

La Multirésolution

ANDREI DONCESCU
andrei.doncescu@laas.fr



INTRODUCTION

Pourquoi une base orthogonale?

Les séries de Fourier pour les signaux périodiques

Extension aux signaux non-périodiques par segmentation ou découpage

Problèmes aux niveau des frontières

La transformation de Gabor ou la transformation de Fourier à court terme pour l'analyse temps-fréquence

L'analyse multi-résolution

NOTIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

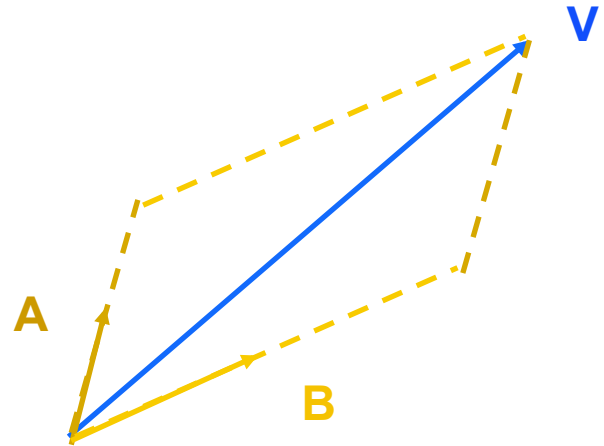
Combinaison linéaire de vecteurs

Soit deux vecteurs A et B , on peut choisir n'importe quelle distance dans la direction de A et de B et composer les deux vecteurs. Nous obtenons un nouveau vecteur.

Le vecteur obtenu est une combinaison linéaire de A et B .

Un ensemble de vecteurs est dit linéaire si aucun d'entre eux n'est pas une combinaison linéaire des autres.

$$\mathbf{V} = v_1 \mathbf{A} + v_2 \mathbf{B}, (v_1, v_2) \in \mathfrak{R}$$



Bases

Une base est un ensemble de vecteurs linéaires indépendants permettant d'aller dans n'importe quel point de l'espace i.e. *span*.

n vecteurs sont nécessaires pour couvrir (to span) un espace n -dimensionnel

si les vecteurs sont normalisés et orthogonaux cette base est orthonormale

nous pouvons avoir plusieurs bases pour un espace vectoriel

Représentation d'un vecteur dans une base vectoriel

Chaque vecteur a une représentation unique dans une base donnée.

Les scalaires multipliant les vecteurs de la base s'appellent coordonnées

$$V = v_1 E_1 + v_2 E_2 + \dots + v_n E_n$$

Les vecteurs $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ constituent une base

Les scalaires (v_1, v_2, \dots, v_n) sont les **composants** de V par rapport à la base

Transformations linéaires et affines

Un fonction est linéaire si:

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{F}(\mathbf{A}) + \mathbf{F}(\mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}(k\mathbf{A}) = k\mathbf{F}(\mathbf{A})$$

pour tous les vecteurs A et B et pour tous les scalaires k

Une carte linéaire est spécifiée complètement par les résultats d' un ensemble de vecteurs

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2 + v_3\mathbf{E}_3 \\ \mathbf{F}(\mathbf{V}) &= \mathbf{F}(v_1\mathbf{E}_1 + v_2\mathbf{E}_2 + v_3\mathbf{E}_3) \\ &= \mathbf{F}(v_1\mathbf{E}_1) + \mathbf{F}(v_2\mathbf{E}_2) + \mathbf{F}(v_3\mathbf{E}_3) \\ &= v_1\mathbf{F}(\mathbf{E}_1) + v_2\mathbf{F}(\mathbf{E}_2) + v_3\mathbf{F}(\mathbf{E}_3)\end{aligned}$$

Une fonction F est affine si nous avons une translation

La transformation $ID y=mx+b$ n' est pas linéaire mais affine

TRANSFORMATION D'UN VECTEUR

Presentation des coordonnées d'un vecteur à partir de vecteurs formant la base

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}_1) = f_{11}\mathbf{E}_1 + f_{21}\mathbf{E}_2 + f_{31}\mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}_2) = f_{12}\mathbf{E}_1 + f_{22}\mathbf{E}_2 + f_{32}\mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}_3) = f_{13}\mathbf{E}_1 + f_{23}\mathbf{E}_2 + f_{33}\mathbf{E}_3$$

Donc, un vecteur \mathbf{s}' écrit:

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = v_1\mathbf{F}(\mathbf{E}_1) + v_2\mathbf{F}(\mathbf{E}_2) + v_3\mathbf{F}(\mathbf{E}_3)$$

$$= (f_{11}\mathbf{E}_1 + f_{21}\mathbf{E}_2 + f_{31}\mathbf{E}_3)v_1 + (f_{12}\mathbf{E}_1 + f_{22}\mathbf{E}_2 + f_{32}\mathbf{E}_3)v_2 + (f_{13}\mathbf{E}_1 + f_{23}\mathbf{E}_2 + f_{33}\mathbf{E}_3)v_3$$

$$= (f_{11}v_1 + f_{12}v_2 + f_{13}v_3)\mathbf{E}_1 + (f_{21}v_1 + f_{22}v_2 + f_{23}v_3)\mathbf{E}_2 + (f_{31}v_1 + f_{32}v_2 + f_{33}v_3)\mathbf{E}_3$$

$$\hat{v}_1 = (f_{11}v_1 + f_{12}v_2 + f_{13}v_3)$$

$$\hat{v}_2 = (f_{21}v_1 + f_{22}v_2 + f_{23}v_3)$$

$$\hat{v}_3 = (f_{31}v_1 + f_{32}v_2 + f_{33}v_3)$$

$$\hat{v}_i = \sum_j f_{ij}v_j$$

La forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{v}_i = \sum_j f_{ij} v_j$$

LA MULTIRÉSOLUTION

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} \subset V_j$$

le signal à une résolution donnée contient toute l'information du signal aux résolutions grossières,

LA MULTIRÉSOLUTION

$$\bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j = 0, \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j} = L^2(R)$$

la fonction 0 est le seul objet commun à tous les espaces V_j ,

LA MULTIRÉSOLUTION

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}$$

Il existe un $\phi \in V_0$ t.q. pour $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}x - n)$$

Constitue une base inconditionnelle de V_m

LA MULTIRÉSOLUTION

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$$

la construction d'une fonction d'échelle est orthogonale à ses translatés par des entiers,

LA MULTIREOLUTION

$$A \sum_k |C_n|^2 \leq \left\| \sum_k C_n \varphi(x-k) \right\|^2 \leq B \sum_k |C_n|^2$$

n'importe quel signal peut être approximé avec une précision arbitraire.

LES ONDELETTES ORTHOGONALES

But : de trouver une famille d' ondelettes orthogonales sur lesquelles on pourrait décomposer un signal f en série double :

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$

DÉFINITION

On appelle ondelette d'ordre r toute fonction vérifiant :

$$|\psi^{(m)}(x)| \leq \frac{C^{te}}{1 + |x|^{r+m+1}} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int x^q \psi(x) dx = 0 \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

On appelle **base orthonormée d'ondelettes** toute base avec

Qui vérifie la définition précédente

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$

EXEMPLES

La base de Haar

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1 \text{ pour } x \in [0,1] \\ h(n) &= \int 0.5 \phi(x/2)\phi(x-n)dx \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} h(0)=h(1)=0.5 \text{ et } h(n)=0 \\ g(1)=-g(0)=0.5 \text{ et } g(n)=0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \sum \exp(-i\omega/2)\cos(\omega/2)$$

$$G(\omega) = \sum -i \exp(-i\omega/2)\sin(\omega/2)$$

La base de Haar

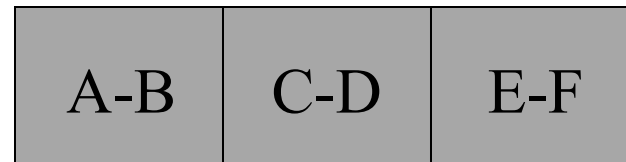
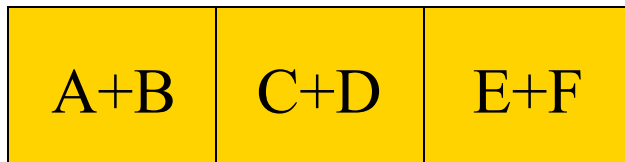
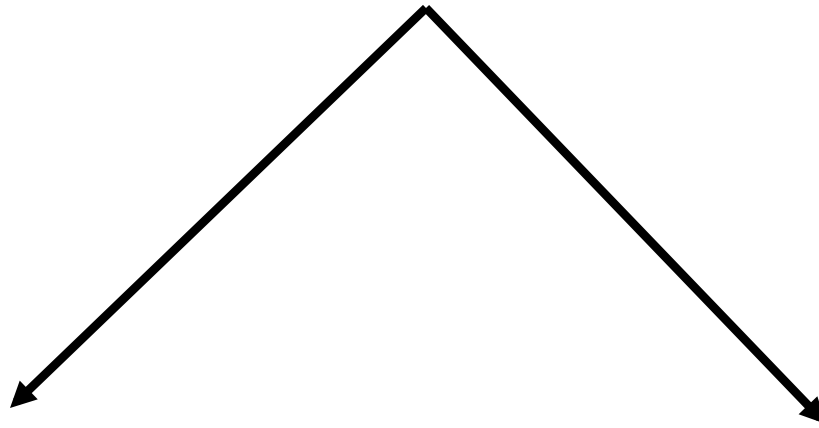
$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1 \text{ pour } x \in [0,1] \\ h(n) &= \int 0.5 \phi(x/2)\phi(x-n)dx \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} h(0)=h(1)=0.5 \text{ et } h(n)=0 \\ g(1)=-g(0)=0.5 \text{ et } g(n)=0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \sum \exp(-i\omega/2)\cos(\omega/2)$$

$$G(\omega) = \sum -i \exp(-i\omega/2)\sin(\omega/2)$$

LA BASE DE HAAR

1910



POURQUOI LA BASE DE HAAR ?

Conservation de l' énergie

Préserve le corrélation (normalisation $\sqrt{2}$)

Parfaitement inversible

**Un signal lisse transformé par Haar contient
beaucoup de zéros**

REMARQUES

$$ax_i + bx_{i+1} \quad a = 1 \quad b = 1$$

$$cx_i + dx_{i+1} \quad c = 1 \quad d = -1$$

$$c + d = 0$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est une matrice orthonormale

$$ac + bd = 0$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

CONSTRUCTION D'UNE ÉQUATION !!!

$$a_0x_i + a_1x_{i+1} + a_2x_{i+2} + a_3x_{i+3}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 = 0$$

$$a_0a_2 + a_1a_3 = 0$$

SOLUTION

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] = \left[a_0, \frac{-(2\sqrt{3}-3)a_0 - 3a_0}{2}, (2\sqrt{3}-3)a_0, \frac{a_0 - (2\sqrt{3}-3)a_0}{2} \right]$$

Dépendance linéaire de a_0

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

Conservation de l'énergie

LES ONDELETTES DE DAUBECHIES 2

$$a_0 = 0.4829$$

$$a_1 = -0.8365$$

$$a_2 = 0.2241$$

$$a_3 = 0.1294$$



La formule de Cohen pour
Obtenir le FPB

$$-a_3$$

$$a_2$$

$$-a_1$$

$$a_0$$

Conclusion :

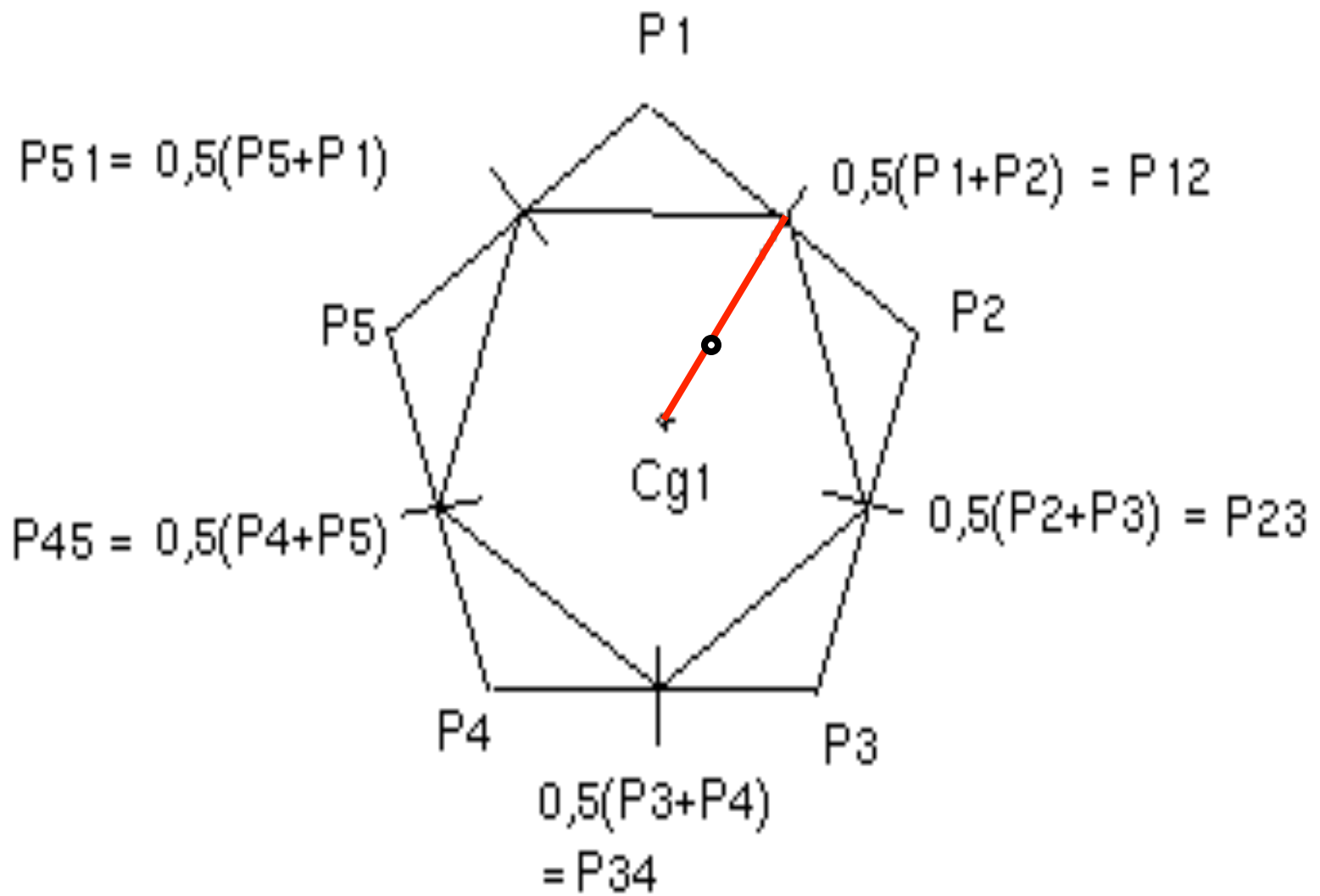
- La transformée d' un signal constant est égale à zéro
- Idem pour les signaux de pente constante
- Orthonormé

CONSTRUCTION DES FILTRES
ASSOCIÉS À UNE BASE
D'ONDELETTES

Un filtre $G(\omega)$ est associé à une base d'ondelettes, si la condition de reconstruction exacte (1) est satisfaite, lorsque le filtre est de type passe-haut (2).

$$|G(\omega)| \times |G(\omega)| + |G(\omega+\pi)| \times |G(\omega+\pi)| = 1 \quad (1)$$

$$G(\pi) = 1 \quad \text{et} \quad G(0) = 0 \quad (2)$$



Application des ondelettes pour la division

$$P_3 = tP_1 + (1-t)P_2$$

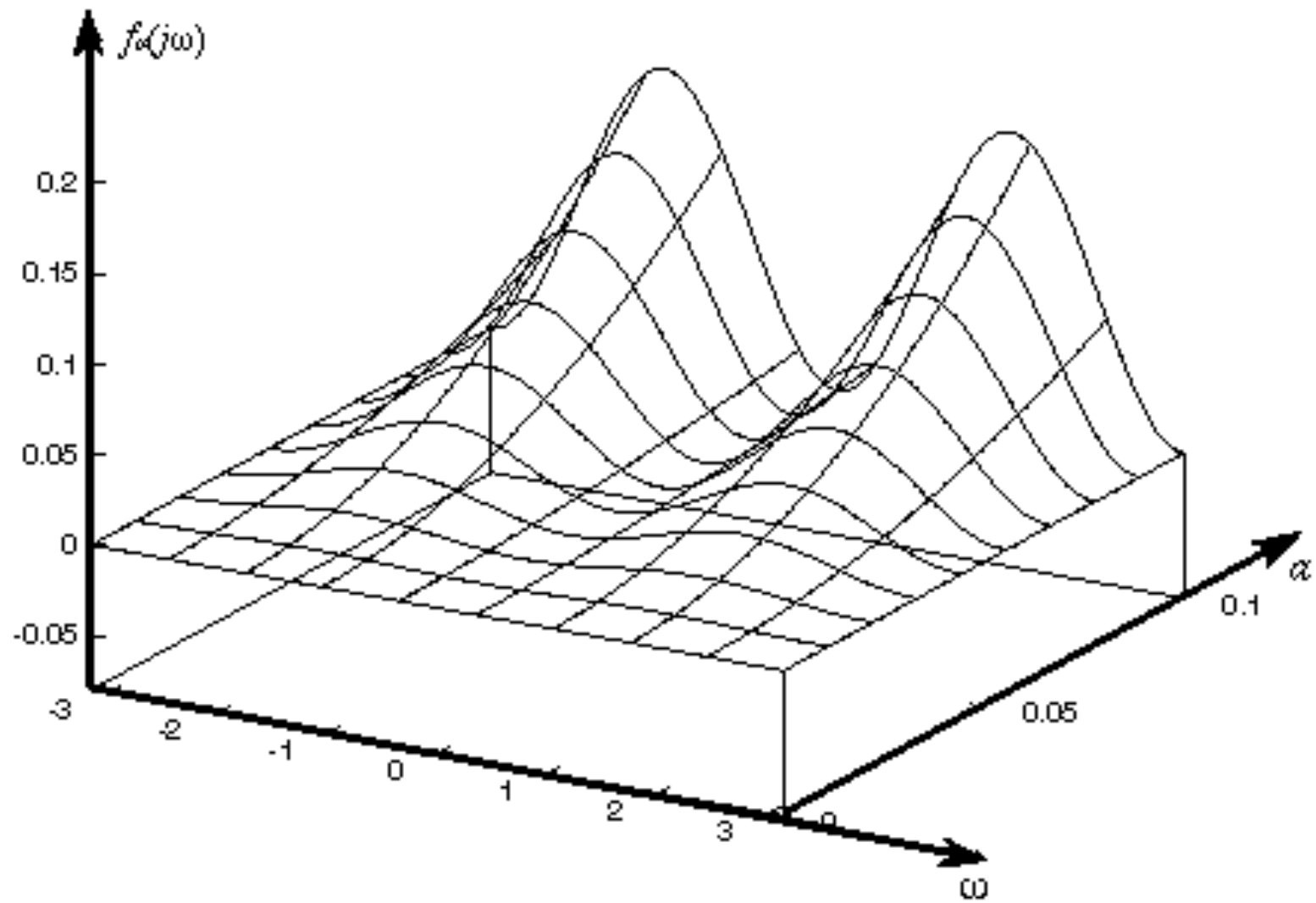
$$P_3 = h(0)P_1 + h(1)P_2$$

$$\begin{aligned}g(0) &= 0.5 - a \\g(1) &= -0.5 - a \\g(2) &= a \\g(3) &= a\end{aligned}$$

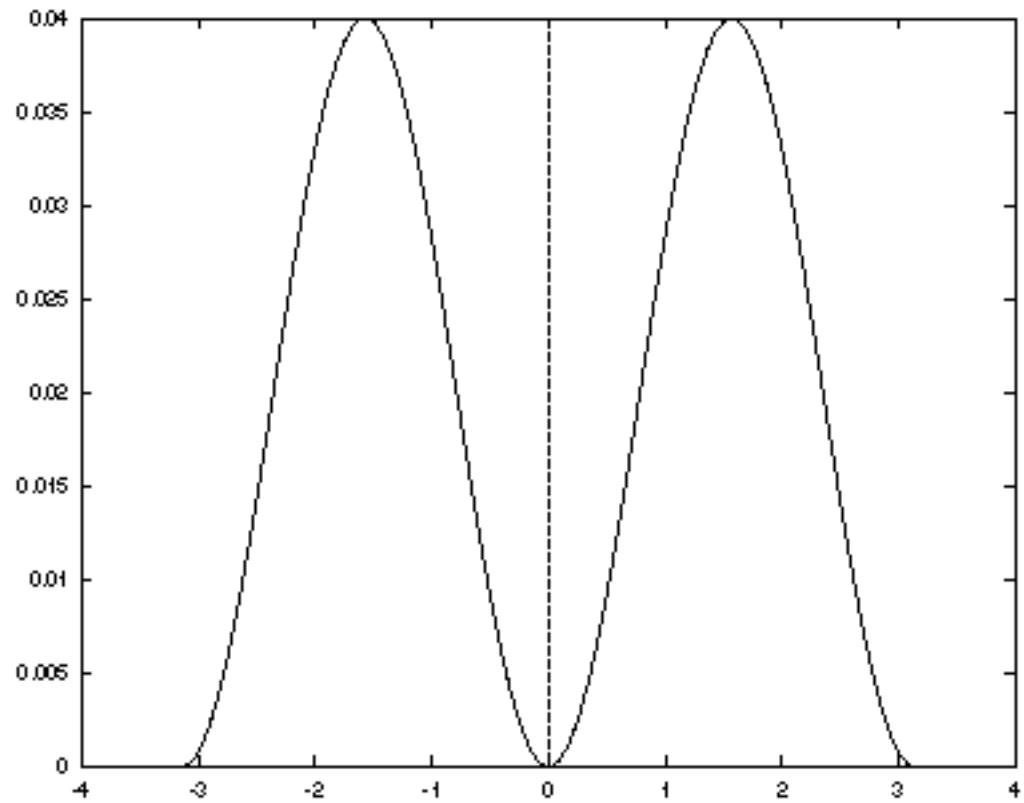


$$\left. \begin{aligned}g(0) &= 0.483 \\g(1) &= -0.517 \\g(2) &= 0.017 \\g(3) &= 0.017\end{aligned} \right\}$$

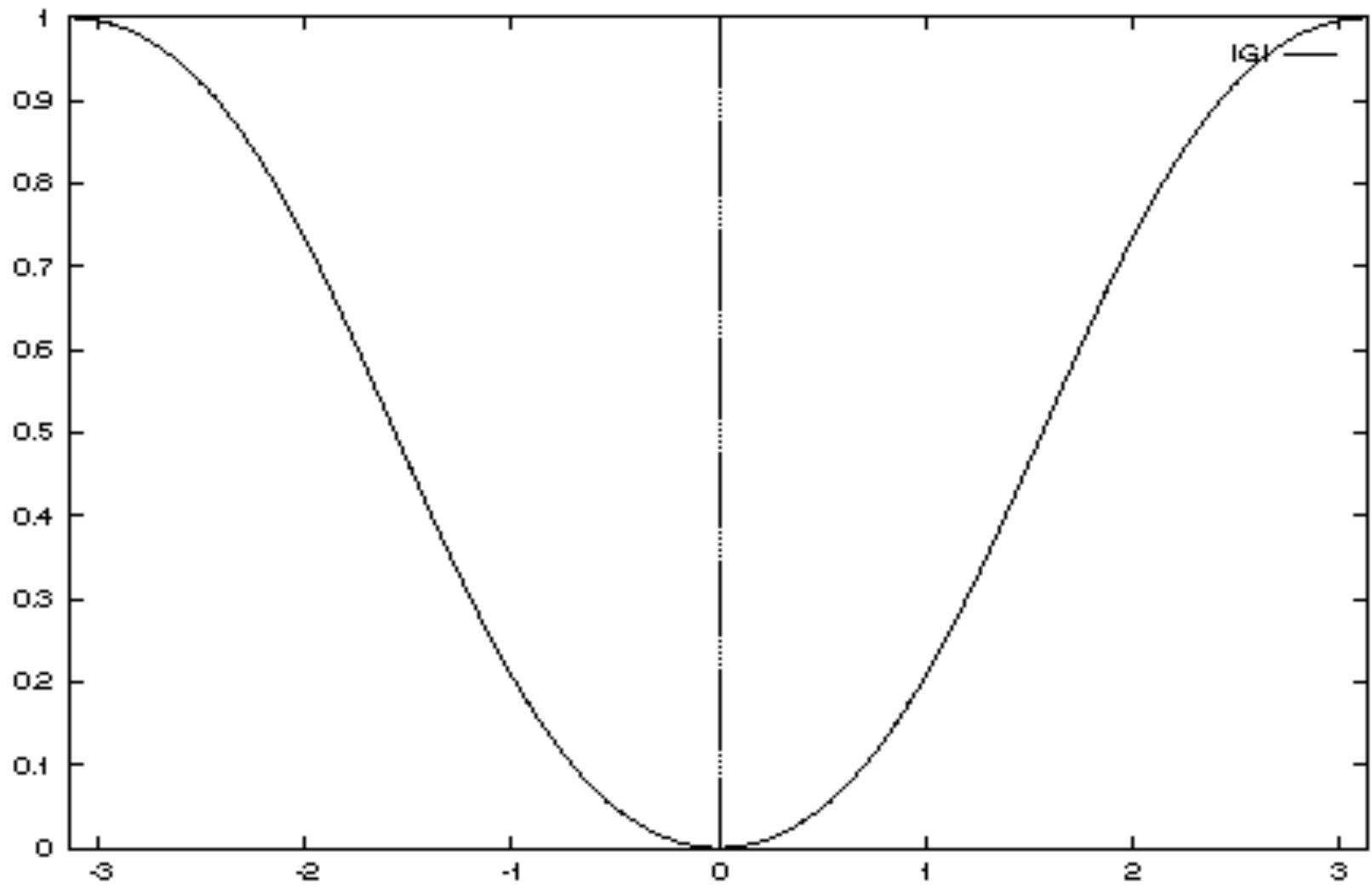
$$\left. \begin{aligned}h(0) &= -0.017 \\h(1) &= 0.017 \\h(2) &= 0.517 \\h(3) &= 0.483\end{aligned} \right\}$$



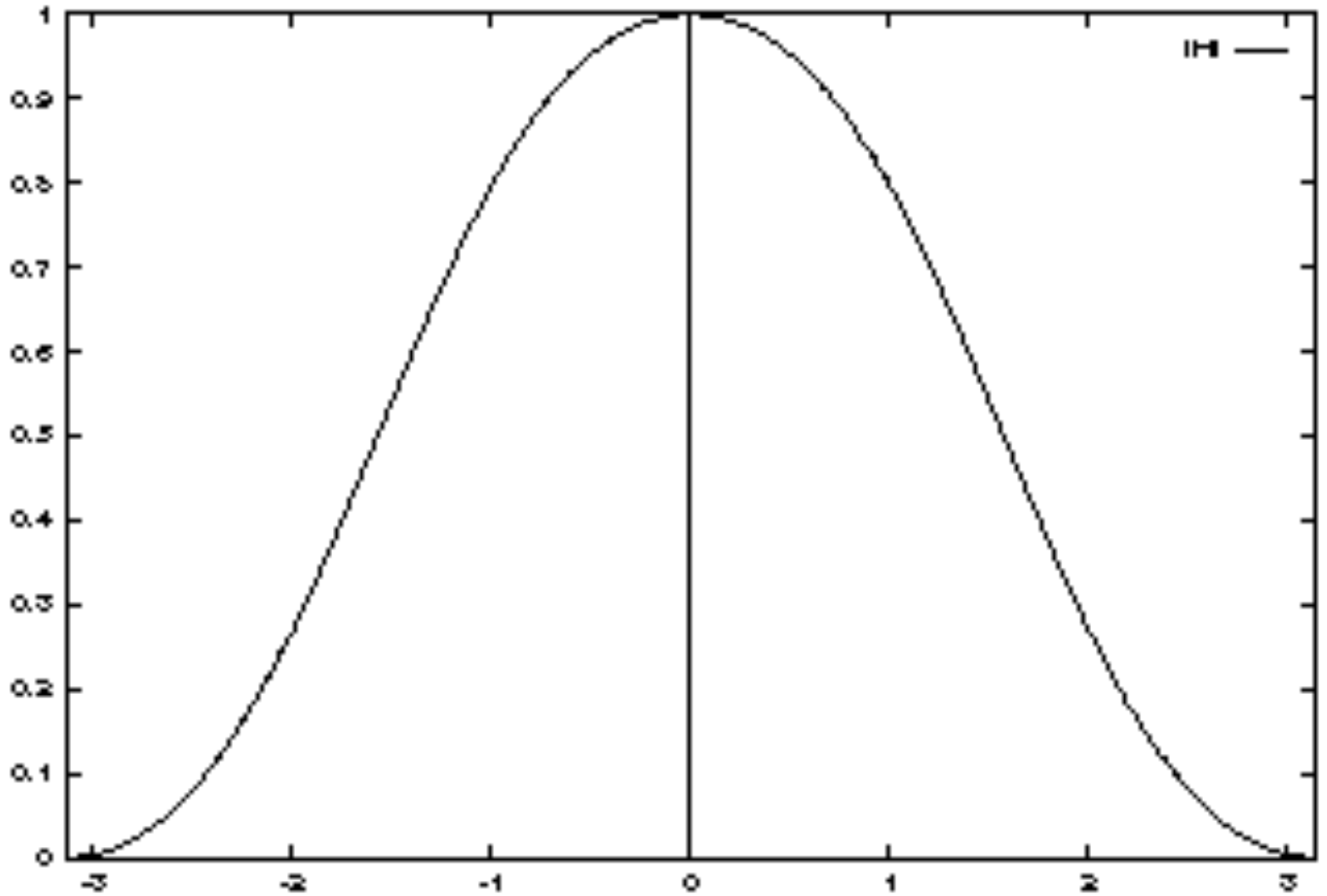
L'erreur de reconstruction



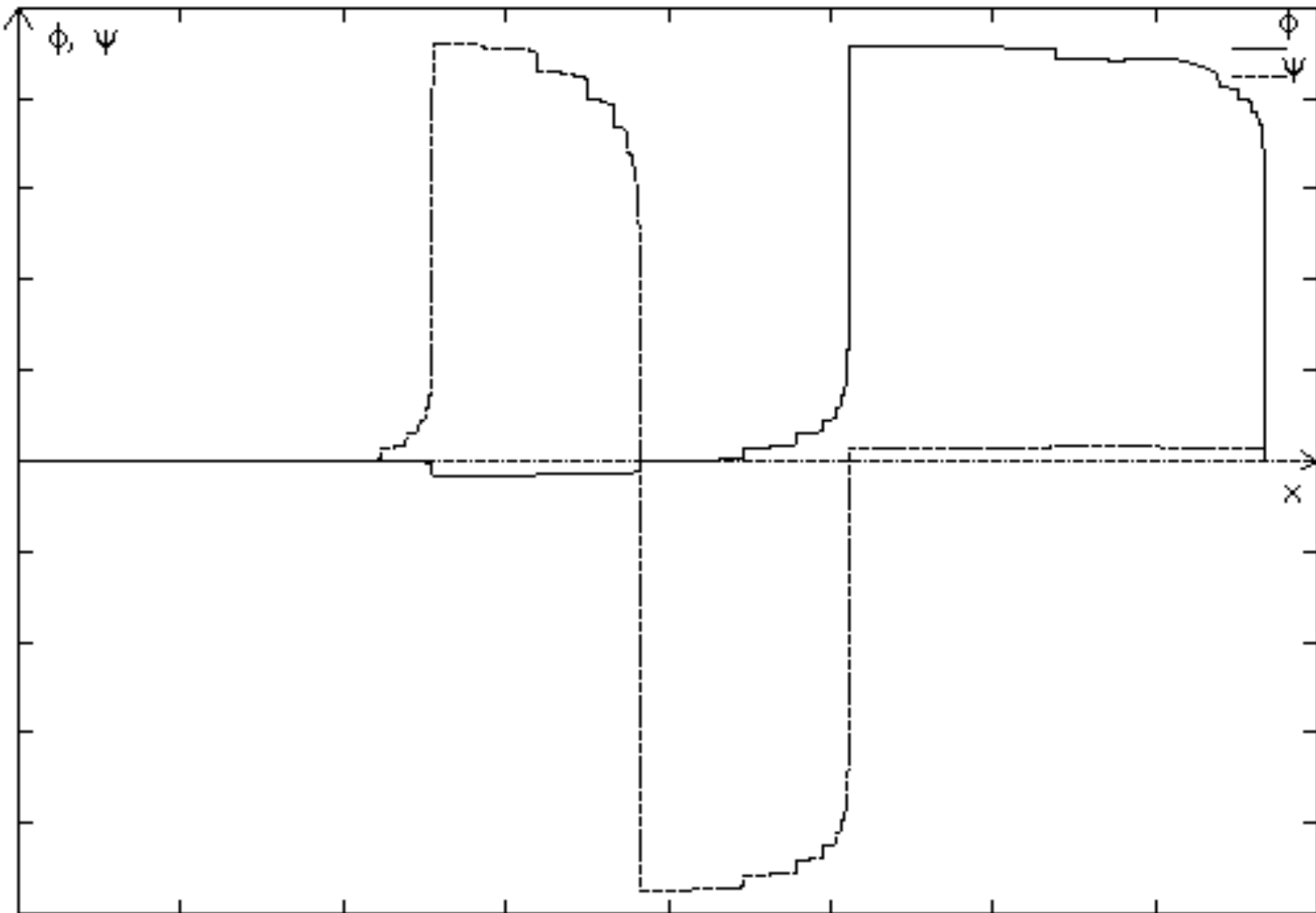
L'erreur de reconstruction pour $a=0.017$



Le module du filtre passe-haut G pour $a=0.017$



Le module du filtre passe-bas H pour $a=0.017$



Les fonctions φ et ψ obtenues par l'algorithme en cascade

$$y = Hx$$

$$z = Gx$$

où

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ \dots & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

La reconstruction du signal x_i est obtenue :

$$x_i = \sum_k h_{i-2k} y_k + g_{i-2k} z_k$$

sous la forme matricielle, elle devient :

$$x = H^T y + G^T z$$

où H^T et G^T sont les matrices transposées.

Les conditions sur les filtres peuvent s'écrire sur la forme matricielle :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}$$

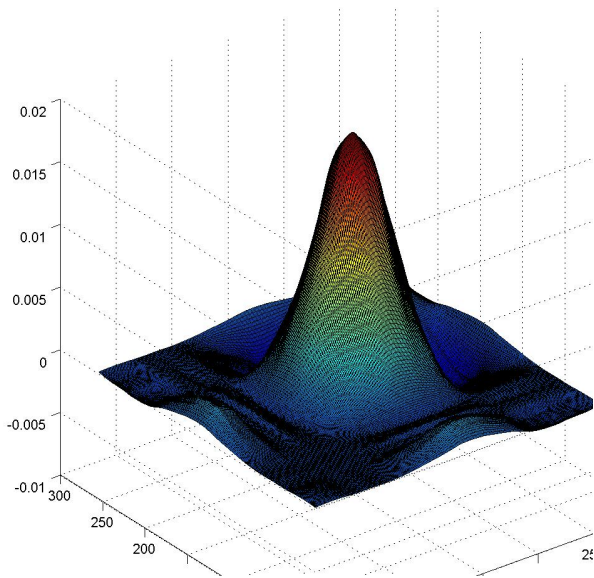
$$\mathbf{G} \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \mathbf{G}^T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H} \mathbf{H}^T = \mathbf{G} \mathbf{G}^T = \mathbf{I}$$

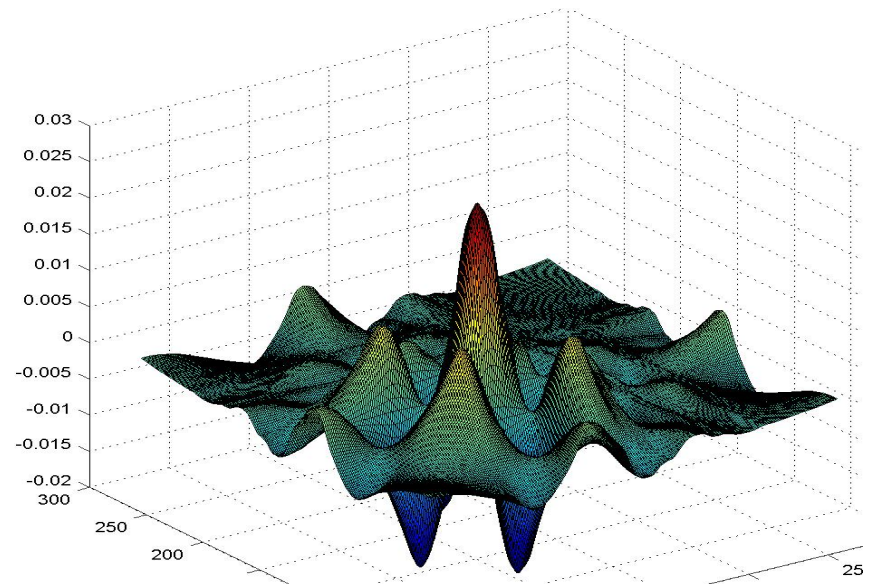
$$\underline{\mathbf{H}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{H} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{G} = \mathbf{I}}$$

D' ONDELETTES À PARTIR DU PRODUIT TENSORIEL

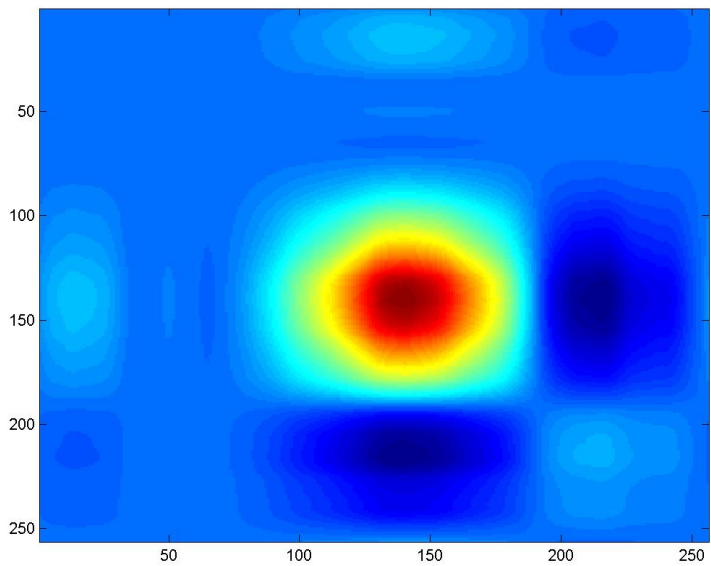
EXEMPLE DAUBECHIES



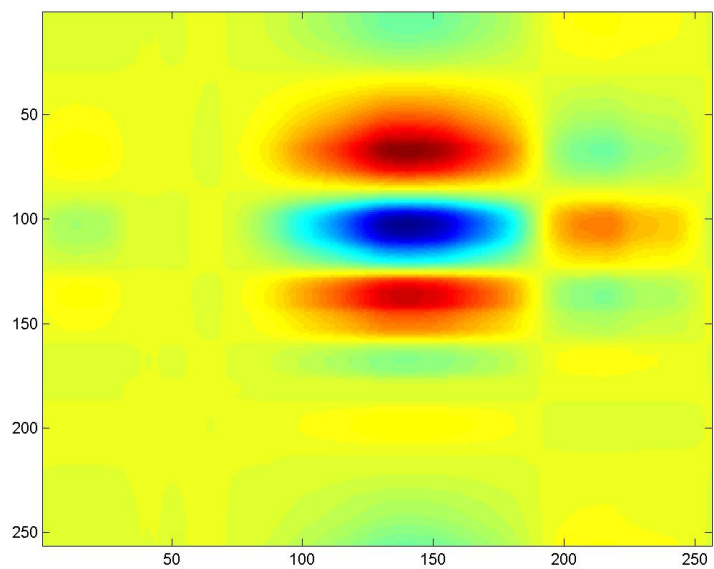
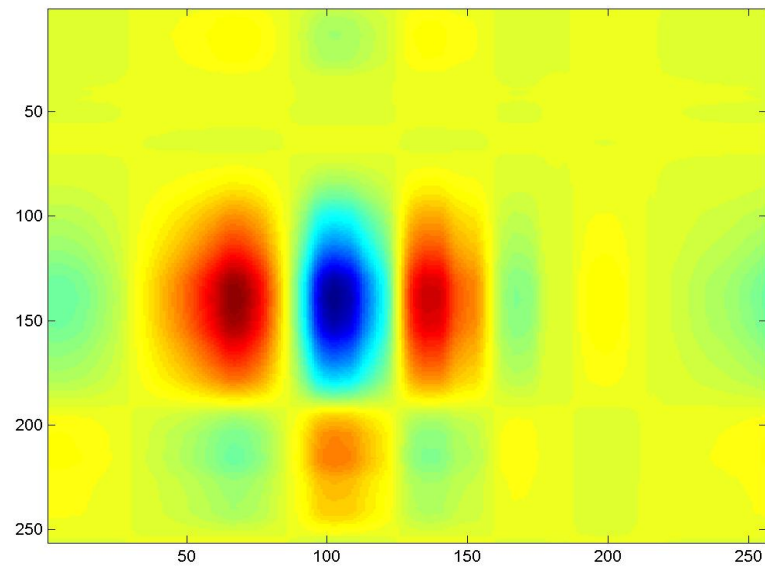
$$\Phi(x)\Phi(y)$$



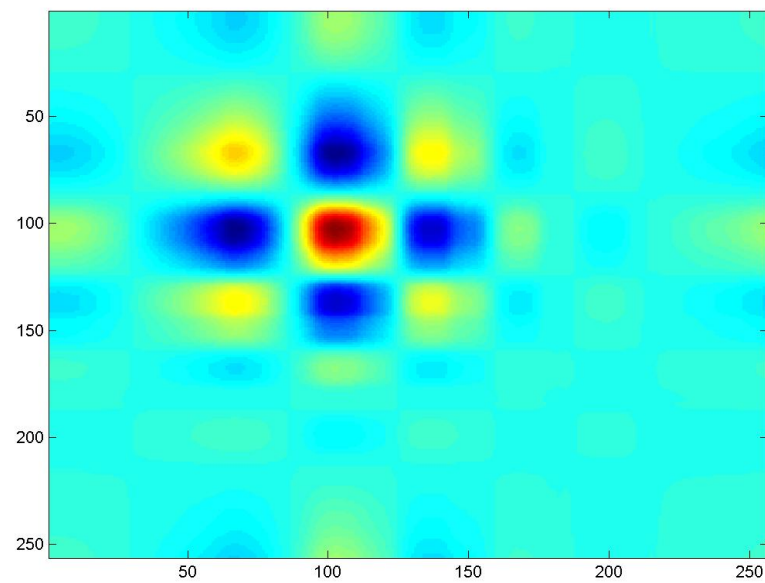
$$\Psi(x)\Psi(y)$$



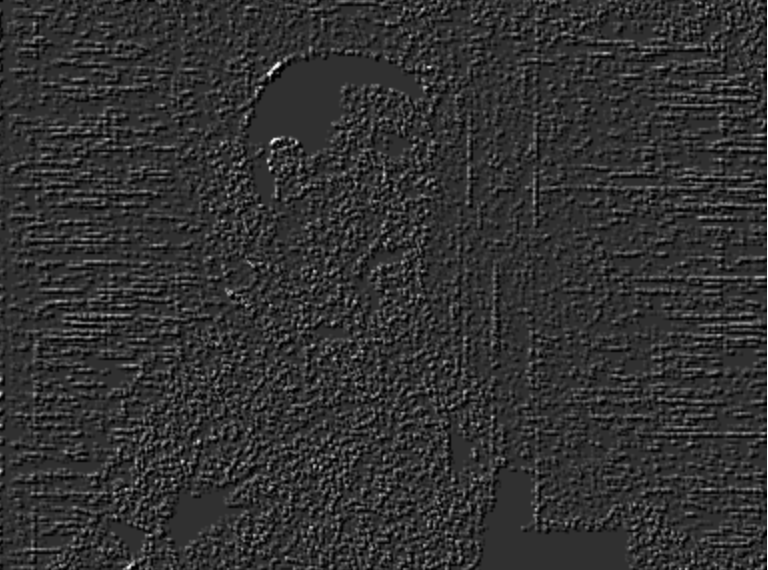
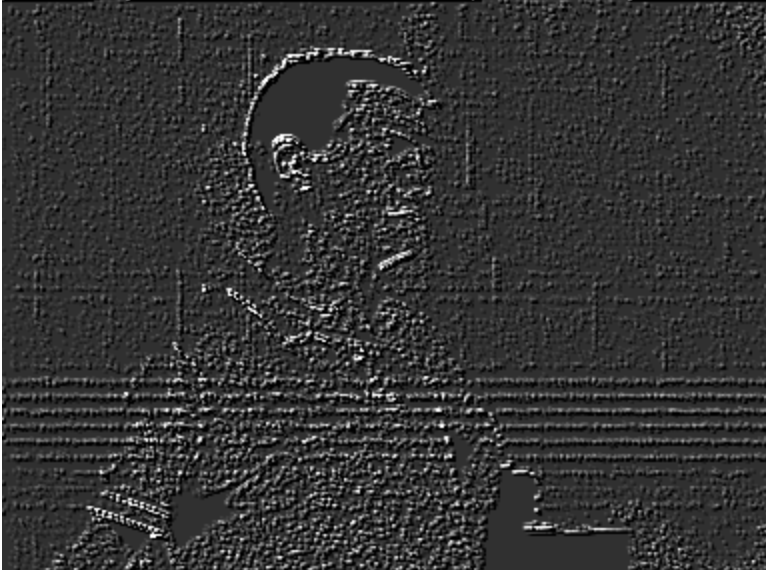
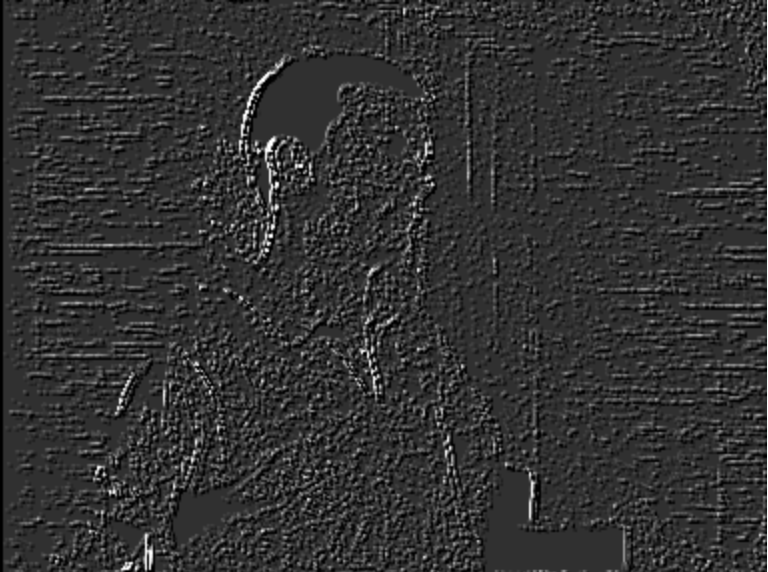
$\Phi\Phi$

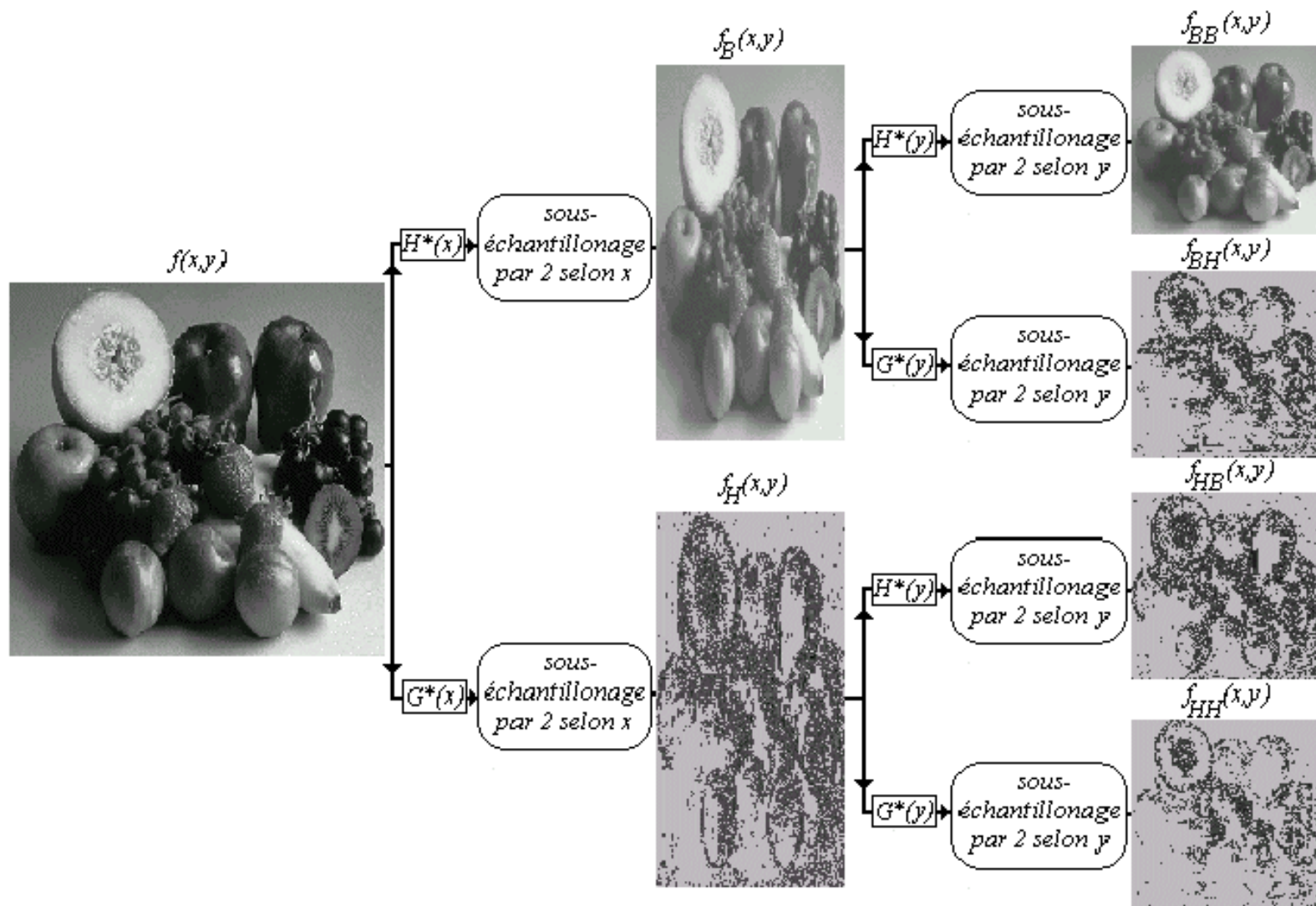


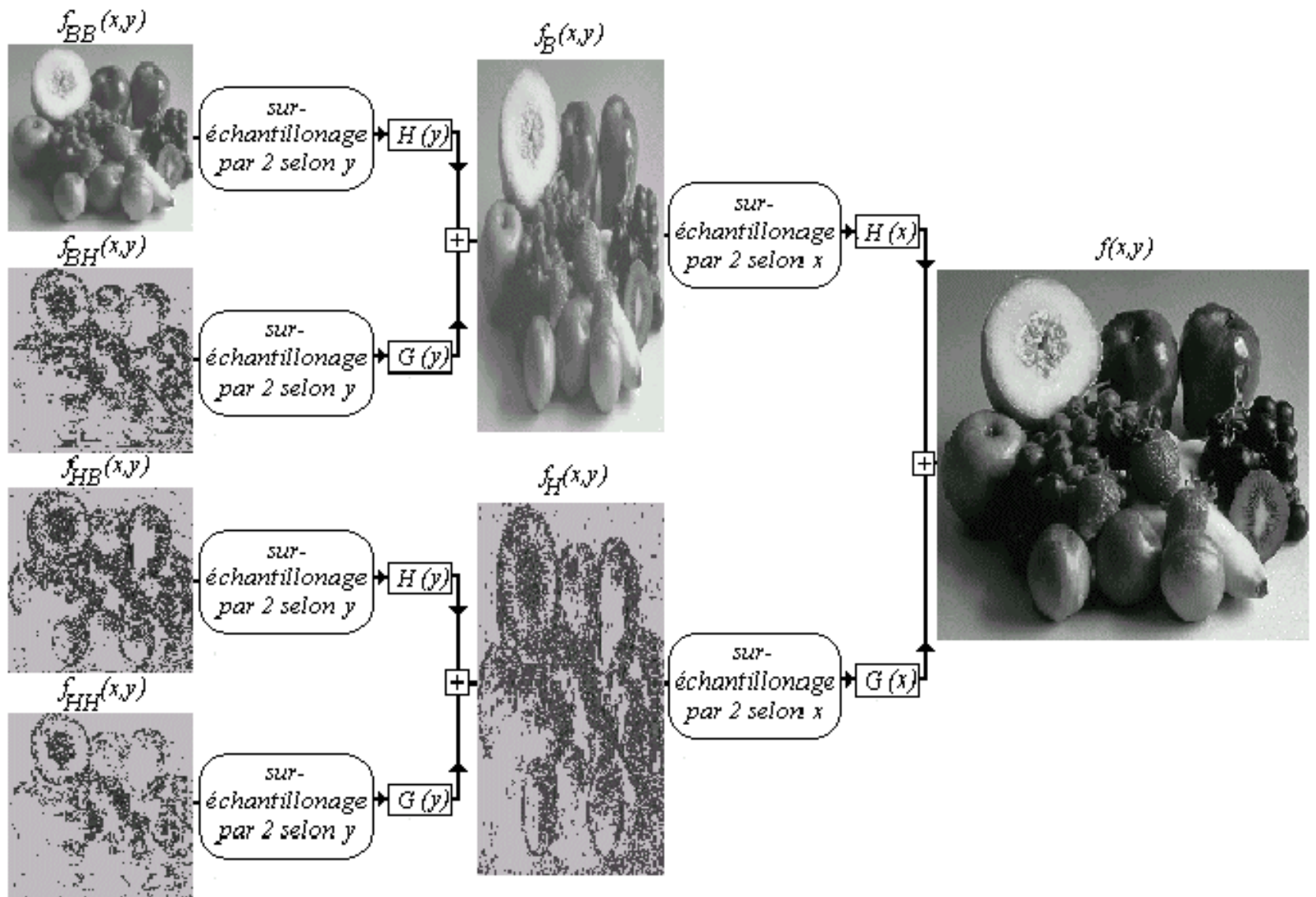
$\Psi\Phi$



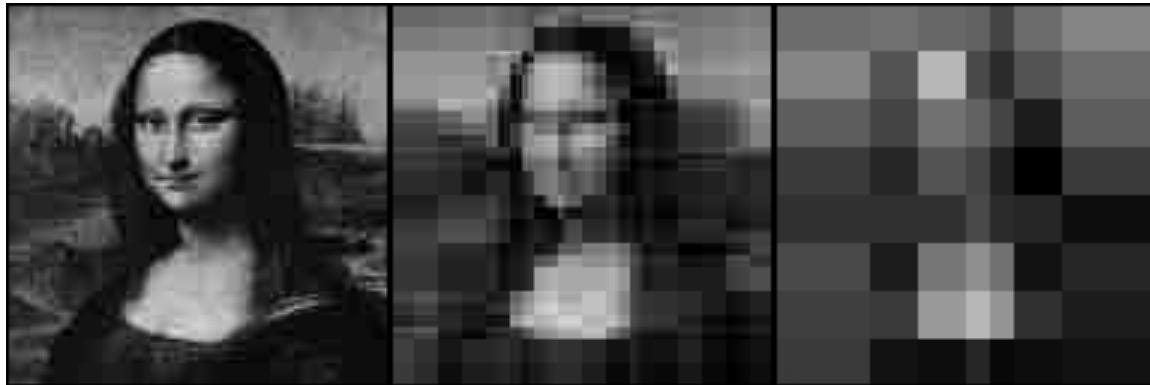
$\Psi\Psi$







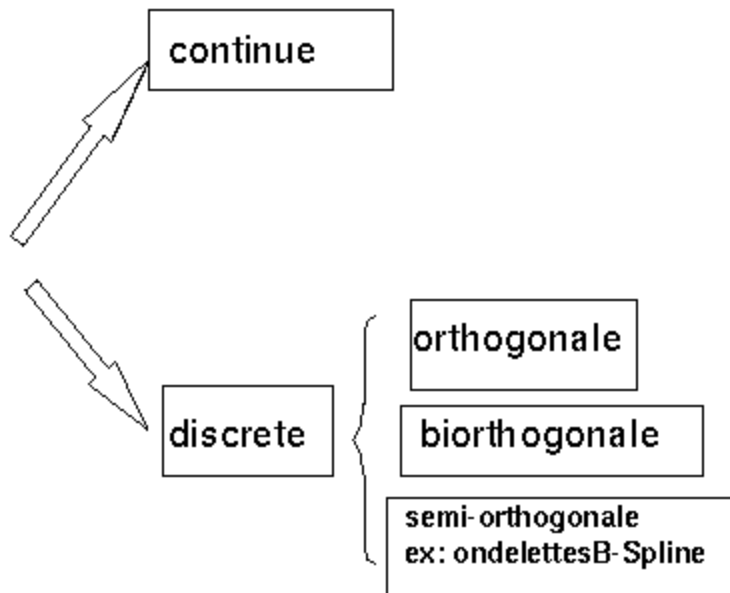
Images



Surfaces



La transformation en ondelettes



COMPRESSION JPEG

2000



a: Deux niveaux de décomposition et codage des détails du deuxième niveau. Taux 8.93:1



b: Deux niveaux de décomposition et reconstruction à partir du résumé. Taux 16:1

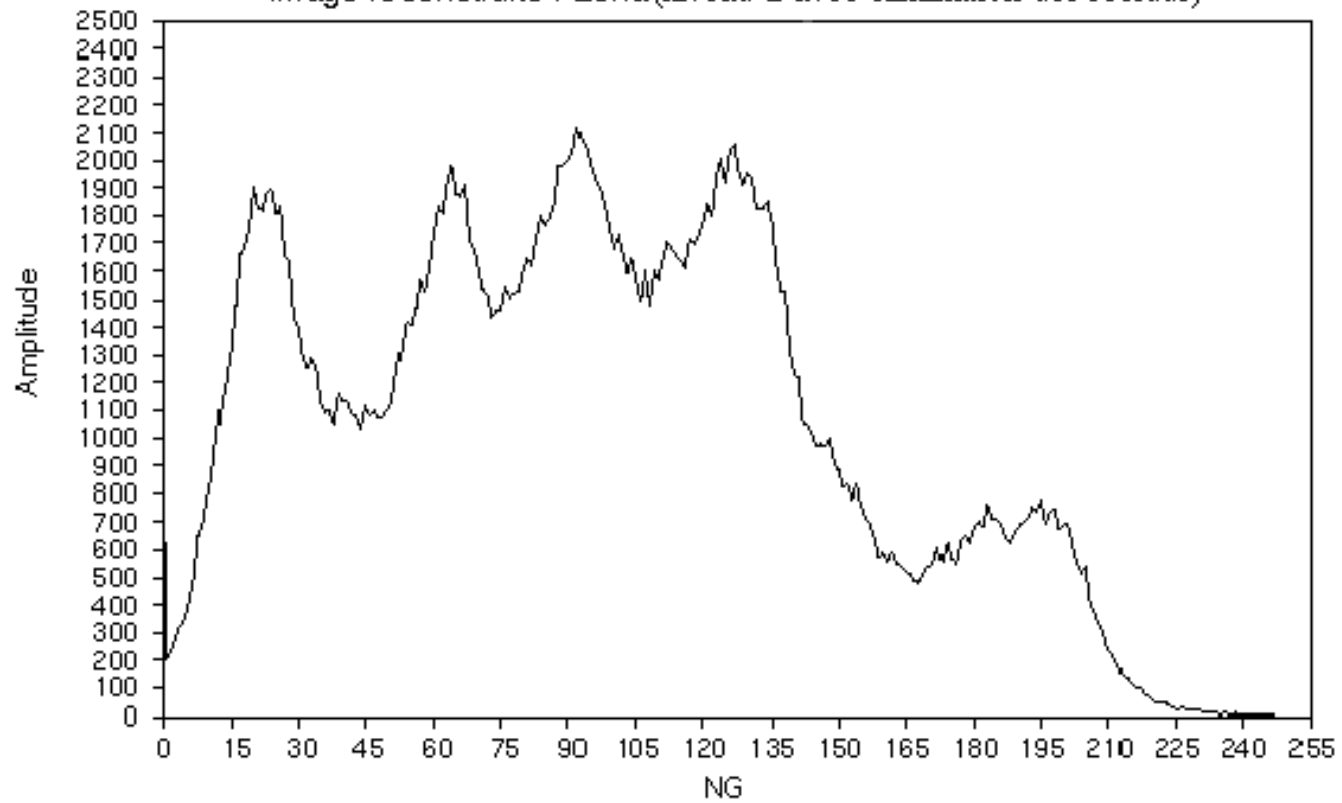


a: lena image originale

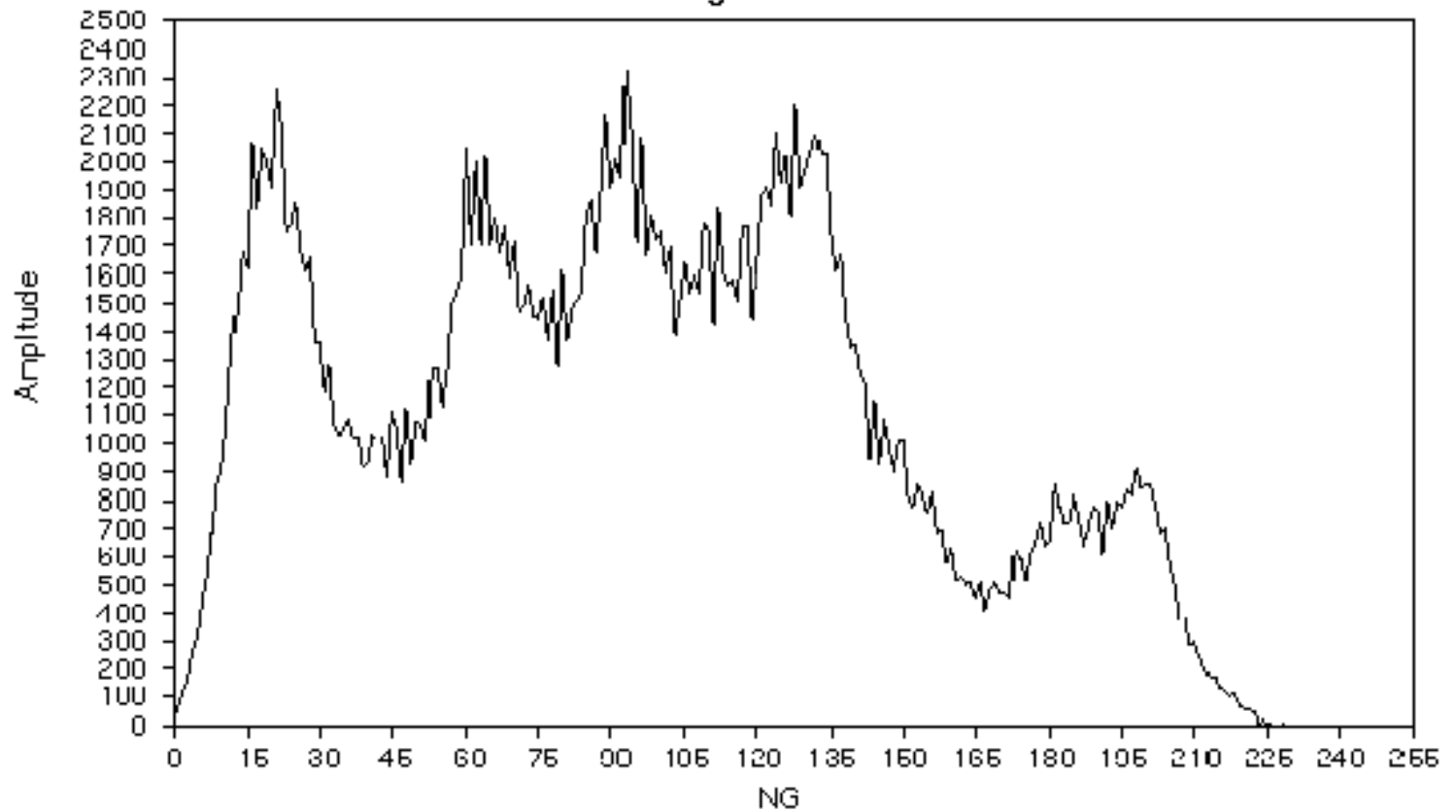


**b: reconstruction par ondelettes
Ō partir du rÝsumÝ**

Image reconstruite : Lena(niveau 2 avec élimination des résidus)



CCITT Test Image : Lena..512x512x8..Lena.tif



Debruitage



Représentation du signal avec un nombre réduit de paramètres

Les problèmes complexes sont réduits à des simples opérations dans cette représentation

Applications: codage compact, élimination du bruit et les problèmes inverses

WAVELET DOMAIN DE-NOISING

Since the DWT of a white noise vector is also a white noise vector, the presence of white noise equally contaminates all wavelet coefficients. Thus, it is reasonable to assume that only a few coefficients contain information about the real signal while others represent random noise.

Donoho proposed two nonlinear rules to treat the empirical coefficients of :

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \phi_k\left(\frac{i}{n}\right)$$

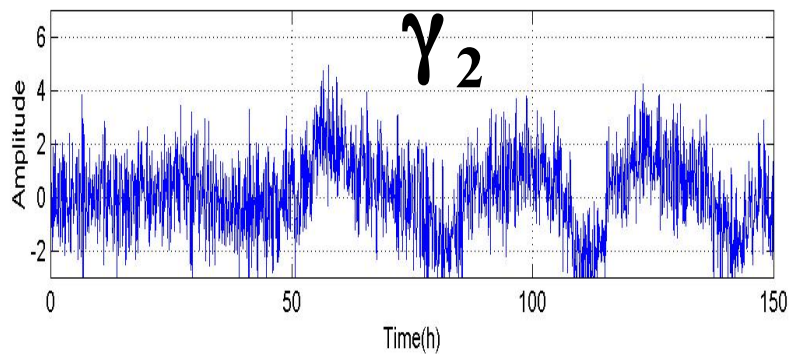
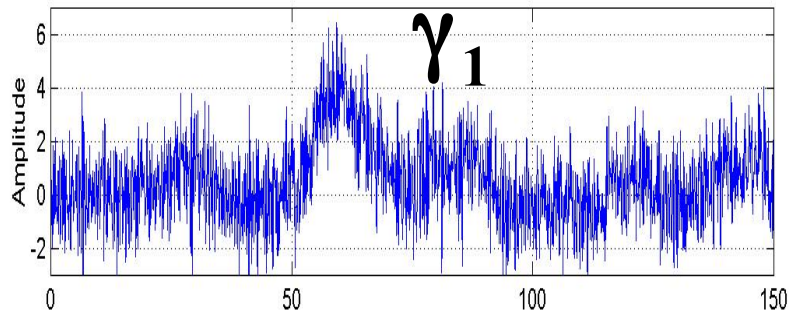
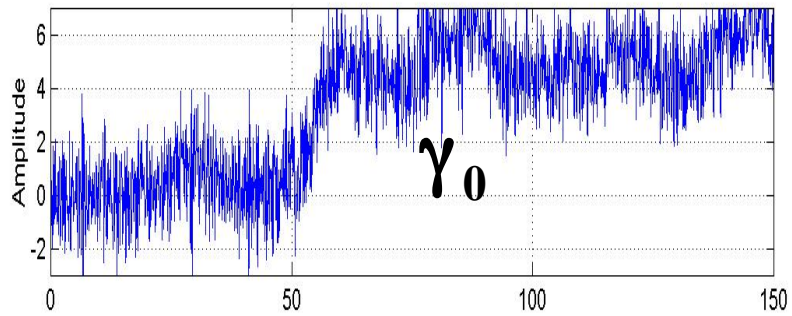
$$\tilde{\beta}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \psi_{j,k}\left(\frac{i}{n}\right)$$

- Hard Thresholding $T_{hard}(w, \lambda) = wI(|w| > \lambda)$
- Soft Thresholding $T_{soft}(w, \lambda) = \text{sign}(w)(|w| - \lambda)I(|w| > \lambda)$

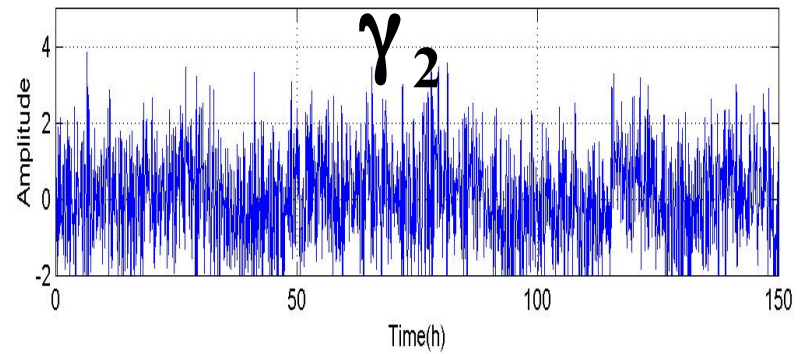
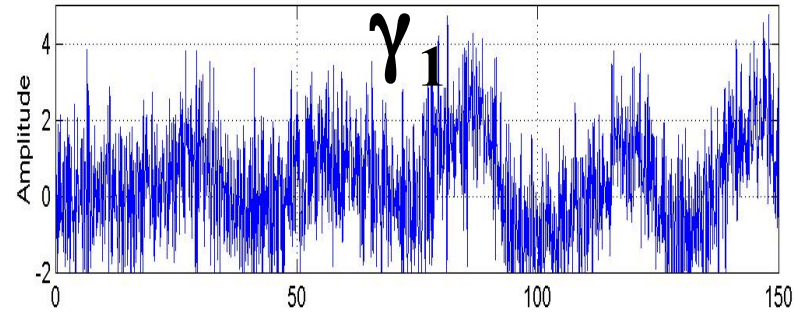
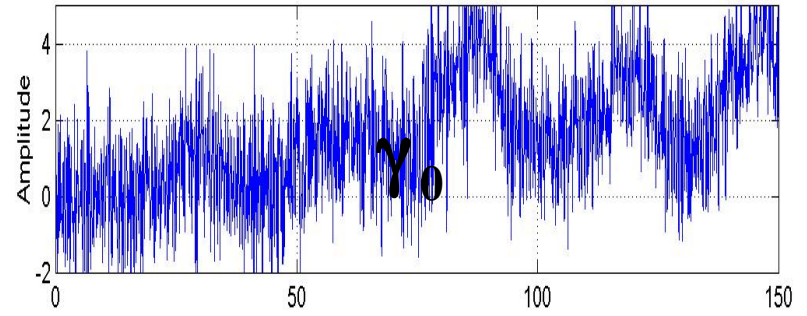
where I is the usual indication function and λ is the threshold.

Colored Noise

Variation de μ_m : 0.38 à 0.40 h^{-1}



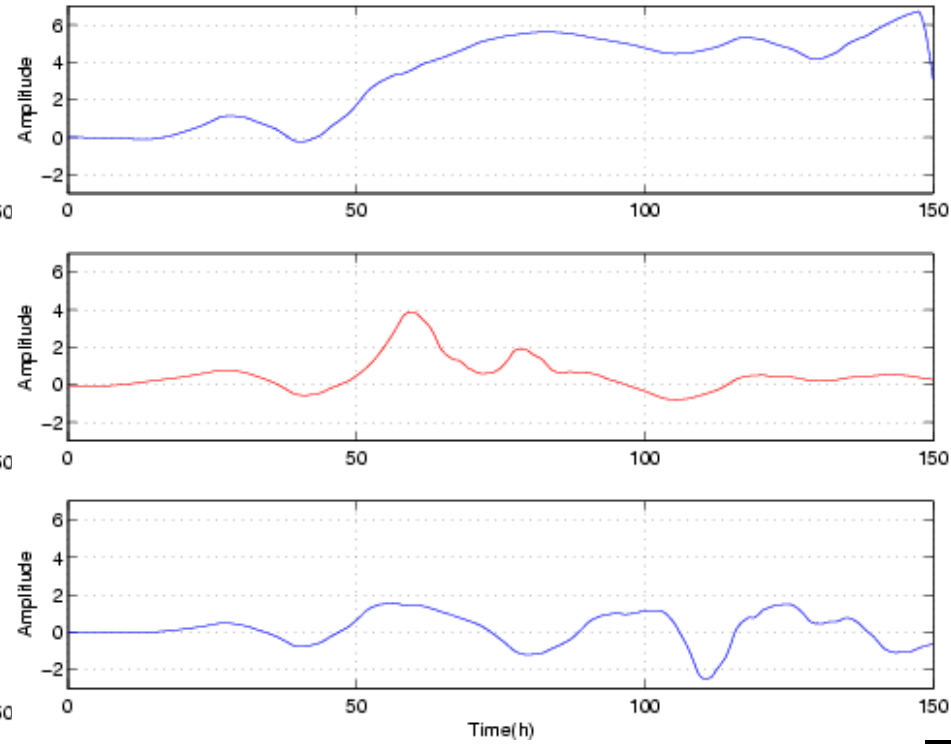
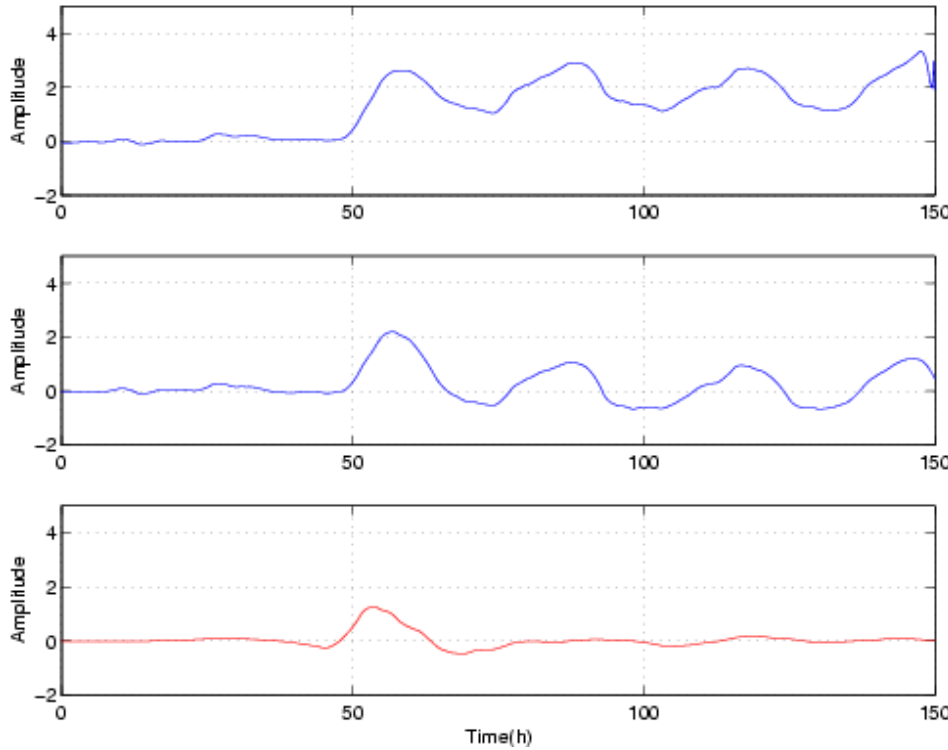
Variation de K_s : 5 à 4.7 g/l



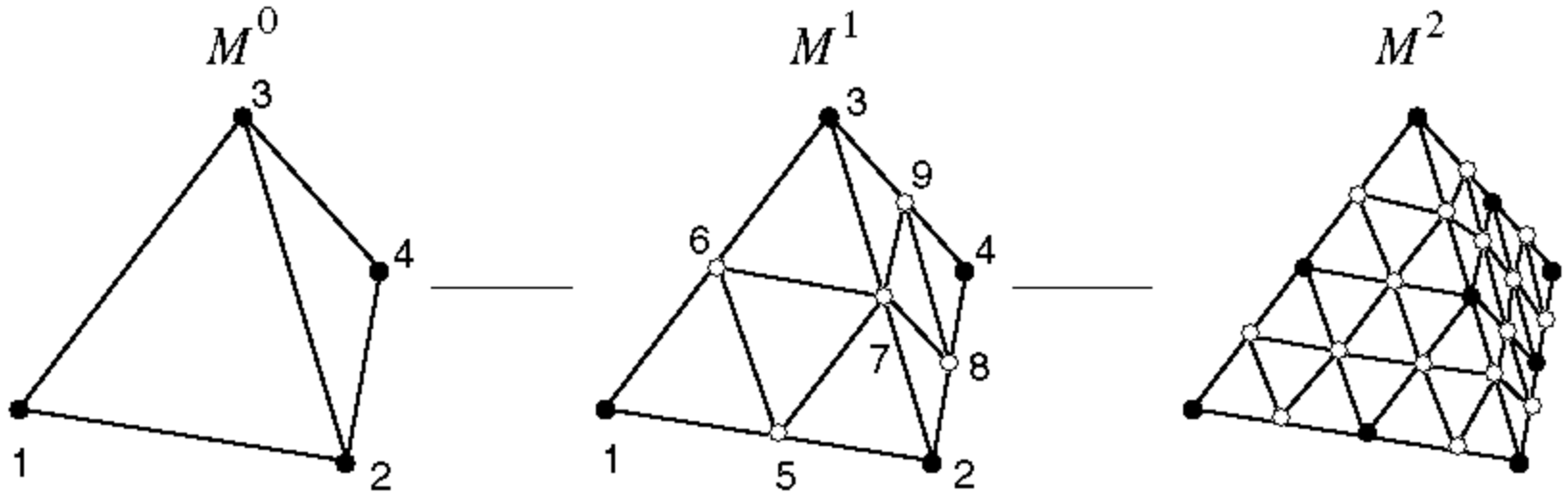
Residual Evaluation using Wavelets

Fault in K_s

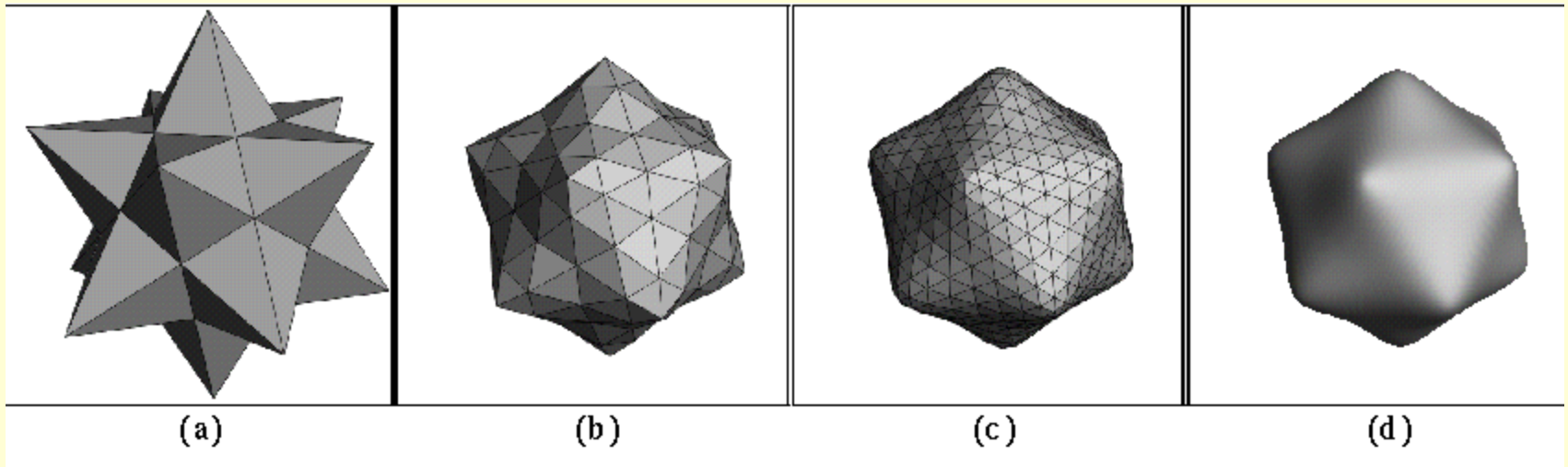
Fault in μ_m

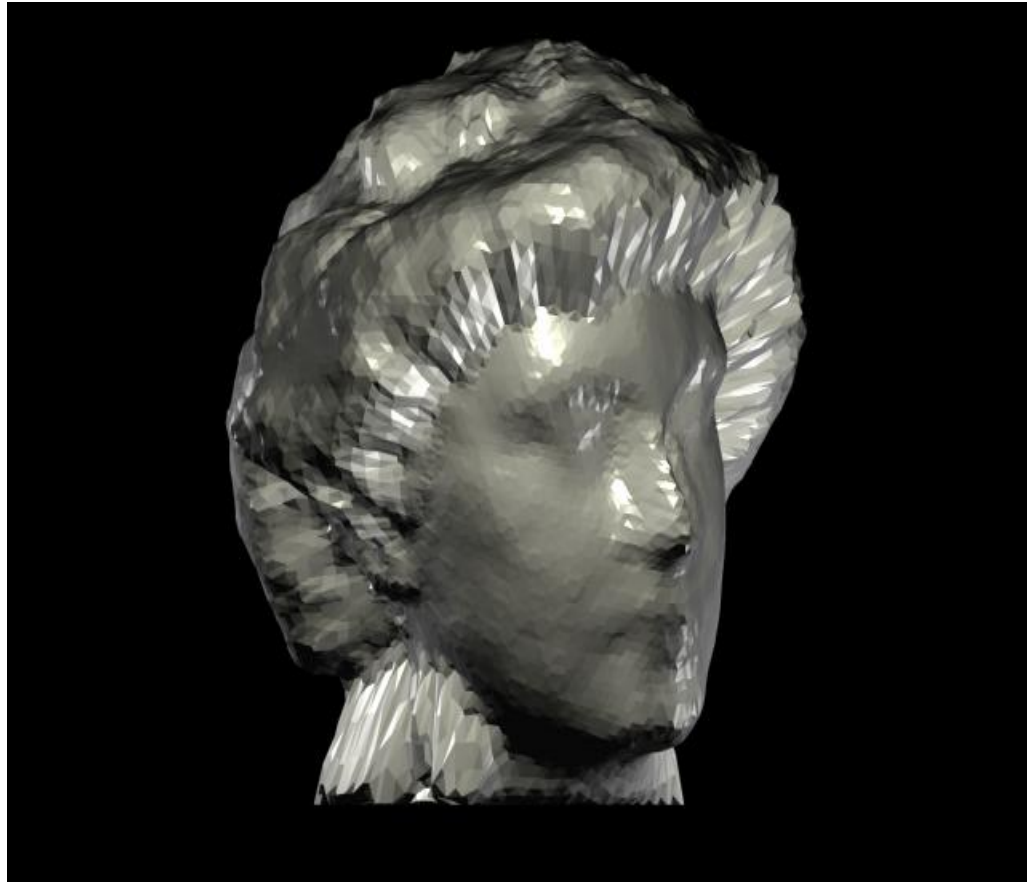


SUBDIVISION

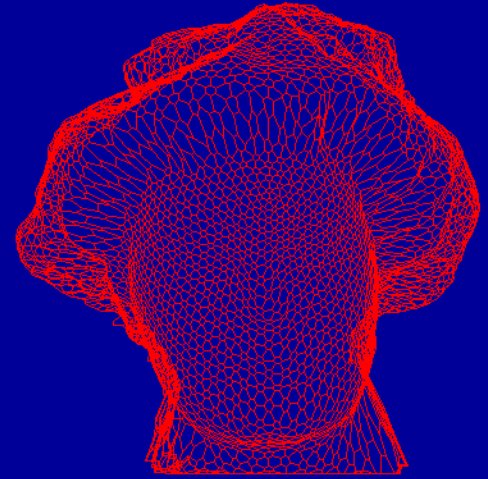


- La deuxième génération des ondelettes obtenue par l'algorithme de lifting dans le domaine spatial
- L'applications des ondelettes pour la subdivision et la compression 3D en utilisant les bancs des filtres

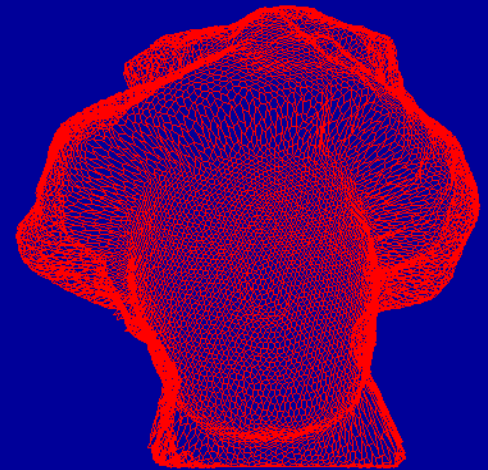


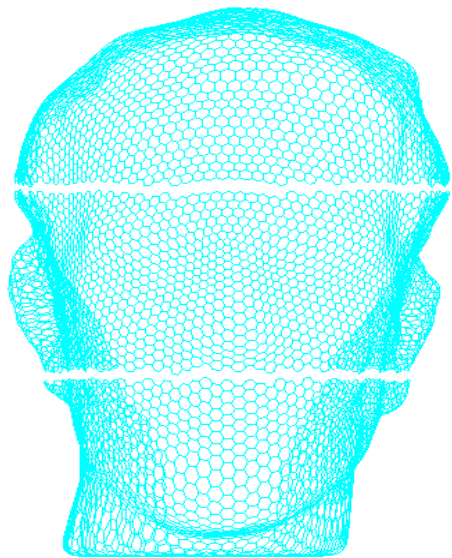


N=6

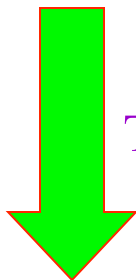


N=7

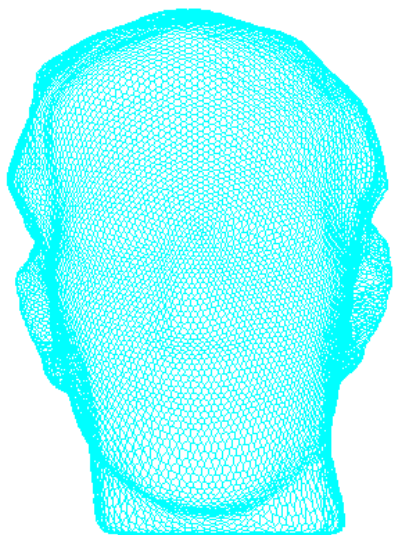




$N_s=6$



TD



TI



$N_s=7$

