Application des ondelettes aux signaux fractales

Application des Ondelettes aux Signaux Fractales

Andrei Doncescu
LAAS-CNRS

Les Fractales

- <u>Définition Inachevée des fractales</u>

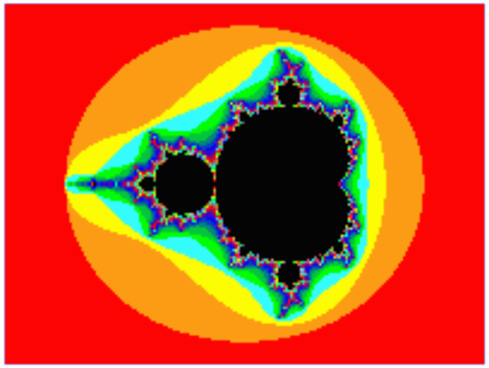
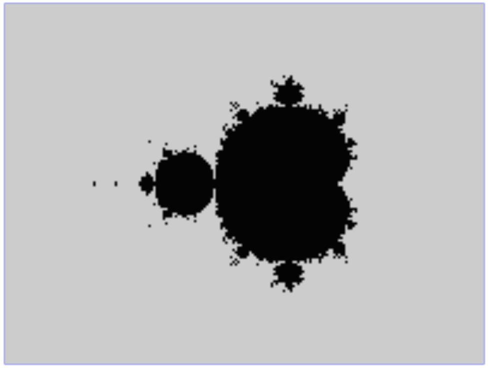
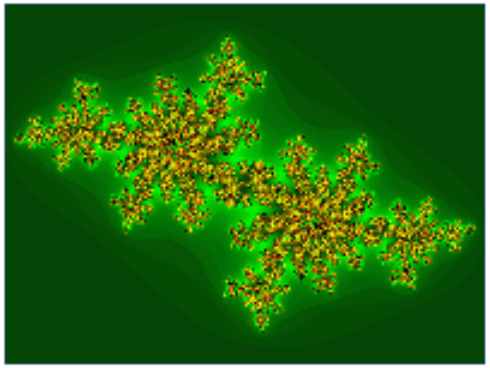
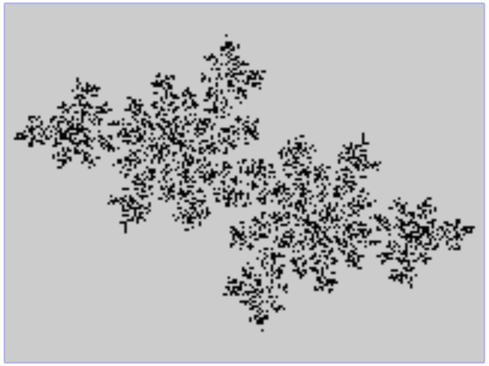
Fractal, ale, als :

adj. <du latin fractus, participe passé de frangere « briser »

Fraction> math. Qui représente des formes découpée, fragmentaires, laissant apparaître des motifs similaires à des échelles d'observations de plus en plus fines (ex : flocons de neige, éponges…).

Mandelbrot et Julia

Courbe continues sans dérivées

Concepts mathématiques

Un objet fractal = un objet très irrégulier dont la structure est la même à toute échelle.

L'objet est invariant par un certain nombre d'opérations de similitude :

composition de translations

de rotations

de dilatations

La dimension fractale

- un objet fractal peut être mesuré ; on parle de *dimension fractale.*

Sa formule est de la forme :

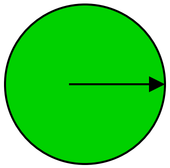
$$\mathbf{D = Log\ (n)\ /\ Log\ (1/r)}$$

- où n est le nombre de copies de l'élément et r son échelle (r<1 car la reproduction est plus petite).

La dimension fractale

- On appelle exposant de singularité au point x_0 la limite :

$$\alpha(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln\left(\mu\left(B_{x_O}(\varepsilon)\right)\right)}{\ln(\varepsilon)}$$



La définition indique :

$$\mu\left(B_{x_O}(\varepsilon)\right) \approx C\varepsilon^{\alpha(x_0)}$$

Remarques :

- Plus la valeur de $\alpha(x_0)$ est petite, moins la mesure est régulière autour de x_0

Pour un Dirac $\alpha=0$

Pour une distribution gaussienne $\alpha=1$

La Régularité de Lipschitz

Un signal est régulier si on peut l'approximer localement par un polynôme:

On donne ici la définition de la régularité Lipschitzienne:

mesure l'erreur de l'approximation polynomiale

Caractérisation des exposants Lipschitz

Définition

Une fonction est Lipschitz d'ordre α dans un point ν si dans ce point existe un K>0 et un polynôme p_ν de degré $m=\lfloor\alpha\rfloor$ tel que

$$\forall t \in R, \left| f(t) - p_\nu(t) \right| \leq K \left| t - \nu \right|^\alpha$$

Analyse de régularité

L'analyse de Fourier permet de caractériser la régularité globale d'une fonction.

La transformée en ondelettes permet d'analyser la régularité ponctuelle d'une fonction.

Condition de Fourier

Théorème Une fonction f est bornée et uniformément Lipschitz α sur $\Re$ si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|(1+|\omega|^{\alpha})\,d\omega < +\infty$$

Il s’ agit d’ une condition de régularité globale

Exposant de HOLDER:

- Caractérise la force de la singularité localisée dans un point : plus l'exposant de Holder est grand plus la singularité est faible

Exemple: la distribution ln|x| a un exposant en 0 : $\alpha(0)=-1$

la distribution de Dirac $\alpha(0)=-1$

Exposant de HOLDER

- Règle: si un signal est caractérisé par un exposant $\alpha(x_0)$ alors l'exposant de Holder de sa dérivée est $\alpha(x_0)-1$ tandis que celui de sa primitive est $\alpha(x_0)+1$

  Réciproque !!!

- Attention: c'est valable que pour les signaux qui n'oscille pas indéfiniment autour de x_0

Caractérisation des exposants Lipschitz par des coefficients d'ondelettes

Théorème

Si f est α Lipschitz en x_0 , $\alpha \leq n$ alors

$$\left|Wf(s,x)\right| \leq A(s^{\alpha} + \left|x - x_0\right|^{\alpha})$$

Le contraire f(x) est α Lipschitz en x_0 , $0 \leq \alpha \leq n$ si

$$\left|Wf(s,x)\right| \leq As^{\alpha} \qquad \left|Wf(s,x)\right| \leq B(s^{\alpha} + \frac{\left|x - x_0\right|}{\left|\log\left|x - x_0\right|\right|}^{\alpha})$$

Analyse des singularités

- Le developement en série Taylor de *f* en x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + C\left|x - x_0\right|^{\alpha(x_0)}$$

Par l'analyse en ondelette le comportement
Dominant est celui donné par le terme :

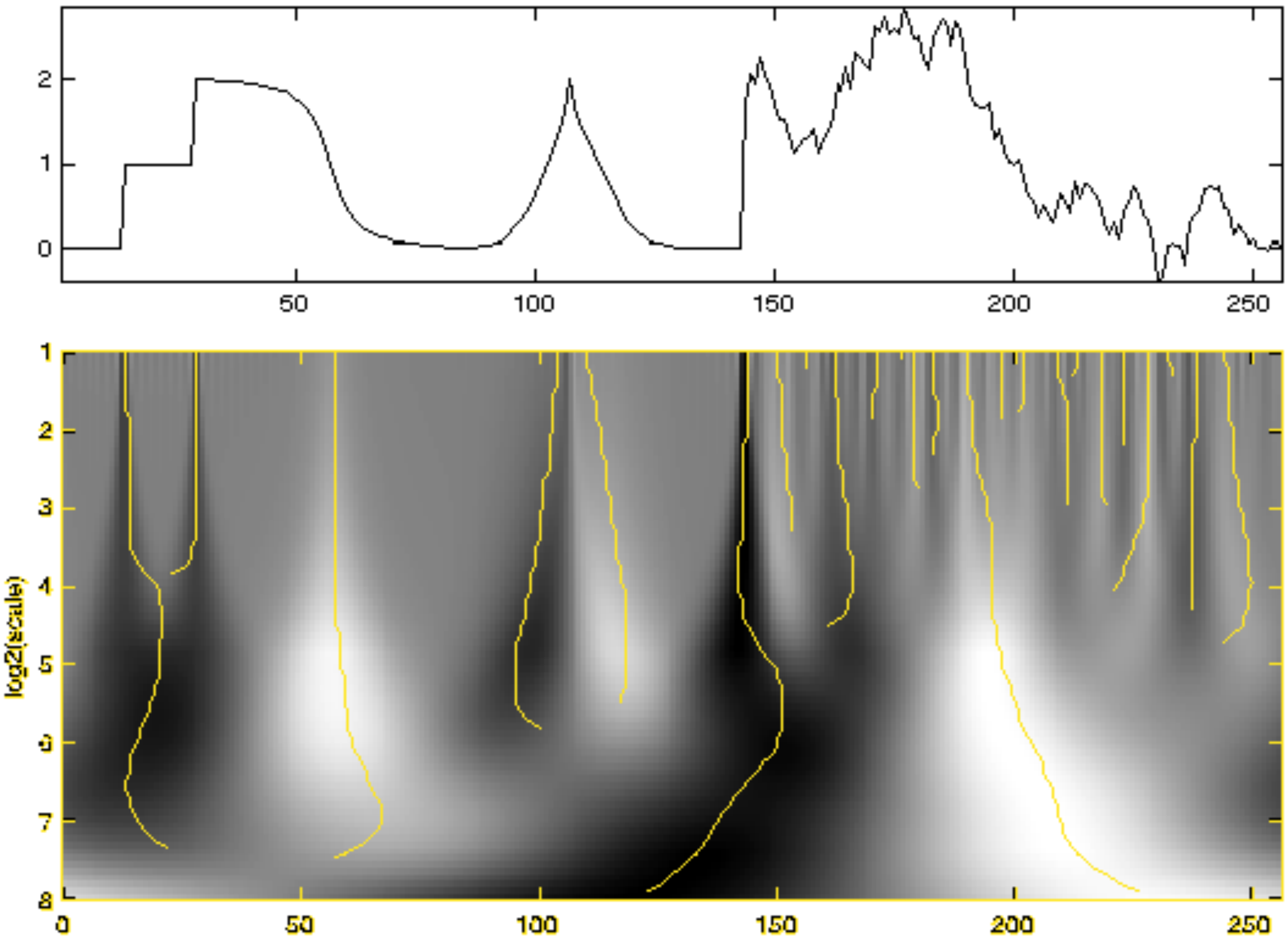
$$C\left|x - x0\right|^{\alpha(x0)}$$

Ondelettes et Singularités

- L'ondelette est orthogonale aux polynômes d'ordre strictement inférieur à N

- La WT est identiquement nulle dans tout le demi-plan espace-échelle *(b,a)*

- La WT d'un signal s dans un point $b=x_0$ se comporte en loi de puissance en fonction de l'échelle *a* avec l'exposant $\alpha(x_0)$

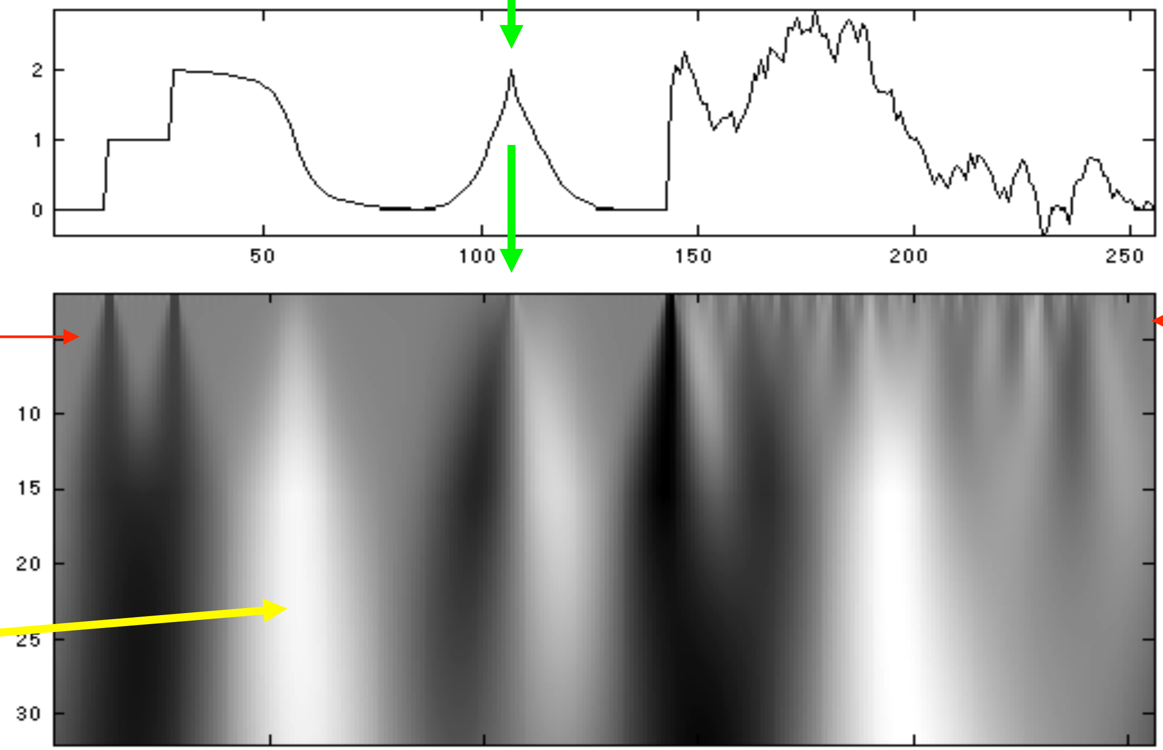


2
1
0
50
100
150
200
250
log2(scale)
1
2
3
4
5
6
7
8
0
50
100
150
200
250

Signal et sa transformée en ondelettes calculée avec la dérivée d'une gaussienne

la trace conique des singularités isolées

Les échelles les plus fines sont en haut



Les coefficients nuls correspondent à du gris moyen.
Les parties régulières sont donc en gris moyen.

Les moment d'une ondelette

- Le signal est approximé par un polynôme :

$$f(t) = p_v(t) + \varepsilon_v(t) \text{ avec } |\varepsilon_v(t)| \leq K|t-v|^{\alpha}$$

- L'ondelette a q> α moments :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)\,dt = 0 \text{ pour } 0 \leq k < q$$

- Avec le changement de variable $t' = \dfrac{t-u}{s}$

- Nous avons :

$$W_f(u,s) = W_{\varepsilon_v}(u,s)$$

Remarques :

- Il faudra donc toujours d'assurer que l'on a bien choisi *N* suffisamment grand :

$$\boxed{N > \max_{x_0}\left(h\left(x_0\right)\right)}$$

- La TO d'un signal se comportera donc en s^N autour des zones où le signal est régulier et en $s^h >> s^N$ autour des zones de singulières.

Remarques :

- A l'échelle fixée les coefficients en ondelettes seront maximum autour du point où le signal est singulier

- Les amplitudes du module des maximums de la TO diminuent pour des échelles grandes

- La régularité Lipschitz d 'une singularité peut être mesurer par la pente de $\log|Wf(s,x)|$

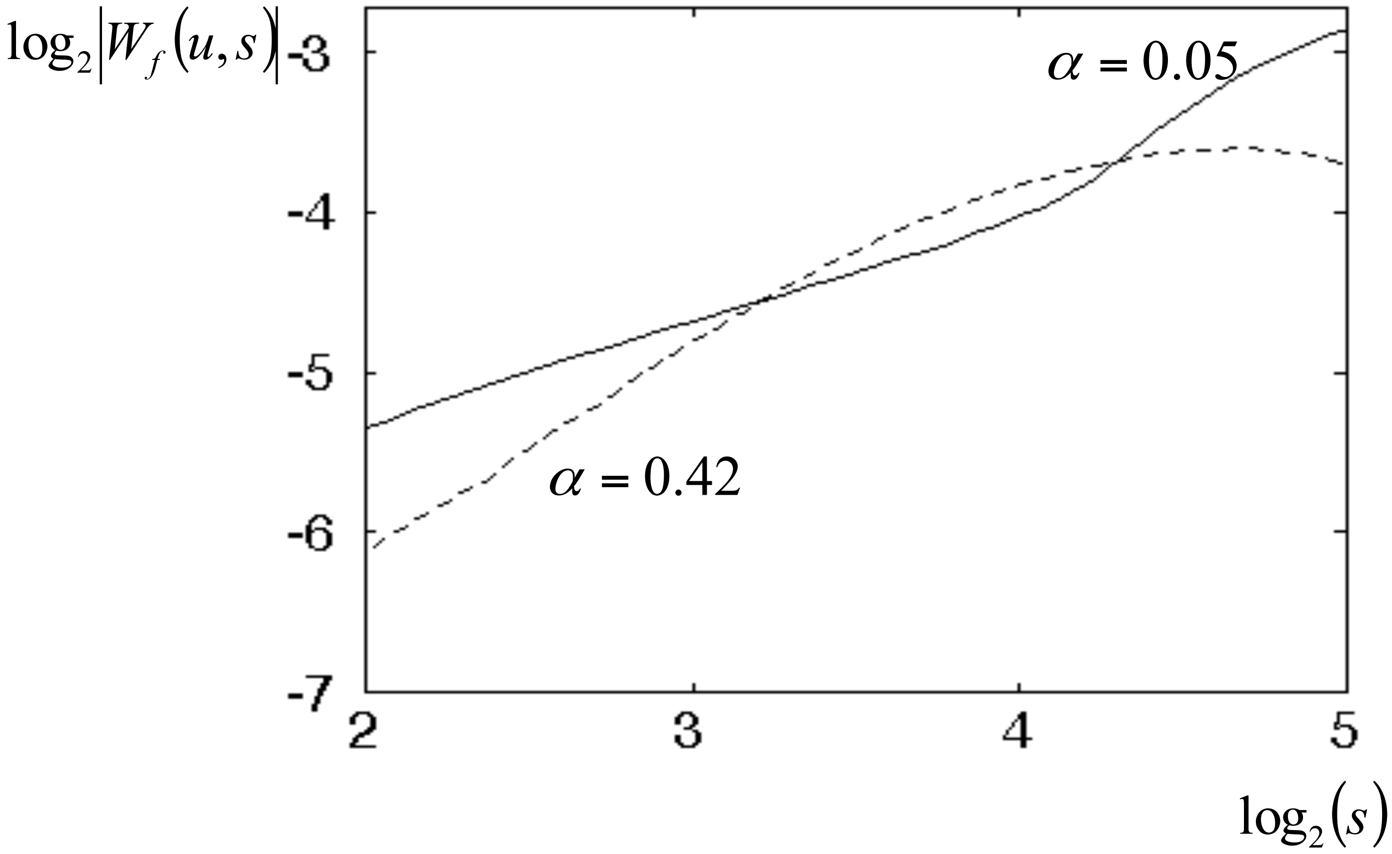
Calcul de l' exposent de Hölder

Mallat 1991

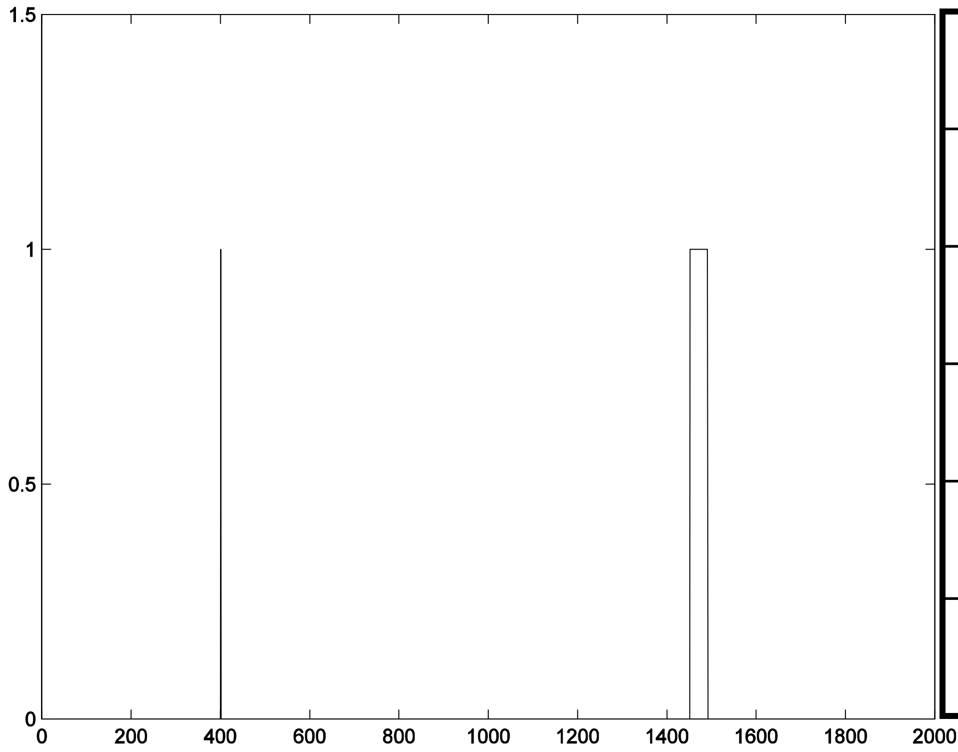
- Régression linéaire
- Descente du gradient Mallat
- Régression médiane Hwang
- Algorithmes génétiques

$$F(K,\alpha,\sigma)=\sum_{echelle\ \mathrm{j}}\left(\log_2\left|W_f(s,u)\right|-\log_2(K)-j-((\alpha-1)/2)\log_2\left(\sigma^2+2^{2j}\right)\right)^2$$

Régression linéaire



Les Algorithmes Génetiques



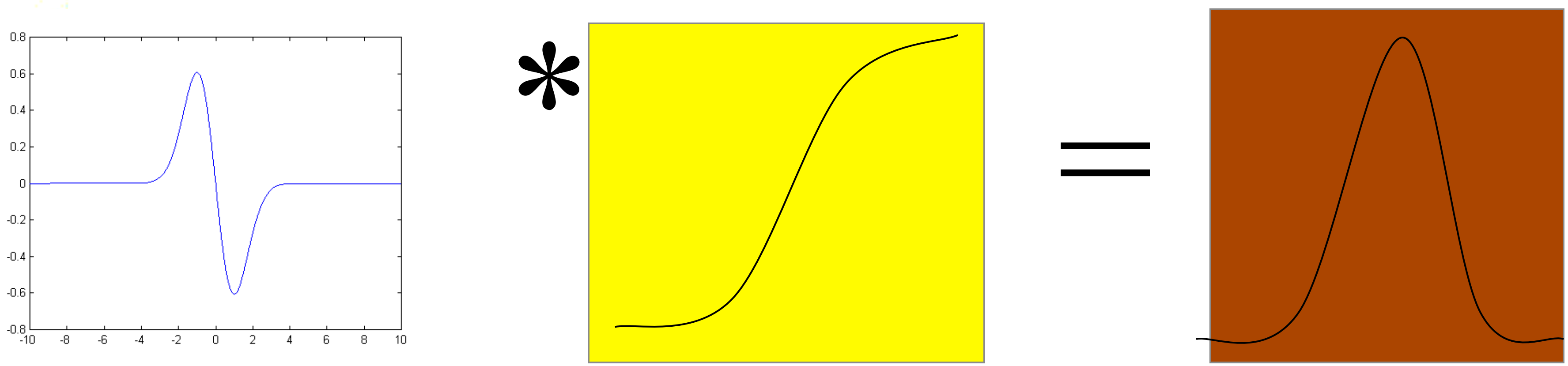
Singularité	D	S1	S2
Théorie	-1	0.	0
M. graphique	0.5		
M. Descente	0.26		
R. médiane	-0.5		
A.G	-0.5	**-0.03**	**-0.04**

Remarque: Influence de l'ondelette

•Ondelettes dérivées de fonction lissante mettent en évidence les zéros-crossing (point de singularité)

•Analyse multi échelle permet de choisir les zeros-crossing significatifs

$$(d\theta /dx) * f \quad = \theta * (df / dx)$$



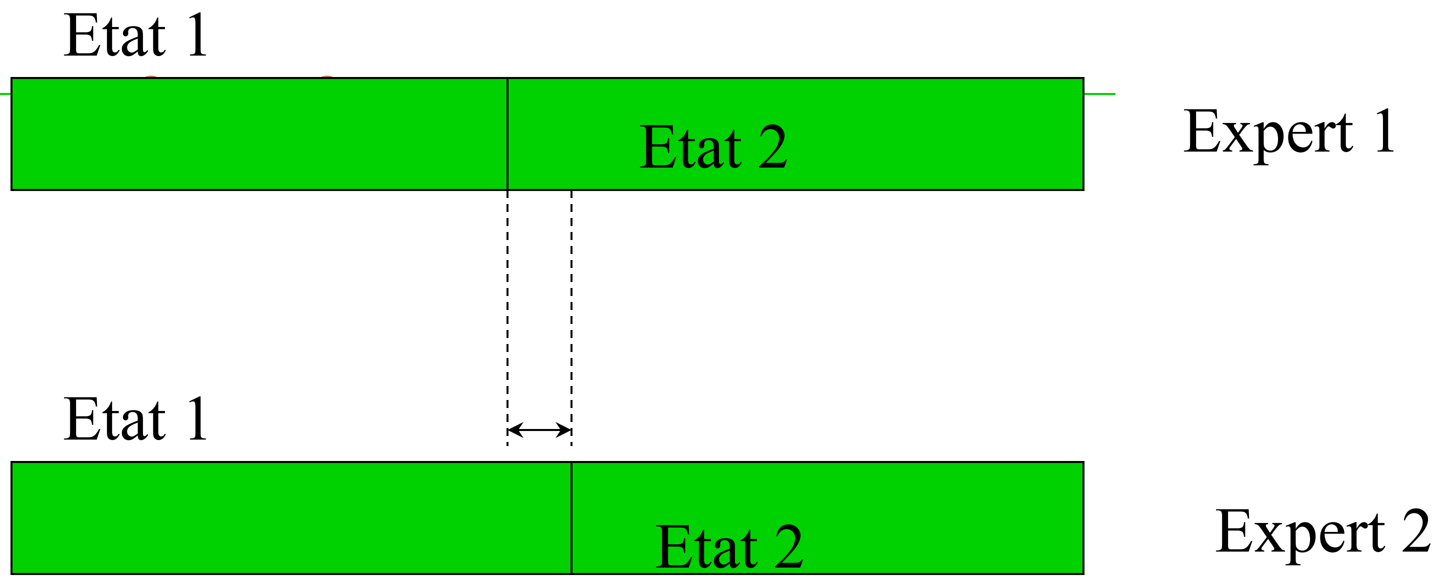
Critiques

- Problème de reconstruction
- Si la fonction analysée est une fonction en escalier la conjecture de Mallat devient correcte

Applications

Classification

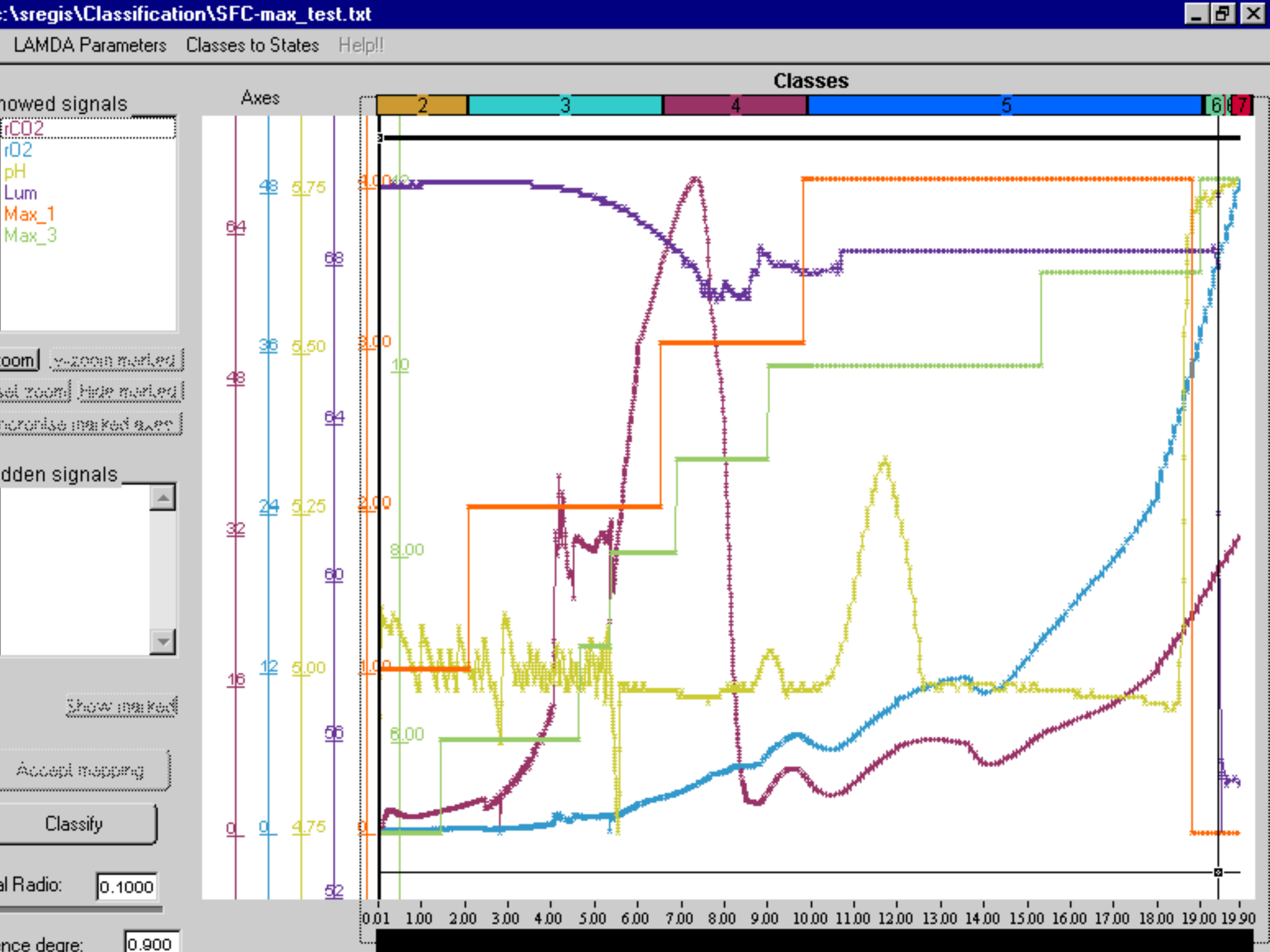
Transition entre états



Incertitude: changement non discret

Manque d'attributs

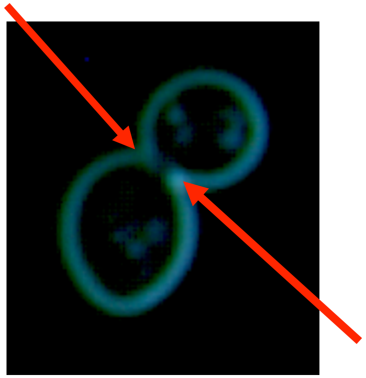
Idée de base: utiliser les points de singularité comme frontière entre les états



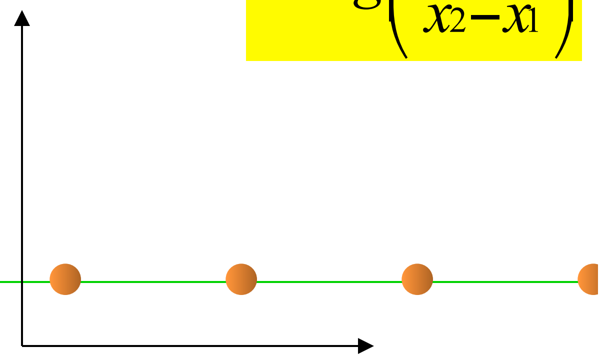
:\sregis\Classification\SFC-max_test.txt
LAMDA Parameters
Classes to States
Help!!
howed signals
rCO2
rO2
pH
Lum
Max_1
Max_3
dden signals
Classify
al Radio:
0.1000
nce degre:
0.900
Axes
Classes
2
3
4
5
6
7
0.01
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
10.00
11.00
12.00
13.00
14.00
15.00
16.00
17.00
18.00
19.00
19.90

Analyse d’images

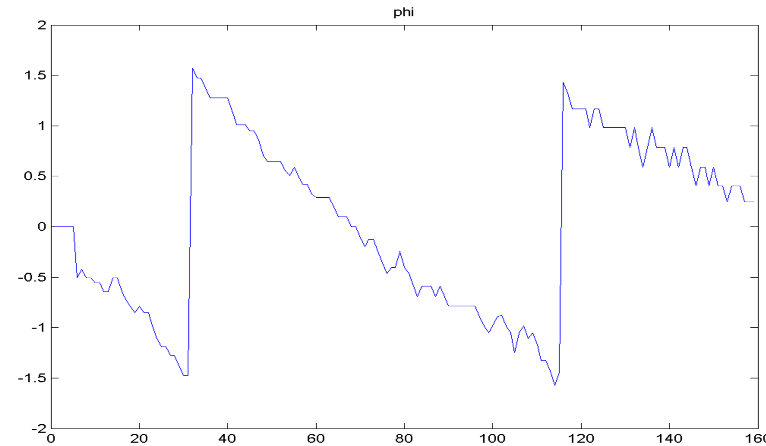
Détection des points anguleux



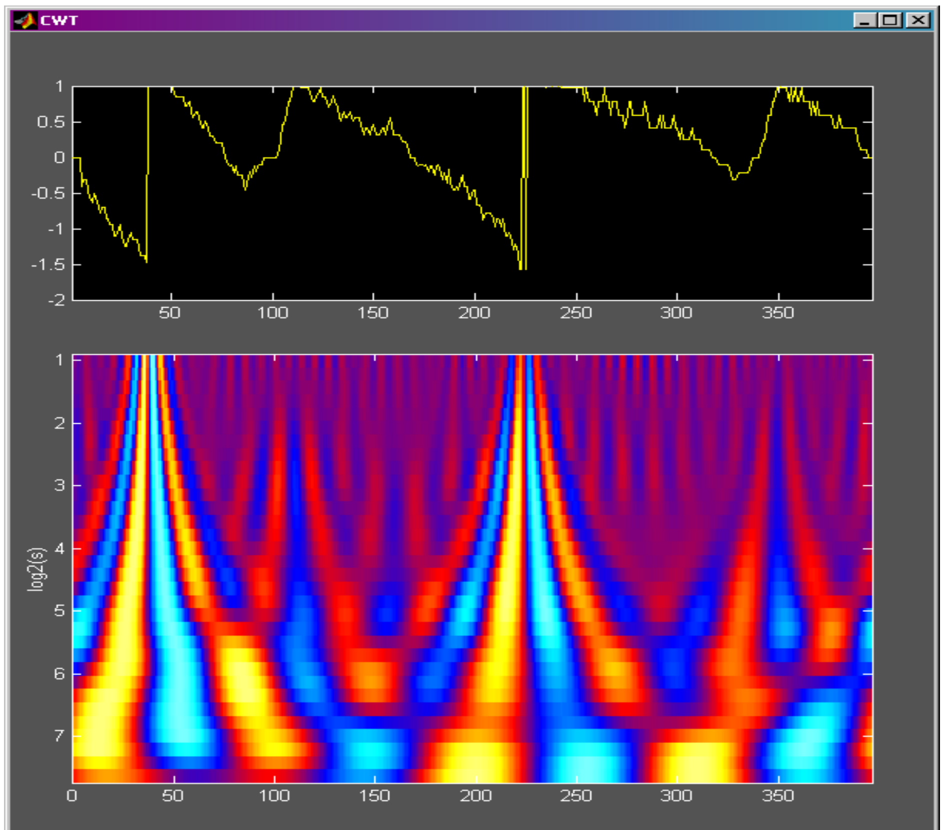
Orientation $arctg\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$



pixel

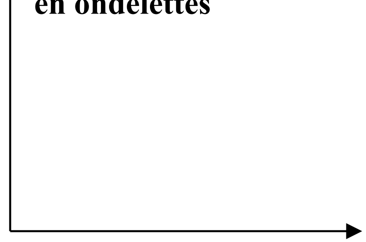


Orientation d’une cellule seule



Maximums à différentes échelles

Amplitude des coefficients en ondelettes



pixel

Détection des fautes

Localisation et détection des fautes