Cours EDSYS 2005

Transformée de Fourier

Andrei Doncescu

DISCO LAAS CNRS

Rappel

- Avant Fourier

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

- Fourier

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + ..$$

Remarque

1873 Dubois-Reymond construisit une fonction continue périodique qui diverge dans un point

Le cadre fonctionnel $L^2(R)$

- La construction d’une base orthonormée qui forment une suite de carré sommable
- La série de Fourier de *f* converge vers *f*, au sens de la <u>*valeur quadratique moyenne*</u>

TRANSFORMATION DE FOURIER

Définition

La transformation de Fourier permet de décrire dans l'espace des fréquences un signal dont on connaît l'histoire au cours du temps, et réciproquement.

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

DUALITE TEMPS-FREQUENCES

y = f (t) <=> Y =F(f)

F(f) est appelée la transformée de Fourier de f(t) et sa représentation, le spectre en fréquences.

On appelle densité spectrale d’énergie $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$

Remarque : On utilise les lettres minuscules pour décrire l'histoire du signal au cours du temps et les lettres majuscules pour le décrire dans le domaine des fréquences ou domaine spectral.

Propriétés de la Transformée de Fourier

L' Intégrale de Fourier

$$F(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)\,dt \qquad (f\in L^1):$$

Mesure '' la quantité'' d'oscillations à la fréquence ω qui est présente en f. Si $f\in L^1$ cette intégrale converge

$$|\hat{f}(\omega)|\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

Donc, la Transformée de Fourier est bornée et continue.

Notion de système

- Un système fait subir une transformation à un signal d'entrée x(t) et délivre un signal de sortie y(t).

Filtre

- On appelle filtre, d'entrée x(t) et sortie y(t), un système défini par:

$$y(t)=\int_R x(u)h(t-u)du = \int_R x(t-u)h(u)du$$

- Réponse impulsionnelle h(t)

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

- Réponse indicielle *u(t)*
- Réponse en fréquence

$$Y(f)=X(f)*H(f)$$

Valeurs et Vecteurs Propres

- Soit $T : V \to V$ un opérateur linéaire sur un espace vectoriel *V* sur un corp *K*. Un scalaire $\lambda \in K$ est appelé valeur propre de *T* s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ pour lequel :

$$T(v) = \lambda v$$

- *Remarque* *kv* est aussi un vecteur propre
- *Exemple* : l'opérateur différentiel sur l'espace vectoriel V.

  $D(e^{5t}) = 5e^{5t}$

Transformée de Fourier

Fonction de Transfert:

Les exponentielles complexes $e^{j\omega t}$ sont les vecteurs propres des opérateurs de convolution:

$$Le^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega(t-u)}du = \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}$$

Les valeurs propres

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j\omega u}du$$

est la Transformée de Fourier de h à la fréquence ω.

Donc nous voudrions décomposer une fonction dans une somme de vecteurs propres

La Transformée de Fourier

Filtrage linéaire invariant en temps

L'invariance à la translation dans le domaine temps d'un opérateur L
Signifie que si l'entrée $f(t)$ est retardée de τ

$$\tau, f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

la sortie a aussi un retard $g(t) = Lf(t) \quad \Rightarrow \quad g(t-\tau) = Lf_\tau(t)$

Réponse impulsionelle

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta_u(t)du$$

Si $h(t) = L\delta(t)$ nous avons :

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(t-u)du = (f * h)(t)$$

Propriétés

- Réciprocité $f(t) \rightarrow F(f) \quad F(f) \rightarrow f(t) \quad f(t) \Leftrightarrow F(f)$
- Linéarité $\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \Leftrightarrow \alpha\, F(f\,) + \beta\, G(f\,)$
- Dérivation $\dfrac{d\, f(t)}{d\, t} \Leftrightarrow j2\pi f\, F(f)$
- Intégration $\int f(t)dt \Leftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi\, f} F(f\,)$
- Décalage temporel $f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{j2\pi f t} F(f\,)$

- Décalage fréquentiel $F(f-f_0) \Leftrightarrow e^{j2\pi ft} F(f)$

- Conjugaison $f(t) \Leftrightarrow F(f)$ $f(-t) \Leftrightarrow F^*(f)$

- Symétrie $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

Fourier

La transformée de Fourier inverse $(\hat{f}, f \in L^1)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{h}^*(\omega) d\omega$$

Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{f}(\omega) |^2 d\omega$$

Et,

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

Relation d' incertitude de Heisenberg

- **Le principe: Le produit de la variance de x pour $|f|^2$ et de la variance de x pour $|F|^2$ est supérieur ou égal à** $\frac{1}{16\pi^2}$

- **La largeur du paquet d'énergie d'un signal dans le temps est inversement proportionnelle à sa largeur dans l'espace des fréquences. On ne peut pas connaître avec une égale précision la position dans le temps et en fréquences d'un signal.**

La transformée de Fourier

Exemple:

Soit la fonction indicateur $f = \mathbf{1}_{[-T,T]}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

Cette fonction n'est pas intégrable !!

Une fonction f est bornée et p fois dérivable avec les dérivées bornées si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|\,(1+|\omega|^{p})\,d\omega < +\infty$$

La Variation Totale

- Si *f* est dérivable, la variation totale est :

$$\|f\|_v = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,dt$$

- <u>*Exemple:*</u>

  f(t)=exp(-t ^{2}*)*

$$\|f\|_v = 2$$

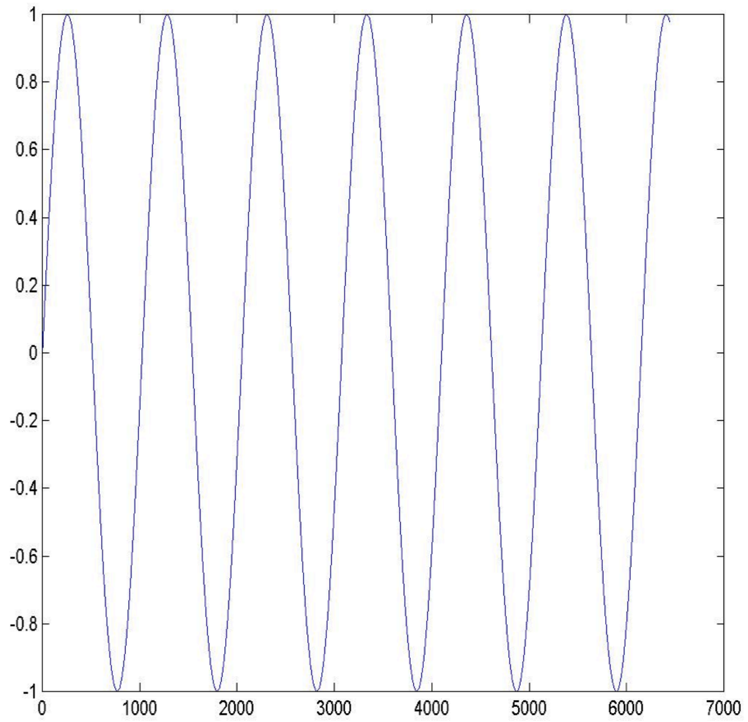
- *Relation avec la Transformée de Fourier*

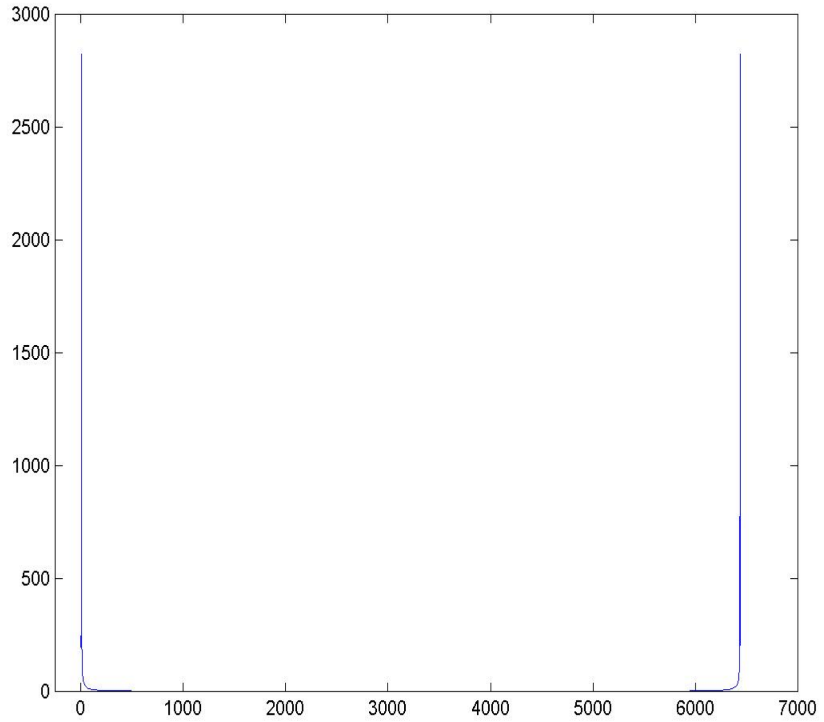
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{\|f\|_v}{|\omega|}$$

Exemple:

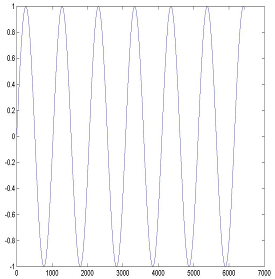
Signal

Transformée de Fourier de ce signal

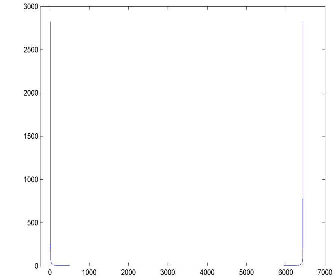


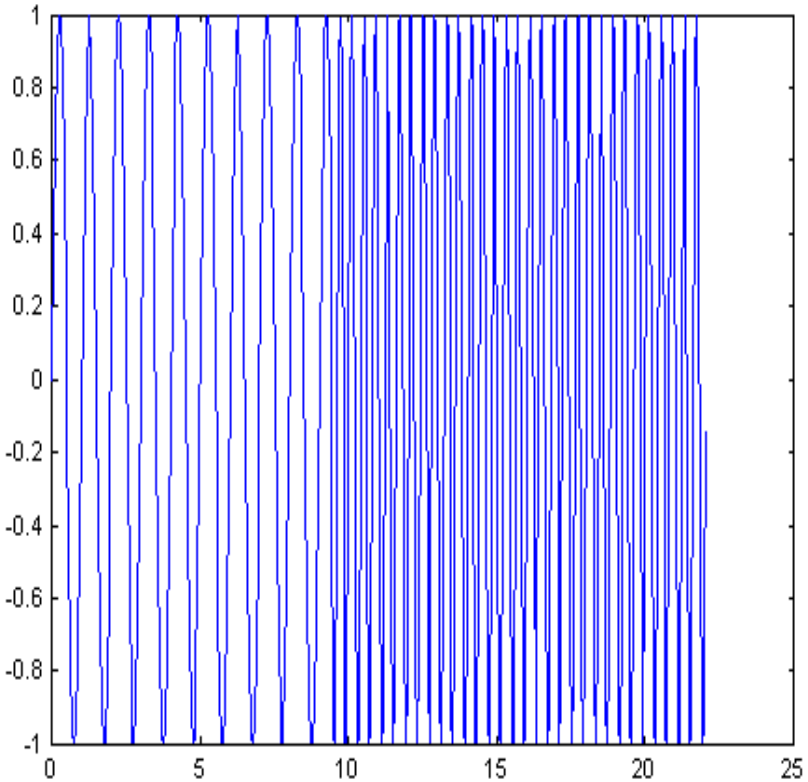


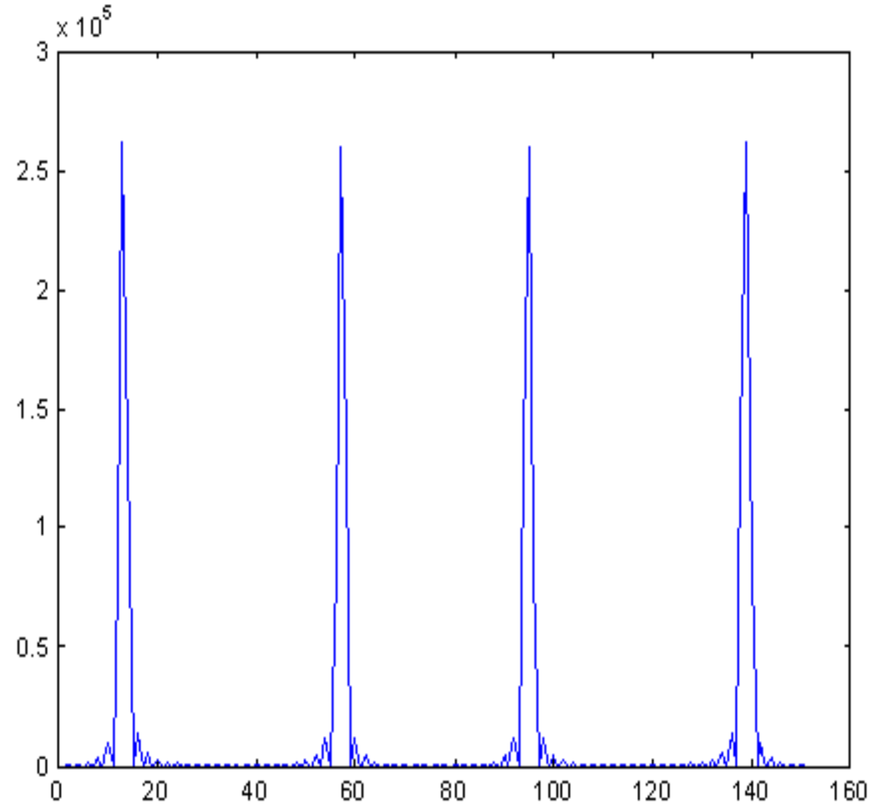
Signal



Transformée de Fourier de ce signal







La transformée de Fourier à fenêtre glissante

Si l'on a un signal f, et une fenêtre h (une gaussienne par exemple)

Soit $h_u(x)=h(x-u)$

La transformée de Fourier par fenêtre glissante est donnée par l'ensemble des coefficients:

$TFFG(f)u_0=TF(f.h_{u0})$

Inconvénients

- Le défaut de cette transformée est d ’ avoir une fenêtre indépendante de la fréquence que l’ on calcule.

Time Frequency Analysis

The Short Time Fourier Transform

$$STFT_x^{\omega}(t,f)=\int_t x(t)\omega^*(t-t')\,e^{-j2\pi ft}\,dt$$

x(t) is the signal
ω(t) is the window function
t is the time period

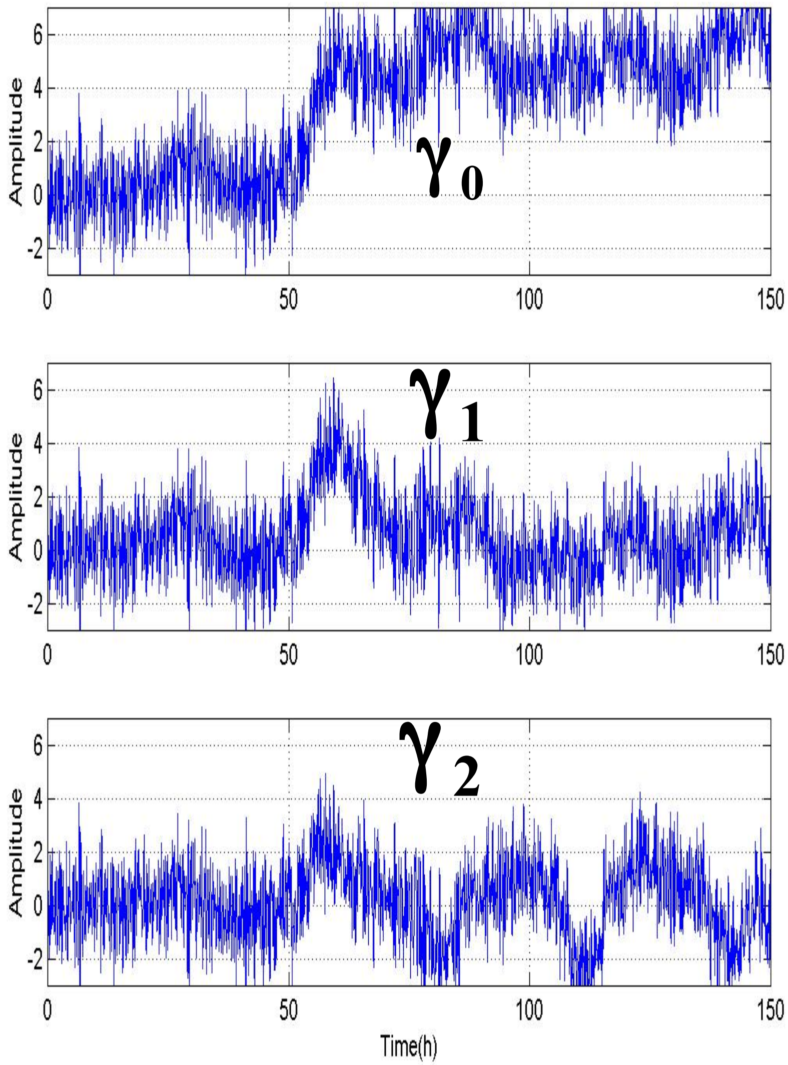
A short data window is used so that the full-analysed signal is partitioned into segments each of them will be analysed separately

To obtain a good localization in time we have chosen a short window

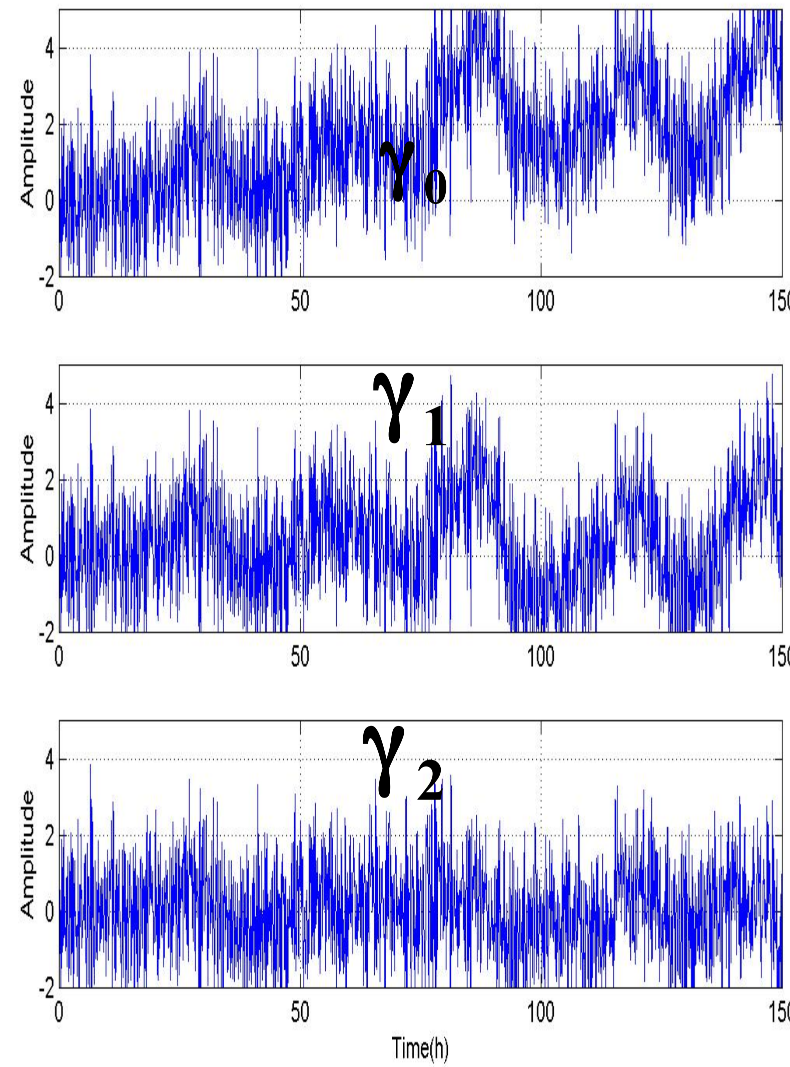
In STFT the window function chosen remained the same width over the entire calculation process

Colored Noise

Variation de μ_m : 0.38 à 0.40 h^{-1}



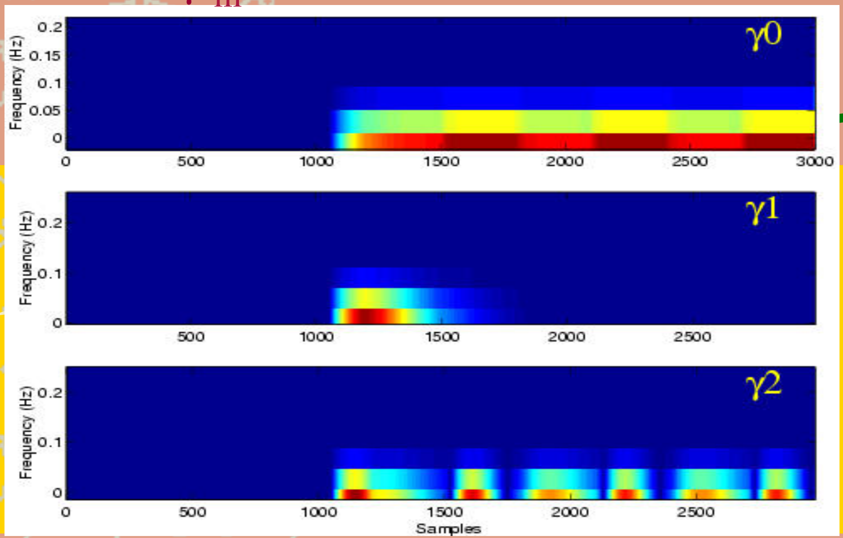
Variation de K_s : 5 à 4.7 g/l



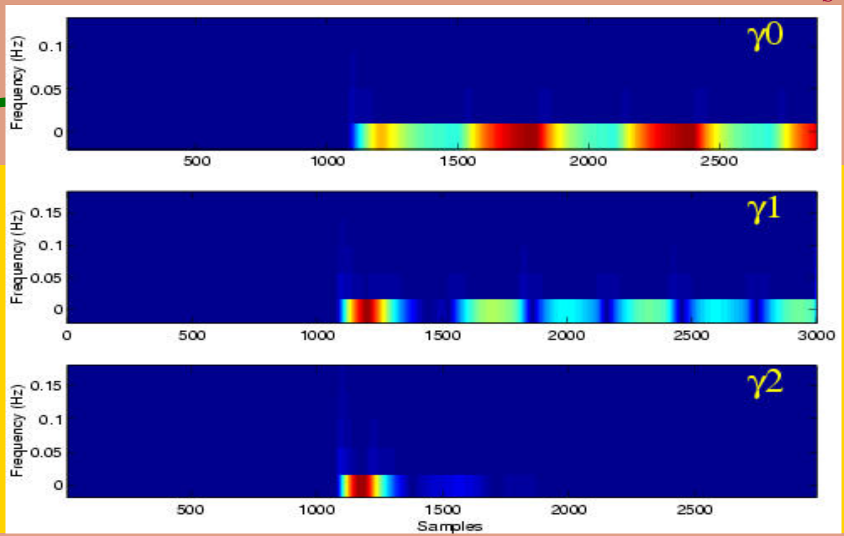
Residual Evaluation using TFA

Noise free case

Fault in μ_m



Fault in K_s



Coloured noise corrupted residuals