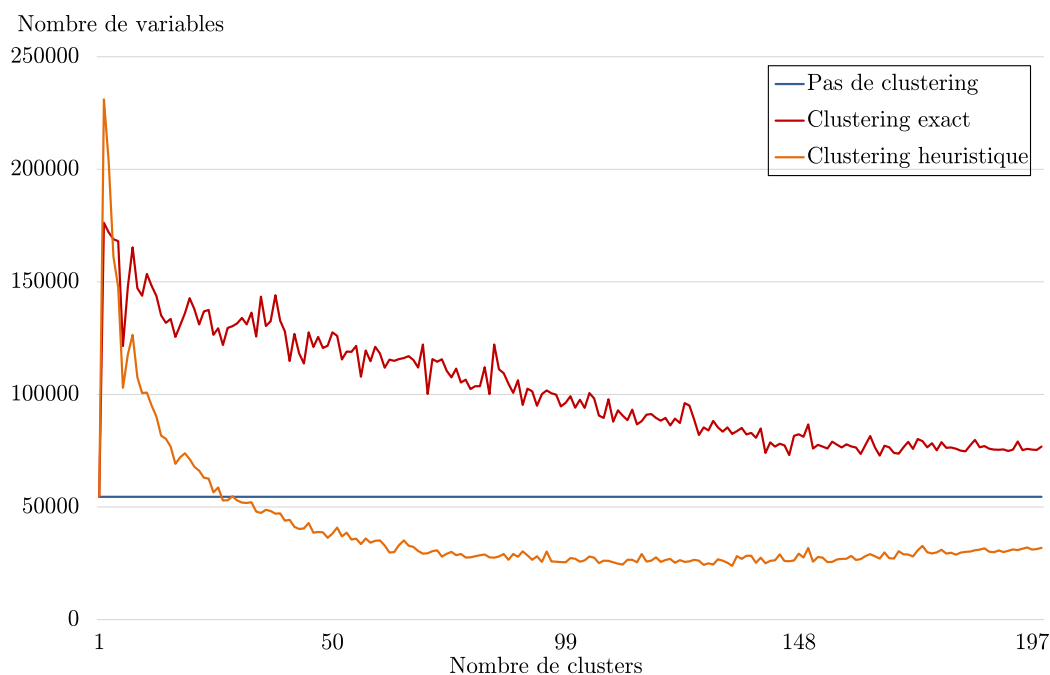


FIGURE 4.9 – Évolution du nombre de variables des différents programmes linéaires avec le nombre de clusters

Les deux stratégies de définition du nombre maximum de faisceaux dans chaque cluster dans

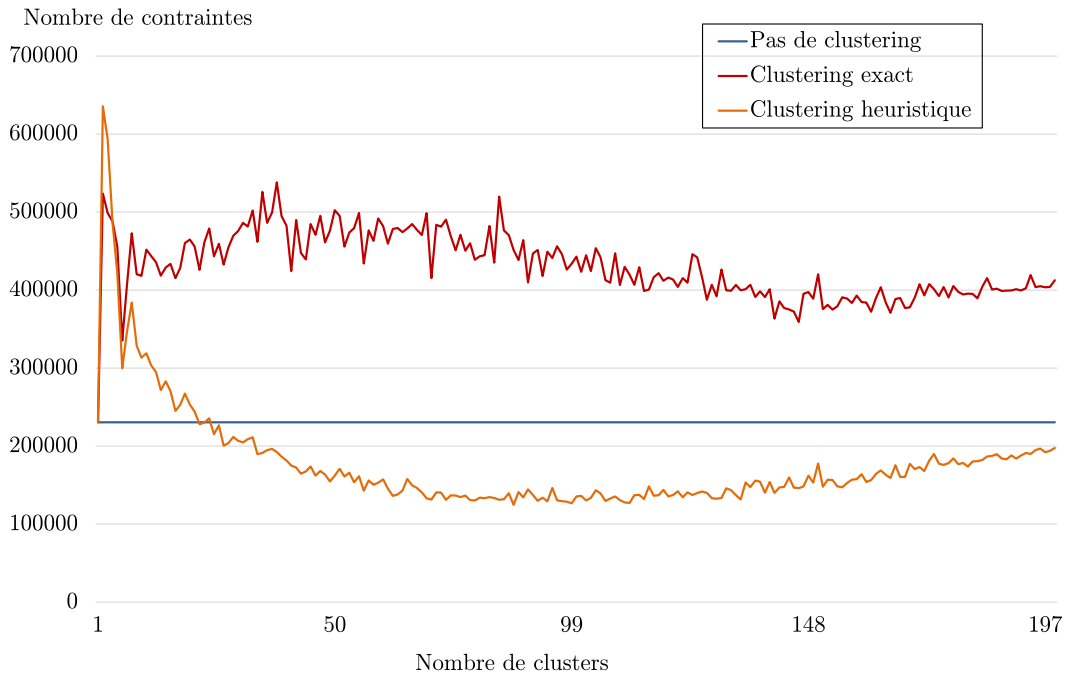


FIGURE 4.10 – Évolution du nombre de contraintes des différents programmes linéaires avec le nombre de clusters

le modèle réduit ont été analysées avec un nombre variable de clusters, l'attention ayant été prêtée sur la sensibilité du nombre de variables et de contraintes à ce paramètre k . L'analyse que nous préconisons de mener systématiquement est ici conduite pour une instance caractérisée par $N_S = 200$, $N_W = 2$, $N_R = 4$, $n_{\text{directions}} = 12$, $\kappa = \sqrt{3}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $n_{\text{max}} = 50$: les figures 4.9 et 4.10 donnent l'évolution d'une part du nombre de variables (a) et d'autre part du nombre de contraintes (b) pour cette instance en fonction du nombre de clusters k . Pour les deux stratégies de clustering, il existe un nombre de clusters optimal vis-à-vis du nombre de variables et de contraintes résultantes dans le modèle 4.5 : dans l'exemple proposé, 107 clusters pour le clustering heuristique et 148 pour le clustering exact. Cependant, avec le clustering préservant la généralité de résolution, même si les gains en termes de ruptures de symétries sont les mêmes, la réduction de la taille du modèle n'est pas aussi franche que celle que la définition heuristique des nombres maximum de faisceaux par cluster permet d'atteindre, par rapport au modèle sans clustering. Encore une fois, cela est dû au fait que plus il y a de faisceaux dans les clusters, moins efficaces sont les procédures de réduction de la taille des modèles mathématiques décrites dans les paragraphes précédents.

4.3 Expérimentations croisées des algorithmes de placement de faisceaux

Dans cette section, nous reprenons les expérimentations sur les cinq classes d’instances H_1, \dots, H_5 déjà rencontrées en section 3.3.3. Rappelons que l’objectif des développements théoriques qui ont abouti au modèle de programmation linéaire mixte, qui exploite activement la notion de clustering k -moyennes, était l’amélioration des performances de l’approche de programmation mathématique par rapport à l’heuristique gloutonne de la section 3.1.2. Il s’agit donc d’être meilleur que le programme linéaire mixte basique de la figure 3.13. Pour cela, nous avons appliqué les techniques de clustering présentées ci-dessus aux instances H_i . Notamment, après optimisation du nombre de clusters, nous prévoyons le test des deux approches de définition du nombre de faisceaux par cluster, ce qui donne ainsi naissance à deux modèles linéaires : le modèle avec clustering exact et celui avec clustering heuristique. Tous deux sont comparés au modèle de la figure 3.13 à travers des résolutions par le solveur Gurobi elles aussi limitées à 1500 secondes et deux cœurs de la machine Intel Xeon X5690 (3.47 GHz, 24Go de RAM) exécutant ces optimisations. La forme proposée des résultats est la même qu’au chapitre précédent, à savoir une représentation des scores en termes de fonction objectif sur des instances grandissantes, dans les figures 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, et 4.15.

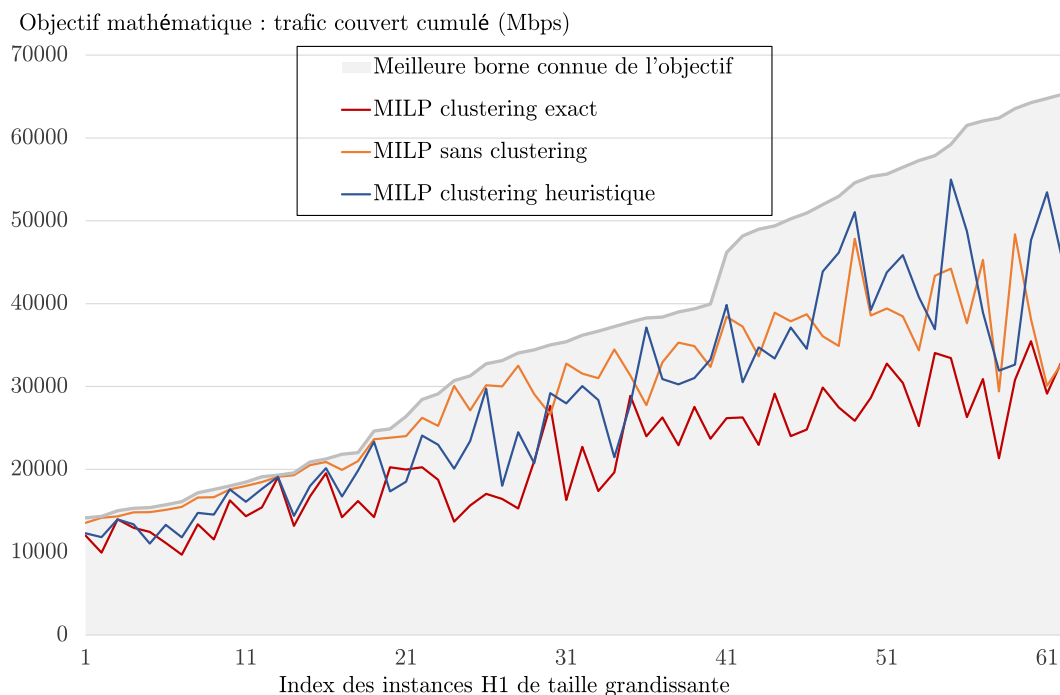


FIGURE 4.11 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d’hétérogénéité H_1

Les observations essentielles que nous pouvons faire sur ces résultats sont les suivantes :

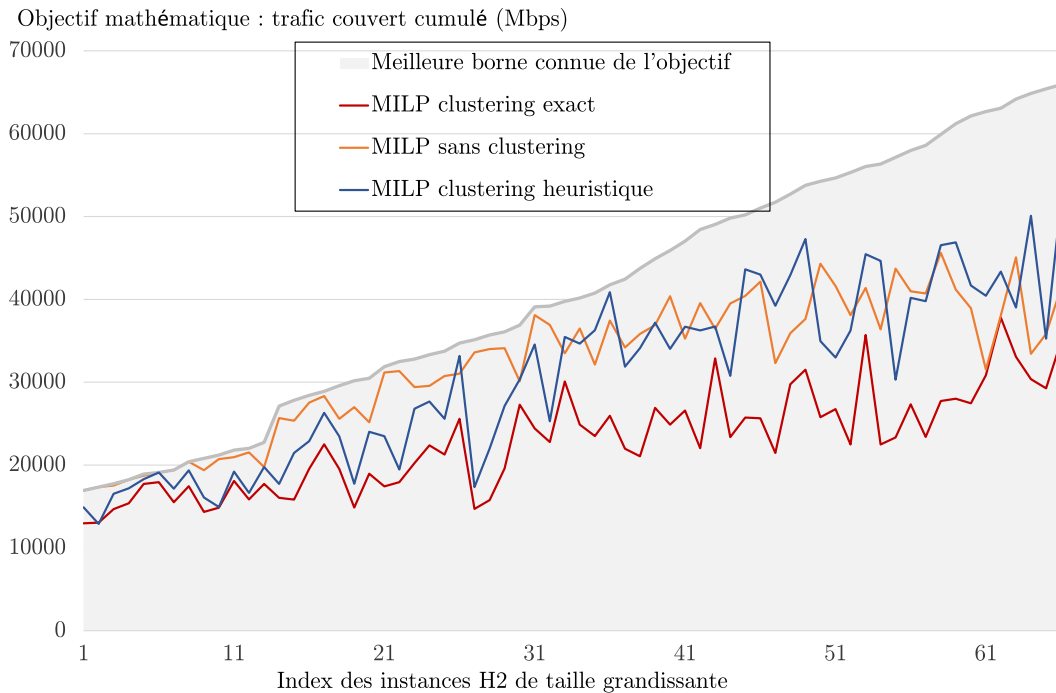


FIGURE 4.12 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d’hétérogénéité H_2

- A part sur quelques instances figurant parmi les plus petites, le modèle avec clustering exact est systématiquement moins performant : l’ensemble des instances testées, nous comptons un écart moyen relatif sur les objectifs des solutions de +38.2% en faveur du modèle basique de la figure 3.13. Ce constat est évidemment à croiser avec les nombres de variables et de contraintes des figures 4.9 et 4.10 (discutée en paragraphe ??), bien plus importants sur ce modèle.
- Comme avec l’algorithme glouton multistart examiné en section 3.3.3, on ne constate toujours pas de variation de performances quand l’hétérogénéité de la demande au sol varie. Encore une fois, l’essentiel était de ne pas découvrir de contre-performances sur les plus fortes hétérogénéités pour lesquelles les attentes vis-à-vis des algorithmes de placements de faisceaux irréguliers sont les plus fortes.
- Si on compare maintenant le PL mixte basique à celui avec clustering heuristique, on constate d’abord que ce dernier est moins bon sur les petites instances. L’intérêt du clustering en termes d’allègement du modèle ne se fait ainsi pas de suite sentir : il est d’autant plus marqué que la zone de service est étendue. Ceci s’explique par le fait que sur les zones de services trop restreintes, il est impossible de définir des sous-régions qui seraient indépendantes, par exemple au sens des contraintes de séparation pour les faisceaux d’un même réflecteur. Pour des régions qui sont effectivement indépendantes,

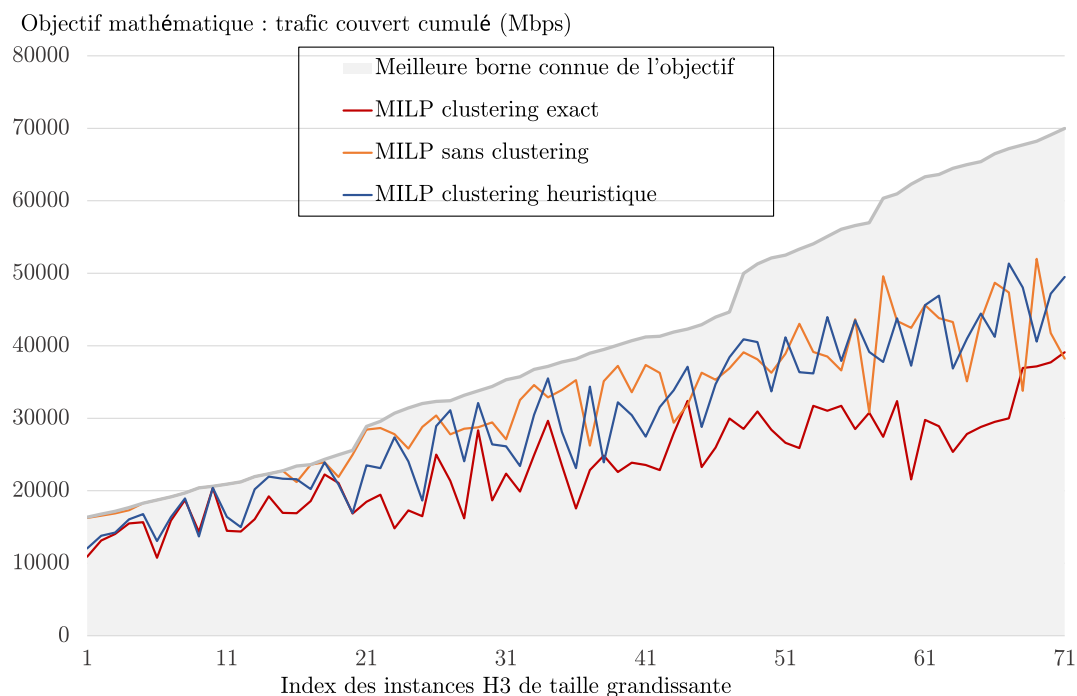


FIGURE 4.13 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d’hétérogénéité H_3

on peut supprimer les variables d’écartement pour un nombre significatif de couples de faisceaux. A l’inverse, diviser par clustering en des régions qui ne sont pas indépendantes a l’effet inverse : des faisceaux sont déclarés dans chaque sous-région, et les régions étant trop proches deux à deux, il faut prévoir l’intégralité des variables et contraintes de séparation de faisceaux.

- En remarque directement complémentaire, il est déjà visible sur les instances de taille modérée que le modèle avec clustering heuristique est capable de fournir des solutions de meilleure qualité que le programme linéaire basique, en des temps égaux. Pour une plus nette mise en évidence de cette propriété, nous proposons dans la figure 4.16 le même type d’expériences, mais sur des instances plus grandes (N_S variant entre 300 et 400 pour N_B variant lui entre 30 et 40). On y observe essentiellement que l’amélioration de l’approche par programmation linéaire mixte avec clustering heuristique par rapport à celle sans est claire : nous avons en moyenne un facteur ≈ 1.23 entre les deux modèles au niveau des valeurs de l’objectif des solutions produites, en faveur du modèle avec clustering. Par contre, l’heuristique gloutonne reste nettement dominante avec des solutions en moyenne 26,6% meilleures que celles générées par le modèle PL mixte avec clustering heuristique.

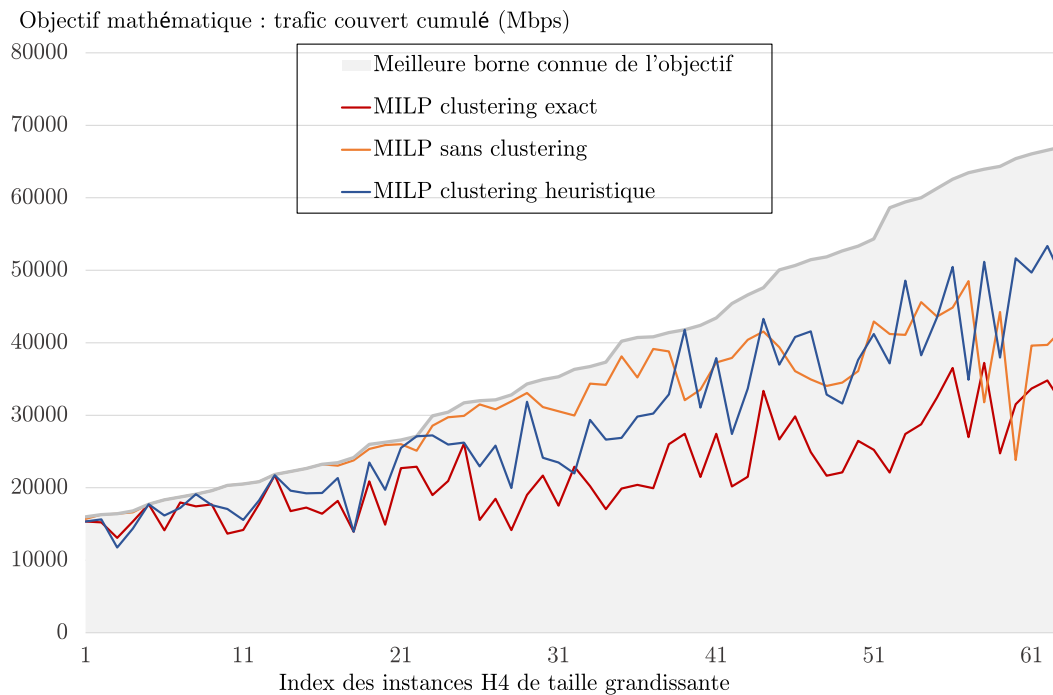


FIGURE 4.14 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_4

4.4 Conclusions

Ce chapitre aura ainsi introduit une méthodologie pour exploiter la notion de clustering k -moyennes dans le cadre d'un placement continu et linéaire de points dans \mathbb{R}^2 . L'application de ces principes au problème de beam layout est donc directe, et son intérêt réside dans la rupture de symétries ainsi permises, et dans la réduction de variables et de contraintes engendrées par une telle approche. Ce dernier point est uniquement notable dans le cas du programme linéaire avec clustering, dit heuristique, qui ne garantit cependant pas de pouvoir générer toutes les solutions que pourrait générer le modèle originel, mais qui se concentre sur celles de bonne qualité. Dans les faits, les expérimentations confirment que le modèle linéaire dans version avec clustering heuristique améliore nettement aux instances moyennes et fortes le modèle basique de 3.13. L'heuristique gloutonne reste cependant meilleure aux grandes instances. Une approche à investiguer pourrait donc être l'hybridation des deux méthodes, avec par exemple une exploitation de la meilleure solution gloutonne existante en début de résolution du PL mixte. Quel que soit l'algorithme retenu, tout beam layout ainsi généré se retrouve donc avec un ensemble de faisceaux qui sont chacun caractérisés par des demandes propres à satisfaire par allocation de fréquences, ce problème étant adressé dans le dernier chapitre 5.

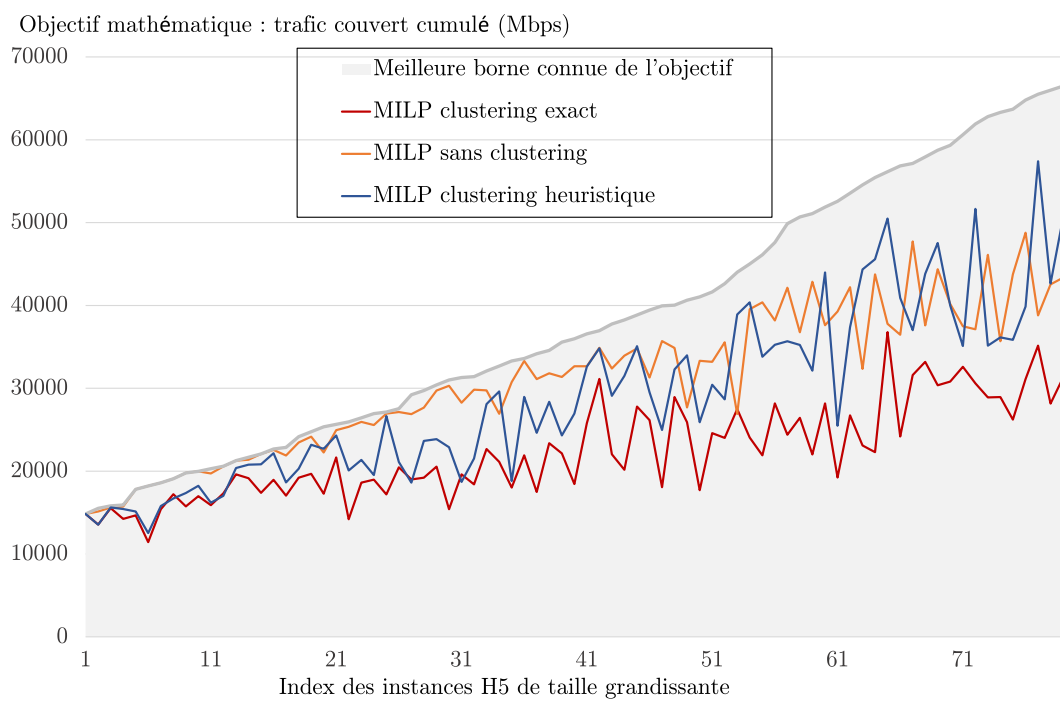


FIGURE 4.15 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique aux modèles avec clustering exact et heuristique, instances d'hétérogénéité H_5

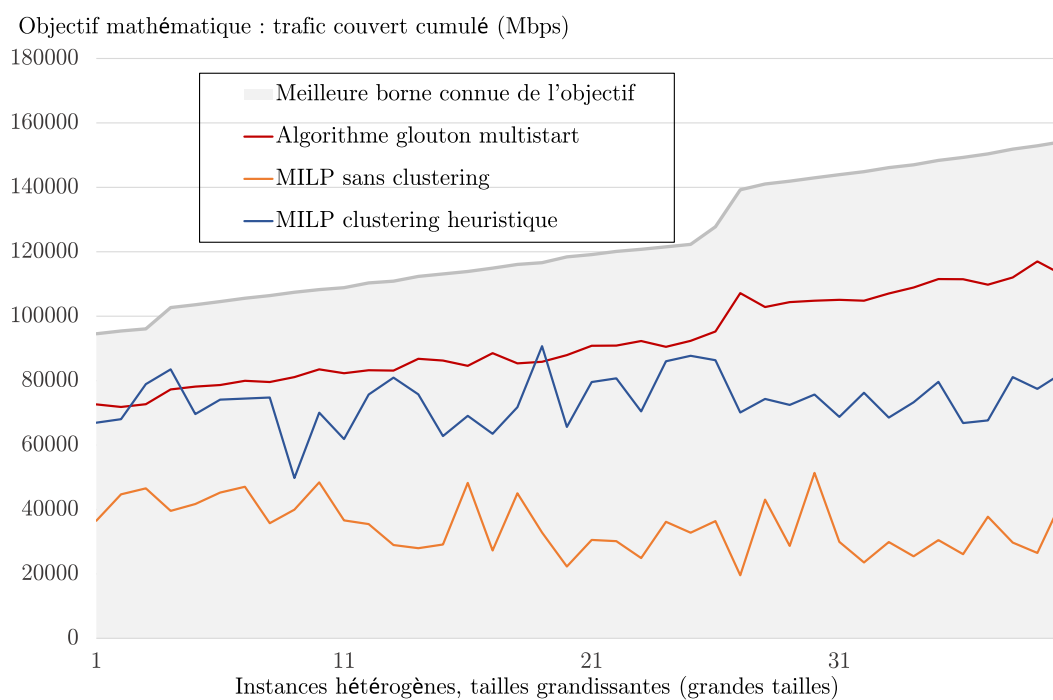


FIGURE 4.16 – Comparaison du modèle linéaire mixte de placement de faisceaux basique au modèle avec clustering heuristique et à l’heuristique gloutonne, instances de forte hétérogénéité et de tailles élevées

Définition de plans de fréquences irréguliers minimisant la complexité du répéteur

Sommaire

5.1	La problématique d'allocation de fréquences	129
5.1.1	Les limitations d'utilisation de la ressource spectrale	129
5.1.2	La classe de problèmes FAP : Frequency Assignment Problems	130
5.1.3	Définition générique	130
5.2	L'affectation de fréquences pour des satellites de télécommunications multifaisceaux	133
5.2.1	Variables de décision	133
5.2.2	Les contraintes du problème	135
5.3	Propriétés des contraintes binaires de non-réutilisation de la ressource spectrale pour les couvertures multifaisceaux	138
5.3.1	Les contraintes binaires d'exclusion dans les programmes linéaires en nombres entiers	139
5.3.2	Énumération des cliques maximales dans les graphes d'interférences de systèmes multifaisceaux	141
5.4	Modélisation globale du problème	146
5.5	Approche de résolution par décomposition séquentielle	150
5.5.1	Le sous-problème d'allocation de fréquences et de polarisations	150
5.5.2	Allocation d'amplificateurs haute-puissance à fréquences et polarisation connues	152
5.6	Résultats expérimentaux	155
5.7	Conclusions	159

5.1 La problématique d'allocation de fréquences

5.1.1 Les limitations d'utilisation de la ressource spectrale

La ressource spectrale, nécessaire à la propagation de signaux au travers d'ondes électromagnétiques, ne peut pas être utilisée de manière simultanée et colocalisée par plusieurs systèmes de télécommunications, sous peine de subir des phénomènes d'interférences qui la rendraient inexploitable. Il est ainsi nécessaire de rationner et d'organiser le partage de cette ressource à

la fois limitée et très demandée, en particulier pour certaines applications civiles ou militaires pour lesquelles elle est d'un intérêt précieux, voire indispensable. Cette responsabilité de coordination des systèmes de télécommunications est à ce jour confiée à l'union internationale des télécommunications (ou UIT). Notamment, tout système de télécommunications par satellite doit se soumettre à une procédure de demande et d'attribution de droits, dans l'espoir de se voir octroyer une certaine bande passante, en dehors de laquelle il sera par contre interdit d'opérer. Ainsi, même après une issue positive des démarches auprès de l'UIT, une nouvelle problématique tout aussi essentielle se dessine : il faut être capable d'exploiter au mieux cet accès limité aux radiofréquences. La stratégie naturelle est alors de réutiliser autant que possible cette bande radio restreinte, notamment en direction d'utilisateurs suffisamment distants deux à deux pour que les phénomènes d'interférences occasionnés par l'utilisation simultanée de la même fréquence soient négligeables. Ce seuil de tolérance aux interférences peut par exemple être spécifié en termes de performances minimales à maintenir pour le rapport signal à bruit des différentes transmissions considérées. Ce dernier est effectivement une mesure de la capacité à distinguer le signal utile du bruit provenant d'autres signaux transmis à la même fréquence, et va donc conditionner la quantité d'informations pouvant être correctement transportées. Cette puissance de signal utile reçue dépend de la puissance de transmission, de la distance entre les antennes d'émission et de réception, des directions d'émission et de réception, et des caractéristiques de l'environnement traversé par le signal. Quitte à travailler sous certaines hypothèses et approximations, ces derniers paramètres sont rarement intégrés en tant que variables aux modèles classiques d'optimisation du choix des fréquences d'un système de télécommunication. Effectivement, l'impact des signaux interférents pouvant être de poids sur les bilans de liaison, l'effort est souvent concentré dans la littérature sur la définition de systèmes de télécommunications qui minimisent ce phénomène. La réponse à cette problématique conduit tout naturellement vers l'optimisation combinatoire au sein de laquelle ces problèmes d'allocation de fréquences dans les systèmes de télécommunications forment une catégorie connue sous le nom de "Frequency Assignment Problem" (FAP).

5.1.2 La classe de problèmes FAP : Frequency Assignment Problems

5.1.3 Définition générique

Dans le très complet travail de synthèse sur la problématique d'allocation de fréquences [[Aardal 2007](#)], on retrouve notamment l'information essentielle qu'il n'existe pas un unique problème d'allocation de fréquences. Les variations se situent au niveau de la nature des variables et des contraintes considérées, mais aussi au niveau des critères d'optimisation retenus.

Parmi les composantes communes à ces différents problèmes, on retrouve systématiquement dans les variables d'optimisation une notion de bande allouée par utilisateur. En fonction du système de télécommunications considéré, on peut souhaiter définir cette allocation de bande soit statiquement, soit dynamiquement. Dans le premier cas, l'allocation de bande est unique et définitive, elle ne varie pas avec le temps et on parlera alors d'allocation fixe de canaux (FCA, "Fixed Channel Assignment"). C'est l'approche que nous avons retenue dans cette thèse :

la définition statique d'une bande par faisceau est nativement bien plus compatible avec les équipements embarqués traditionnels des satellites transparents considérés ici. Typiquement, les filtres radiofréquence installés pour chaque faisceau dans la charge utile du satellite sont des équipements passifs et caractérisés par des bandes fréquentielles rejetées et conservées bien précises : leur définition est donc dépendante de l'hypothèse de bande connue et fixe par faisceau.

A l'inverse, l'allocation de dynamique de canaux (DCA, "Dynamic Channel Assignment") intègre une dimension temporelle permettant d'épouser une demande par utilisateur qui cette fois évolue dans le temps. Pour l'implémentation de tels schémas temporels d'allocation de bande dans un système satellitaire multifaisceaux avec une demande agrégée par faisceau qui serait évolutive, il faudra en général recourir à une classe d'équipements embarqués dits "flexibles", qui n'est pas celle envisagée dans ces travaux. Sans se limiter au cas particulier des systèmes satellitaires, des travaux de synthèse et des discussions détaillées sur l'allocation dynamique de fréquences peuvent être trouvés par exemple dans [Anderson 1973], [Chuang 1993], [Del Re 1995b], [Del Re 1995a], [Rhee], ou encore [Dupont 2009]. Le cas particulier du lien retour d'un système satellitaire multifaisceaux (des faisceaux vers les passerelles) selon la technologie d'accès MF-TDMA (Multiple Frequency Time Division Multiple Access) est par exemple traité dans [Kiatmanaroj 2012] en travaillant à l'échelle des utilisateurs dans les faisceaux. Par la suite, les références bibliographiques porteront exclusivement sur l'allocation fixe de canaux.

Il vient ensuite la question des contraintes auxquelles cette allocation de bande aux utilisateurs doit se soumettre. Parmi les contraintes qui viennent différencier les problèmes d'allocation de fréquences, on retrouve celles qui permettent de gérer les phénomènes d'interférences des signaux : il existe effectivement plusieurs types d'interférences pouvant être considérées, et plusieurs stratégies pour les limiter au sein d'un algorithme d'optimisation des fréquences sélectionnées. Premièrement, on distingue les interférences co-canal des interférences canaux adjacents. Les interférences co-canal correspondent aux phénomènes d'interférences mutuelles que subissent deux signaux transmis dans deux régions proches à la même fréquence. Les interférences canaux adjacents traduisent elles l'impact que peut avoir sur un signal A un signal B qui serait émis dans une fréquence différente mais voisine : même si les fréquences centrales des deux signaux sont distinctes, leur étalement dans le domaine fréquentiel peut présenter un chevauchement au niveau duquel le phénomène d'interférences peut avoir lieu. Les différentes approches vis-à-vis de ces deux phénomènes d'interférence sont à l'origine de plusieurs problèmes d'optimisation distincts, essentiellement : ceux qui ne prennent en compte que les interférences co-canal, et ceux qui prennent en compte à la fois les interférences co-canal et les interférences canaux adjacents. Par exemple, dans cette thèse, les interférences canaux adjacents ne seront pas prises en compte, car on considère en première approximation que ce phénomène peut être suffisamment limité par un filtrage efficace des signaux dans la charge utile du satellite, lesquels n'afficheraient ainsi qu'un niveau négligeable de puissance en dehors de la bande qui leur a été allouée, sans impacter les bandes adjacentes. Physiquement, le

niveau d'interférence perçu par un utilisateur donné correspond à la somme des interférences causées par tous les signaux voisins utilisant la même fréquence. Une solution pour définir des algorithmes de décision est donc d'intégrer à l'optimisation un calcul de ces interférences cumulées pour chaque utilisateur pour conclure quant à la qualité de la transmission qu'il perçoit. Dans ce cas, on parlera d'optimisation de l'allocation de fréquences sous contraintes d'interférences cumulatives. Sur ce problème d'optimisation particulier, on peut par exemple citer les travaux suivants : [Dunkin 1998], [Mannino 2003], [Alouf 2005], [Gondran 2008] ou encore [Palpant 2008]. Cette prise en compte explicite pour chaque utilisateur de l'impact cumulé de tous ses interféreurs est finalement bien plus rare dans la littérature que la définition de contraintes d'interférences dites binaires : on définit à l'avance, selon une certaine règle de séparation spatiale, un ensemble de couples d'utilisateurs qui n'ont pas le droit de réutiliser la même fréquence sous peine de causer trop d'interférences. On s'éloigne ainsi des calculs qui permettent de totalement évaluer la qualité de la transmission, mais on simplifie les règles d'allocation à des conditions élémentaires qui sont, en pratique, souvent suffisantes. Ce choix est celui qui a été fait pour ce travail de recherche, le gain en précision d'optimisation avec les interférences cumulées n'étant pas assez discriminant pour justifier de complexifier les modèles mathématiques. On préférera incorporer plus de variables liées aux équipements embarqués dans la charge utile du satellite, ce qui alourdira déjà ces derniers.

Enfin, les critères varient aussi et définissent ainsi plusieurs catégories de problèmes d'allocation de fréquences, décrites en détail dans [Aardal 2007]. Parmi les plus classiques, et sans se limiter au cas particulier des systèmes satellitaires, on compte :

- “*Maximum Service FAP*” : on parlera d'allocation de fréquences pour la maximisation du service. On suppose que chaque utilisateur dispose d'une demande propre qui s'exprime en un certain nombre de fréquences requises. L'objectif est alors d'allouer le maximum de fréquences aux utilisateurs dans la limite de ce qu'ils réclament, tout en respectant les contraintes d'interférences retenues, le plus souvent considérées sous leur forme binaire. On peut citer les travaux suivants : [Jaumard 1997], [Jaumard 2002].
- “*Minimum Order FAP*” : cette fois le problème consiste à satisfaire la demande des utilisateurs, toujours exprimée par utilisateur sous forme d'un certain multiple d'une unité élémentaire de bande radiofréquences, en utilisant le moins de fréquences distinctes, le coût d'exploitation du réseau étant parfois proportionnel à ce nombre de fréquences. Concrètement, on respecte les contraintes d'interférences tout en listant les fréquences utilisées par le système : la taille de cette liste est minimisée. Les travaux [Aardal 2007], [Dorne 1996] ou encore [Hao 1998] adressent cette problématique.
- “*Minimum Span FAP*” : dans la lignée de la précédente formulation, il s'agit ici de minimiser l'étendue spectrale du système, pour les mêmes raisons de coût de location de la ressource. On détecte cette fois les fréquences minimale et maximale du système, leur différence définit un intervalle dont la longueur est minimisée tout en maintenant une notion de satisfaction de demande et de contrôle des interférences par des contraintes. On peut citer [Avenali 2002], [Maniezzo 2000], et [Sung 1997].

- “*Minimum Interference FAP*” : dans cette approche d’optimisation, on se propose de traiter le phénomène d’interférences non plus par des contraintes mais directement via le critère mathématique. Concrètement, les demandes des utilisateurs sont satisfaites de manière à ne générer que des situations d’interférences qui soient mineures. Pour cela, on introduit une notion de pénalité pour tout couple d’utilisateurs utilisant la même fréquence : typiquement, les impossibilités strictes d’utilisation de la même fréquence correspondront à de très fortes pénalités. C’est un des cadre d’optimisation de l’allocation de fréquences pour lequel la littérature est très abondante, ce qui correspond à l’émergence de plus en plus marquée de système qui doivent réutiliser les mêmes fréquences plusieurs fois pour assurer la demande des utilisateurs : [Duque-Antón 1993], [Kapsalis 1995], [Borndörfer 1998], [Voudouris 1998].

A la lumière de ces travaux de la littérature, on observe qu’un très large spectre de méthodes de résolution est employé pour tenter de résoudre les problèmes d’allocation de fréquences : méthodes gloutonnes, programmation linéaire mixte, programmation par contraintes, métaheuristiques (recuit simulé, optimisation par colonies de fourmis, algorithmes génétiques...). Notons alors que le problème d’allocation de fréquences introduit dans cette thèse élargit cet ensemble de problèmes de la littérature et qu’il faut ainsi se poser à nouveau les questions des méthodes de résolution prometteuses et, dans le cadre de cette recherche, compatibles des contraintes industrielles. Comme détaillé dans le paragraphe suivant, le cas particulier du choix des fréquences utilisées sur le lien aller descendant d’un satellite de télécommunications multifaisceaux fait effectivement intervenir à la fois des contraintes, variables et critère spécifiques. En tant que composante commune, on retrouve bien sûr les contraintes d’interférences et les variables d’allocation de fréquences définies cette fois par faisceaux.

5.2 L’affectation de fréquences pour des satellites de télécommunications multifaisceaux

5.2.1 Variables de décision

Rappelons qu’un système de télécommunications multifaisceaux se caractérise par une pluralité de faisceaux étroits, l’union des régions individuellement couvertes par chaque faisceau constituant la zone de service du système. Le rôle de la charge utile du satellite est de recevoir, de convertir en fréquence, d’amplifier et de re-transmettre les signaux provenant des stations passerelles vers les utilisateurs situés dans les différents faisceaux du système. Nous supposons ici que la bande passante totale du système de télécommunications satellitaires est divisée en canaux fréquentiels identiques correspondant par exemple à la taille d’une porteuse. Pour chaque faisceau, nous supposons que la quantité de bande qui y est requise a été directement spécifiée par l’opérateur satellite, ou sinon, que cette quantité nécessaire a été estimée en amont par les ingénieurs système, par exemple en analyse a posteriori du placement de faisceaux si celui-ci a été optimisé. Supposons que le satellite en cours de dimensionnement soit prévu pour un fonctionnement architecture classique où il tient simplement un rôle relai transparent au

sein du système de télécommunications, et supposons également que le problème de placement de faisceaux est le premier à avoir été résolu, à la manière de ce que nous préconisons en chapitre 1. Dans ce cas, il reste aux ingénieurs en charge du design du satellite à définir le chemin nominal complet des signaux transportés par chaque faisceau, des passerelles jusqu'aux utilisateurs finaux, en passant par le détail des équipements traversés dans la charge utile. A noter qu'on parle de chemin nominal par opposition aux chemins alternatifs qu'il faudra également prévoir pour parer aux éventuelles pannes d'équipements embarqués [Stathakis 2012]. Plus précisément, il reste à déterminer pour chaque faisceau

- 1) La passerelle qui collectera les informations et contenus réclamés par les utilisateurs du faisceau
- 2) La fréquence et polarisation des porteuses du faisceau sur le lien montant passerelles-satellite
- 3) La fréquence et polarisation de ces porteuses sur le lien descendant satellite-utilisateurs
- 4) Les différents équipements traversés par le faisceau dans le répéteur satellite : on s'intéressera essentiellement ici aux convertisseurs de fréquence et aux amplificateurs haute-puissance.

Nous ferons ici l'hypothèse que l'intégralité du lien montant passerelles-satellite pourra être traité après le lien descendant satellite-utilisateurs, que ce soit en termes de fréquences utilisées sur le lien mais aussi d'associations des faisceaux aux différentes passerelles du système. Concrètement, cela signifie que dans les travaux de recherche présentés ici sur l'affectation de fréquences, seul le lien descendant est traité par les modèles proposés. Les variables de décision que nous considérons sont donc :

- La fréquence de chaque porteuse de chaque faisceau sur le lien descendant
- La polarisation de ces mêmes porteuses
- L'amplificateur haute-puissance qui amplifie chacune d'entre elles.

Des valeurs doivent donc leur être assignées dans le but de minimiser les niveaux d'interférences dans chaque faisceau, le nombre d'amplificateurs haute-puissance et d'équipements de conversion en fréquence nécessaires dans le répéteur. Plus précisément, l'approche que nous avons sélectionnée vise une minimisation du nombre d'amplificateurs haute-puissance à prévoir dans la charge utile du satellite : ces derniers sont en effet lourds, chers, gourmands en énergie électrique, et contraignants en termes d'aménagement interne et de thermique. Les interférences et les équipements de conversion seront eux limités à des niveaux jugés acceptables selon certaines règles décrites et traduites en contraintes dans le paragraphe suivant.

5.2.2 Les contraintes du problème

5.2.2.1 Contraintes liées au choix des fréquences et polarisations

Nous avons déjà mentionné l'importance de la limitation des interférences en vue d'une certaine qualité de transmission des signaux. Ici, l'approche retenue est l'interdiction stricte de situations jugées trop néfastes pour les performances en termes de rapport signal à bruit. Rappelons pour cela que chaque porteuse doit recevoir une position fréquentielle dans le spectre du lien descendant, ainsi qu'une polarisation pour l'onde électromagnétique à laquelle elle sera rattachée. A noter que dans ce travail, aucune dimension temporelle n'a été considérée : les fréquences et polarisations affectées aux porteuses du systèmes sont supposées toutes actives en permanence, ce qui se traduit par un besoin de compatibilité statique et complet des porteuses deux à deux. Concrètement, cette compatibilité passe par la satisfaction des contraintes suivantes :

- **Isolation par polarisation orthogonale :**

Une antenne radio parfaite reçoit et transmet des ondes dans une certaine polarisation et est insensible aux signaux transmis dans la polarisation orthogonale. Cela veut dire que sous condition d'utilisation de polarisations croisées, la même fréquence peut donc être utilisée deux fois sur la même région sans risquer de générer des interférences mutuelles pour les deux signaux concernés. En pratique, les antennes ne peuvent pas transmettre ou recevoir rigoureusement dans une unique polarisation, il s'agit d'une combinaison de deux polarisations orthogonales, l'une d'entre elles étant cependant nettement dominante. Pour profiter tout de même de cette propriété, le choix fait ici a été de considérer que deux porteuses à la même fréquence utilisant des polarisations orthogonales peuvent être transmises en direction de deux régions plus proches l'une de l'autre que dans le cas où les deux porteuses en question utilisent à la fois la même fréquence et la même polarisation. En tendant vers l'approximation d'antenne parfaite, il est en fait fréquent de considérer que l'utilisation de la polarisation orthogonale est suffisante pour permettre l'utilisation co-localisée de la même fréquence.

- **Isolation spatiale :**

Du fait de la chute des gains des antennes loin du pic de concentration de la puissance pour un faisceau donné, on considère que deux porteuses dans deux faisceaux différents peuvent utiliser la même "couleur" (qui désigne alors un couple fréquence-polarisation) à condition que les deux faisceaux en question soient suffisamment éloignés l'un de l'autre. Comme déjà discuté en paragraphe 5.1.2, cette condition est souvent traduite en une contrainte de distance minimale entre les deux faisceaux ; il s'agit de la très classique contrainte d'interférence binaire. Une représentation naturelle d'un tel ensemble de contraintes est un graphe $G = (B, E)$ où chaque nœud $b \in B$ représente un faisceau et la zone qu'il dessert, et où chaque arête $e \in E$ est la matérialisation de l'interdiction de réutiliser la même couleur pour deux faisceaux trop proches selon la distance minimale considérée. G est dans ce cas appelé "graphe d'interférences".

- **Limite sur le nombre de réutilisations de chaque fréquence :**

Comme discuté, notre choix a été de définir des contraintes qui permettent d'assurer que le nombre d'équipements de conversion en fréquence nécessaires dans la charge utile soit limité. Le modèle d'optimisation développé ici ne proposant pas une définition intégrée du nombre et du contenu de ces équipements, nous nous contentons de conditions nécessaires au niveau du plan de fréquences pour que ce nombre d'équipements ne soit pas trop élevé. Pour cela, nous rappelons qu'un convertisseur en fréquence observe une certaine bande radiofréquence dont la fréquence moyenne est f et la translate dans le domaine fréquentiel vers une certaine fréquence moyenne $f - \Delta$. De plus, deux faisceaux ayant une intersection non-vide de leurs bandes respectives ne peuvent pas être convertis en fréquence par le même convertisseur sous peine de se brouiller respectivement. La bande du système de télécommunications ayant ici été discrétisée en N_F canaux fréquentiels, compter le plus grand nombre de fois qu'une de ces fréquences est utilisée sur le lien descendant donne ainsi une borne inférieure du nombre de ces équipements qu'il faudra embarquer : deux porteuses utilisant la même fréquence ont nécessairement parcouru deux équipements de conversion de fréquence distincts. Nous exploitons ce principe pour définir une contrainte de réutilisation maximale de chaque canal fréquentiel par l'ensemble des faisceaux du système, laquelle sera ainsi favorable à un contrôle du nombre d'équipements de conversion requis.

- **Contiguïté des fréquences pour les faisceaux :**

Un faisceau est dit "contigu" quand les fréquences qu'il a sélectionnées dans la bande totale discrétisée du système ne définissent pas de trou fréquentiel. Ne pas avoir de sauts de fréquence dans un faisceau garantit de pouvoir traiter d'un bloc solidaire l'intégralité sa bande tout au long de son passage au travers du répéteur du satellite. A l'inverse, si des fréquences sont allouées dans un faisceau de manière non-contigüe, cela peut donner lieu à une exploitation de cet espace fréquentiel vacant par un ou plusieurs autres faisceaux afin de traverser en groupe des amplificateurs ou des équipements de conversion qui seraient limités : dans ce cas, il sera nécessaire de prévoir des opérations de filtrage supplémentaires, coûteuses en équipements embarqués, pour récupérer le signal du faisceau d'intérêt dans cet entrelacement de plusieurs faisceaux et le diriger vers sa source radiofréquence dédiée. Ainsi, une contrainte que nous intégrons explicitement dans notre optimisation de l'allocation de fréquences est la contiguïté fréquentielle pour les bandes allouées dans les faisceaux.

- **Utilisation d'une unique polarisation par faisceau :**

L'utilisation de deux polarisations pour un faisceau donné, par exemple en transmission sur le lien descendant satellite-utilisateurs, nécessite de recourir à des technologies antenne plus complexes, plus lourdes et plus chères. Nous décidons ici d'éviter strictement ces situations en exigeant que chaque faisceau sélectionne uniquement des couples fréquence-polarisation qui utilisent tous la même polarisation.

5.2.2.2 Contraintes liées au choix d'amplificateurs haute-puissance

Un tube à ondes progressives (ou TWT, pour “traveling-wave tube” en anglais) est un type d'amplificateur haute-puissance pour les signaux radiofréquence. C'est notamment une technologie très utilisée dans les charges utiles de satellite de télécommunications : [Maral 2011b]. Pour compenser les pertes subies lors du trajet entre les passerelles au sol et le satellite géostationnaire, chaque signal de chaque faisceau doit être amplifié à bord du satellite avant retransmission vers les utilisateurs finaux. Ainsi, un TWT doit être assigné à chaque porteuse de chaque faisceau en respectant les contraintes suivantes :

- **Un seul TWT par faisceau :**
Pour un faisceau donné, afin d'éviter de multiplier opérations de division-recombinaison du signal, nous imposons que toute la bande allouée à un faisceau soit intégralement dirigée vers un unique amplificateur haute puissance.
- **Intervalles admissibles de fréquences :**
Les tubes peuvent avoir une bande de fréquences admissible plus étroite que la bande totale du système. Dans ce cas, les ingénieurs en charge du dimensionnement du répéteur s'accordent avec les fournisseurs d'équipements sur un nombre limité d'intervalles de fréquences réduits, avec lesquels il est donc nécessaire de composer pour allouer les porteuses aux tubes à ondes. Concrètement, une porteuse ne pourra pas être allouée à un tube si ce dernier ne possède pas dans ses fréquences autorisées celle de la porteuse.
- **Porteuses interdites d'utiliser le même tube à ondes progressives :**
Il est possible que des niveaux de puissance électromagnétique reçue au sol soient spécifiés directement dans la mission de télécommunications. Dans ce cas, cette demande peut être traduite en une demande en puissance pour chaque porteuse de chaque faisceau. Or, une des caractéristiques des tubes à ondes progressives est leur caractère non-linéaire : deux porteuses aux densités de puissance fortement hétérogènes traversant un même tube vont, par non-linéarité de l'équipement, être à l'origine de “produits d'intermodulation”. Ces derniers s'interprètent comme du bruit additionnel qui peut avoir le mauvais goût de se positionner (dans le domaine fréquentiel) directement en conflit avec les bandes utiles des signaux que l'on cherche à soigner, détériorant ainsi la qualité de transmission. Pour limiter ce phénomène, on se propose de travailler avec des listes connues à l'avance d'incompatibilités deux à deux pour des porteuses ne pouvant pas être amplifiées par le même tube à ondes.
- **Utilisation unique de chaque fréquence dans les tubes à ondes :**
Tout comme pour les convertisseurs en fréquence, les tubes à ondes progressives ne peuvent pas amplifier deux porteuses auxquelles on a assigné la même fréquence sur le lien descendant.
- **Nombre maximum de porteuses par tube à ondes :**
Un tube à ondes est caractérisé par une puissance maximum en sortie. A défaut de

prendre en compte de façon détaillée les besoins en puissance de chaque porteuse de chaque faisceau, nous considérerons ici qu'il existe un nombre de porteuses dans un même tube au-delà duquel la répartition de la puissance du tube sur ces porteuses ne leur sera pas suffisante. Ce nombre maximum de porteuses sera appliqué à tous les faisceaux actifs sélectionnés dans l'optimisation.

- **Contiguïté des fréquences dans les tubes à ondes :**

Il est possible que la complexité du répéteur soit réduite quand il n'y a pas de vide fréquentiel entre les porteuses (destinées potentiellement à plusieurs faisceaux distincts) d'un même tube à ondes progressives. L'intérêt de cette contrainte n'étant pas systématique, cela justifie les deux modèles d'allocation de tubes à ondes progressives présentés plus loin, l'un avec la contrainte et l'autre sans.

Enfin, comme discuté, le critère de l'optimisation que nous avons considéré est la minimisation du nombre d'amplificateurs haute-puissance à prévoir dans la charge utile :

- **Minimisation du nombre de tubes à ondes progressives embarqués :**

On cherche donc une distribution des porteuses dans les tubes à ondes qui respecte les contraintes précédentes, et ce avec un nombre minimal de tubes actifs.

5.3 Propriétés des contraintes binaires de non-réutilisation de la ressource spectrale pour les couvertures multifaisceaux

Nous proposons ici de revenir sur les contraintes binaires de non-utilisation du même couple fréquence-polarisation pour deux porteuses données du système. À noter que les remarques à venir sont également applicables au deuxième type de contraintes binaires considéré ici, à savoir la non-utilisation simultanée de la même fréquence pour certains couples de porteuses, indépendamment de leurs polarisations. Rappelons alors que ces impossibilités de réutilisation de la même couleur pour les porteuses peuvent être représentées par un graphe $G = (B, E)$ dont les nœuds sont en bijection avec l'ensemble des faisceaux du système, et où les arêtes représentent l'interdiction d'utiliser la même couleur pour deux porteuses respectivement dans le premier et le deuxième faisceau de chaque arête. Dans ce contexte, on parlera de graphe d'interférences pour faire référence à G . En pratique, quand l'approche retenue dans un système multifaisceaux à l'égard des interférences fait comme ici appel à des contraintes binaires, la définition de ces arêtes se fait généralement sur un critère de proximité des faisceaux, en fonction de leurs diamètres. On retrouve ainsi le même type de raisonnement qui nous avait permis de définir des graphes d'incompatibilité en paragraphe 3.1.1.2 quand il s'agissait d'associer les faisceaux aux réflecteurs du satellite. On retrouve également la propriété que deux faisceaux larges doivent être plus éloignés que deux faisceaux étroits pour avoir le droit d'utiliser simultanément la même couleur : en première approximation sur les diagrammes des antennes de tels satellites, la portée spatiale et donc le potentiel d'interférence d'un faisceau grandit effectivement avec son diamètre. Une fois ces règles de séparation définies, elles sont traduites en un

ensemble définitif de contrainte binaires d'exclusion dont les propriétés dans le cadre d'une résolution par programmation linéaire en nombres entiers sont examinées dans le paragraphe suivant.

5.3.1 Les contraintes binaires d'exclusion dans les programmes linéaires en nombres entiers

Comme discuté en paragraphe 1.4.3.1, un des objectifs de cette thèse était la définition d'approches algorithmique efficaces mais aussi souples par rapport à un besoin d'optimisation qui a toutes les chances de varier dans le temps : contraintes des technologies embarquées, nouvelles variables, spécifications inédites des clients... Parmi les méthodes susceptibles de répondre à ces exigences particulières, nous avons naturellement identifié la programmation linéaire en variables binaires. Avec cette dernière, il est en effet possible, tout en laissant la porte ouverte à l'ajout futur de nouvelles variables et contraintes aux modèles, de profiter des résultats d'un mouvement continu de la recherche depuis des décennies pour modéliser efficacement certaines classes de contraintes très présentes dans les problèmes combinatoires de conception de satellite de télécommunications multifaisceaux. Par ailleurs, la programmation linéaire en nombres entiers permet, dans le meilleur des cas, une résolution exacte, et fournit sinon des bornes inférieures (ou supérieures) sur l'objectif mathématique qui permettent d'évaluer la qualité des solutions approchées, information précieuse en contexte industriel. Sur une classe de satellites voisine, les satellites d'observation de la Terre, ce sont ces mêmes raisons qui ont incité les auteurs de [Gabrel 2006a], [Gabrel 2006c] à concentrer les efforts de modélisation et résolution sur la programmation linéaire en nombres entiers

Les contraintes d'interférences binaires pour les faisceaux constituent un parfait exemple de catégorie de contraintes pour laquelle ont été capitalisées, au fil des différents travaux de recherche sur le sujet, des techniques de modélisation efficaces dans un contexte de branch-and-X s'appuyant sur la programmation linéaire. Nous allons par exemple voir que les résultats théoriques portant sur la recherche de stable maximum dans un graphe non-orienté sont d'un intérêt direct. En théorie des graphes, rappelons que la notion de stable est complémentaire de celle clique : pour un graphe G , un stable est un sous-ensemble de sommets deux à deux non-adjacents. Cette notion de stable est effectivement liée au problème d'allocation de fréquences dans la mesure où elle est une interprétation possible des contraintes binaires d'exclusion qu'il comprend : tout choix de couleurs admissibles pour les faisceaux (c'est-à-dire, qui ne viole aucune des impossibilités binaires pesant sur ces derniers) peut être vu comme une superposition de stables du graphe d'interférences, où chaque stable représenterait ainsi l'utilisation par les faisceaux concernés d'exactly une des couleurs disponibles.

Rappelons que le problème de recherche de stable maximum est celui de l'identification du plus grand de ces sous-ensembles de sommets non-adjacents de G . C'est un problème NP-difficile bien connu de longue date en optimisation combinatoire : [Tarjan 1977]. La programmation linéaire en variables 0-1 fait alors en effet partie des méthodes pour essayer de le résoudre

de façon exacte. Dans ce cas, la qualité de l'optimisation va être conditionnée par l'efficacité des mécanismes d'accélération de résolution comme par exemple les stratégies de séparation que l'on retrouve au cœur des méthodes de Branch-and-Cut. On trouve ainsi des travaux qui développent des techniques génériques permettant de résoudre au mieux les programmes linéaires dont un sous-ensemble de contraintes s'identifie à celui caractérisant le problème de stable maximum : [Gruber 2003], [Gabrel 2006b], [Rebennack 2011]. Pour un graphe $G = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$, la formulation la plus naturelle de ce problème sous forme d'un programme linéaire en variables binaires est la suivante

$$\max_x c^T x \tag{5.1}$$

$$\text{t.q. } x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \tag{5.2}$$

$$x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{B}|} \tag{5.3}$$

où $c = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$ et où chaque variable binaire x_i pour $i \in \{1, \dots, |\mathcal{B}|\}$ désigne la sélection ($x_i = 1$) ou la non-sélection ($x_i = 0$) du sommet i dans le but de former le plus grand stable. Avec $|\mathcal{B}|$ variables et $|\mathcal{E}|$ contraintes, il s'agit d'une formulation relativement compacte, mais qui a le défaut d'avoir une relaxation linéaire de mauvaise qualité. Pour bien s'en rendre compte, il faut comparer l'ensemble défini par la relaxation de l'intégrité des x_i dans les contraintes 5.2, ensemble référencé dans la littérature sous le nom de *relaxation du polytope des stables* et noté ici $\mathcal{P}_{\text{RELSTAB}}(G)$, au véritable *polytope des stables* du graphe G noté lui $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$. Ce dernier est défini comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$ d'un certain ensemble de points X en bijection avec l'ensemble des stables du graphe G : chaque stable $S \subset \mathcal{B}$ définit en effet le point de X dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1 si $i \in S$ et 0 sinon. On montre alors, par exemple dans [Grötschel 2012], que le programme linéaire en variables binaires 5.1 est équivalent au problème

$$\max \{c^T x, x \in \mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)\} \tag{5.4}$$

qui, en tant que programme linéaire, peut lui être résolu en temps polynomial. Par construction, on a $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G) \subset \mathcal{P}_{\text{RELSTAB}}(G)$, mais on peut se poser la question du caractère grossier ou non de l'approximation supérieure de $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$ par $\mathcal{P}_{\text{RELSTAB}}(G)$. A ce titre, prenons l'exemple d'un graphe G complet avec $|\mathcal{B}| \geq 3$, et considérons le vecteur x (originellement binaire) de taille $|\mathcal{B}|$ aux contraintes d'intégrité relâchées et dont chaque composante vaut $\frac{1}{2}$. On vérifie trivialement que $x \in \mathcal{P}_{\text{RELSTAB}}(G)$, alors que x ne peut pas appartenir à $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$ sans contredire le fait que le plus grand stable de G (graphe complet par hypothèse) est de taille 1. Ce type de configurations illustre toute la faiblesse de la relaxation de la formulation reposant sur les contraintes d'exclusivité binaires des équations 5.2. Se pose alors la question du renforcement de cette formulation à l'aide d'inégalités valides, exploitées soit par incorporation directe au modèle global, soit au sein d'une méthode de plans sécants qui serait appliquée à chaque nœud de l'exploration arborescente. Les travaux sont riches et détaillés sur les différents types d'inégalités valides qui permettent de s'approcher de $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$. Certains travaux développent

essentiellement des résultats théoriques sur les contraintes additionnelles qui sous certaines conditions définissent des facettes de $\mathcal{P}_{\text{STAB}}(G)$: les auteurs de [Padberg 1973], [Díaz 2001], [Coll 2002], [Campêlo 2004] et [Rebennack 2008] définissent et démontrent l'intérêt des contraintes de cliques, des contraintes de trous impairs et anti-trous impairs, et des contraintes de rang. D'autres exploitent ces résultats sur certaines applications particulières, permettant ainsi de valider expérimentalement les bienfaits annoncés théoriquement du renforcement de la formulation par des inégalités valides : dans le domaine du spatial, on retiendra notamment [Gabrel 2006a] pour l'optimisation de la planification quotidienne des prises de vue d'un satellite d'observation de la Terre, ou encore [Kiatmanaroj 2012] et [Kiatmanaroj 2016] cette fois pour un problème d'allocation de fréquences pour un satellite de télécommunications.

Nous décidons ici de revenir tout particulièrement sur les inégalités de cliques. Soit alors $C \subset B$ une clique du graphe G . L'inégalité de clique correspondante est définie comme suit

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1. \quad (5.5)$$

Dans les articles cités ci-dessus, il a notamment été démontré que, dans le cas où C est une clique maximale, la contrainte 5.5 définit une facette du polytope des stables de G . D'où l'intérêt de recourir, d'une certaine manière, à ces inégalités dans une résolution PLNE d'un problème comportant des contraintes d'exclusivité binaires. Dans les paragraphes qui suivent, nous démontrons que les cliques maximales des graphes d'interférences du problème d'affectation de fréquences que nous considérons ici peuvent être efficacement énumérées de façon exhaustive : en temps polynomial dans certains cas particuliers, ou en temps raisonnable avec les meilleurs algorithmes génériques d'énumération. Ainsi, nous nous permettons de bâtir la suite de nos approches et modèles en disposant intégralement de l'ensemble des cliques du graphe d'interférences.

5.3.2 Énumération des cliques maximales dans les graphes d'interférences de systèmes multifaisceaux

5.3.2.1 Caractère suffisant des inégalités de cliques maximales en cas d'énumération complète

Comme discuté dans le paragraphe précédent, les contraintes de cliques sont usuellement utilisées comme des inégalités valides qui viennent compléter les contraintes d'interférences exprimées initialement sous forme binaire à partir d'un graphe G . Nous affirmons ici qu'il est suffisant de ne considérer que les contraintes de cliques lorsque toutes les cliques maximales du graphe ont été énumérées exhaustivement, et qu'on définit une contrainte de cliques pour chacune d'entre elles. Plus précisément, montrons la proposition suivante :

Proposition 2.

Toutes les contraintes binaires du graphe d'interférences $G = (B, E)$ sont satisfaites si et seulement toutes les contraintes de cliques sur les n cliques maximales $C_1, \dots, C_n \subset B$ du graphe G sont satisfaites.

Preuve. Supposons d'abord que toutes les contraintes binaires sont satisfaites, à savoir

$$\forall (b, b') \in E, \quad x_b + x_{b'} \leq 1. \quad (5.6)$$

Soit alors $i \in \{1, \dots, n\}$ indiquant une clique C_i du graphe G . Supposons par l'absurde que

$$\sum_{b \in C_i} x_b \geq 2 \quad (5.7)$$

Alors, il existe nécessairement $b_1, b_2 \in C_i$ ($b_1 \neq b_2$) tels que $x_{b_1} = x_{b_2} = 1$. C_i étant par définition une clique, on a nécessairement $(b_1, b_2) \in E$, alors que par hypothèse $x_{b_1} + x_{b_2} = 2$, ce qui est absurde, d'où la première implication.

Supposons maintenant que toutes les contraintes de cliques maximales sont vérifiées. Soit alors $(b, b') \in E$. Si la clique $\{b, b'\} \subset \mathcal{B}$ est maximale, elle apparaît à une certaine position $i \in \{1, \dots, n\}$ dans la liste $C_1, \dots, C_n \subset \mathcal{B}$ (cet indice i existe car la liste des n cliques maximales est par hypothèse complète) et l'inégalité de clique pour la clique maximale i s'identifie à la contrainte binaire pour b et b' , qui est donc vérifiée. Si $\{b, b'\}$ n'est pas maximale, notons à nouveau i une extension de $\{b, b'\}$ en clique maximale dans la liste $C_1, \dots, C_n \subset \mathcal{B}$ (indice i qui, encore une fois, existe de façon sûre par exhaustivité de l'énumération des cliques maximales), la contrainte de clique pour i s'écrit alors :

$$\underbrace{\left(\sum_{\tilde{b} \in C_i \setminus \{b, b'\}} x_{\tilde{b}} \right)}_{\geq 0} + x_b + x_{b'} \leq 1 \quad (5.8)$$

Et donc nécessairement $x_b + x_{b'} \leq 1$, ce qui complète la démonstration d'équivalence. □

Il est ainsi d'intérêt d'étudier les propriétés et la complexité de l'énumération des cliques maximales dans les graphes d'interférences des systèmes de télécommunications multifaisceaux. Cette analyse se mène différemment en fonction du type de graphe que l'on considère : ceux liés à des "beam layout" réguliers (décrits en paragraphe 2.1.4), et ceux liés à des "beam layout" irréguliers quelconques. Les deux cas de figure sont développés dans les paragraphes qui suivent.

5.3.2.2 Définition d'un algorithme polynomial pour les organisations régulières de faisceaux

Considérons ainsi que le choix de recourir à un beam layout régulier pour couvrir la zone de service ait été fait pour le système satellitaire. Pour un certain faisceau $b \in \mathcal{B}$, notons $c_b \in \mathbb{R}^2$ le centre du faisceau B dans le système de coordonnées des angles true view projetés (définis en paragraphe 2.1.2). Nous noterons $\Gamma(b)$ l'ensemble des faisceaux voisins du faisceau b au sens des impossibilités de réutilisation de la même couleur. Une approche industrielle classique pour un

beam layout régulier constitué de faisceaux de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est d'imposer

$$\Gamma(b) = \{\tilde{b} \in B \mid \tilde{b} \neq b \text{ et } \|c_{\tilde{b}} - c_b\| < d\}, \quad (5.9)$$

d étant égal soit à $3r$ soit à $2r\sqrt{3}$, ce que aboutit respectivement aux représentations (a) et (c) de la figure 5.4 des faisceaux voisins du faisceau central. Ces deux liste d'adjacence permettent

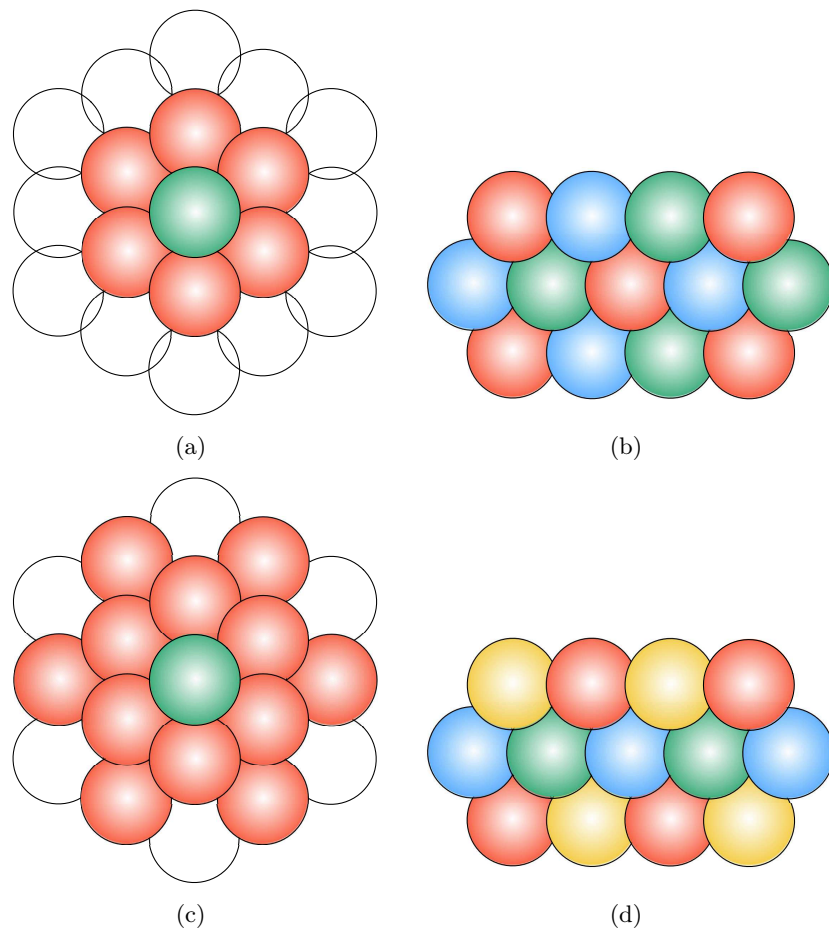


FIGURE 5.1 – (a) Faisceaux voisins, seuil de séparation à $3r$ (b) Stables, seuil de séparation à $3r$ (c) Faisceaux voisins, seuil de séparation à $2r\sqrt{3}$ (d) Stables, seuil de séparation à $2r\sqrt{3}$

de retrouver, cette fois dans un contexte d'allocation de fréquence, les schémas réguliers de coloration rencontrés en paragraphe 2.1.4.2 pour l'allocation de réflecteurs. Pour rappel, on nomme ces motifs 3 et 4 couleurs car on peut dans ce cas partitionner l'ensemble des faisceaux en, respectivement, 3 et 4 stables mis en évidence en (b) et (d) de la figure 5.4. Il existe alors une propriété importante des graphes d'interférence ainsi définis pour cette classe de "beam layouts" :

Proposition 3.

Les cliques maximales des graphes d'interférences correspondant aux motifs réguliers dans les layouts réguliers peuvent toutes être énumérées en temps polynomial

Preuve. L'idée clé ici est que pour tout motif d'exclusion (par exemple (a) ou (c) de la figure

5.4), il existe un nombre fini m tel que, pour tout faisceau $b \in \mathcal{B}$, il existe m cliques pouvant potentiellement contenir b , ce nombre m étant indépendant de la taille N_B du graphe. Par exemple, pour un graphe dont les arêtes sont définies selon le motif d'exclusion du 4-couleurs (figure (c) de 5.4), des considérations géométriques permettent d'arriver à la conclusion que pour un faisceau donné :

- Il ne peut pas appartenir à une clique de taille 5 et plus,
- Les cliques de taille 4 qui pourraient le contenir sont celles de la figure 5.2, plus celles que l'on obtiendrait par rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour du centre du faisceau d'intérêt, ce qui donne un total 20 cliques potentielles distinctes,
- La seule façon pour que le faisceau appartienne à une clique qui soit à la fois maximale et de taille 1, 2 ou 3 est que le faisceau correspondant soit entouré de moins de faisceaux que dans la configuration pleine de la figure 5.2, ce qui peut arriver soit parce que le faisceau en question est en bordure de couverture, ou parce que le "beam layout" régulier présente des trous. Ainsi, si une telle clique existe, c'est un sous-graphe de ce qui aurait été une clique de taille 4 si certains faisceaux n'avaient pas été absents. Ces situations sont également en nombre fini et peuvent être énumérées précisément.

A noter que dans l'exemple du motif 4 couleurs, le nombre de cliques est donc borné supérieurement par $20N_B$. Chaque clique potentielle de taille 4 est caractérisée par un ensemble de faisceaux adjacents bien spécifique. Les cliques de taille strictement inférieure à 4 sont elles caractérisées par un ensemble de faisceaux absents dont les position sont parfaitement connues en termes de distance au faisceau central testé et en d'orientation par rapport à une certaine direction (par rapport la direction horizontale). Le même type de raisonnement s'applique pour les graphes définis selon le motif 3 couleurs. Ainsi, pour énumérer toutes les cliques maximales dans le cas de layouts réguliers, il suffirait d'itérer sur les faisceaux $b \in \mathcal{B}$ et tester chaque possibilité de clique pour voir quelles sont celles qui existent effectivement pour ce faisceau. De cette manière, la liste des cliques maximales croît progressivement, de simples tests permettant d'éviter les doublons de cliques maximales. Finalement, les cliques maximales des layouts réguliers sont donc énumérées avec une complexité polynomiale. \square

5.3.2.3 Efficacité des algorithmes exponentiels dans le cas général

Même s'il est fréquent de recourir à des couvertures régulières dans des systèmes satellitaires multifaisceaux, il peut être intéressant de rompre cette régularité pour épouser une demande en trafic qui serait hétérogène sur la zone de service, comme étudié en chapitre 2. Ainsi, les faisceaux peuvent avoir des tailles variables et des positions pour leurs centres qui ne décrivent aucun motif géométrique particulier. Il était alors nécessaire de déterminer dans ce cas si cela était toujours une approche acceptable d'énumérer exhaustivement en amont les cliques maximales du graphe d'interférence avant de résoudre le problème d'allocation de fréquences. Pour cela, la version

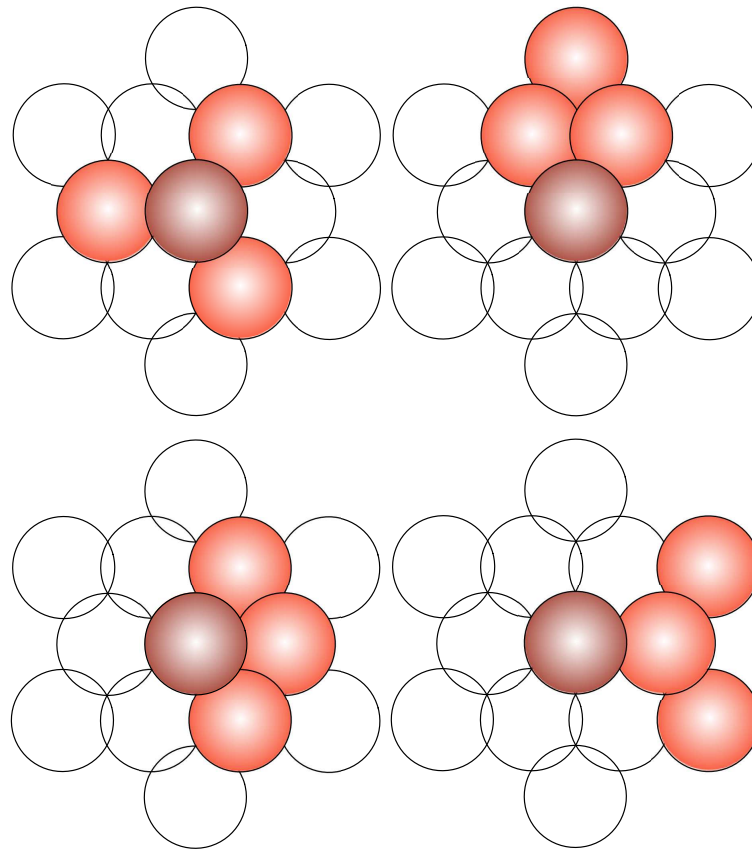


FIGURE 5.2 – Cliques maximales de taille 4 pour un faisceau donné, sous hypothèse de listes d’adjacence du motif 4 couleurs

améliorée de l’algorithme de Bron-Kerbosch, décrit dans [Bron 1973] proposée par Tomita et al. dans [Tomita 2006] a été implémentée et utilisée sur des graphes générés aléatoirement avec des contraintes sur le degré des nœuds. En pratique, dans les systèmes satellitaires multifaisceaux, nous avons estimé que ces degrés sont rarement inférieurs à 1 ou supérieurs à 12, ce qui a ainsi été la contrainte principale dans l’outil en programmation par contraintes utilisé pour générer ces graphes. Nous avons ainsi produits 10000 graphes distincts de taille $|\mathcal{B}| = 200$ (ordre de grandeur de la taille maximale d’un scénario réaliste), et avons observé qu’en moyenne le nombre de cliques était de l’ordre de 10^3 et qu’elles étaient énumérées en un temps moyen de l’ordre de 10^{-2} secondes sur une machine Intel Xeon X5690 @ 3.47 GHz et 24Go de RAM. Ce nombre de cliques est très éloigné de la borne supérieure $3^{\frac{|\mathcal{B}|}{3}}$ dans un graphe non-orienté, ce qui est intéressant en pratique puisqu’un nombre trop élevé aurait rendu impossible ou du moins déraisonnable d’envisager un modèle qui les intègre toutes explicitement. Surtout, les temps d’énumération sont très courts, quasiment instantanés ramenés à l’échelle de temps des phases de design d’un satellite de télécommunications multifaisceaux. Finalement, cela signifie que cette énumération préliminaire des cliques maximales des graphes d’interférence est une opération de pre-processing pour le problème d’allocation de fréquences qui est parfaitement acceptable, quel

que soit le type de beam layout considéré.

5.4 Modélisation globale du problème

Le premier modèle de résolution du problème de plan de fréquences avec minimisation de la complexité du répéteur satellite est un modèle de programmation par contraintes qui est global en ce sens qu'il intègre explicitement toutes les variables et contraintes du problème telles que nous les avons décrites en paragraphe 5.2.1 et 5.2.2.

L'idée de mettre en place un modèle de programmation par contrainte global est venue de l'analyse des contraintes pesant sur les variables du problème : fréquences, polarisations, et TWT (acronyme pour le type d'amplificateurs haute puissance considéré). On se rend effectivement compte qu'une large part du problème peut être modélisée à l'aide de contraintes globales. Les contraintes globales ?? sont des ensembles de contraintes pour lesquelles il est préférable de traiter cet ensemble de contraintes comme un tout plutôt que de traiter toutes les contraintes de cette conjonction de contraintes individuellement. Utiliser les contraintes globales permet de mieux capter la structure du problème résolu, qui est alors exploitée efficacement au sein d'algorithmes puissants de filtrage appliqués à chaque nœud de l'exploration arborescente. A ce sujet, un exemple très significatif est la contrainte all different (voir [van Hoesve 2001] pour des travaux et détails sur ce thème) :

$$\text{alldifferent}(X) \tag{5.10}$$

qui force toutes les variables du vecteur X à être deux à deux distinctes. Dans le modèle présenté plus loin, nous utilisons également la contrainte de cardinalité globale

$$\text{global_cardinality_constr}(X, Y, m, M) \tag{5.11}$$

qui permet de borner supérieurement le nombre de d'apparitions de certaines valeurs dans une liste, X étant cette liste, Y les valeurs recherchées, m le vecteur des nombres minimum d'occurrences de chaque valeur cherchée, et enfin M le vecteur des nombres maximum d'occurrences de chaque valeur cherchée. Enfin, la contrainte globale de convexité

$$\text{convex}(X) \tag{5.12}$$

est utilisée pour forcer les entiers d'un ensemble d'entiers X à être une séquence convexe ($\{1, 2, 3\}$ en est une alors que ce n'est pas le cas de $\{1, 2, 4\}$). Ces contraintes globales sont implémentées dans le solveur open source Gecode (voir [Schulte 2013]) que nous avons décidé d'utiliser dans cette thèse pour ce problème.

Une instance du problème d'allocation de fréquences que nous considérons ici est caractérisée par un nombre de faisceaux N_B , chaque faisceau $b \in B = \{1, \dots, N_B\}$ étant caractérisé par une demande propre $c_b \in \mathbb{N}^+$ en canaux fréquentiels pour répondre à la demande en capacité qu'il observe de la part des utilisateurs qu'il couvre. A noter que cette demande en bande

est définie à la suite de la définition du beam layout, selon une certaine stratégie qui peut notamment impliquer des hypothèses sur les efficacités spectrales espérées dans les faisceaux de la couverture. Le nombre total de canaux requis dans le système est donc

$$N_C = \sum_{b=1}^{N_B} n_b \quad (5.13)$$

Pour tout $b \in B$ et pour tout $c \in \{1, \dots, n_b\}$,

$$\text{ind}(b, c) = c + \sum_{\tilde{b}=1}^{b-1} n_{\tilde{b}} \quad (5.14)$$

définit un ordre 1D pour ces canaux requis, et pour tout $b \in B$,

$$C_b = \{\text{ind}(b, c) \mid c \in \{1, \dots, n_b\}\} \quad (5.15)$$

est la notation pour l'ensemble des indices des canaux requis du faisceau b . Les ensembles C_b partitionnent ainsi l'ensemble $C = \{1, \dots, N_C\}$. La bande passante du système est divisée en N_F sous-bandes d'indices $F = \{1, \dots, N_F\}$. On suppose qu'un nombre maximum de N_T tubes à ondes progressives (ou TWTs) peut être embarqué dans le satellite : ce choix peut-être dicté par des limites de coût, de poids, ou de puissance de la charge utile. On notera alors $T = \{1, \dots, N_T\}$. On considère que N_P polarisations sont exploitables (en pratique, nous aurons $N_P = 1$ ou $N_P = 2$), et on notera de même $P = \{1, \dots, N_P\}$. Nous faisons l'hypothèse que la demande en nombre de canaux par faisceaux est à satisfaire strictement : cela correspond à une classe réaliste de besoins des clients où la demande provenant des utilisateurs au sol prime sur la complexité induite dans le répéteur du satellite. Ainsi, il va s'agir ici d'assigner à chaque canal $c \in C$ une fréquence $\mathbf{f}_c \in F$, un TWT $\mathbf{t}_c \in T$ et une polarisation $\mathbf{p}_c \in P$, qui constituent l'ensemble des variables du problème. Deux graphes d'interférences $G = (B, E)$ et $G' = (B, E')$ avec $E' \subset E$ sont définis pour matérialiser les deux types de contraintes binaires : une arête de E' interdit l'utilisation de la même fréquence quelle que soit la polarisation aux porteuses dans les deux faisceaux correspondant aux extrémités de l'arête, là où les arêtes de E interdisent l'utilisation de mêmes couples fréquence-polarisation. Dans les équations qui suivent, la notation $\text{card}(X)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini X .

Nous pouvons ainsi exprimer à l'aide de ces variables les contraintes de notre problème :

- *Contiguïté fréquentielle dans les faisceaux :*

Pour un faisceau b tel que $n_b > 1$, les n_b porteuses doivent être contigües en fréquence, utiliser le même TWT, et avoir la même polarisation. Pour ces faisceaux b , ces contraintes s'expriment ainsi :

$$\forall i \in \{2, \dots, n_b\}, \quad \mathbf{t}_{\text{ind}(b,1)} = \mathbf{t}_{\text{ind}(b,i)} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{P}_{\text{ind}(b,1)} = \mathbf{P}_{\text{ind}(b,i)} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ind}(b,i-1)} = \mathbf{f}_{\text{ind}(b,i)} - 1 \quad (5.18)$$

- Bornes sur le facteur de réutilisation de chaque fréquence :

Pour contrôler les équipements nécessaires pour les conversions en fréquence entre le lien montant et le lien descendant, des bornes inférieures et supérieures peuvent être définies en entrée. Soient \mathbf{R}_{\min} et \mathbf{R}_{\max} des vecteurs de taille N_F contenant ces bornes (notons qu'en pratique le tableau des bornes inférieures sera souvent uniquement constitué de 0, il est simplement introduit ici pour épouser la définition générique de la contrainte globale de cardinalité qui exploite les deux tableaux), alors la contrainte correspondante est la suivante :

$$\text{global_cardinality_constr}(\mathbf{f}, F, \mathbf{R}_{\min}, \mathbf{R}_{\max}) \quad (5.19)$$

- Contraintes d'interférences binaires associées au graphe G :

Bien qu'il ne s'agisse pas ici d'un modèle de programmation linéaire en nombres entiers qui profiterait pleinement des bonnes propriétés des contraintes de cliques discutées en paragraphe 5.3.1, nous avons décidé d'exploiter l'énumération des cliques maximales dès la modélisation en programmation par contraintes. Notamment, nous profitons du fait qu'elles suffisent pour exprimer les contraintes d'interférences binaires (démonstré en paragraphe 5.3.2.1). Ainsi, supposons que le graphe G comprenne $N_{\text{cliques},G}$ cliques maximales. Pour toute clique maximale $i \in \{1, \dots, N_{\text{cliques},G}\}$ de G , on notera alors

$$C'_i = \bigcup_{\substack{b \in B \text{ tel que} \\ b \text{ appartient à la clique } i \text{ de } G}} C_b \quad (5.20)$$

l'ensemble des canaux des faisceaux de la clique maximale i du graphe G . La contrainte d'interférence consiste donc à interdire toute réutilisation du même couple fréquence-polarisation pour ces porteuses. Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, N_{\text{cliques},G}\}$, nous imposerons :

$$\text{alldifferent}(\mathbf{f}_c + N_F(\mathbf{p}_c - 1) \mid c \in C'_i) \quad (5.21)$$

- Contraintes d'interférences binaires associées au graphe G' :

Le raisonnement pour le graphe G' est identique mais donne cette fois lieu à des interdictions de réutiliser la même fréquence quelle que soit la polarisation des porteuses concernées. Pour toute clique $i \in \{1, \dots, N_{\text{cliques},G'}\}$ de G' , on notera cette fois

$$C''_i = \bigcup_{\substack{b \in B \text{ tel que} \\ b \text{ appartient à la clique } i \text{ de } G'}} C_b \quad (5.22)$$

l'ensemble des canaux des faisceaux de la clique maximale i du graphe G' . La contrainte d'interférence consiste donc à interdire toute réutilisation du même couple fréquence-polarisation pour ces porteuses. Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, N_{\text{cliques},G'}\}$, nous imposerons :

$$\text{alldifferent}(\mathbf{f}_c \mid c \in C''_i) \quad (5.23)$$

- Utilisation unique de chaque fréquence dans les TWTs :

La même fréquence ne peut pas être utilisée plus d'une fois par les porteuses radiofréquence d'un même TWT :

$$\forall t \in T, \forall f \in F, \text{card}(\mathbf{T}_t \cap \mathbf{F}_f) \leq 1 \quad (5.24)$$

où $\mathbf{T}_t \subset C$ et $\mathbf{F}_f \subset C$ correspondent respectivement à l'ensemble des canaux utilisant le TWT t et à l'ensemble des canaux à la fréquence f , ces variables d'ensembles étant trivialement liées aux tableaux originels de variables \mathbf{t} et \mathbf{f} par des contraintes non détaillées ici.

- La contiguïté fréquentielles dans les TWTs :

Notons \mathcal{F}_t l'ensemble des fréquences utilisées par des canaux associés au TWT t (variable d'ensemble elle aussi dérivée des variables \mathbf{t} et \mathbf{f}). Ainsi, la contrainte globale de convexité permet précisément d'imposer la contrainte souhaitée :

$$\forall t \in T, \text{convex}(\mathcal{F}_t) \quad (5.25)$$

- Nombre maximum de canaux amplifiés par un TWT :

Le nombre maximum de porteuses dans un TWT donné est borné supérieurement par un paramètre d'entrée n :

$$\forall t \in T, \text{card}(\mathbf{T}_t) \leq n \quad (5.26)$$

- Incompatibilités de canaux pour un même TWT :

Certaines porteuses ne peuvent pas emprunter le même amplificateur haute-puissance. Soient $c, c' \in C$ deux porteuses qui n'ont pas le droit d'être associées au même TWT, alors la contrainte correspondante est la suivante :

$$\mathbf{t}_c \neq \mathbf{t}_{c'} \quad (5.27)$$

- Respect des types de TWTs :

Le contenu de chaque TWT doit correspondre à un certain "type", chaque type se caractérisant par un ensemble de fréquences de F que le TWT a le droit d'amplifier. Soient alors $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ deux sous-ensembles de fréquences tels que $F_1 \cup F_2 = F$. Ces deux ensembles définissent donc deux types de contenus fréquentiels acceptables pour les TWTs. Cela veut dire que les porteuses dans un TWT donné doivent soit toutes utiliser des fréquences de F_1 , soit toutes utiliser des fréquences de F_2 , ce qui peut s'exprimer comme suit :

$$\forall c, c' \in C, \mathbf{f}_c \in F \setminus F_2 \wedge \mathbf{f}_{c'} \in F \setminus F_1 \Rightarrow \mathbf{t}_c \neq \mathbf{t}_{c'} \quad (5.28)$$

Enfin, l'objectif est la minimisation du nombre de tubes utilisés parmi les tubes disponibles. Ce nombre n_{used} est une variable qui s'obtient à partir du tableau de variables \mathbf{t} en recourant à deux contraintes globales dites de "counting", la première génération un tableau des nombres d'utilisation de chaque TWT, la deuxième comptant le nombre de valeurs non-nulles dans ce

dernier :

$$\min n_{\text{used}} \tag{5.29}$$

5.5 Approche de résolution par décomposition séquentielle

Plus adaptée aux plus grosses instances comme nous le verrons, nous proposons également une méthode de décomposition avec une division du problème en un premier problème de scheduling multi-processeurs qui travaille sur un premier sous-ensemble de variables et contraintes. Le deuxième problème, résolu en série en prenant pour entrées les résultats de la première optimisation, est comme nous le verrons un problème de couverture par des chemins. Cela nous a permis de comparer expérimentalement les deux approches : globale et décomposée.

5.5.1 Le sous-problème d'allocation de fréquences et de polarisations

Plus précisément, une analogie avec les problèmes de scheduling multiprocesseurs ([Garey 1975],[Blazewicz 1986],[Drozdowski 1996]) est possible pour l'allocation de fréquences et de polarisations, c'est-à-dire pour le problème qui ne concerne que les tableaux de variables \mathbf{f} et \mathbf{p} et les contraintes (5.17), (5.18), (5.19), (5.21) et (5.23). Ce problème, noté (S_1) , est une extension du modèle proposé dans [Kiatmanaroj 2016] où le problème d'allocation de fréquences est adressé indépendamment de la notion de polarisation. Chaque faisceau $b \in B$ est assimilé à un travail constitué d'une unique opération dont la durée d'exécution, exprimée en unités de temps, est non-préemptive et égale au nombre de canaux requis dans ce faisceau. Un tel modèle est valide car les fréquences dans un faisceau sont contraintes d'être contiguës en vertu des équations (5.25), cette contiguïté des fréquences correspondant donc au caractère non-préemptif des durées d'exécution. Chaque clique maximale de G' est assimilée à une machine avec des contraintes de non-chevauchement, là où chaque clique maximale de G est associée à exactement deux machines, une pour chaque polarisation (nous nous plaçons en effet dans le cadre de l'hypothèse très classique où $N_P = 2$). Pour chaque faisceau/travail $b \in B$, C'_1 est l'ensemble des machines correspondant aux cliques de G' qui contiennent le faisceau b , alors que $C_{b,1}$ et $C_{b,2}$ sont des ensembles de machines représentant les cliques de G contenant b qui sont respectivement associés aux polarisations 1 et 2. Pour la contrainte (5.19), nous supposons ici que l'unique restriction est une borne supérieure sur le facteur de réutilisation $R \in \mathbb{N}^+$ des canaux (même borne pour chaque fréquence de F), ce qui entraîne la définition de $M = \{m_1, \dots, m_R\}$ machines parallèles identiques. Chaque travail $b \in B$ nécessite simultanément plusieurs machines. Plus précisément, il doit être exécuté sur :

- Toutes les machines de C'_1
- Soit toutes les machines de $C_{b,1}$, soit toutes les machines de $C_{b,2}$
- Une machine de M

Dans l'exemple de la figure 5.3, pour le faisceau numéro 1 avec les notations $C'_1 = \{c'_{1,1}, c'_{1,2}\}$,

$C_{1,1} = \{c_{1,1,1}, c_{1,1,2}\}$ et $C_{1,2} = \{c_{1,2,1}, c_{1,2,2}\}$, nous avons :

- $c'_{1,1}$ et $c'_{1,2}$ associées aux cliques/machines $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$ de G'
- $c_{1,1,1}$ et $c_{1,1,2}$ associées aux machines de la première polarisation pour les cliques $\{1,2,3\}$ et $\{1,3,4\}$ de G
- $c_{1,2,1}$ et $c_{1,2,2}$ associées aux machines de la seconde polarisation pour les cliques $\{1,2,3\}$ et $\{1,3,4\}$ de G
- m_1 la machine de M utilisée par le faisceau 1

Dans l'exemple, les deux porteuses requises par le faisceau 1 utilisent les deuxième et troisième positions fréquentielles et la première polarisation. Avec une date de fin commune à tous les travaux étant égale au nombre de fréquences N_F (égal à 4 en figure 5.3), on constate que résoudre ce problème d'ordonnancement est équivalent à la résolution de la sous-partie considérée ici du problème d'allocations de fréquence.

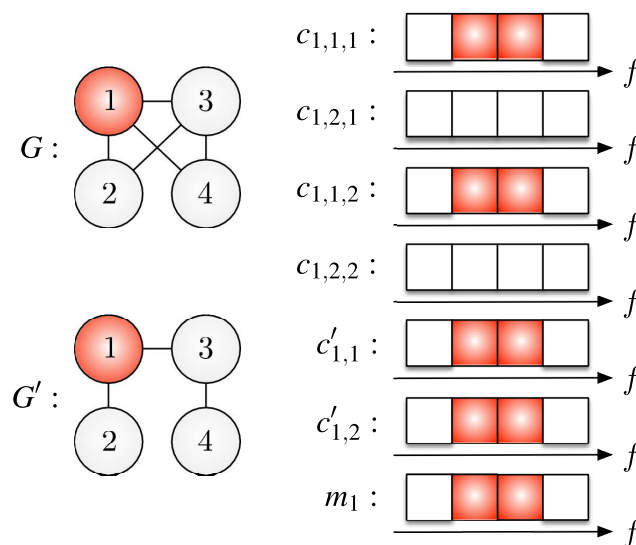


FIGURE 5.3 – Exemple d'exécution d'un travail sur les machines

Proposition 4.

(S_1) étant équivalent à un problème d'ordonnancement multiprocesseurs, il est NP-difficile.

Preuve. Le problème de machines parallèles est un cas particulier de (S_1) □

5.5.2 Allocation d'amplificateurs haute-puissance à fréquences et polarisation connues

Supposons maintenant que les fréquences et les polarisations aient été allouées d'une certaine manière à tous les canaux requis par les faisceaux : cela suppose notamment de travailler sur instance d'allocation de fréquences réalisable sur ces aspects. Alors, on peut se demander ce que devient le problème d'allouer des TWTs à ces canaux, ce problème étant noté (S_2) . La première remarque qu'il convient de faire ici est que la contrainte (5.28) sur le type de TWTs peut maintenant s'interpréter comme des incompatibilités additionnelles dans la contrainte (5.27) puisque les fréquences des canaux alloués sont maintenant connues. La deuxième remarque est qu'il est maintenant possible de représenter le problème par un problème de couverture par des chemins d'un graphe orienté dans lequel les nœuds représentent les N_C canaux alloués dans la système (voir figure 5.5.2), un chemin représente un TWT et son contenu. Dans ce graphe, pour tout $f \in F \setminus \{N_F\}$, les seuls successeurs possibles pour les canaux utilisant la fréquence f sont ceux utilisant la fréquence $f + 1$, le demi-degré intérieur des canaux utilisant la fréquence 1 valant systématiquement 0, tout comme le demi-degré extérieur des canaux utilisant la fréquence N_F . Une conséquence de ces quelques propriétés est que nous avons affaire à des graphes acycliques. Les incompatibilités entre deux canaux qui ne peuvent pas emprunter le même chemin/TWT sont représentées par des connexions pointillées sur la figure 5.5.2. Pour un canal donné, deux effets viennent conditionner son nombre d'arcs sortants : quand ce canal n'est pas le dernier canal du faisceau auquel il appartient (au sens de la plus haute fréquence du faisceau), et quand il existe des canaux qui utilisent la fréquence suivante et avec lesquels il est en incompatibilité. Dans le premier, un seul unique arc sort du nœud/canal et est dirigé vers la prochaine porteuse du faisceau correspondant. Dans le deuxième cas, le canal ne peut pas être connecté aux canaux avec lesquels il partage une incompatibilité. Sinon, pour tout canal n'étant dans aucune de ces deux situations, on définira un arc par porteuse utilisant la fréquence suivante. On constate alors qu'assigner des TWTs aux canaux se ramène dans ce cas à la recherche d'un nombre minimum de chemins disjoints qui couvrent tous les nœuds, la contiguïté (contrainte 5.25) et le fait que la même fréquence ne peut pas être utilisée deux fois dans le même TWT (contrainte 5.24) étant automatiquement vérifiés avec un graphe construit de cette manière. Cependant, il existe des contraintes additionnelles à prendre à compte, comme la longueur maximale des chemins (contrainte 5.26), la contrainte de ne pas utiliser le même TWT pour deux canaux incompatibles (contrainte 5.27), et finalement la contrainte que les canaux d'un même faisceau doivent tous parcourir le même TWT (contrainte 5.16). Finalement, une instance du problème considéré est entièrement définie par : un graphe orienté acyclique D dont les nœuds peuvent être partitionnés en un certain nombre de niveaux ordonnés et dont les arcs ne lient que les nœuds d'un niveau avec des nœuds du niveau suivant, une limite l sur la taille des chemins, un ensemble pour chaque canal des canaux avec lesquels il doit partager un même TWT (les ensembles vides étant autorisés), et un ensemble pour chaque canal des canaux incompatibles (les ensembles vides étant là aussi autorisés).

Proposition 5.

(S_2) est un problème de couverture par des chemins NP-difficile

Preuve. Sans les contraintes additionnelles (5.16,5.26,5.27), le problème de couverture d'un

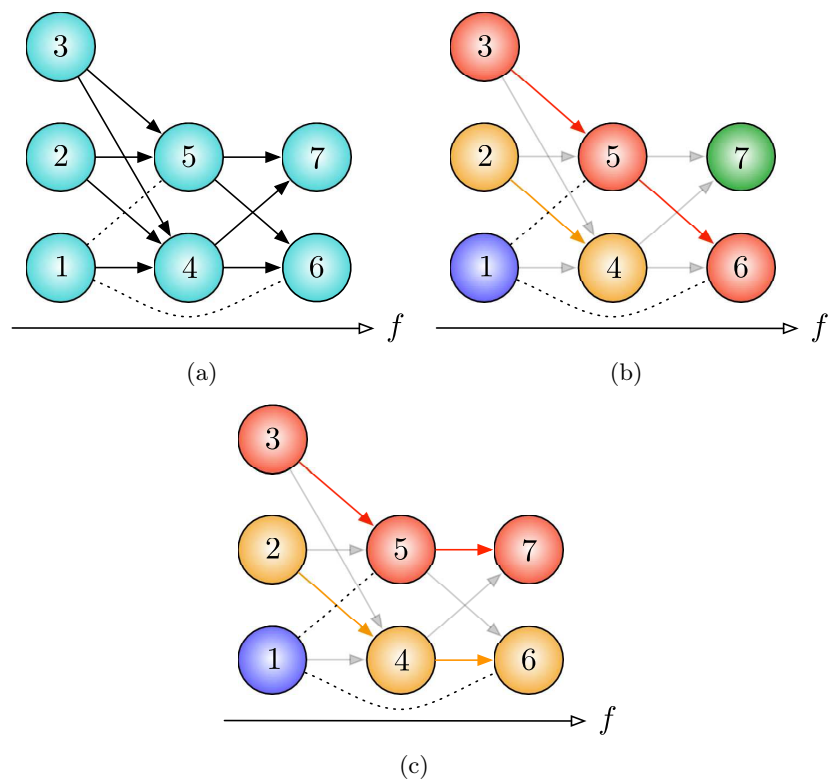


FIGURE 5.4 – (a) Une instance de graphe d'allocation de TWTs (b) Solution sous-optimale (c) Solution optimale

graphe orienté par un nombre minimum de chemins disjoint peut être résolu en temps polynomial comme démontré dans [Boesch 1977]. Par contre, quand elles sont prises en compte, le problème devient NP-difficile. Effectivement, considérons une instance du problème qui consiste à trouver une couverture des éléments d'un ensemble partiellement ordonné (ou poset) par un nombre de chaînes minimal, dont le caractère NP-complet a été prouvé dans [Shum 1996]. Il est classique de représenter ce poset par un graphe orienté divisé en niveaux ordonnés, les arcs connectant les éléments comparables de l'ensemble d'un niveau à l'autre : il s'agit précisément du diagramme de Hasse. Ensuite, avec la limite supérieure sur la taille des chemins égale à la taille maximale d'une chaîne, et avec pour chaque canal des ensembles vides pour les canaux incompatibles et ceux devant utiliser le même TWT, on constate que résoudre que résoudre cette instance de couverture de poset est équivalent à résoudre une instance particulière du problème de couverture par des chemins considéré dans nos travaux. Ainsi, il est lui aussi NP-difficile. \square

Pour le résoudre, le programme linéaire en variables binaires suivant a été mis en place :

$$\text{Minimiser } \sum_{t=1}^{N_T} u_t \quad (5.30)$$

sous les contraintes

$$\forall c \in C, \quad \sum_{t=1}^{N_T} x_{ct} = 1 \quad (5.31)$$

$$\forall t \in T, \forall f \in F, \quad \sum_{c=1}^{N_C} Y_{cf} x_{ct} \leq 1 \quad (5.32)$$

$$\forall t \in T, \quad u_t \geq \frac{1}{N_C} \sum_{c=1}^{N_C} x_{ct} \quad (5.33)$$

$$\forall t \in T, \quad \sum_{c=1}^{N_C} x_{ct} \leq n \quad (5.34)$$

$$\forall c, c' \in C \text{ qui sont incompatibles}, \forall t \in T, \quad x_{ct} + x_{c't} \leq 1 \quad (5.35)$$

$$\forall c, c' \in C \text{ d'un même faisceau}, \forall t \in T, \quad x_{ct} - x_{c't} = 0 \quad (5.36)$$

$$\forall t \in T, \forall f \in F \setminus \{N_F\}, \quad \sum_{c=1}^{N_C} \left(\left[\sum_{f'=f+1}^{N_F} y_{cf'} \right] + N_F Y_{cf} - N_F y_{c(f+1)} \right) x_{ct} \leq N_F \quad (5.37)$$

Variables : $x_{ct}, a_b, u_t \in \{0, 1\}$

FIGURE 5.5 – Programme linéaire en variables binaires de minimisation du nombre de chemins couvrants dans la graphe d'allocation de TWT

où $Y_{cf} \in \{0, 1\}$ sont des arguments booléens en entrée qui indiquent si le canal $c \in C$ utilise la fréquence $f \in F$ ($Y_{cf} = 1$) ou non ($Y_{cf} = 0$), $x_{ct} \in \{0, 1\}$ sont des variables booléennes qui indiquent si le canal $c \in C$ utilise le TWT $t \in T$ ($x_{ct} = 1$) ou non ($x_{ct} = 0$), et finalement les $u_t \in \{0, 1\}$ sont des variables booléennes d'utilisation du TWT t ($u_t \in \{0, 1\} = 1$ si oui, $u_t \in \{0, 1\} = 0$ sinon). La contrainte (5.31) est celle qui impose d'avoir exactement 1 TWT d'associé à chaque canal, (5.32) interdit l'utilisation d'un même TWT par deux canaux transmis à la même fréquence, (5.33) est la contrainte qui force les variables u_t à être égales à 1 dès que le TWT t est utilisé au moins une fois, (5.34) est la limite sur le nombre de canaux qui peuvent être amplifiés par le même TWT, la contrainte (5.35) interdit deux porteuses incompatibles d'emprunter le même TWT, (5.36) impose que les porteuses d'un même faisceau soient associées à un même TWT, (5.37) assure la contiguïté des fréquences dans les TWTs, et enfin (5.30) est une expression du critère de minimisation du nombre de TWTs utilisés.

Comme discuté dans en paragraphe 5.2.2.2, la contiguïté des fréquences dans les tubes à ondes progressives n'est pas systématiquement requise pour un tel dimensionnement de répéteur de satellite de télécommunications multifaisceaux. Cependant, c'est cette contrainte qui est à

l'origine de la notion de chemin dans le graphe basé sur les canaux alloués dans le système. Dans le cas où la contiguïté ne serait pas exigée dans les amplificateurs haute puissance, le problème devient en fait une généralisation du problème de bin-packing multidimensionnel. Effectivement, les TWTs peuvent être vus comme des conteneurs divisés en N_F compartiments, chacun avec une capacité de 1. Chaque canal est un objet composé de N_F parties, chaque partie ayant une taille de 0 sauf pour celle qui correspond à la fréquence utilisée par le canal qui a elle une taille de 1. Avec des contraintes additionnelles entre les canaux/objets qui ne peuvent pas être dans les mêmes conteneurs, la minimisation du nombre de tubes à ondes progressives se ramène à un packing des canaux/objets dans le plus petit nombre possible de TWT/conteneurs, chaque partie de chaque objet prenant place dans le bon compartiment de chaque conteneur. Finalement, le problème d'allocation des amplificateurs haute puissance reste NP-difficile. A noter que dans les expérimentations à suivre, la choix a été de continuer à considérer la contrainte de contiguïté et le problème de couverture par des chemins associé.

5.6 Résultats expérimentaux

Les expérimentations proposées dans ce paragraphe ont permis d'évaluer et comparer les deux approches suivantes :

- Approche Globale (AG) :
Il s'agit là de la résolution du modèle de programmation par contraintes introduit en paragraphe 5.4. Il est résolu avec le solveur de programmation par contraintes Gecode.
- Méthode de décomposition (MD) :
Cette approche consiste en une résolution séquentielle de (S_1) de la section 5.5 avec un solveur de programmation par contraintes (Gecode à nouveau sélectionné), puis de (S_2) avec un solveur de programmation linéaire mixte (Gurobi 7.0).

Un premier exemple détaillé est présenté dans la figure 5.6 avec un scénario fictif sur la France et l'Italie, avec $N_B = 12$ formant un beam layout régulier. Les caractéristiques du problème résolu étaient les suivantes :

- Chaque faisceau $b \in \{1, \dots, 12\}$ de la figure 5.6 est caractérisé par un nombre de canaux requis n_b égal soit à 1, soit à 2, l'indexation de ces canaux étant représentée sur la figure 5.6(a) à l'intérieur des faisceaux.
- Pour les faisceaux b avec un nombre de canaux requis $n_b > 1$, on exige une contiguïté des fréquences, la même polarisation et le même TWT.
- La bande totale du système est partitionnée en $N_F = 6$ slots fréquentiels.
- Les bandes de fréquences admissibles pour les TWTs sont $\{1, 2, 3\}$ et $\{4, 5, 6\}$.

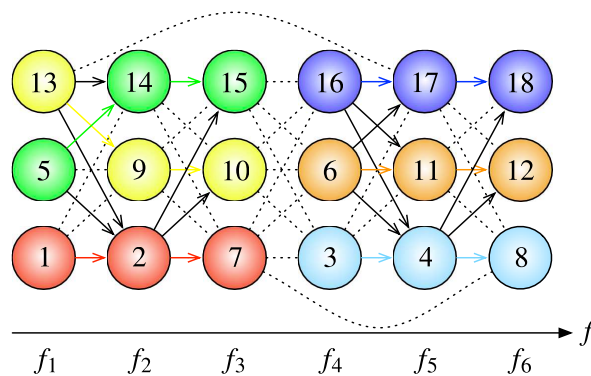
- Le nombre de réutilisation maximum d'un même TWT par les canaux est fixé à $n_{\max, \text{canaux}} = 3$, ce qui correspond à l'intégralité des intervalles de fréquences du point précédent.
- Le schéma "4-couleurs" est utilisé pour imposer des interférences binaires pour la réutilisation des mêmes couples (fréquence, polarisation). Il s'agit donc de la définition du graphe E .
- Le schéma "3-couleurs" est lui utilisé pour définir E' et les contraintes de non-utilisation de la même fréquence.
- La porteuses 5 est incompatible des porteuses 9 et 10 au sens du choix des TWTs, la porteuses 13 est incompatible des porteuses 17 et 18, la porteuse 7 est enfin incompatible de la porteuses 8.
- Chaque slot fréquentiel est contraint de ne pas être utilisé plus de 3 fois par les canaux des différents faisceaux de la couverture.
- Enfin, la fonction objectif est la minimisation du nombre de tubes à ondes utilisés.

L'instance de la figure 5.6 est une des instances pour lesquelles l'approche globale AG résolue avec Gecode est bien trop longue à fournir une solution. A l'inverse, avec la méthode de décomposition, la partie scheduling et le programme linéaire d'allocation de tubes résultant sont résolus très efficacement, respectivement avec Gecode et Gurobi. Dans la figure 5.6(a), les faisceaux sont tous représentés avec un anneau de couleur, les deux couleurs correspondant aux deux polarisations. Sur la figure 5.6(b), les fréquences des porteuses trouvées en résolvant (S_1) peuvent être lues sur l'axe horizontal, et chaque couleur pour les canaux représente un TWT. On remarque que l'allocation de la figure 5.6 obtenue sur cette instance est optimale puisque le nombre de TWTs utilisés est exactement égal au nombre total de canaux divisé par le nombre maximum de canaux dans un TWT.

Quand les instances sont générées aléatoirement, notre approche stricte sur le nombre de canaux à allouer par faisceau peut engendrer des infaisabilités. Même si cela vaut pour les deux approches, dans le cas de la méthode de décomposition (MD), le risque d'infaisabilité est encore plus fort dans la mesure où certaines contraintes du problème de couverture par des chemins (S_2) ne sont actuellement pas anticipées dans le problème (S_1) qui le précède (les intervalles de fréquence admissibles des TWTs par exemple). En pratique, quand le solveur de programmation par contraintes Gecode est utilisé, prouver les infaisabilités des instances est significativement plus difficile que générer des solutions réalisables sur les problèmes faisables. Dans les résultats présentés dans cette partie, nous avons filtré toutes les instances infaisables pour ne présenter des résultats statistiques sur des instances dont les ensembles admissibles se sont avérés non-vides.



(a)



(b)

FIGURE 5.6 – (a) Couverture multifaisceaux, canaux, et polarisations (b) Fréquences et TWTs

Pour chaque instance résolue avec l'approche de décomposition (MD), le problème de scheduling est résolu avec Gecode en utilisant le sous-ensemble de contraintes définissant (S_1) parmi les contraintes du modèle global de la section 5.4. Ensuite, les solutions de (S_1) sont transformées en instances (S_2) de couverture par des chemins disjoints qui sont résolues avec Gurobi grâce au programme linéaire en variables binaires de la figure 5.5. Avec l'approche globale (AG), rappelons que le problème est aujourd'hui entièrement résolu par Gecode. Pour la première phase de notre série d'expérimentations, nous avons généré des instances d'allocation de fréquences aux caractéristiques identiques à celles de l'exemple de la figure 5.6 détaillé plus haut, aux changements suivants près :

- Chaque faisceau $b \in \{1, \dots, 12\}$ de la figure 5.6 perçoit maintenant un nombre de canaux

requis égal à 0 ou 1 (certains faisceaux peuvent donc être inactifs sur certaines instances).

- Les incompatibilités entre les canaux pour l'utilisation d'un même TWT sont générées aléatoirement à partir d'un ratio objectif de couples de canaux contraints : 10% de tous les couples de canaux possibles par exemple.
- Le nombre total de canaux du système $N_C = \sum_{1 \leq b \leq 12} n_b$ est progressivement augmenté, de 4 à 12, 100 instances réalisables étant générées pour chacune de ces valeurs.
- Chaque slot fréquentiel dans $\{1, \dots, N_F\}$ ne peut pas être utilisé plus d'une fois pour $4 \leq N_C \leq 6$, et plus de deux fois quand $7 \leq N_C \leq 12$

Les figures 5.7 et 5.8 permettent de comparer (AG) et (MD) en termes de temps d'exécution et de valeurs de obtenues pour la fonction objectif. Comme attendu, on observe que dans le cas d'une allocation conjointe d'allocation de TWTs, fréquences et polarisations aux porteuses (AG), les temps d'exécution sont plus élevés qu'avec la méthode de décomposition (MD) mais les solutions produite sont en moyenne de meilleur coût. Dans le cas particulier des instances que nous avons générées, (AG) atteint toujours la valeur minimale théorique de nombre de TWTs, à savoir

$$\left\lceil \frac{N_C}{n_{\max, \text{canaux}}} \right\rceil \quad (5.38)$$

Cependant, la méthode de décomposition réussit souvent à atteindre également ce nombre de TWTs optimal, comme le montre la table 5.1. C'est une remarque crucial sur laquelle nous souhaitons insister puisque c'est ce qui rend légitime l'utilisation de (MD) quand (AG) n'est pas utilisable en pratique pour cause de mauvais comportement numérique.

TABLE 5.1 – Pourcentage du nombre de fois où l'optimum théorique est atteint avec la méthode de décomposition pour chaque classe d'instances

Nombre de canaux	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Optimalité de (MD)	87%	72%	75%	83%	59%	53%	69%	76%	64%

Dans la phase suivante des expérimentations, le nombre total de canaux requis dans le système a été fixé à des valeurs vérifiant $13 \leq N_C \leq 18$, les demandes individuelles de chaque faisceau variant entre $n_b = 1$ et $n_b = 2$, la réutilisation de chaque fréquence étant dorénavant limitée à 3. En conséquence directe de ces hypothèses, de nouvelles contraintes doivent être prises en compte pour les faisceaux b tels que $n_b > 1$: contiguïté des fréquences, même polarisation et même TWT pour les canaux appartenant à un même faisceau. En pratique, cette complexification du modèle en termes de contraintes actives rend l'approche globale (AG) inutilisable, pour les instances infaisables, mais dorénavant également pour les instances réalisables. Effectivement, on constate des temps d'exécution longs, bien que ces instances soient relativement petites comparées aux plus grands scénarios réalistes que nous pourrions vouloir résoudre. Ceci renforce

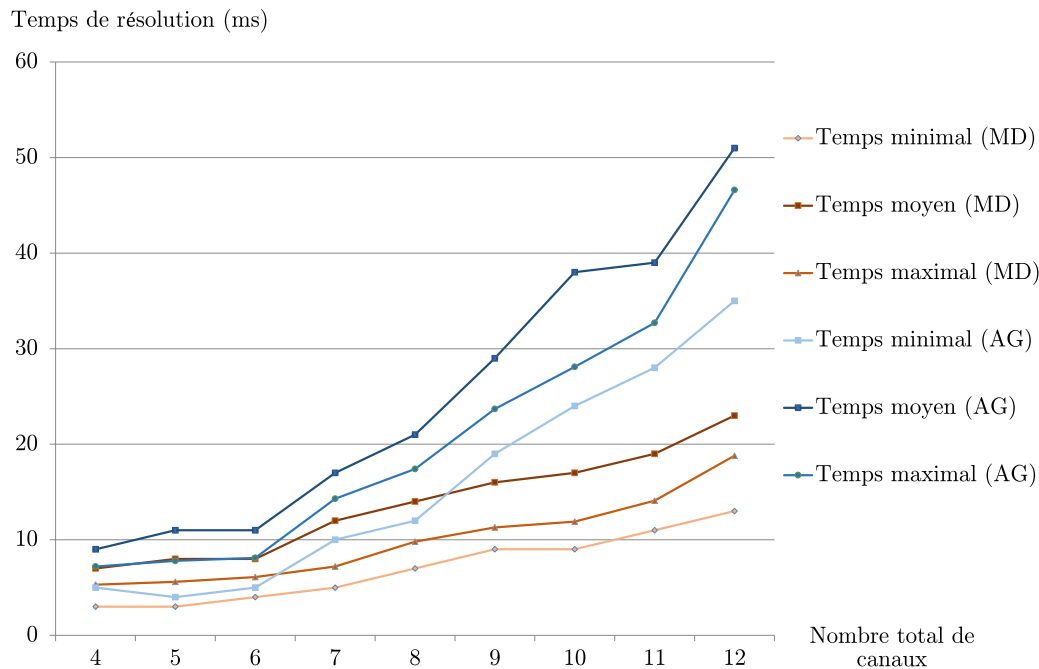


FIGURE 5.7 – Comparaison de (AG) et (DM) en termes de statistiques de temps d'exécution pour des instances de $N_C = 4$ à $N_C = 12$

l'intérêt de la méthode de décomposition (MD). Dans la figure 5.9, les temps d'exécution de (S_1) (scheduling) et (S_2) (couverture par des chemins disjoints) sont comparés sur l'intégralité des classes d'instances décrites plus haut, donc pour N_C variant de 4 à 18. Deux remarques essentielles sont à extraire de cette figure. D'abord, la différence entre les instances pour lesquelles $N_C \leq 12$ et celles pour lesquelles $N_C \geq 13$ est claire : les nouvelles contraintes liées aux faisceaux b vérifiant $n_b > 1$ ralentissent la recherche. Ensuite, on constate que les temps d'exécution croissent plus rapidement pour le problème d'ordonnancement (S_1) que pour le problème de couverture par des chemins. Cette remarque est d'autant plus importante quand on se rappelle que les instances infaisables sont également un point d'échec pour Gecode sur le problème (S_1). Ainsi, on comprend que le problème d'ordonnancement est bien celui qui mérite d'être travaillé dans les travaux à venir pour renforcer et confirmer l'intérêt de la méthode de décomposition aux plus grandes instances. Par exemple, exploiter comme dans la littérature les inégalités de cliques (voir paragraphe 5.3.1) dans un modèle linéaire en variables binaires pour (S_1) est prometteur.

5.7 Conclusions

Ce chapitre aura permis de revenir sur l'importance d'exploiter efficacement la précieuse ressource radio dans les systèmes de télécommunications. Cette problématique est bien connue en optimisation combinatoire : on parle là des *Frequency Assignment Problems* pour lesquels un état de l'art a été fourni. La problématique particulière d'optimisation conjointe de la charge utile et

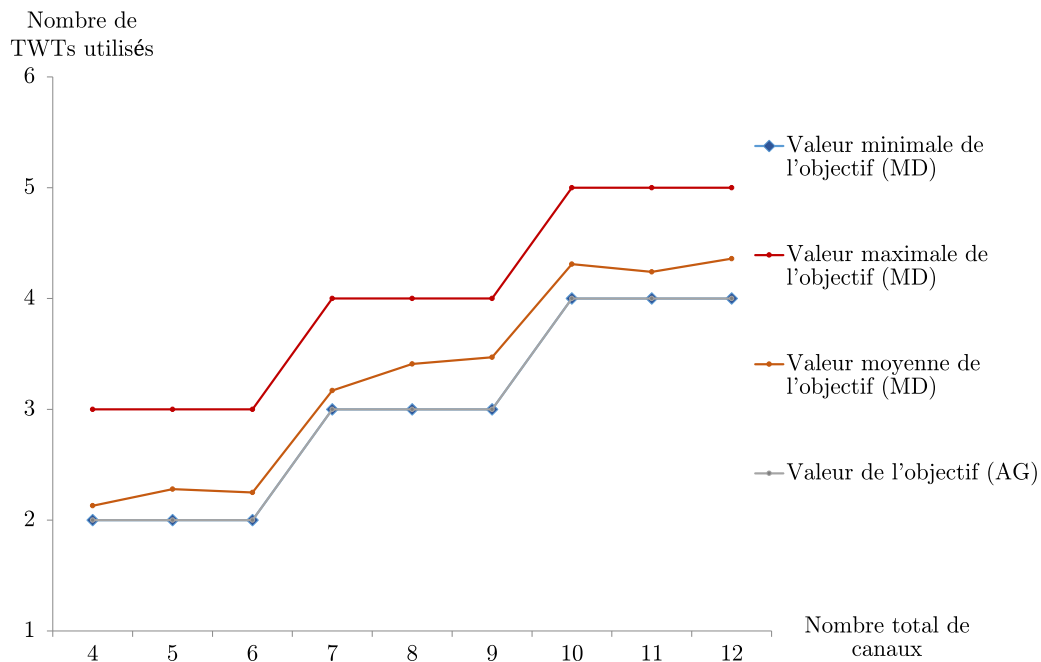


FIGURE 5.8 – Comparaison de (AG) et (DM) en termes de fonction objectif pour des instances de $N_C = 4$ à $N_C = 12$

des performances du système de télécommunications est cependant inédite, dans la forme retenue du problème pour ces travaux. Les interférences de type binaire ont été celles retenues dans notre modélisation : elles permettent de modéliser par un graphe les interdictions de réutiliser la même fréquence. Nous avons prouvé que dans le cas des beam layout de systèmes multifaisceaux, les cliques maximales de ces graphes peuvent être énumérées efficacement, et exploitées en phase de modélisation du problème. Un modèle global de programmation par contrainte a ensuite été introduit pour résoudre d'un trait l'intégralité du problème. Il est confronté à une méthode de décomposition qui elle sépare l'allocation de fréquences et de polarisation et l'allocation des amplificateurs haute puissance, ces deux problèmes étant respectivement résolus en programmation par contraintes et en programmation linéaire en variables binaires. Les résultats démontrent que, naturellement, le modèle global fournit de meilleurs scores, mais il devient rapidement inutilisable quand les instances grandissent. La méthode de décomposition ne fournit pas systématiquement des résultats optimaux, mais elle produit tout de même des solutions de bonne qualité, même dans les catégories d'instances pour lesquels le modèle global est déjà trop faible en performances pour être utilisable.

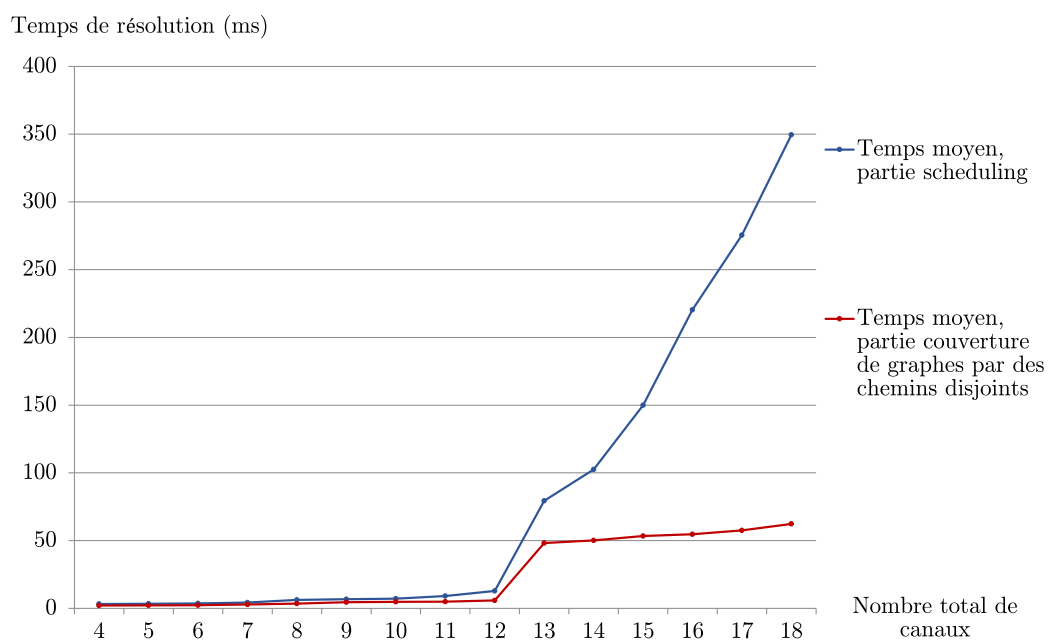


FIGURE 5.9 – Temps d'exécution pour (S_1) et (S_2)

Troisième partie

Conclusion

Conclusions générales

Le besoin continu d'innover pour les services de télécommunications impacte naturellement les fabricants de satellites multifaisceaux. Le rythme soutenu affiché par les réseaux terrestres en termes d'évolution des capacités et des débits oblige les opérateurs de satellites à définir, en collaboration proche avec les fabricants, des solutions sur-mesure. Pour assurer une compétitivité suffisante, ces dernières doivent s'appuyer sur des optimisations avancées de l'utilisation des ressources embarquées, tout en respectant strictement de nombreuses contraintes technologiques spécifiques. Par le biais de cette thèse, nous avons fourni des réponses concrètes et innovantes à ce besoin de mise en place d'approches algorithmiques pour le dimensionnement des systèmes complexes que sont les systèmes satellitaires multifaisceaux. Les contributions issues de ces travaux de recherche peuvent être énumérées comme suit :

- La mise en place d'une procédure itérative d'optimisation globale du segment spatial, faisant apparaître des sous-problèmes d'optimisation de complexité bien dimensionnée.
- La modélisation mathématique du problème de beam layout irrégulier et la preuve de son caractère NP-difficile.
- La définition d'une méthodologie inédite de linéarisation des contraintes inégalités en norme euclidienne sur des variables continues, compatible de la programmation linéaire en variables mixtes.
- Le développement de quatre algorithmes de résolution du problème d'optimisation de beam layout irrégulier :
 - ◇ Une heuristique gloutonne multi-start randomisée intégrant une procédure de coloration de graphe traitée par recuit simulé
 - ◇ Un programme linéaire mixte basé sur la linéarisation des normes euclidiennes par discrétisation des directions du plan évoquée ci-dessus
 - ◇ Un programme linéaire avec "clustering exact" qui exploite le clustering en k -moyennes pour réduire la taille du problème et ses symétries
 - ◇ Un programme linéaire avec "clustering heuristique", qui fait de même sous des hypothèses ajustées de nombres de faisceaux par cluster, pour réduire encore plus la taille des programmes linéaires résultants
- La modélisation d'un problème d'allocation conjointe de fréquences, de polarisations et d'amplificateurs haute puissance de la charge utile du satellite.

-
- La définition de deux sous-problèmes à ce problème d'allocation de fréquences : allocation de fréquences et polarisations (1), puis allocation d'amplificateurs haute puissance (2).
 - Les démonstrations de NP-difficulté de ces deux sous-problèmes.
 - La mise en place d'un algorithme polynomial d'énumération des cliques maximales dans les graphes d'interférences réguliers, et la démonstration expérimentale de l'applicabilité des algorithmes classiques d'énumération de cliques maximales pour des graphes d'interférences quelconques.
 - Enfin, le développement de deux algorithmes de résolution du problème d'allocation de fréquences pour les satellites multifaisceaux :
 - ◊ Un algorithme de résolution globale recourant à la programmation par contraintes
 - ◊ Un algorithme séquentiel résolvant les deux sous-problèmes (1) puis (2), en s'appuyant respectivement sur la programmation par contraintes puis sur la programmation linéaire en variables binaires.

L'organisation de ce manuscrit fait parfaitement écho à la façon dont nous avons abordé la problématique de dimensionnement de ces systèmes au cours de ces trois ans. La première étape, retranscrite dans le chapitre 1, a naturellement été une familiarisation avec les systèmes de télécommunications satellitaires multifaisceaux : éléments constitutifs, détails sur la charge utile de ces satellites, description des types de missions dont ils ont la responsabilité. Par la description de l'architecture globale standard de ces systèmes et de la position qu'y tient le satellite, nous avons mis en avant le caractère éminemment complexe du travail des ingénieurs en phase de conception. Nous sommes notamment arrivés à la conclusion que l'éclatement du problème selon les différents sous-systèmes est une condition nécessaire à toute résolution algorithmique : il n'est pas raisonnable d'intégrer dans un unique modèle mathématique l'intégralité des variables de décision présentes dans les segments sol, utilisateur et spatial. Dans les faits, notons que peu ou pas de marge de manœuvre est en général laissée aux fabricants de satellites par les clients/opérateurs pour modifier les caractéristiques des segments autres que le segment spatial. Cette raison industrielle a incité à faire ce choix de concentrer les efforts de recherche sur l'optimisation du segment spatial, les autres segments étant figés, au moins au niveau des caractéristiques en interface directe avec le satellite. Par exemple, on a supposé que la bande totale du système était connue, tout comme le besoin propre de chaque utilisateur sur la couverture. Cependant, à l'échelle du segment spatial, la difficulté de conception se manifeste à nouveau car il est lui aussi une somme de sous-systèmes eux-mêmes déjà complexes. La réponse concrète que nous y avons apportée a été la définition d'une procédure d'optimisation globale itérative, inédite dans le cas particulier des satellites de télécommunications multifaisceaux. La suite de nos travaux a alors permis de valider la pertinence de la cette dernière, car il s'est avéré que les problèmes ainsi exhibés étaient des extensions de problèmes NP-difficiles connus en optimisation combinatoire. En ce sens, cette thèse aura ainsi permis une découpe

de l'optimisation du segment spatial en des problèmes de complexité bien jaugée : il s'agit de problèmes inédits, et de difficulté compatible avec un travail de recherche en optimisation mathématique.

Nous avons alors engagé dès le chapitre 2 une démarche classique de définition de solution algorithmique adaptée pour le premier problème de notre procédure globale : l'optimisation de beam layout irrégulier. Effectivement, nous avons dans un premier temps fourni une description détaillée du problème industriel et proposé des hypothèses de modélisation. Cela a permis d'atteindre une description conceptuelle du problème d'optimisation en termes de variables, de contraintes et d'objectifs mathématiques, dans un premier temps affranchie de tout cadre mathématique et informatique de résolution. Cette formalisation est déjà inédite car aucun travail ne prenait en compte de façon intégrée les éléments les plus dimensionnants de la charge utile du satellite dans un modèle mathématique conjoint du système télécom et de la charge utile. Ensuite, nous avons proposé un système de coordonnées qui permet de transformer les termes fortement non-linéaires de certaines contraintes en de simples normes euclidiennes dans le plan 2D ; et avons ainsi réduit le degré de non-linéarité du problème à un niveau quadratique. Nous avons cependant remarqué que le problème résultant appartient encore à une classe particulièrement difficile de problèmes d'optimisation, du fait de ces contraintes en norme euclidienne : la programmation non-linéaire non-convexe mixte.

Pour faire face à la complexité de cette classe de problèmes d'optimisation, une étude bibliographique a été menée sur la question du traitement des contraintes de séparation et de proximité en norme euclidienne dans les problèmes d'optimisation. Elle nous a notamment permis de transposer la méthode de discrétisation des domaines des variables continues au problème de placement de faisceaux irréguliers. Toute la non-linéarité des normes euclidiennes point à point est alors absorbée par un calcul amont. Définir un programme linéaire basé sur ce grand nombre de centres discrets serait alors parfaitement possible, mais cela été jugé peu prometteur étant donné le nombre de variables et de contraintes qui résulterait d'une telle modélisation. Nous avons alors proposé d'exploiter la discrétisation des centres différemment, en utilisant notamment la structure en graphe qui apparaît naturellement vis-à-vis des contraintes de séparation des faisceaux avec cette formulation discrète. Cette perception du problème a permis d'aboutir à un algorithme de résolution glouton multi-start randomisé, qui s'appuie notamment sur de la coloration de graphe pour allouer les faisceaux aux réflecteurs du satellite. La deuxième contribution du chapitre est la définition d'une procédure inédite de linéarisation de contraintes inégalités impliquant des termes de normes euclidiennes. Effectivement, nous avons démontré que, moyennant une erreur d'approximation contrôlable, nous arrivons à nous affranchir des non-linéarités ainsi que des éventuelles non-convexités des contraintes euclidiennes du problème originel de "beam layout". Le principe de linéarisation proposé repose sur une discrétisation des directions du plan \mathbb{R}^2 qui permet de définir des contraintes (linéaires) suffisantes qui peuvent se substituer aux calculs de norme euclidienne. Le nombre de directions discrétisées est gardé en paramètre de cette méthodologie : il permet de choisir le niveau d'approximation des distances euclidienne avec lequel nous acceptons de travailler. Nous avons

ensuite prolongé ce travail jusqu'à fournir des principes d'extension de cette méthodologie aux dimensions supérieures à 2. Ce principe de linéarisation a alors été appliqué avec succès dans une phase de modélisation du problème de placement de faisceaux dans le formalisme de la programmation linéaire mixte, donnant ainsi naissance à un deuxième algorithme de résolution. Une campagne d'expériences a permis de mettre en lumière tout l'intérêt de cette dualité d'approches : la programmation linéaire mixte résout de façon optimale les petites instances, alors que l'heuristique gloutonne est relativement peu sensible à l'augmentation de la taille du problème et continue de fournir des solutions de bonne qualité sur les plus grandes instances.

L'intérêt industriel des formulations en programmation linéaire mixte réside dans la capacité de ces modèles à facilement évoluer : l'adaptation des algorithmes à de nouvelles contraintes ou variables est bien plus naturelle qu'avec une heuristique dédiée comme le glouton multistart développé dans ces travaux. Industriellement précieuse, cette adaptabilité a motivé la suite du travail de recherche (chapitre 4) dont l'objectif était de rendre plus performant le modèle linéaire mixte de placement de faisceaux du chapitre 3 sur les instances grandissantes. Effectivement, le modèle linéaire "basique" peine à fournir des solutions de qualité, difficulté encore plus prononcée quand il s'agit de fournir des solutions optimales. Pour ce faire, un pont inédit entre le clustering en k -moyennes et la programmation linéaire mixte a été établi : le partitionnement de la zone de service en cellules de Voronoï permet de d'interdire linéairement à tout faisceau d'être placé en dehors d'une certaine cellule, celle qui lui a été assignée. En plus de rompre un nombre significatif de symétries présentes dans le modèle linéaire mixte initial, cette technique de clustering permet de casser la combinatoire de couverture des stations par les faisceaux et sans perte de généralité de résolution, sous certaines conditions clairement identifiées et discutées. Cela définit un troisième algorithme de placement de faisceaux, dit de "clustering exact". Nous avons également proposé d'évaluer l'intérêt de perdre cette généralité de résolution, au profit d'une convergence que nous espérons plus rapide vers les solutions de meilleure qualité. Il s'agit là du quatrième et dernier algorithme ("clustering heuristique") de placement de faisceaux développé dans cette thèse. Ils ont tous été comparés dans une nouvelle campagne de tests qui a notamment révélé que le clustering heuristique est une réussite concrète de notre objectif d'améliorer le modèle linéaire mixte de base sur les instances de moyenne et grande tailles. L'heuristique gloutonne restant cependant dominante en termes de performances, les conclusions finales sur les priorités d'utilisation des quatre algorithmes développés dans la thèse pour le placement de faisceaux sont les suivantes : le modèle linéaire basique est à privilégier sur les petites instances, et le modèle glouton est lui à appliquer aux instances plus grandes car il bat le modèle avec clustering heuristique, pourtant meilleur que le modèle linéaire mixte basique.

Enfin, les derniers travaux de recherche menés dans cette thèse ont porté sur la résolution d'un problème phare situé en aval du problème de placement de faisceau dans la procédure d'optimisation globale du segment spatial d'un système de télécommunications satellitaire multifaisceaux proposée dans le chapitre 5 : l'allocation conjointe de fréquences, polarisations et amplificateurs haute puissance aux faisceaux. Cela a notamment été l'occasion de revenir sur

l'importance de la ressource radiofréquence dans les systèmes de télécommunications. Cette problématique de gestion de la ressource spectrale a donné naissance à une large classe de problèmes d' "affectation de fréquences" en optimisation combinatoire. Notre première contribution a donc été de positionner la problématique particulière considérée dans nos travaux de recherche par rapport au vaste ensemble de problématiques connexes. Les points démarquants se situent essentiellement au niveau de la prise en compte intégrée de l'impact que les choix de fréquences et de polarisations ont sur les équipements qui devront être embarqués dans la charge utile de télécommunications. Concrètement, nous avons proposé de satisfaire strictement un besoin des utilisateurs, tout en minimisant le nombre d'une certaine catégorie d'équipements de la charge utile : les amplificateurs haute puissance (ou TWTs). Les choix que nous avons faits pour la gestion des phénomènes d'interférences nous permettent de retrouver une notion connue de graphe d'interférences binaires. Nous avons ainsi pu établir des résultats théoriques de modélisation du problème qui s'appuient sur les particularités des graphes d'interférences des couvertures multi-faisceaux : notamment, nous avons prouvé et exploité le fait que les cliques maximales peuvent être efficacement et exhaustivement énumérées. Le problème a ensuite été modélisé de façon globale en programmation par contraintes, puis de façon séquentielle avec deux résolutions en série d'un modèle de programmation par contraintes et de programmation linéaire en variables binaires. Les premières expérimentations ont confirmé nos attentes théoriques : le modèle global est capable de fournir des solutions meilleures voire optimales, mais a des performances qui chutent rapidement avec l'augmentation de la taille des instances. A l'inverse, la méthode de décomposition séquentielle est en moyenne moins performante que le modèle global sur les instances où les deux modèles arrivent à converger, mais est seule à réussir à produire des solutions quand les instances grandissent. Nous sommes enfin arrivés à la conclusion que c'est sur les méthodes de décomposition qu'il serait le plus prometteur de travailler pour améliorer les performances actuelles sur ce problème d'allocation de fréquences.

Ouverture

Plusieurs perspectives naturelles de travail se dessinent à la suite des premières briques que cette thèse a permis de poser au sujet du dimensionnement algorithmique des systèmes satellitaires multifaisceaux. Nous pouvons les diviser en deux catégories distinctes.

Amélioration des solutions actuelles sur les problèmes traités dans la thèse

D’abord, il existe des voies potentielles d’amélioration des résultats obtenus dans chacun des chapitres de la thèse, sans chercher à repenser les problèmes résolus eux-mêmes.

Les différents algorithmes de placement de faisceaux ont été développés de façon indépendante et séquentielle. Aujourd’hui, la question se pose de la définition d’approches qui arriveraient à tirer partie des toutes les forces de chacun de nos algorithmes, en se défaisant de leurs faiblesses. Concrètement, il s’agirait de réfléchir à des stratégies d’hybridation de l’heuristique gloutonne et de la programmation linéaire en variables mixtes : recourir localement à des programmes linéaires locaux à chaque niveau de la phase de construction gloutonne, ou démarrer la résolution en programmation linéaire avec une solution gloutonne par exemple.

Pour le problème d’allocation de fréquences traité dans ces travaux, la programmation linéaire en nombres entiers pourrait jouer un rôle plus fort que celui que nous lui avons donné dans nos choix de définition d’algorithmes. Par exemple, on peut se demander quelles seraient les performances d’un modèle global totalement linéaire résolu ainsi, ou même d’une approche séquentielle qui n’utilise que ce formalisme d’optimisation. Il s’agirait alors de continuer à détecter et exploiter des propriétés de modélisation efficace des contraintes de ce problème en vue d’une résolution par des techniques de PLNE.

Par nécessité, nous avons à plusieurs reprises dû segmenter les problèmes d’optimisation globaux en plusieurs sous-problèmes d’optimisation moins lourds mais très interconnectés. Un effort dédié pourrait être mis en œuvre sur la question de l’évaluation de la qualité des liens entre ces problèmes que nous avons intégrés explicitement dans nos algorithmes : par exemple, les liens entre le beam layout et l’allocation de fréquences, ou entre les deux sous-problèmes (1) et (2) de ce problème d’allocation de fréquences. Concrètement, cela revient à se demander à chaque étape quelles contraintes auraient pu, dans les problèmes résolus plus tôt, permettre de construire des solutions de meilleure qualité sur le problème courant. Ce travail permettrait notamment de finir la boucle d’optimisation globale du segment spatial que nous avons proposée : réitérer sur les hypothèses et les contraintes à la lumière des solutions générées et des difficultés rencontrées aux itérations précédentes (quitte à revoir les problèmes résolus eux-mêmes, comme discuté dans le paragraphe suivant). L’amélioration de ces résolutions séquentielles n’est en fait qu’un cas

particulier de raffinement de méthode de décomposition en optimisation combinatoire, une voie pourrait donc être d'essayer de trouver une applicabilité d'autres grands principes d'optimisation combinatoire avancée pour les problèmes de grande taille, comme la génération de colonnes.

Enrichissement des problèmes résolus

En cas de convergence vers des solutions efficaces capables d'endosser plus de complexité, nous pourrions nous permettre d'envisager des formulations mathématiques encore plus riches en termes de variables d'équipements du satellite considérée. Cela permettrait de faire un lien plus précis avec certaines problématiques de design de la charge utile satellite à peine entrevues :

- Allocation de puissance aux canaux au moment de l'allocation d'amplificateurs haute puissance
- Définition précise du nombre et des types de filtres et de convertisseurs en fréquence nécessaires à l'implémentation des solutions d'allocation de fréquences produites
- Enfin, l'optimisation directe de la capacité des systèmes satellitaires par des calculs intégrés de bilans de liaison de télécommunications

Ces différents points rappellent notamment que les problèmes que nous avons résolus sont intrinsèquement multi-critères, et que nous avons fait le choix de travailler en mono-objectif sur les critères qui nous semblaient les plus pertinents. Si notre maîtrise des problèmes élémentaires à résoudre croît, il pourrait être intéressant d'envisager un recours à des méthodes d'optimisation multi-objectif plus classiques, pour profiter de tout l'intérêt industriel de l'analyse des compromis qui est par exemple offerte par la définition de fronts de Pareto.

Utilisation des techniques génériques développées dans cette thèse dans d'autres applications

La technique de linéarisation des distances euclidiennes proposée dans cette thèse pour intégrer des contraintes de séparation et de proximité sur des variables continues dans des programmes linéaires a été définie indépendamment de l'application au dimensionnement des satellites de télécommunications multifaisceaux. Ainsi, il est parfaitement possible d'envisager l'utilisation de ces mêmes principes sur des applications autres, par exemple sur celles entrevues dans l'état de l'art sur les problèmes d'optimisation non-linéaires travaillant avec de telles contraintes. De plus, nous avons proposé une extension de ces principes à des dimensions quelconques et notamment plus élevées que le plan euclidien, sans avoir d'occasion de les expérimenter sur une application concrète. Une perspective pourrait donc être l'évaluation des performances de cette approche de linéarisation par rapport aux solutions de la littérature sur ces autres problèmes d'optimisation que celui de placement de faisceaux étudié dans cette thèse.

Finalement, les sujets sur l'optimisation de la charge utile des satellites de télécommunications multifaisceaux sont loin d'être épuisés, et les problèmes aujourd'hui soulevés ne sont pas encore totalement résolus, en termes de variables considérées ou même parfois au niveau de la qualité des solutions produites en contexte industriel. Il est cependant nécessaire de maintenir cet effort de recherche, d'abord pour profiter de ce lien extrêmement fort pouvant être tissé entre les problématiques industrielles et celles de la communautés de recherche en optimisation, mais aussi car les systèmes sont voués à continuellement se complexifier pour suivre un marché des télécommunications grossissant. Le caractère indispensable des outils de décision algorithmiques pour la conception de ces systèmes n'en sera que plus marqué.

Bibliographie

- [Aardal 2007] Karen I Aardal, Stan PM Van Hoesel, Arie MCA Koster, Carlo Mannino et Antonio Sassano. *Models and solution techniques for frequency assignment problems*. Annals of Operations Research, vol. 153, no. 1, pages 79–129, 2007. (Cité en pages [130](#) et [132](#).)
- [Akçay 2007] Yalçın Akçay, Haijun Li et Susan H Xu. *Greedy algorithm for the general multidimensional knapsack problem*. Annals of Operations Research, vol. 150, no. 1, pages 17–29, 2007. (Cité en page [74](#).)
- [Alizadeh 1995] Farid Alizadeh. *Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization*. SIAM Journal on Optimization, vol. 5, no. 1, pages 13–51, 1995. (Cité en page [55](#).)
- [Alouf 2005] Sara Alouf, Eitan Altman, Jérôme Galtier, J-F Lalande et Corinne Touati. *Quasi-optimal bandwidth allocation for multi-spot MFTDMA satellites*. In INFOCOM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings IEEE, volume 1, pages 560–571. IEEE, 2005. (Cité en page [132](#).)
- [Anderson 1973] Lewis G Anderson. *A simulation study of some dynamic channel assignment algorithms in a high capacity mobile telecommunications system*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 22, no. 4, pages 210–217, 1973. (Cité en page [131](#).)
- [Angeletti 2012] P Angeletti et J Lizarraga. *Non-regular Multibeam Coverage Payloads for Non-Uniform Traffic Demand*. In 2nd ESA Workshop on Advanced Flexible Telecom Payloads. Noordwijk, Netherlands, 2012. (Cité en page [47](#).)
- [Aravanis 2015] Alexis I Aravanis, Bhavani Shankar MR, Pantelis-Daniel Arapoglou, Grégoire Danoy, Panayotis G Cottis et Björn Ottersten. *Power allocation in multibeam satellite systems : A two-stage multi-objective optimization*. IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 14, no. 6, pages 3171–3182, 2015. (Cité en page [21](#).)
- [Arya 2004] Vijay Arya, Naveen Garg, Rohit Khandekar, Adam Meyerson, Kamesh Munagala et Vinayaka Pandit. *Local search heuristics for k-median and facility location problems*. SIAM Journal on computing, vol. 33, no. 3, pages 544–562, 2004. (Cité en page [51](#).)
- [Avenali 2002] Alessandro Avenali, Carlo Mannino et Antonio Sassano. *Minimizing the span of d-walks to compute optimum frequency assignments*. Mathematical Programming, vol. 91, no. 2, pages 357–374, 2002. (Cité en page [132](#).)
- [Barenboim 2013] Leonid Barenboim et Michael Elkin. *Distributed graph coloring : Fundamentals and recent developments*. Synthesis Lectures on Distributed Computing Theory, vol. 4, no. 1, pages 1–171, 2013. (Cité en pages [77](#) et [103](#).)
- [Barni 1994] Mauro Barni, Vito Cappellini et A Mecocci. *Fast vector median filter based on Euclidean norm approximation*. IEEE Signal Processing Letters, vol. 1, no. 6, pages 92–94, 1994. (Cité en page [56](#).)
- [Bearden 1999] David Allen Bearden. A methodology for spacecraft technology insertion analysis balancing benefit, cost, and risk. 1999. (Cité en page [18](#).)

-
- [Belotti 2013] Pietro Belotti, Christian Kirches, Sven Leyffer, Jeff Linderoth, James Luedtke et Ashutosh Mahajan. *Mixed-integer nonlinear optimization*. Acta Numerica, vol. 22, pages 1–131, 2013. (Cité en page 54.)
- [Biswas 2004] Pratik Biswas et Yinyu Ye. *Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization*. In Proceedings of the 3rd international symposium on Information processing in sensor networks, pages 46–54. ACM, 2004. (Cité en pages 52 et 55.)
- [Biswas 2006] Pratik Biswas et Yinyu Ye. *A distributed method for solving semidefinite programs arising from ad hoc wireless sensor network localization*. In Multiscale optimization methods and applications, pages 69–84. Springer, 2006. (Cité en pages 52 et 55.)
- [Blazewicz 1986] Jacek Blazewicz, Mieczyslaw Drabowski et Jan Weglarz. *Scheduling multiprocessor tasks to minimize schedule length*. IEEE Transactions on Computers, vol. 35, no. 5, pages 389–393, 1986. (Cité en page 150.)
- [Boche-Sauvan 2014] Ludivine Boche-Sauvan, Bertrand Cabon, Marie-José Huguet et Emmanuel Hébrard. *Heuristic methods for test sequencing in telecommunication satellites*. In MOSIM 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation, 2014. (Cité en page 21.)
- [Boesch 1977] Francis T Boesch et James F Gimpel. *Covering points of a digraph with point-disjoint paths and its application to code optimization*. Journal of the ACM (JACM), vol. 24, no. 2, pages 192–198, 1977. (Cité en page 153.)
- [Borndörfer 1998] Ralf Borndörfer, Andreas Eisenblätter, Martin Grötschel et Alexander Martin. *The Orientation Model for Frequency Assignment Problems*. Rapport technique TR-98-01, ZIB, Takustr.7, 14195 Berlin, 1998. (Cité en page 133.)
- [Bradley 1998] P. S. Bradley et Usama M. Fayyad. *Refining Initial Points for K-Means Clustering*. pages 91–99. Morgan kaufmann, 1998. (Cité en page 108.)
- [Breu 1998] Heinz Breu et David G Kirkpatrick. *Unit disk graph recognition is NP-hard*. Computational Geometry, vol. 9, no. 1, pages 3–24, 1998. (Cité en page 67.)
- [Bron 1973] Coen Bron et Joep Kerbosch. *Algorithm 457 : finding all cliques of an undirected graph*. Communications of the ACM, vol. 16, no. 9, pages 575–577, 1973. (Cité en page 145.)
- [Budianto 2004] Irene A Budianto et John R Olds. *Design and deployment of a satellite constellation using collaborative optimization*. Journal of spacecraft and rockets, vol. 41, no. 6, pages 956–963, 2004. (Cité en page 20.)
- [Burer 2012] Samuel Burer et Adam N Letchford. *Non-convex mixed-integer nonlinear programming : a survey*. Surveys in Operations Research and Management Science, vol. 17, no. 2, pages 97–106, 2012. (Cité en page 54.)
- [Cage 1994] P Cage, I Kroo et R Braun. *Interplanetary trajectory optimization using a genetic algorithm*. In Astrodynamics Conference, page 3773, 1994. (Cité en page 20.)
- [Camino 2014] Jean-Thomas Camino, Stéphane Mourgues, Christian Artigues et Laurent Housin. *A greedy approach combined with graph coloring for non-uniform beam layouts under antenna constraints in multibeam satellite systems*. In 2014 7th Advanced Satellite Multimedia Systems Conference and the 13th Signal Processing for Space Communications Workshop (ASMS/SPSC), pages 374–381. IEEE, 2014. (Cité en page 5.)

- [Camino 2015a] Jean-Thomas Camino, Christian Artigues, Laurent Houssin et Stéphane Mourgues. A comparison of a global approach and a decomposition method for frequency assignment in multibeam satellite systems, pages 21–39. Springer International Publishing, Cham, 2015. (Cité en page 7.)
- [Camino 2015b] Jean-Thomas Camino, Christian Artigues, Laurent Houssin et Stéphane Mourgues. *A Decomposition Method for Frequency Assignment in Multibeam Satellite Systems*. In International Conference on Operations Research and Enterprise Systems, pages 23–33, 2015. (Cité en page 7.)
- [Camino 2016a] J. T. Camino, C. Artigues, L. Houssin et S. Mourgues. *Mixed-integer linear programming for multibeam satellite systems design : Application to the beam layout optimization*. In 2016 Annual IEEE Systems Conference (SysCon), pages 1–6, 2016. (Cité en page 4.)
- [Camino 2016b] Jean-Thomas Camino, Christian Artigues, Laurent Houssin et Stéphane Mourgues. Linearization of euclidean norm dependent inequalities applied to multibeam satellites design. working paper or preprint, Rapport LAAS 16116. 2016,, August 2016. (Cité en page 5.)
- [Campêlo 2004] Manoel Campêlo, Ricardo Corrêa et Yuri Frota. *Cliques, holes and the vertex coloring polytope*. Information Processing Letters, vol. 89, no. 4, pages 159–164, 2004. (Cité en page 141.)
- [Castaño 2015] Fabian Castaño, Eric Bourreau, Nubia Velasco, André Rossi et Marc Sevaux. *Exact approaches for lifetime maximization in connectivity constrained wireless multi-role sensor networks*. European Journal of Operational Research, vol. 241, no. 1, pages 28–38, 2015. (Cité en page 51.)
- [Castaño 2016] Fabián Castaño, Eric Bourreau, André Rossi, Marc Sevaux et Nubia Velasco. *Partial target coverage to extend the lifetime in wireless multi-role sensor networks*. Networks, vol. 68, no. 1, pages 34–53, 2016. (Cité en page 51.)
- [Celebi 2011] M Emre Celebi, Fatih Celiker et Hassan A Kingravi. *On Euclidean norm approximations*. Pattern Recognition, vol. 44, no. 2, pages 278–283, 2011. (Cité en page 56.)
- [Celebi 2013] M Emre Celebi, Hassan A Kingravi et Patricio A Vela. *A comparative study of efficient initialization methods for the k-means clustering algorithm*. Expert Systems with Applications, vol. 40, no. 1, pages 200–210, 2013. (Cité en page 108.)
- [Chang 2010] Hai-Chau Chang et Lih-Chung Wang. *A Simple Proof of Thue’s Theorem on Circle Packing*. arXiv preprint arXiv :1009.4322, 2010. (Cité en page 39.)
- [Charikar 1999] Moses Charikar, Sudipto Guha, Éva Tardos et David B Shmoys. *A constant-factor approximation algorithm for the k-median problem*. In Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing, pages 1–10. ACM, 1999. (Cité en page 51.)
- [Charikar 2000] Moses Charikar. *Greedy approximation algorithms for finding dense components in a graph*. In International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, pages 84–95. Springer, 2000. (Cité en page 74.)

-
- [Charikar 2001] Moses Charikar, Samir Khuller, David M Mount et Giri Narasimhan. *Algorithms for facility location problems with outliers*. In Proceedings of the twelfth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, pages 642–651. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. (Cité en page 49.)
- [Christopoulos 2015] Dimitrios Christopoulos, Shree Krishna Sharma, Symeon Chatzinotas et Jens Krause and Bjorn Ottersten. *Coordinated Multibeam Satellite Co-location : The Dual Satellite Paradigm*. arXiv preprint arXiv :1503.06981, 2015. (Cité en page 20.)
- [Chrobak 2005] Marek Chrobak, Claire Kenyon et Neal E Young. *The reverse greedy algorithm for the metric k-median problem*. In International Computing and Combinatorics Conference, pages 654–660. Springer, 2005. (Cité en page 74.)
- [Chrystal 1885] George Chrystal. *On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in the plane*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 3, pages 30–33, 1885. (Cité en page 63.)
- [Chuang 1993] JC-I Chuang. *Performance issues and algorithms for dynamic channel assignment*. IEEE journal on selected areas in communications, vol. 11, no. 6, pages 955–963, 1993. (Cité en page 131.)
- [Clark 1990] Brent N Clark, Charles J Colbourn et David S Johnson. *Unit disk graphs*. Discrete mathematics, vol. 86, no. 1-3, pages 165–177, 1990. (Cité en page 67.)
- [Coll 2002] Pablo Coll, Javier Marenco, Isabel Méndez Díaz et Paula Zabala. *Facets of the graph coloring polytope*. Annals of Operations Research, vol. 116, no. 1-4, pages 79–90, 2002. (Cité en page 141.)
- [Conway 2010] Bruce A Conway. *Spacecraft trajectory optimization*, volume 29. Cambridge University Press, 2010. (Cité en page 20.)
- [Cook 1957] JM Cook. *Rational formulae for the production of a spherically symmetric probability distribution*. Mathematics of Computation, vol. 11, no. 58, pages 81–82, 1957. (Cité en page 85.)
- [D’Amario 1982] Louis A D’Amario, Dennis V Byrnes et Richard H Stanford. *Interplanetary trajectory optimization with application to Galileo*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 5, no. 5, pages 465–471, 1982. (Cité en page 20.)
- [De Queiroz 2000] Marcio S De Queiroz, Vikram Kapila et Qiguo Yan. *Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 23, no. 3, pages 385–390, 2000. (Cité en page 20.)
- [Deb 2016] Kalyanmoy Deb, Karthik Sindhya et Jussi Hakanen. *Multi-objective optimization*. In Decision Sciences : Theory and Practice, pages 145–184. CRC Press, 2016. (Cité en page 25.)
- [Del Re 1995a] Enrico Del Re, Romano Fantacci et Giovanni Giambene. *Efficient dynamic channel allocation techniques with handover queuing for mobile satellite networks*. IEEE Journal on Selected areas in Communications, vol. 13, no. 2, pages 397–405, 1995. (Cité en page 131.)
- [Del Re 1995b] Enrico Del Re, Romano Fantacci et Giovanni Giambene. *Handover and dynamic channel allocation techniques in mobile cellular networks*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 44, no. 2, pages 229–237, 1995. (Cité en page 131.)

- [Díaz 2001] I Méndez Díaz et P Zabala. *A polyhedral approach for graph coloring*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, vol. 7, pages 178–181, 2001. (Cité en page 141.)
- [Dorne 1996] Raphaël Dorne et Jin-Kao Hao. *Constraint handling in evolutionary search : A case study of the frequency assignment*. In International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, pages 801–810. Springer, 1996. (Cité en page 132.)
- [Drozdzowski 1996] Maciej Drozdzowski. *Scheduling multiprocessor tasks—an overview*. European Journal of Operational Research, vol. 94, no. 2, pages 215–230, 1996. (Cité en page 150.)
- [Dunkin 1998] Nick Dunkin, Joe Bater, Peter Jeavons et David Cohen. *Towards high order constraint representations for the frequency assignment problem*. Rapport technique, University of London, Egham, Surrey, UK, 1998. (Cité en page 132.)
- [Dupont 2009] Audrey Dupont, Andréa Carneiro Linhares, Christian Artigues, Dominique Feillet, Philippe Michelon et Michel Vasquez. *The dynamic frequency assignment problem*. European Journal of Operational Research, vol. 195, no. 1, pages 75–88, 2009. (Cité en page 131.)
- [Duque-Antón 1993] Manuel Duque-Antón, Dietmar Kunz et Bernhard Ruber. *Channel assignment for cellular radio using simulated annealing*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 42, no. 1, pages 14–21, 1993. (Cité en page 133.)
- [D’Ambrosio 2010] Claudia D’Ambrosio. *Application-oriented mixed integer non-linear programming*. 4OR, vol. 8, no. 3, pages 319–322, 2010. (Cité en page 54.)
- [D’Ambrosio 2013] Claudia D’Ambrosio et Andrea Lodi. *Mixed integer nonlinear programming tools : an updated practical overview*. Annals of Operations Research, vol. 204, no. 1, pages 301–320, 2013. (Cité en page 54.)
- [Eglese 1990] RW Eglese. *Simulated annealing : a tool for operational research*. European journal of operational research, vol. 46, no. 3, pages 271–281, 1990. (Cité en page 77.)
- [Eiben 1998] Ágoston E Eiben, Jan K Van Der Hauw et Jano I van Hemert. *Graph coloring with adaptive evolutionary algorithms*. Journal of Heuristics, vol. 4, no. 1, pages 25–46, 1998. (Cité en page 77.)
- [Erber 1991] T Erber et GM Hockney. *Equilibrium configurations of N equal charges on a sphere*. Journal of Physics A : Mathematical and General, vol. 24, no. 23, page L1369, 1991. (Cité en page 84.)
- [Eyster 1973] James W Eyster, John A White et Walter W Wierwille. *On solving multifacility location problems using a hyperboloid approximation procedure*. AIIE Transactions, vol. 5, no. 1, pages 01–06, 1973. (Cité en page 50.)
- [Fasano 2012] Giorgio Fasano et János D Pintér. *Modeling and optimization in space engineering*, volume 73. Springer Science & Business Media, 2012. (Cité en page 19.)
- [Fayed 2013] Hatem A Fayed et Amir F Atiya. *A mixed breadth-depth first strategy for the branch and bound tree of Euclidean k-center problems*. Computational Optimization and Applications, vol. 54, no. 3, pages 675–703, 2013. (Cité en page 49.)
- [Feo 1995] Thomas A Feo et Mauricio GC Resende. *Greedy randomized adaptive search procedures*. Journal of global optimization, vol. 6, no. 2, pages 109–133, 1995. (Cité en page 74.)

-
- [Ferringer 2006] Matthew P Ferringer et David B Spencer. *Satellite constellation design tradeoffs using multiple-objective evolutionary computation*. Journal of spacecraft and rockets, vol. 43, no. 6, pages 1404–1411, 2006. (Cit  en page 20.)
- [Ferringer 2007] Matthew P Ferringer, Ronald S Clifton et Timothy G Thompson. *Efficient and accurate evolutionary multi-objective optimization paradigms for satellite constellation design*. Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 44, no. 3, pages 682–691, 2007. (Cit  en page 20.)
- [Fishkin 2003] Aleksei V Fishkin. *Disk graphs : A short survey*. In International Workshop on Approximation and Online Algorithms, pages 260–264. Springer, 2003. (Cit  en page 67.)
- [Frank 2001] Jeremy Frank, Ari J nsson, Robert Morris et David E. Smith. *Planning and scheduling for fleets of earth observing satellites*. In in : Proceedings of Sixth Int. Symp. on Artificial Intelligence, Robotics, Automation And Space, 2001. (Cit  en page 20.)
- [Furini 2017] Fabio Furini, Virginie Gabrel et Ian-Christopher Ternier. *An Improved DSATUR-Based Branch-and-Bound Algorithm for the Vertex Coloring Problem*. Networks, vol. 69, no. 1, pages 124–141, 2017. (Cit  en pages 77 et 103.)
- [Gabrel 2003] Virginie Gabrel et C cile Murat. *Mathematical programming for earth observation satellite mission planning*. In Operations research in space and air, pages 103–122. Springer, 2003. (Cit  en page 20.)
- [Gabrel 2006a] Virginie Gabrel. An extensive comparison of 0-1 linear programs for the daily satellite mission planning. working paper or preprint, Novembre 2006. (Cit  en pages 139 et 141.)
- [Gabrel 2006b] Virginie Gabrel. Dantzig-Wolfe decomposition for linearly constrained stable set problem. working paper or preprint, Novembre 2006. (Cit  en page 140.)
- [Gabrel 2006c] Virginie Gabrel. *Strengthened 0-1 linear formulation for the daily satellite mission planning*. Journal of combinatorial optimization, vol. 11, no. 3, pages 341–346, 2006. (Cit  en page 139.)
- [Gandhi 2004] Rajiv Gandhi, Samir Khuller et Aravind Srinivasan. *Approximation algorithms for partial covering problems*. Journal of Algorithms, vol. 53, no. 1, pages 55–84, 2004. (Cit  en page 49.)
- [Garey 1975] Michael R Garey et David S. Johnson. *Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints*. SIAM Journal on Computing, vol. 4, no. 4, pages 397–411, 1975. (Cit  en page 150.)
- [Gentile 2005] Camillo Gentile. *Sensor location through linear programming with triangle inequality constraints*. In IEEE International Conference on Communications, ICC, volume 5, pages 3192–3196. IEEE, 2005. (Cit  en pages 52, 55 et 56.)
- [Gondran 2008] Alexandre Gondran, Oumaya Baala, Alexandre Caminada et Hakim Mabed. *Interference management in IEEE 802.11 frequency assignment*. In Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE, pages 2238–2242. IEEE, 2008. (Cit  en page 132.)
- [Gr f 1998] Albert Gr f, Martin Stumpf et Gerhard We kenfels. *On coloring unit disk graphs*. Algorithmica, vol. 20, no. 3, pages 277–293, 1998. (Cit  en page 67.)

- [Grötschel 2012] Martin Grötschel, László Lovász et Alexander Schrijver. Geometric algorithms and combinatorial optimization, volume 2. Springer Science & Business Media, 2012. (Cité en page 140.)
- [Gruber 2003] Gerald Gruber et Franz Rendl. *Computational experience with stable set relaxations*. SIAM Journal on Optimization, vol. 13, no. 4, pages 1014–1028, 2003. (Cité en page 140.)
- [Gyárfás 1988] András Gyárfás et Jenő Lehel. *On-line and first fit colorings of graphs*. Journal of Graph theory, vol. 12, no. 2, pages 217–227, 1988. (Cité en page 77.)
- [Hao 1998] Jin-Kao Hao, Raphaël Dorne et Philippe Galinier. *Tabu search for frequency assignment in mobile radio networks*. Journal of heuristics, vol. 4, no. 1, pages 47–62, 1998. (Cité en page 132.)
- [Harman 2010] Radoslav Harman et Vladimír Lacko. *On decompositional algorithms for uniform sampling from n -spheres and n -balls*. Journal of Multivariate Analysis, vol. 101, no. 10, pages 2297–2304, 2010. (Cité en page 84.)
- [Helmberg 1996] Christoph Helmberg, Franz Rendl, Robert J Vanderbei et Henry Wolkowicz. *An interior-point method for semidefinite programming*. SIAM Journal on Optimization, vol. 6, no. 2, pages 342–361, 1996. (Cité en page 55.)
- [Hertz 1987] Alain Hertz et Dominique de Werra. *Using tabu search techniques for graph coloring*. Computing, vol. 39, no. 4, pages 345–351, 1987. (Cité en page 77.)
- [Ho 2013] Koki Ho, Jennifer Green et Olivier De Weck. *Improved concurrent optimization formulation of crewed space habitats and their supporting logistics systems*. In AIAA Space 2013 Conference and Exposition, page 5413, 2013. (Cité en page 20.)
- [Hochbaum 1985] Dorit S Hochbaum et David B Shmoys. *A best possible heuristic for the k -center problem*. Mathematics of operations research, vol. 10, no. 2, pages 180–184, 1985. (Cité en page 50.)
- [Hwang 1988] Chii-Ruey Hwang. *Simulated annealing : theory and applications*. Acta Applicandae Mathematicae, vol. 12, no. 1, pages 108–111, 1988. (Cité en page 77.)
- [Jain 2001] Kamal Jain et Vijay V Vazirani. *Approximation algorithms for metric facility location and k -median problems using the primal-dual schema and Lagrangian relaxation*. Journal of the ACM (JACM), vol. 48, no. 2, pages 274–296, 2001. (Cité en page 51.)
- [Jain 2002] Kamal Jain, Mohammad Mahdian et Amin Saberi. *A new greedy approach for facility location problems*. In Proceedings of the thirty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 731–740. ACM, 2002. (Cité en page 74.)
- [Jain 2003] Kamal Jain, Mohammad Mahdian, Evangelos Markakis, Amin Saberi et Vijay V Vazirani. *Greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting with factor-revealing LP*. Journal of the ACM (JACM), vol. 50, no. 6, pages 795–824, 2003. (Cité en page 74.)
- [Jaumard 1997] Brigitte Jaumard et Christophe Meyer. *Estimation of the Quality of Cellular Networks Using Column Generation Techniques*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions de Montréal, 1997. (Cité en page 132.)
- [Jaumard 2002] Brigitte Jaumard, Odile Marcotte, Christophe Meyer et Tsevi Vovor. *Erratum to "Comparison of column generation models for channel assignment in cellular*

-
- networks*” :[*Discrete Appl. Math.* 112 (2001) 217–240]. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 118, no. 3, pages 299–322, 2002. (Cité en page 132.)
- [Jensen 2011] Tommy R Jensen et Bjarne Toft. *Graph coloring problems*, volume 39. John Wiley & Sons, 2011. (Cité en pages 77 et 103.)
- [Jilla 2004] Cyrus D Jilla et David W Miller. *Multi-objective, multidisciplinary design optimization methodology for distributed satellite systems*. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 41, no. 1, pages 39–50, 2004. (Cité en page 18.)
- [Junge 2005] O. Junge et S. Ober-Blobaum. *Optimal Reconfiguration of Formation Flying Satellites*. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 66–71, Dec 2005. (Cité en page 20.)
- [Kahraman 2010] Cengiz Kahraman, Orhan Engin, İhsan Kaya et R Elif Öztürk. *Multiprocessor task scheduling in multistage hybrid flow-shops : A parallel greedy algorithm approach*. *Applied Soft Computing*, vol. 10, no. 4, pages 1293–1300, 2010. (Cité en page 74.)
- [Kannan 2006] Anushiya A Kannan, Guoqiang Mao et Branka Vucetic. *Simulated annealing based wireless sensor network localization with flip ambiguity mitigation*. In *2006 IEEE 63rd Vehicular Technology Conference*, volume 2, pages 1022–1026. IEEE, 2006. (Cité en page 52.)
- [Kanungo 2002] Tapas Kanungo, David M Mount, Nathan S Netanyahu, Christine D Piatko, Ruth Silverman et Angela Y Wu. *An efficient k-means clustering algorithm : Analysis and implementation*. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 24, no. 7, pages 881–892, 2002. (Cité en page 108.)
- [Kapsalis 1995] A Kapsalis, Pierre Chardaire, Victor J Rayward-Smith et George D Smith. *The radio link frequency assignment problem : A case study using genetic algorithms*. In *AISB Workshop on Evolutionary Computing*, pages 117–131. Springer, 1995. (Cité en page 133.)
- [Khuller 2000] Samir Khuller et Yoram J Sussmann. *The capacitated k-center problem*. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 13, no. 3, pages 403–418, 2000. (Cité en page 50.)
- [Kiatmanaroj 2012] Kata Kiatmanaroj. *Allocation de fréquence dans les systemes de communication par satellites de type SDMA*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2012. (Cité en pages 131 et 141.)
- [Kiatmanaroj 2013] Kata Kiatmanaroj, Christian Artigues, Laurent Houssin et Frédéric Mes-sine. *Frequency assignment in a SDMA satellite communication system with beam de-centring feature*. *Computational Optimization and Applications*, vol. 56, no. 2, pages 439–455, 2013. (Cité en page 21.)
- [Kiatmanaroj 2016] Kata Kiatmanaroj, Christian Artigues et Laurent Houssin. *On scheduling models for the frequency interval assignment problem with cumulative interferences*. *Engineering Optimization*, vol. 48, no. 5, pages 740–755, 2016. (Cité en pages 21, 141 et 150.)
- [Klotz 2002] Walter Klotz. *Graph coloring algorithms*. *Mathematics Report*, vol. 5, no. 2002, pages 1–9, 2002. (Cité en page 77.)

- [Kyrgiazos 2013] Argyrios Kyrgiazos, Barry Evans et Paul Thompson. *Irregular beam sizes and non-uniform bandwidth allocation in HTS multibeam satellite systems*. In 31st AIAA International Communications Satellite Systems Conference (ICSSC). Florence, Italy, 2013. (Cité en page 47.)
- [Laumanns 2005] Marco Laumanns, Lothar Thiele et Eckart Zitzler. *An adaptive scheme to generate the pareto front based on the epsilon-constraint method*. In Dagstuhl Seminar Proceedings. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2005. (Cité en page 25.)
- [Lee 2011] Jon Lee et Sven Leyffer. *Mixed integer nonlinear programming*, volume 154. Springer Science & Business Media, 2011. (Cité en page 54.)
- [Lemaître 2002] Michel Lemaître, Gérard Verfaillie, Frank Jouhaud, Jean-Michel Lachiver et Nicolas Bataille. *Selecting and scheduling observations of agile satellites*. *Aerospace Science and Technology*, vol. 6, no. 5, pages 367–381, 2002. (Cité en page 20.)
- [Lersteau 2016] Charly Lersteau, André Rossi et Marc Sevaux. *Robust scheduling of wireless sensor networks for target tracking under uncertainty*. *European Journal of Operational Research*, vol. 252, no. 2, pages 407–417, 2016. (Cité en page 51.)
- [Liberti 2009] Leo Liberti, Nelson Maculan et Yue Zhang. *Optimal configuration of gamma ray machine radiosurgery units : the sphere covering subproblem*. *Optimization Letters*, vol. 3, no. 1, pages 109–121, 2009. (Cité en pages 53 et 57.)
- [Lim 2004] Andrew Lim, Brian Rodrigues, Fan Wang et Zhou Xu. *k-Center problems with minimum coverage*. In International Computing and Combinatorics Conference, pages 349–359. Springer, 2004. (Cité en page 50.)
- [Lloyd 1982] Stuart Lloyd. *Least squares quantization in PCM*. *IEEE transactions on information theory*, vol. 28, no. 2, pages 129–137, 1982. (Cité en page 108.)
- [Lo 1960] Y Lo. *On the beam deviation factor of a parabolic reflector*. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 8, no. 3, pages 347–349, 1960. (Cité en page 35.)
- [Lovász 1989] László Lovász, Michael Saks et William T Trotter. *An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio*. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 43, pages 319–325, 1989. (Cité en page 77.)
- [Mahajan 2009] Meena Mahajan, Prajakta Nimbhorkar et Kasturi Varadarajan. *The planar k-means problem is NP-hard*. In International Workshop on Algorithms and Computation, pages 274–285. Springer, 2009. (Cité en page 108.)
- [Mahdian 2001] Mohammad Mahdian, Evangelos Markakis, Amin Saberi et Vijay Vazirani. *A greedy facility location algorithm analyzed using dual fitting*. In Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization : Algorithms and Techniques, pages 127–137. Springer, 2001. (Cité en page 74.)
- [Mahdian 2006] Mohammad Mahdian, Yinyu Ye et Jiawei Zhang. *Approximation algorithms for metric facility location problems*. *SIAM Journal on Computing*, vol. 36, no. 2, pages 411–432, 2006. (Cité en page 74.)
- [Maniezzo 2000] Vittorio Maniezzo et Antonella Carbonaro. *An ANTS heuristic for the frequency assignment problem*. *Future Generation Computer Systems*, vol. 16, no. 8, pages 927–935, 2000. (Cité en page 132.)

-
- [Mannino 2003] Carlo Mannino et Antonio Sassano. *An enumerative algorithm for the frequency assignment problem*. Discrete Applied Mathematics, vol. 129, no. 1, pages 155–169, 2003. (Cité en page [132](#).)
- [Mao 2007] Guoqiang Mao, Barış Fidan et Brian DO Anderson. *Wireless sensor network localization techniques*. Computer networks, vol. 51, no. 10, pages 2529–2553, 2007. (Cité en page [51](#).)
- [Maral 2011a] Gérard Maral et Michel Bousquet. Satellite communications systems : systems, techniques and technology. John Wiley & Sons, 2011. (Cité en page [17](#).)
- [Maral 2011b] Gérard Maral et Michel Bousquet. Satellite communications systems : systems, techniques and technology. John Wiley & Sons, 2011. (Cité en pages [29](#), [31](#) et [137](#).)
- [Marathe 1995] Madhav V Marathe, Heinz Breu, Harry B Hunt, Shankar S Ravi et Daniel J Rosenkrantz. *Simple heuristics for unit disk graphs*. Networks, vol. 25, no. 2, pages 59–68, 1995. (Cité en page [67](#).)
- [Martí 2003] Rafael Martí. *Multi-start methods*. In Handbook of metaheuristics, pages 355–368. Springer, 2003. (Cité en page [74](#).)
- [Mavrotas 2009] George Mavrotas. *Effective implementation of the ϵ -constraint method in multi-objective mathematical programming problems*. Applied mathematics and computation, vol. 213, no. 2, pages 455–465, 2009. (Cité en page [25](#).)
- [Megiddo 1983] Nimrod Megiddo. *Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems*. SIAM journal on computing, vol. 12, no. 4, pages 759–776, 1983. (Cité en page [63](#).)
- [Megiddo 1984] Nimrod Megiddo et Kenneth J Supowit. *On the complexity of some common geometric location problems*. SIAM journal on computing, vol. 13, no. 1, pages 182–196, 1984. (Cité en pages [45](#) et [48](#).)
- [Mehrotra 1996] Anuj Mehrotra et Michael A Trick. *A column generation approach for graph coloring*. INFORMS Journal on Computing, vol. 8, no. 4, pages 344–354, 1996. (Cité en page [77](#).)
- [Mukherjee 2013] Jayanta Mukherjee. *Linear combination of norms in improving approximation of Euclidean norm*. Pattern Recognition Letters, vol. 34, no. 12, pages 1348–1355, 2013. (Cité en page [56](#).)
- [Muller 1959] Mervin E Muller. *A note on a method for generating points uniformly on n -dimensional spheres*. Communications of the ACM, vol. 2, no. 4, pages 19–20, 1959. (Cité en page [85](#).)
- [Nowak 2006] Ivo Nowak. Relaxation and decomposition methods for mixed integer nonlinear programming, volume 152. Springer Science & Business Media, 2006. (Cité en page [54](#).)
- [Padberg 1973] Manfred W Padberg. *On the facial structure of set packing polyhedra*. Mathematical programming, vol. 5, no. 1, pages 199–215, 1973. (Cité en page [141](#).)
- [Palpant 2008] Mireille Palpant, Cristian Oliva, Christian Artigues, Philippe Michelon et Mohamed Didi Biha. *Models and methods for frequency assignment with cumulative interference constraints*. International Transactions in Operational Research, vol. 15, no. 3, pages 307–324, 2008. (Cité en page [132](#).)

- [Park 2012] Unhee Park, Hee Wook Kim, Dae Sub Oh et Bon-Jun Ku. *A dynamic bandwidth allocation scheme for a multi-spot-beam satellite system*. Etri Journal, vol. 34, no. 4, pages 613–616, 2012. (Cit  en page 21.)
- [Peake 2014] MJ Peake, J Trevelyan et G Coates. *The equal spacing of N points on a sphere with application to partition-of-unity wave diffraction problems*. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 40, pages 114–122, 2014. (Cit  en page 84.)
- [Pinto 2015] Renan Vicente Pinto. *O Problema de Recobrimento de S lidos por Esferas de Diferentes Raios*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015. (Cit  en pages 53, 54 et 56.)
- [Pollard 1982] David Pollard. *Quantization and the method of k -means*. IEEE Transactions on Information theory, vol. 28, no. 2, pages 199–204, 1982. (Cit  en page 108.)
- [Poulenard 2014] S Poulenard, M Ruellan, B Roy, J Ri di, F Parol et A Rissons. *High altitude clouds impacts on the design of optical feeder link and optical ground station network for future broadband satellite services*. In SPIE LASE, pages 897107–897107. International Society for Optics and Photonics, 2014. (Cit  en page 20.)
- [Rabie 2013] Hassan M Rabie, Ihab A El-Khodary et Assem A Tharwat. *A particle swarm optimization algorithm for the continuous absolute p -center location problem with Euclidean distance*. International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), vol. 4, 2013. (Cit  en page 49.)
- [Rad  1988] Francisc Rad . *The Euclidean multifacility location problem*. Operations Research, vol. 36, no. 3, pages 485–492, 1988. (Cit  en page 50.)
- [Rebennack 2008] Steffen Rebennack. *Stable set problem : Branch & cut algorithms*. In Encyclopedia of Optimization, pages 3676–3688. Springer, 2008. (Cit  en page 141.)
- [Rebennack 2011] Steffen Rebennack, Marcus Oswald, Dirk Oliver Theis, Hanna Seitz, Gerhard Reinelt et Panos M Pardalos. *A branch and cut solver for the maximum stable set problem*. Journal of Combinatorial Optimization, vol. 21, no. 4, pages 434–457, 2011. (Cit  en page 140.)
- [Reingold 1981] Edward M Reingold et Robert E Tarjan. *On a greedy heuristic for complete matching*. SIAM Journal on Computing, vol. 10, no. 4, pages 676–681, 1981. (Cit  en page 74.)
- [Resende 2006] Mauricio GC Resende et Renato F Werneck. *A hybrid multistart heuristic for the uncapacitated facility location problem*. European Journal of Operational Research, vol. 174, no. 1, pages 54–68, 2006. (Cit  en page 74.)
- [Rhee] Wonjong Rhee et John M Cioffi. *Increase in capacity of multiuser OFDM system using dynamic subchannel allocation*. In Vehicular Technology Conference Proceedings. VTC 2000-Spring Tokyo. IEEE 51st, volume 2, pages 1085–1089. (Cit  en page 131.)
- [Riedl] Wolfgang F. Riedl et Benedikt Z nnchen. *The k -Center Problem*. <https://www-m9.ma.tum.de/games/kcenter-game/>. (Cit  en page 49.)
- [Ruiz 2007] Rub n Ruiz et Thomas St tzle. *A simple and effective iterated greedy algorithm for the permutation flowshop scheduling problem*. European Journal of Operational Research, vol. 177, no. 3, pages 2033–2049, 2007. (Cit  en page 74.)

-
- [Saff 1997] Edward B Saff et A BJ Kuijlaars. *Distributing many points on a sphere*. The mathematical intelligencer, vol. 19, no. 1, pages 5–11, 1997. (Cité en page 84.)
- [Sakai 2003] Shuichi Sakai, Mitsunori Togasaki et Koichi Yamazaki. *A note on greedy algorithms for the maximum weighted independent set problem*. Discrete Applied Mathematics, vol. 126, no. 2, pages 313–322, 2003. (Cité en page 74.)
- [Schulte 2013] Christian Schulte, Guido Tack et Mikael Z Lagerkvist. *Modeling and Programming with Gecode*. Web site : <http://www.gecode.org>, 2013. (Cité en page 146.)
- [Selim 1984] Shokri Z Selim et Mohamed A Ismail. *K-means-type algorithms : a generalized convergence theorem and characterization of local optimality*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, no. 1, pages 81–87, 1984. (Cité en page 108.)
- [Seol 2008] Changkyu Seol et Kyungwhoon Cheun. *A low complexity Euclidean norm approximation*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 4, pages 1721–1726, 2008. (Cité en page 56.)
- [Shamos 1975] Michael Ian Shamos et Dan Hoey. *Closest-point problems*. In 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1975, pages 151–162. IEEE, 1975. (Cité en page 63.)
- [Shi 2010] Qingjiang Shi, Chen He, Hongyang Chen et Lingge Jiang. *Distributed wireless sensor network localization via sequential greedy optimization algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, no. 6, pages 3328–3340, 2010. (Cité en page 52.)
- [Shishko 1995] Robert Shishko et Robert Aster. *NASA systems engineering handbook*. NASA Special Publication, vol. 6105, 1995. (Cité en page 18.)
- [Shum 1996] Henry Shum et LE Trotter. *Cardinality-restricted chains and antichains in partially ordered sets*. Discrete applied mathematics, vol. 65, no. 1-3, pages 421–439, 1996. (Cité en page 153.)
- [Slavík 1996] Petr Slavík. *A tight analysis of the greedy algorithm for set cover*. In Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 435–441. ACM, 1996. (Cité en page 74.)
- [Stathakis 2012] Apostolos Stathakis, Grégoire Danoy, Pascal Bouvry et Gianluigi Morelli. *Satellite payload reconfiguration optimisation : an ILP model*. In Asian Conference on Intelligent Information and Database Systems, pages 311–320. Springer, 2012. (Cité en pages 21 et 134.)
- [Stathakis 2013] Apostolos Stathakis, Grégoire Danoy, Julien Schleich, Pascal Bouvry et Gianluigi Morelli. *Minimising longest path length in communication satellite payloads via metaheuristics*. In Proceedings of the 15th annual conference on Genetic and evolutionary computation, pages 1365–1372. ACM, 2013. (Cité en page 21.)
- [Sung 1997] Chi Wan Sung et Wing Shing Wong. *Sequential packing algorithm for channel assignment under cochannel and adjacent-channel interference constraint*. IEEE transactions on Vehicular Technology, vol. 46, no. 3, pages 676–686, 1997. (Cité en page 132.)
- [Sutou 2002] Atsusi Sutou et Yang Dai. *Global optimization approach to unequal global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3D*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 114, no. 3, pages 671–694, 2002. (Cité en pages 53 et 54.)

- [Tarjan 1977] Robert Endre Tarjan et Anthony E Trojanowski. *Finding a maximum independent set*. SIAM Journal on Computing, vol. 6, no. 3, pages 537–546, 1977. (Cité en page 139.)
- [Tillerson 2002] Michael Tillerson, Gokhan Inalhan et Jonathan P. How. *Co-ordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 12, no. 2-3, pages 207–242, 2002. (Cité en page 20.)
- [Tomazic 2008] Alessandro Tomazic et Ivana Ljubic. *A GRASP algorithm for the connected facility location problem*. In Applications and the Internet, 2008. SAINT 2008. International Symposium on, pages 257–260. IEEE, 2008. (Cité en page 74.)
- [Tomita 2006] Etsuji Tomita, Akira Tanaka et Haruhisa Takahashi. *The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments*. Theoretical Computer Science, vol. 363, no. 1, pages 28–42, 2006. (Cité en page 145.)
- [Touati 2003] Corinne Touati, Eitan Altman, Jérôme Galtier, Benoit Fabre et Isabelle Buret. *Radio planning in multibeam geostationary satellite networks*. In 21st International Communications Satellite Systems Conference and Exhibit, page 2271, 2003. (Cité en page 21.)
- [Touya 2008] Thierry Touya et Didier Auroux. *Control and topological optimization of a large multibeam array antenna*. In Proceedings of the Fifth IASTED International Conference, volume 616, page 36, 2008. (Cité en page 21.)
- [Tuffery 2005] Pierre Tuffery, Frédéric Guyon et Philippe Derreumaux. *Improved greedy algorithm for protein structure reconstruction*. Journal of computational chemistry, vol. 26, no. 5, pages 506–513, 2005. (Cité en page 74.)
- [van Hoeve 2001] Willem Jan van Hoeve. *The alldifferent Constraint : A Survey*. CoRR, vol. cs.PL/0105015, 2001. (Cité en page 146.)
- [Vandenberghe 1996] Lieven Vandenberghe et Stephen Boyd. *Semidefinite programming*. SIAM review, vol. 38, no. 1, pages 49–95, 1996. (Cité en page 55.)
- [Velev 2007] Miroslav N Velev. *Exploiting hierarchy and structure to efficiently solve graph coloring as SAT*. In Proceedings of the 2007 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design, pages 135–142. IEEE Press, 2007. (Cité en page 77.)
- [Vidal 2012] Oriol Vidal, Greet Verelst, Jérôme Lacan, Eric Alberty, José Radzik et Michel Bousquet. *Next generation high throughput satellite system*. In Satellite Telecommunications (ESTEL), 2012 IEEE First AESS European Conference on, pages 1–7. IEEE, 2012. (Cité en page 20.)
- [Voudouris 1998] Christos Voudouris et EPK Tsang. *Solving the radio link frequency assignment problem using guided local search*. In Proceedings, NATO Symposium on Radio Length Frequency Assignment, Sharing and Conservation Systems (Aerospace), Aalborg, Denmark, 1998. (Cité en page 133.)
- [Wang 2014] Heng Wang, Aijun Liu, Xiaofei Pan et Jiong Li. *Optimization of power allocation for a multibeam satellite communication system with interbeam interference*. Journal of Applied Mathematics, vol. 2014, 2014. (Cité en page 21.)
- [Welzl 1991] Emo Welzl. *Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)*. In New results and new trends in computer science, pages 359–370. Springer, 1991. (Cité en pages 49 et 63.)

-
- [Wolf 2014] Helmut Wolf, Michael Schneider, Simon Stirland et Didier Scouarnec. *Satellite multibeam antennas at airbus defence and space : State of the art and trends*. In Antennas and Propagation (EuCAP), 2014 8th European Conference on, pages 182–185. IEEE, 2014. (Cité en pages [vii](#), [14](#) et [15](#).)
- [Wolkowicz 2012] Henry Wolkowicz, Romesh Saigal et Lieven Vandenbergh. Handbook of semi-definite programming : theory, algorithms, and applications, volume 27. Springer Science & Business Media, 2012. (Cité en page [55](#).)
- [Wu 2006] Weili Wu, Hongwei Du, Xiaohua Jia, Yingshu Li et Scott C-H Huang. *Minimum connected dominating sets and maximal independent sets in unit disk graphs*. Theoretical Computer Science, vol. 352, no. 1, pages 1–7, 2006. (Cité en page [67](#).)
- [Xiao 2003] Bin Xiao, Qingfeng Zhuge, Yi He, Zili Shao et Edwin H-M Sha. *Algorithms for disk covering problems with the most points*. In Proc. IASTED International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems, pages 541–546. Citeseer, 2003. (Cité en page [49](#).)
- [Xue 1996] GL Xue, J Ben Rosen et Panos M Pardalos. *A polynomial time dual algorithm for the Euclidean multifacility location problem*. Operations research letters, vol. 18, no. 4, pages 201–204, 1996. (Cité en page [50](#).)
- [Xue 1997] Guoliang Xue et Yinyu Ye. *An efficient algorithm for minimizing a sum of Euclidean norms with applications*. SIAM Journal on Optimization, vol. 7, no. 4, pages 1017–1036, 1997. (Cité en page [50](#).)
- [Yildirim 2008] E Alper Yildirim. *Two algorithms for the minimum enclosing ball problem*. SIAM Journal on Optimization, vol. 19, no. 3, pages 1368–1391, 2008. (Cité en page [49](#).)
- [YONG 2008] En-mi YONG, Lei CHEN et Guo-jin TANG. *A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft [J]*. Journal of Astronautics, vol. 2, page 004, 2008. (Cité en page [20](#).)
- [Zhang 2000] Zheng Zhang, Scott Schwartz, Lukas Wagner et Webb Miller. *A greedy algorithm for aligning DNA sequences*. Journal of Computational biology, vol. 7, no. 1-2, pages 203–214, 2000. (Cité en page [74](#).)
- [Zhao 2009] Weizhong Zhao, Huifang Ma et Qing He. *Parallel k-means clustering based on mapreduce*. In IEEE International Conference on Cloud Computing, pages 674–679. Springer, 2009. (Cité en page [108](#).)