

Traitement du Signal Numérique pour Systèmes Embarqués

Andrei Doncescu
andrei.doncescu@laas.fr

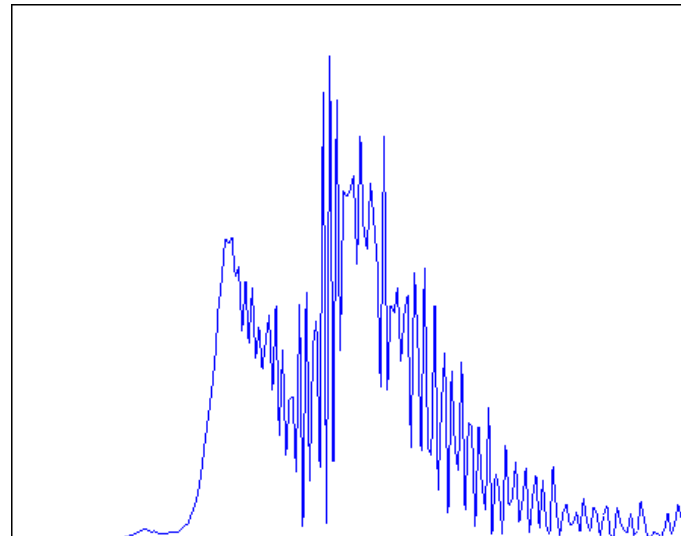


CLASSEMENT DES SIGNAUX :

Signal Analogique



- C'est un signal dont l'amplitude peut prendre toutes les valeurs entre un minimum et un maximum (disons: -10 volts à $+10$ volts, par exemple).
- Ce signal est continu avec le temps: on peut le dessiner d'un trait de crayon se déplaçant verticalement (axe des y) sur une feuille de papier avançant régulièrement horizontalement (axe des x).



+ CLASSEMENT DES SIGNAUX

Signaux Analogiques

- **Les signaux périodiques** $x(t) = x(t+kT)$
 - Le signal sinusoidal est le plus représentatif de ces signaux périodiques:
 - $x(t) = A \sin(2\pi t/T + a) = A \sin(\omega t + a)$ ou $\omega = 2\pi /T = 2\pi f$

- **Les signaux à énergie finie**

Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale suivante est bornée :

$$\int |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Ces signaux sont nommés de carré intégrable (sommable), leur puissance moyenne est nulle.
- Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle



La fonction sinus/cosinus

- $\sin(t)$ est périodique de période 2π
- $\sin(2\pi t)$ est périodique de période 1



■ Signaux de durée finie

- Signaux de durée limitée ou "support borné" : $x(t) = 0 \quad t \notin T$

■ Signaux pairs et impairs

Un signal est pair si $x(t) = x(-t)$ exemple : $\cos(\omega t)$

Un signal est impair si $x(t) = -x(-t)$ exemple : $\sin(\omega t)$

Remarque Tout signal réel peut être décomposé : une partie "paire" et une partie "impaire".

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

■ Signaux causals :

- Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps $x(t) = 0 \quad t < 0$. On peut le rendre causal si $* u(t)$

+ Signaux numériques

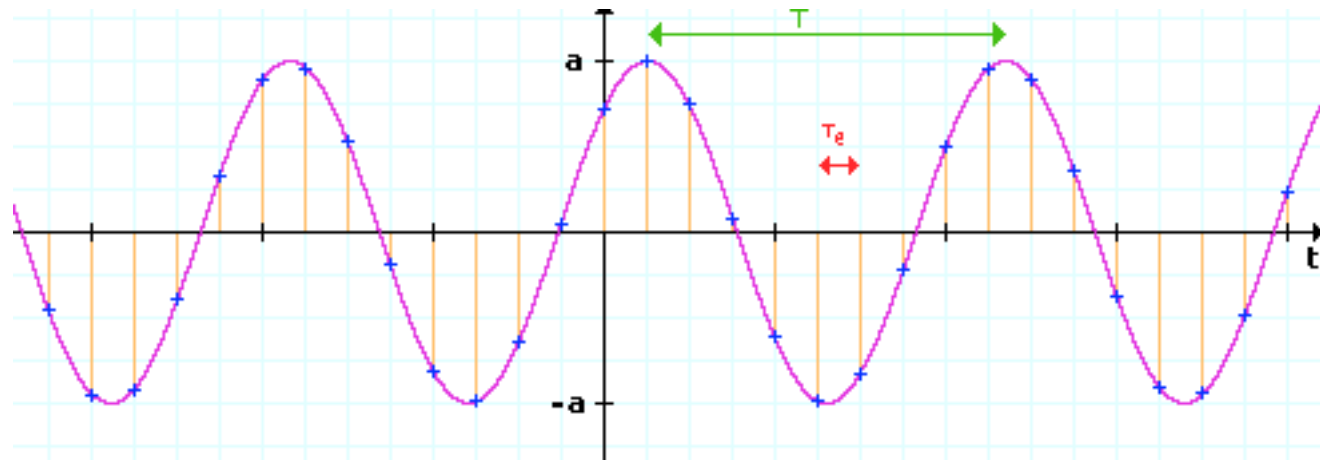
- Un signal numérique est un signal discret dont l'amplitude a été quantifiée

≠

signaux à temps discret

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$X(k) = A \sin[2\pi/N (k + k_0)]$$

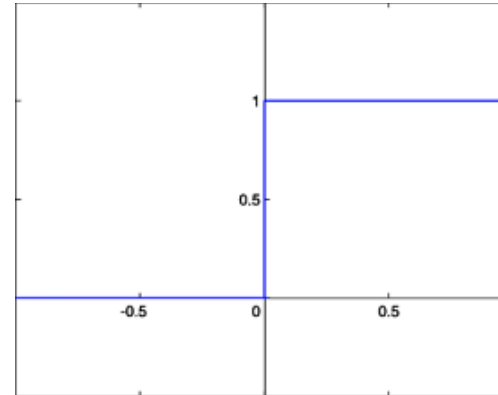


+ Classement des signaux

- Déterministes : **fonctions mathématiques réelles ou complexes**
- Stationnaires : **probabilités**
- Non-stationnaires : **transformée en ondelettes, transformations fractales**

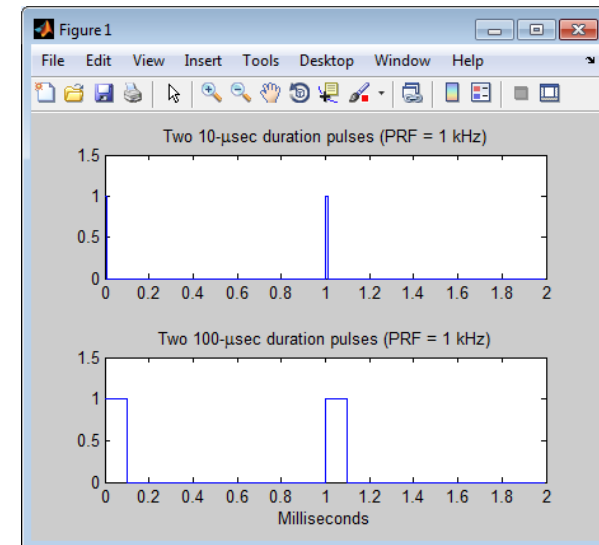
+ Quelques signaux déterministes

■ Fonction de Heaviside $u(t)$



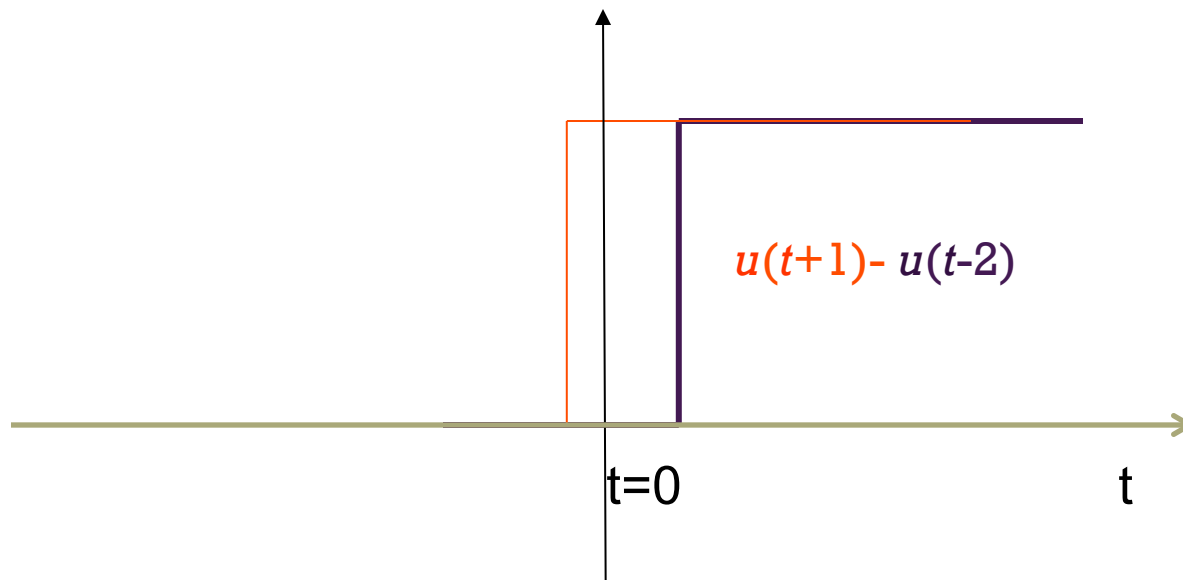
■ La fonction signe $2u(t)-1$

■ La fonction porte $rect(t)=u(t+T/2)-u(t-T/2)$



Représenter :

■ $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$

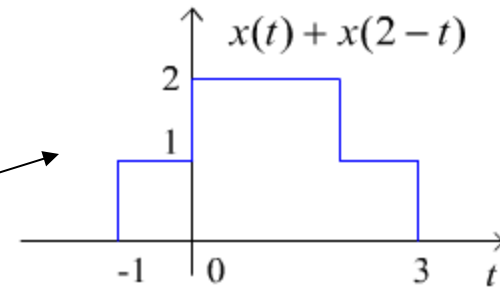
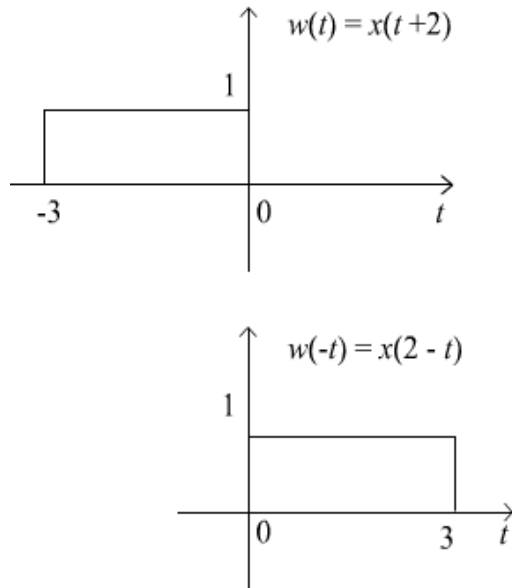
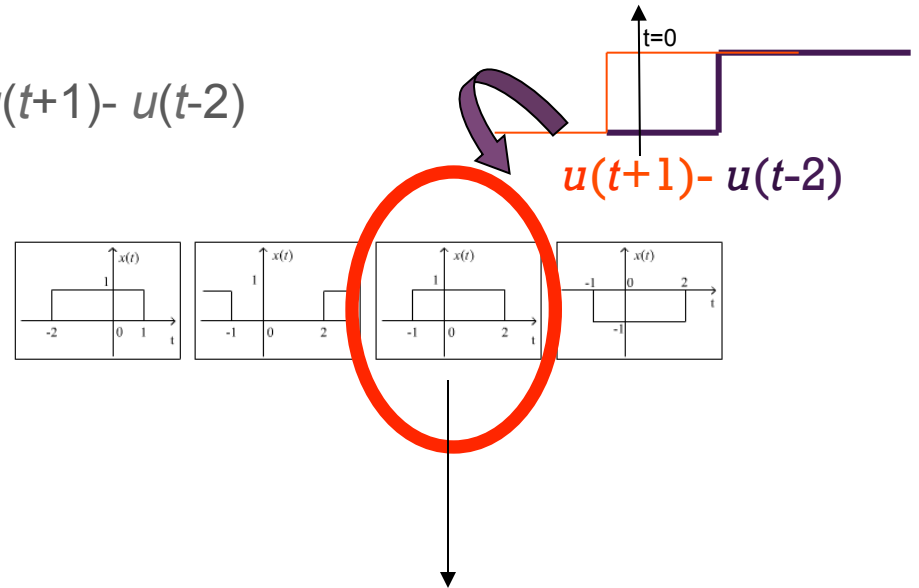


Décalage Temporel : Time Shifting

■ Calculer $x(t) + x(2-t)$, where $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$

■ $x(t)$ est :

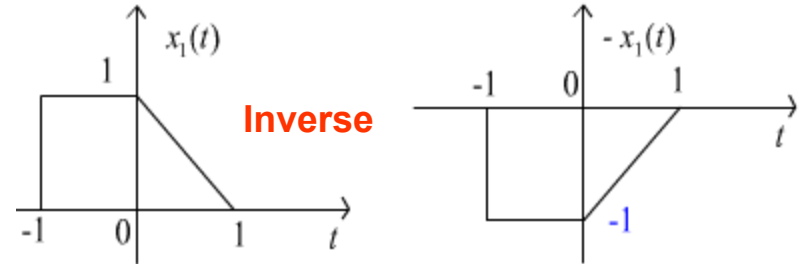
■ $x(2-t)$: $\rightarrow 1) y(t)=x[-(t-2)]$;



Addition temporel: $x(t) + x(2-t)$

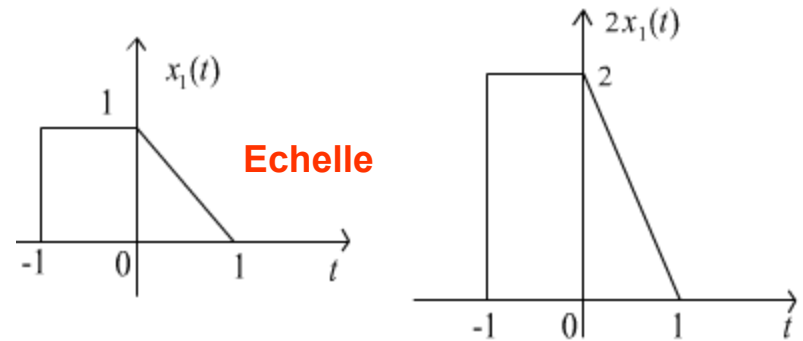
Opérations sur l'Amplitude

$$y(t) = Ax(t) + B$$



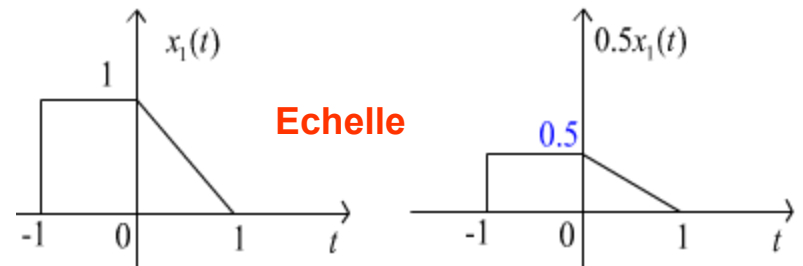
$B > 0 \rightarrow$ translation verticale +

$B < 0 \rightarrow$ translation verticale -



$|A| > 1 \rightarrow$ Gain

$|A| < 1 \rightarrow$ Attenuation



$A > 0 \rightarrow$ Pas inverse

$A < 0 \rightarrow$ Inverse

+ Signaux périodiques

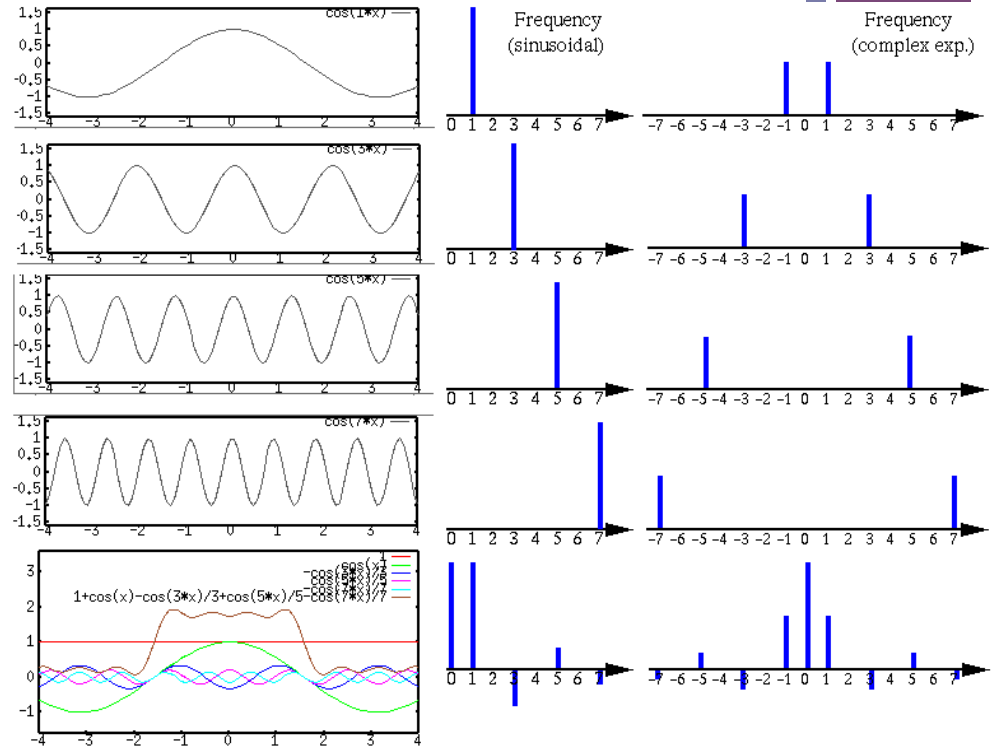
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2\pi n \nu_0 t) + b_n \sin(2\pi n \nu_0 t)\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(2\pi n \nu_0 t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(2\pi n \nu_0 t) \cdot dt$$

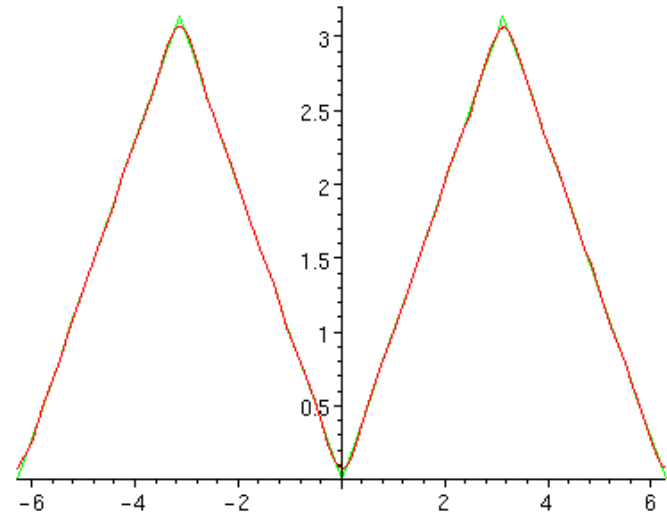
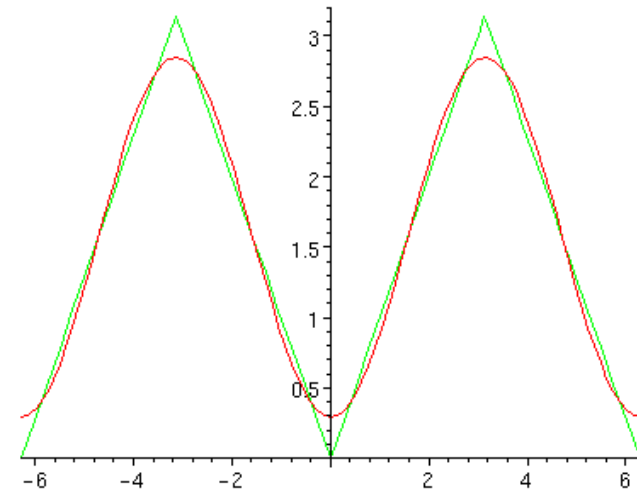
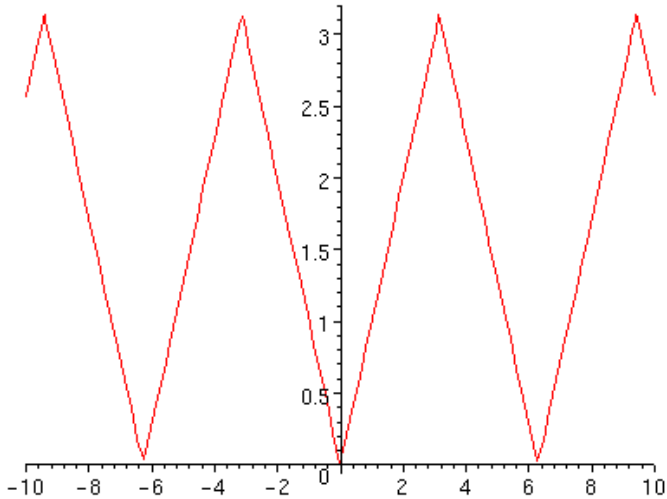
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \nu_0 t}$$

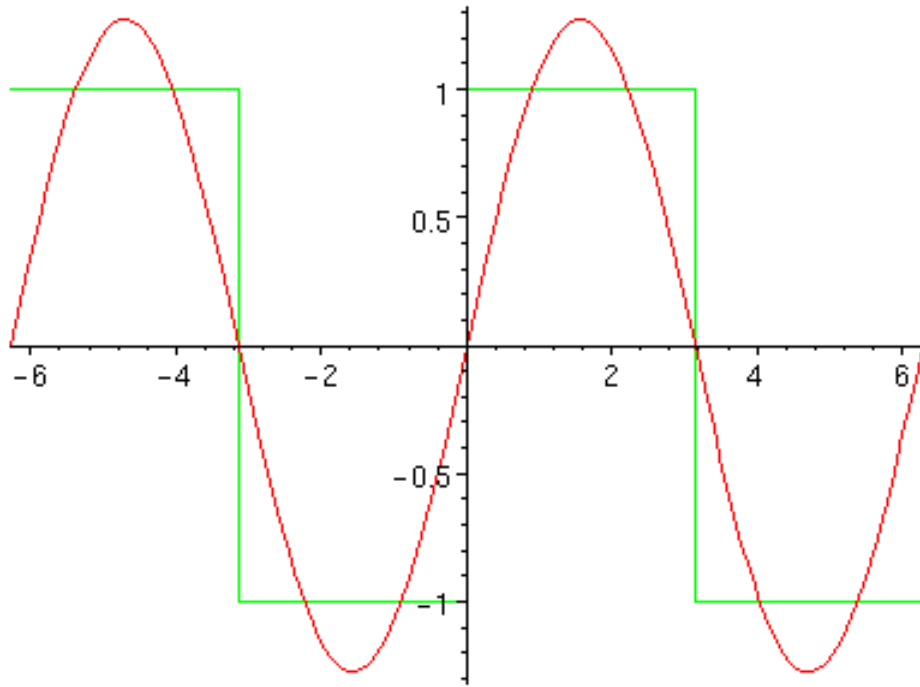
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-j2\pi n \nu_0 t} \cdot dt$$



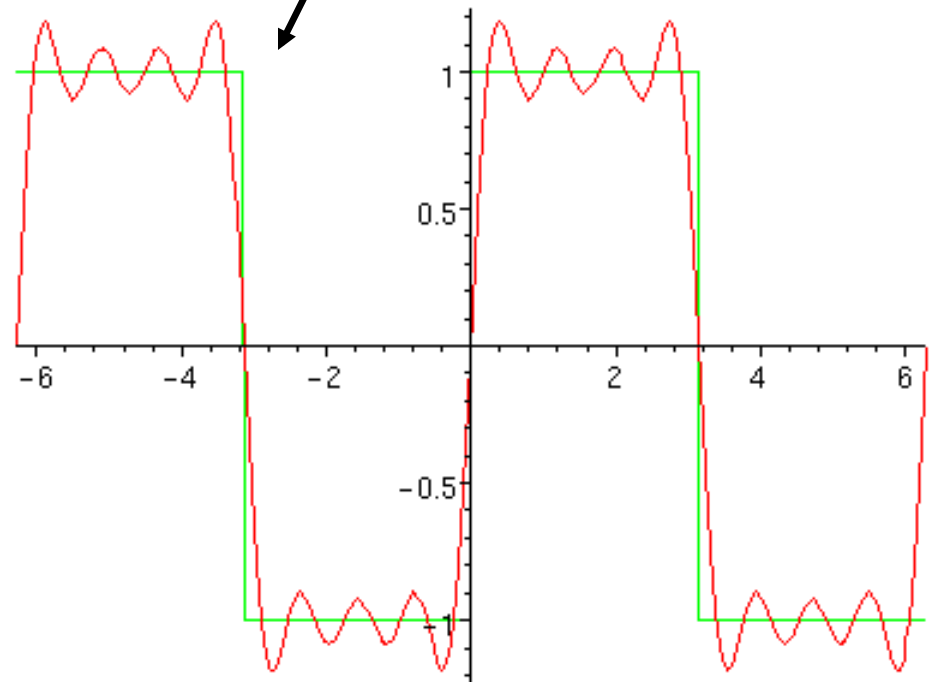
$f_o = 1/T$ est la fondamentale

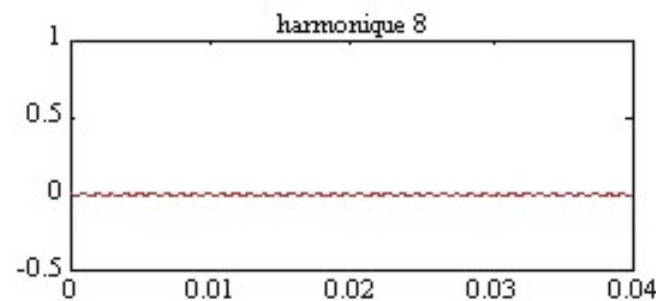
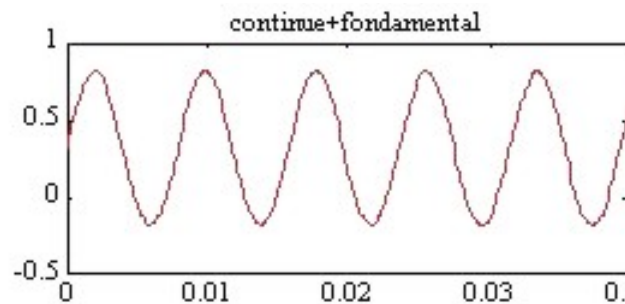
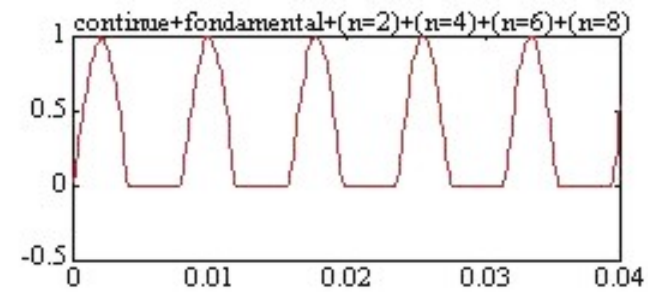
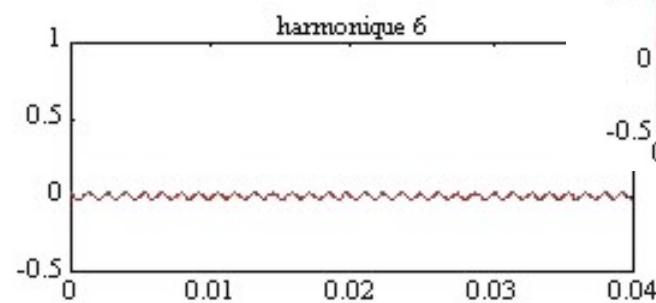
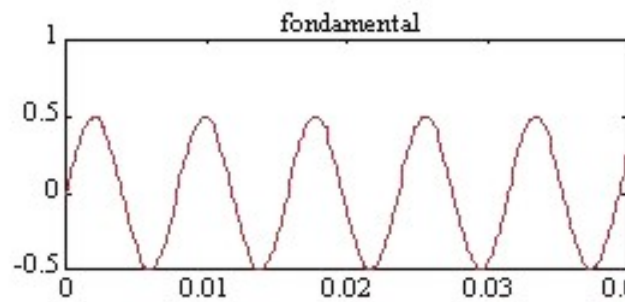
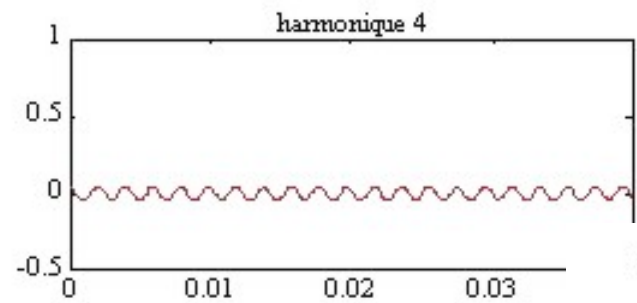
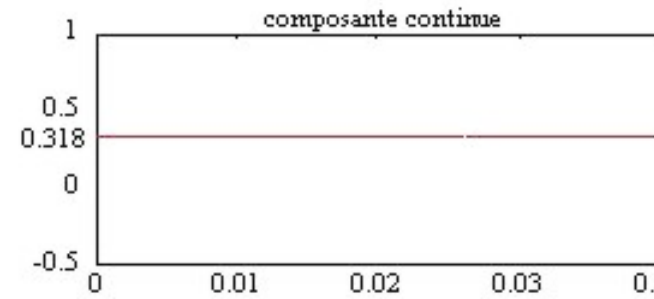
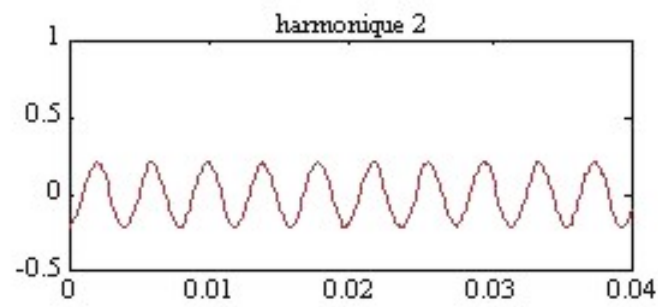
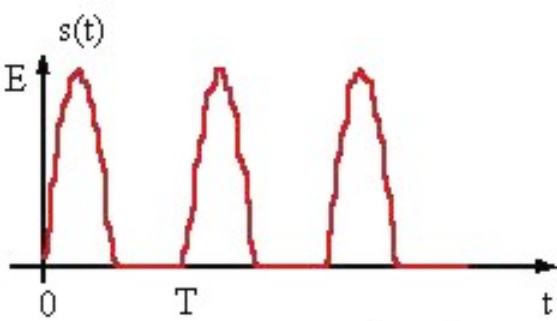
Synthèse d' un signal triangulaire à partir de sa série Fourier





Effet Gibbs







Convolution

■ Définition:

On appelle fonction de convolution du signal $s_1(t)$ et $s_2(t)$ l'intégrale

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau$$

Théorème de convolution

La TF du produit de convolution est le produit algébrique
Des TF des signaux du produit

$$S(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$$

+ Propriétés du produit de convolution

- Commutativité

- Associativité

- Distributivité

- Différentiabilité $\frac{d}{dt}(f * h)(t) = \frac{df}{dt} * h(t) = f * \frac{dh}{dt}(t)$

- Convolution avec un Dirac

+ *Algorithme de Convolution*

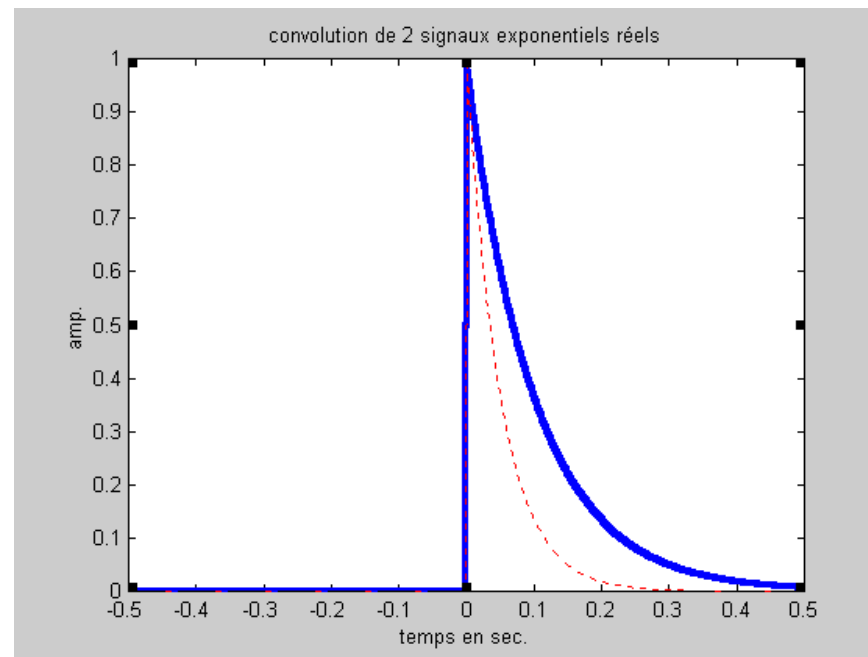
- *Le signal $y(l)$ est inversé pour obtenir $y(-l)$*
- *Le signal $y(-l)$ est décalé d' une certaine quantité k*
- *Le produit $x(l)y(k-l)$ est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
- *Les valeurs ainsi obtenues sont additionnées*



convolution en temps

- exemple d'application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad y(t) = e^{-2at}u(t)$$

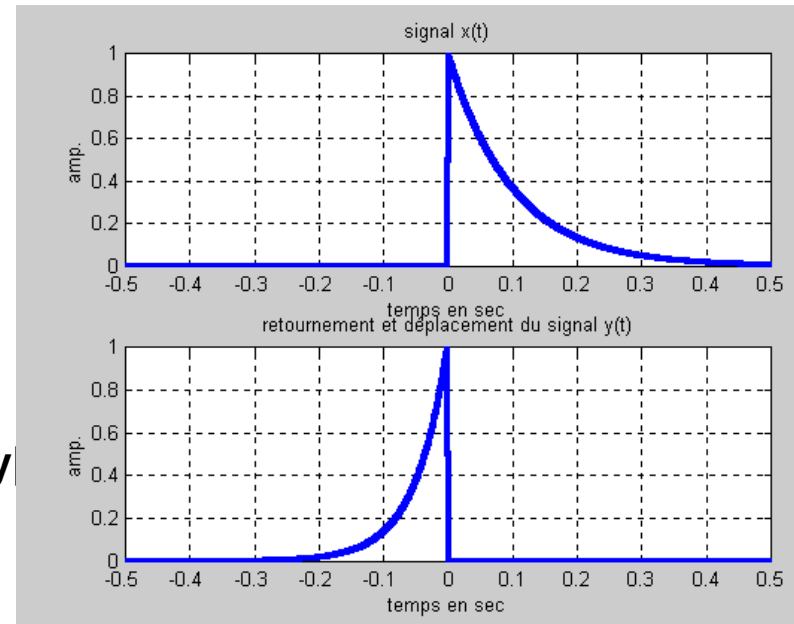




- convolution en temps
- - exemple d'application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$:

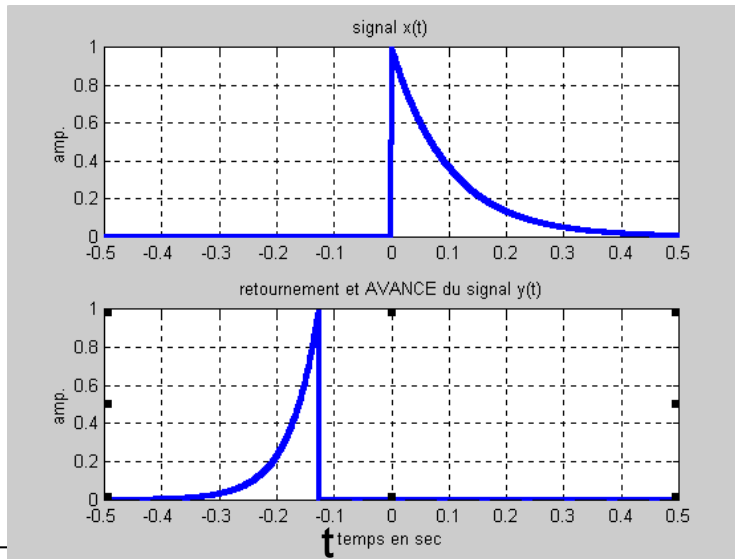
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad y(t) = e^{-2at}u(t)$$

- Principe de la méthode
- On garde le premier signal $x(t')$
- On retourne le second signal $y(t')$ pour obtenir y

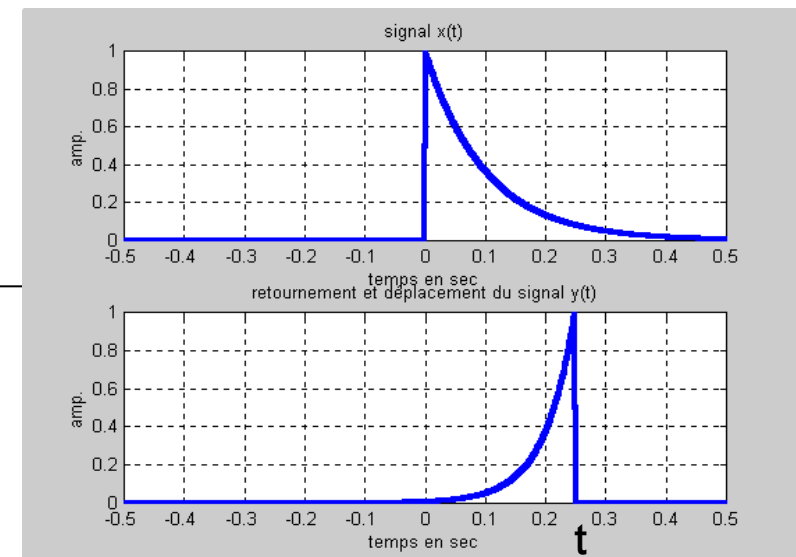




- convolution en temps
- - exemple d'application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$:

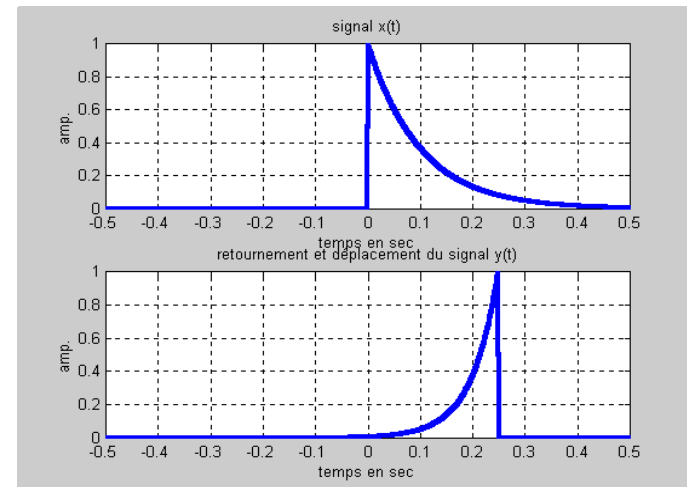


$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad y(t) = e^{-2at}u(t)$$



- Principe de la méthode
- On garde le premier signal $x(t')$
- On retourne le second signal $y(t')$ pour obtenir $y[-t']$

- convolution en temps
- - méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$:



- Principe de la méthode, suite

- On fait le produit $x(t') \cdot y(t-t')$ là où les 2 signaux sont définis

- On calcule l'aire commune des 2 signaux

$$t < 0, x(t) * y(t) = 0 \quad t > 0, x(t) * y(t) = \int_0^t e^{-at'} e^{-2a(t-t')} dt' = \frac{1}{a} e^{-at} - \frac{1}{a} e^{-2at}$$

- On recommence pour t variant sur \mathbb{R} et on obtient la convolution $x(t) * y(t)$

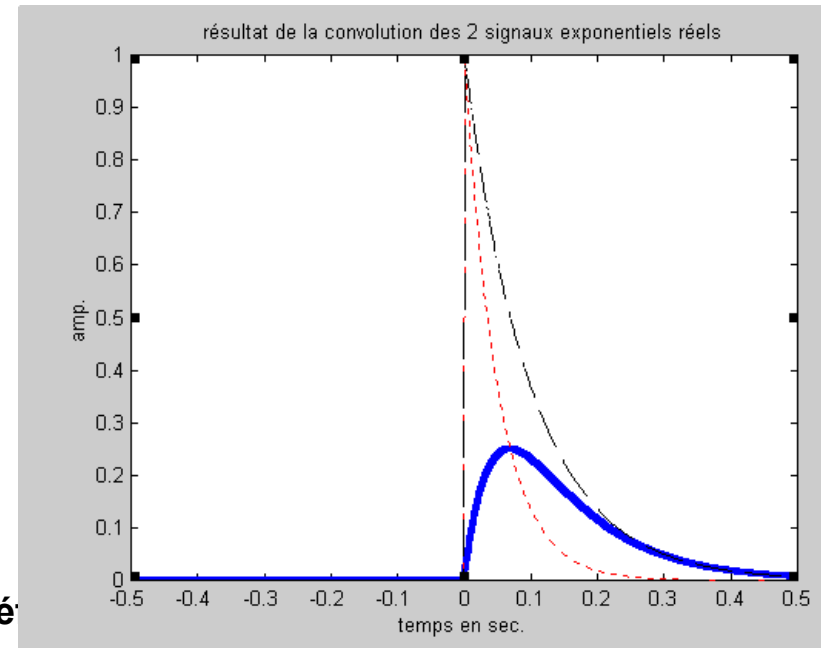
t



- convolution en temps
- - méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$:

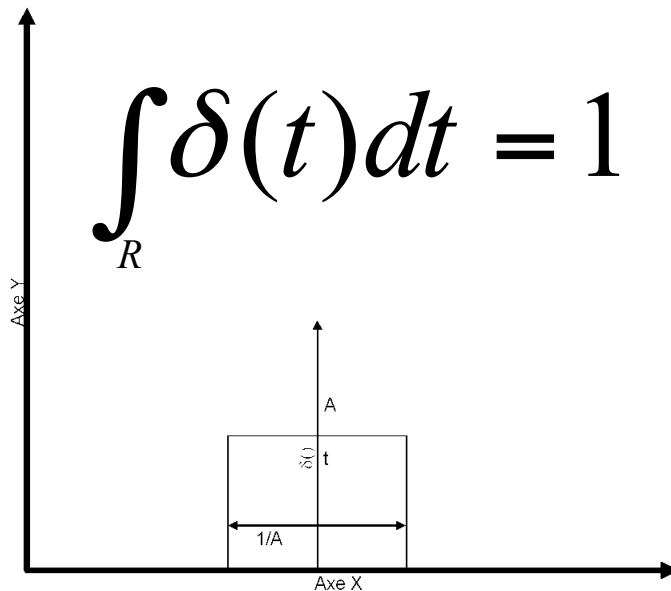
$$x(t)=e^{-at}u(t) \quad y(t)=e^{-2at}u(t)$$

- **Principe de la méthode**
- **On garde le premier signal $x(t')$**
- **On retourne le second signal $y(t')$ pour obtenir $y[-t']$**
- **On décale $y[-t']$ de t pour obtenir $y[-(t'-t)]$**
- **On fait le produit $x(t').y(t-t')$ là où les 2 signaux sont définis**
- **On calcule l'aire commune des 2 signaux**
- **On recommence pour t variant sur \mathbb{R} et on obtient la convolution $x(t)*y(t)$**



+ La distribution de Dirac $\delta(t)$

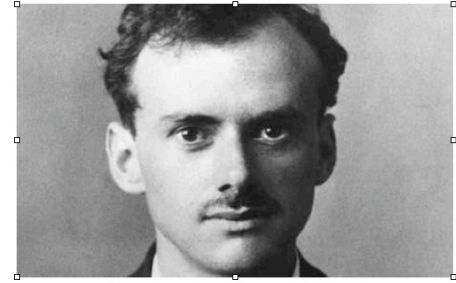
- Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une masse de 1 en $x=0$



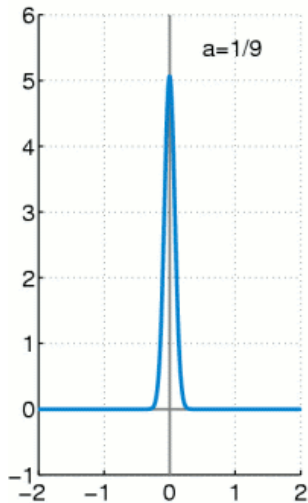
- δ correspond à la « dérivée » de la fonction de Heaviside (au sens des distributions).
- fonction de Dirac n'est pas une fonction, elle étend la notion de fonction.

Impulsion Unitaire $\delta(t)$

- Impossible de réaliser– similaire au $j=\text{sqrt}(-1)$
- Connue sur le nom de *Dirac delta*
 - C'est une fonction généralisée
- Delta Dirac est une distribution égale à zéro partout sauf en zéro où le Dirac est considéré infini.



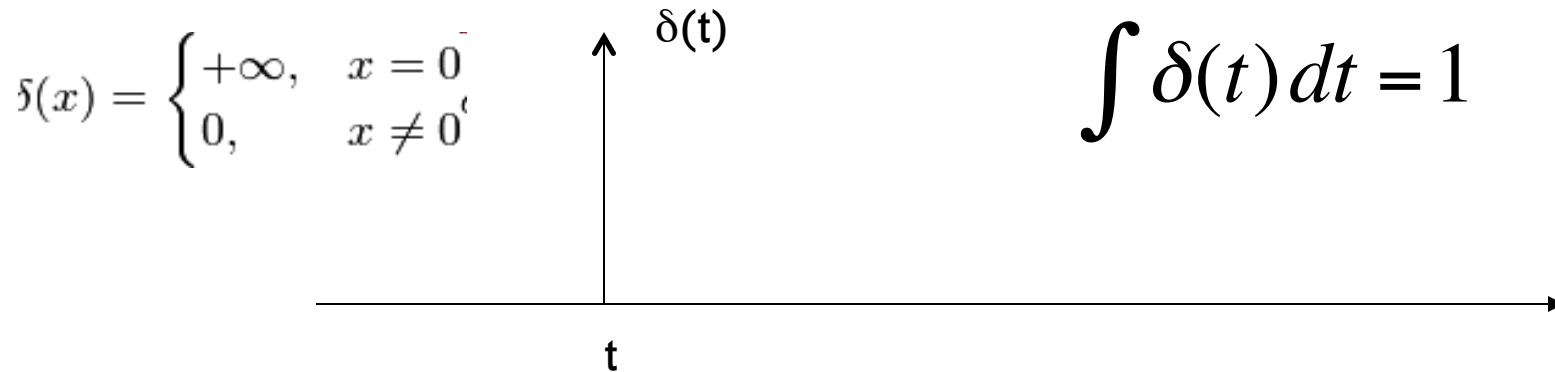
$$\left(\beta mc^2 + \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k c \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$



$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

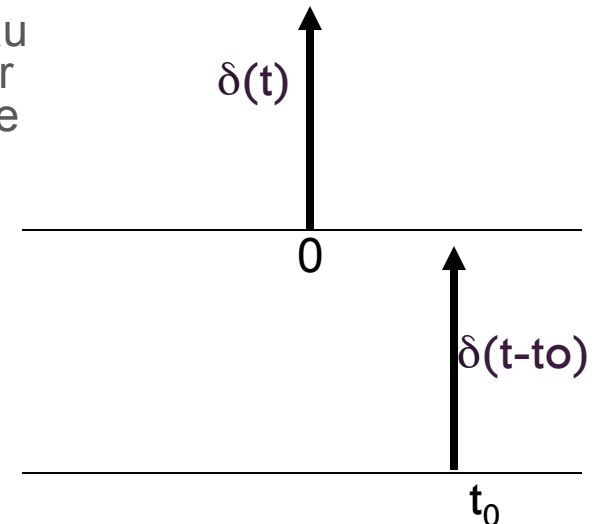
+ Distributions \neq Fonctions

- Impulsion infinie pendant un intervalle de temps infiniment court



- **Remarque :** Nous définissons l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ au sens des distributions. Elle a pour valeur en $t=0$, la valeur égale à 1 de l'intégrale de moins l'infini à plus l'infini d'une impulsion idéale de largeur nulle centrée en $t=0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0)$$



+ La distribution de Dirac $\delta(t)$

- Un Dirac a un support réduit à $t=0$ et associe à une fonction continue ϕ sa valeur en $t=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0)$$

Propriétés:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t) \phi(t) dt = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \phi'(t) dt = -\phi'(0)$$

+ Propriétés de $\delta(t)$

- Localisation

$$[A\delta(x-a)][B\delta(x-b)] = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ AB\delta(x-a) & \text{si } a = b \end{cases}$$

- Élément neutre

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$$



Application

Définition : La réponse impulsionnelle d'un circuit est la réponse à une impulsion de Dirac.

Conclusion :

- 1- Un système linéaire est entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
- 2- La réponse du système à une excitation est égale au produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionnelle.

+ Corrélation des signaux

■ Définition

$$C_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)x_2(t)dt$$

$$\varphi_{x,y}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(l+k)$$

■ Propriétés

- *Fonction paire*
- $C_{x,y} = 0$ les signaux sont décorrélés



Algorithmme

- *Le signal $y(l)$ est décalé d' une certaine quantité k*
- *Le produit $x(l)y(l+k)$ est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
- *Les valeurs ainsi obtenus sont additionnées*

+ Autocorrélation

■ Définition

$$C_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt$$

$$C_{x,x}(k) = \varphi_{x,x}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)x(l+k)$$

■ Propriétés

- $C_{x,x}(0) = 1'$ énergie du signal

+ Transformées : Fourier/Laplace, Z

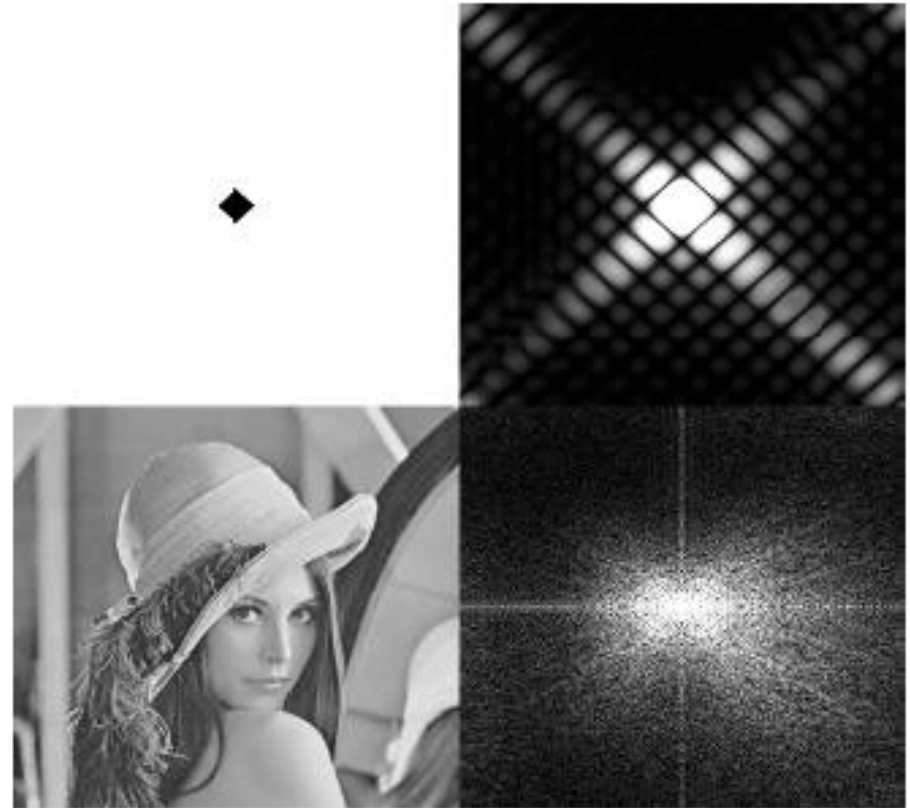
Dans l'étude des systèmes continus, la fréquence réelle ω ou la fréquence complexe p sont utilisées dans la fonction de transfert $T(p)$ ou $H(p)$ et la fonction de transfert sinusoïdale $H(\omega)$.

Il est avantageux de décrire les systèmes continus dans l'espace des fréquences ce qui permet de tirer un certain nombre de conclusions concernant leurs propriétés.

La transformée en z , basée sur l'utilisation d'une **fréquence complexe** z , va procurer des avantages similaires pour les systèmes DLI.

La transformation en z transforme l'espace du temps discret en un espace de fréquences z .

+ Outils mathématiques



Transformée de Fourier

Étude des signaux déterministes continus

Représentation fréquentielle

TRANSFORMATION DE FOURIER

Définition

La transformation de Fourier permet de décrire dans l'espace des fréquences un signal dont on connaît l'histoire au cours du temps, et réciproquement.

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

DUALITE TEMPS-FREQUENCES

$$y = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y = F(f)$$

$F(f)$ est appelée la transformée de Fourier de $f(t)$ et sa représentation, le spectre en fréquences.

On appelle densité spectrale d'énergie $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$

Remarque : On utilise les lettres minuscules pour décrire l'histoire du signal au cours du temps et les lettres majuscules pour le décrire dans le domaine des fréquences ou domaine spectral.

+ Propriétés

- Réciprocité

$$f(t) \rightarrow F(f) \quad F(f) \rightarrow f(t) \quad f(t) \Leftrightarrow F(f)$$

- Linéarité

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \Leftrightarrow \alpha F(f) + \beta G(f)$$

- Dérivation

$$\frac{d f(t)}{d t} \Leftrightarrow j2\pi f F(f)$$

- Intégration

$$\int f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} F(f)$$

- Décalage temporel

$$f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{j2\pi f \tau} F(f)$$



■ Décalage fréquentiel $F(f-f_0) \Leftrightarrow e^{j2\pi f t} F(f)$

■ Conjugaison $f(t) \Leftrightarrow F(f) \quad f(-t) \Leftrightarrow F^*(f)$

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \quad F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

■ Symétrie



Propriétés

La transformation de Fourier est une opération biunivoque.
Conséquence: il y a la même information dans $f(t)$ que dans $F(f)$

Définition

La bande passante B d'un signal est le domaine de fréquence où se trouve l'énergie utile transportée par le signal.

Exemples :

| Signaux | Bande passante |
|----------------------|------------------------------------|
| Téléphonique | $300\text{Hz} < f < 3300\text{Hz}$ |
| Audio haute fidélité | $20\text{ Hz} < f < 20\text{ kHz}$ |
| Télévision | $0\text{Hz} < f < 5\text{ MHz}$ |

+ Fourier

La transformée de Fourier inverse ($\hat{f}, f \in L^1$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{h}^*(\omega) d\omega$$

Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Et,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

+ La Variation Totale

- Si f est dérivable, la variation totale est :

$$\|f\|_v = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt$$

$$\|f\|_v = 2$$

- Exemple:

$$f(t) = \exp(-t^2)$$

- *Relation avec la Transformée de Fourier*

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{\|f\|_v}{|\omega|}$$

+ La Phase de la TF

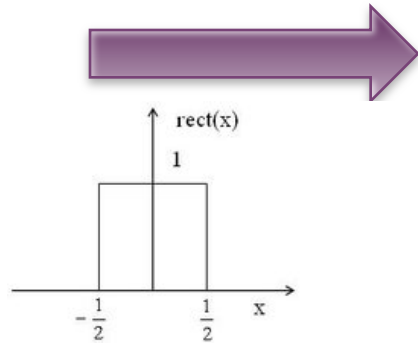
- Dans une TF, l'information sur le temps est cachée dans les phases.
- Il est impossible de déterminer les phases avec assez de précision pour extraire les informations sur le temps.

La transformée de Fourier

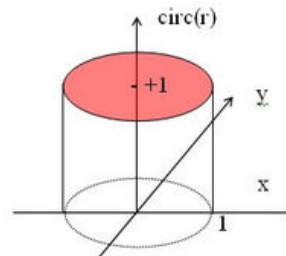
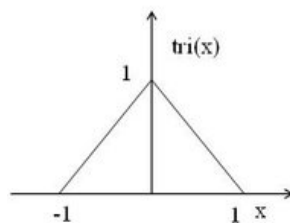
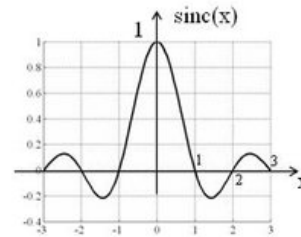
Exemple:

Soit la fonction indicateur

$$f = \mathbf{1}_{[-T,T]}$$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$$





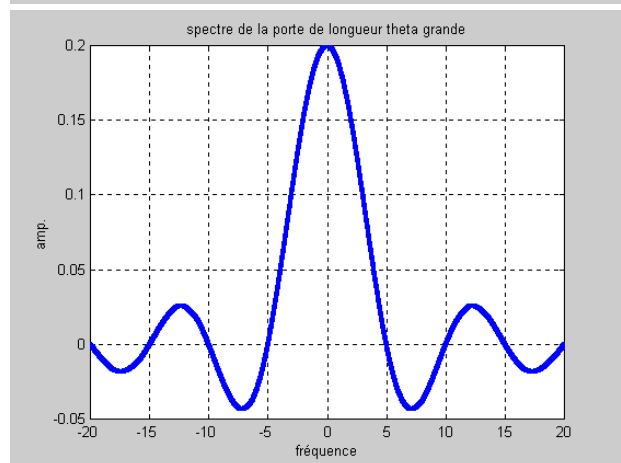
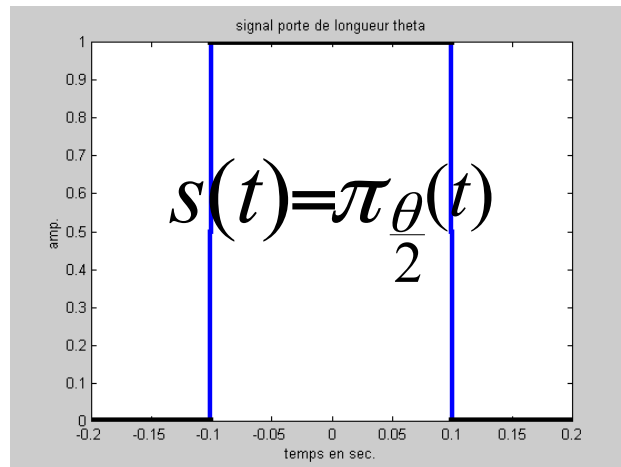
Analyse de la Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

Exemple de calcul de Transformée de Fourier

- - Le spectre du signal

- si θ est faible, le signal est bien localisé en temps mais $1/\theta$ est grand et le spectre est mal localisé en fréquence

» - si θ est grand, le spectre est bien localisé en fréquence mais mal localisé en temps





Exemple de calcul de Transformée de Fourier

- - calculer le spectre du signal $s(t) = S_0 e^{-at} u(t)$

-

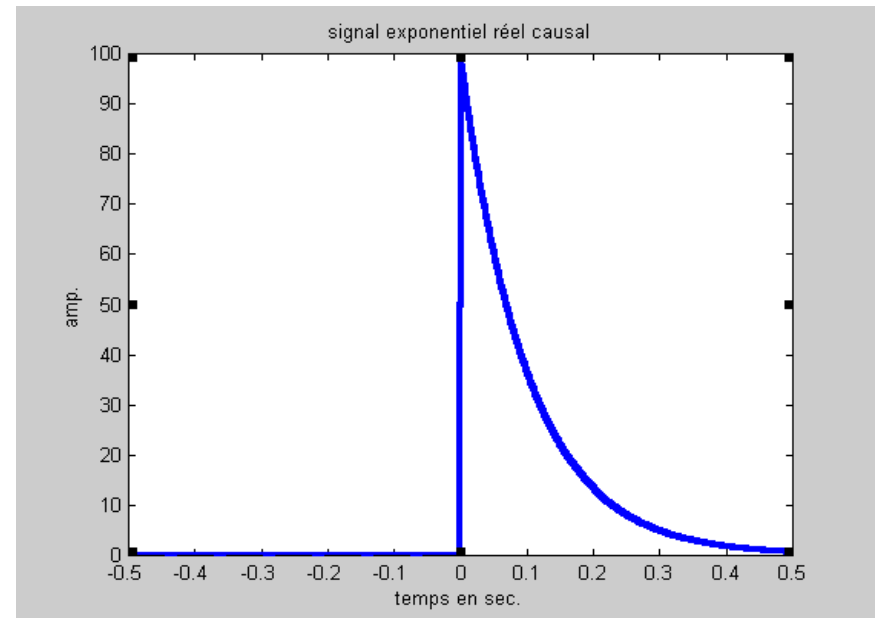
$$S(f) = \frac{S_0}{a + j2\pi f}$$

- Module du spectre

$$|S(f)| = \frac{S_0}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Phase du spectre

$$\varphi(S(f)) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$





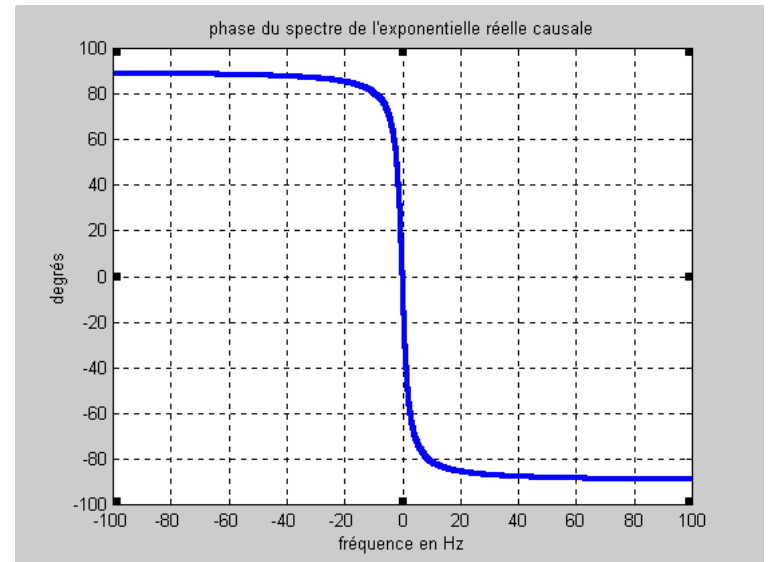
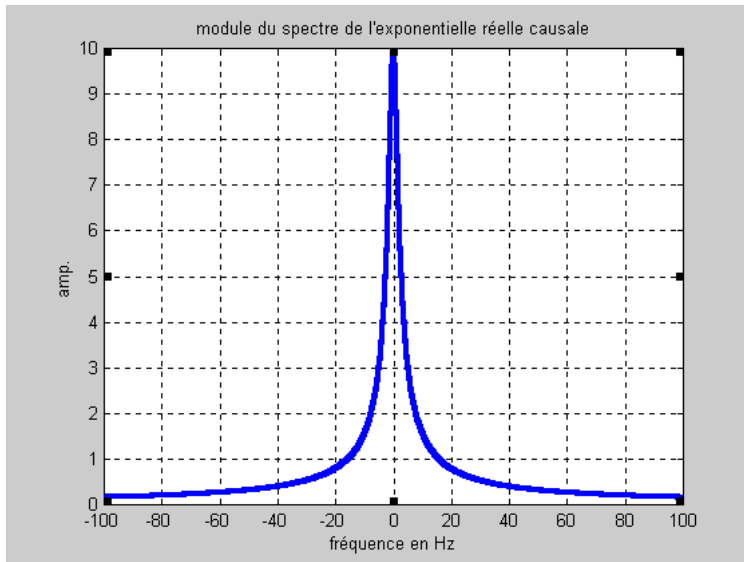
Exemple de calcul de Transformée de Fourier

- - tracer le spectre du signal

$$s(t) = S_0 e^{-at} u(t)$$

$$|S(f)| = \frac{S_0}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\varphi(S(f)) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$



+ Utilisation de la distribution de Dirac pour le calcul des Transformées Fourier

- **A partir de la TF d' une constante nous pouvons déduire :**

$$\begin{aligned}
 TF(\delta(t)) &= 1 \\
 TF^{-1}(2\pi\delta(t)) &= 1 \\
 TF(A) &= 2\pi A\delta(\omega) \\
 TF\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0)
 \end{aligned}$$

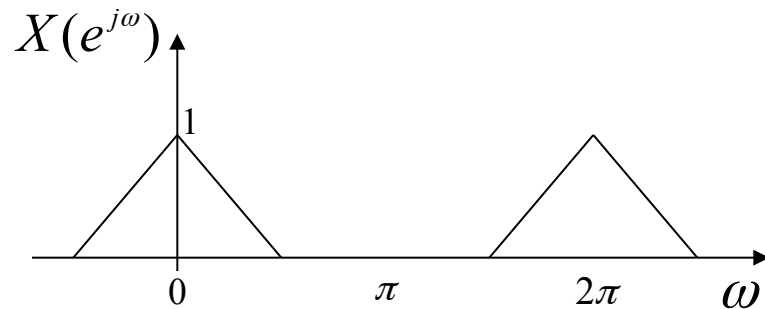
Donc la transformée Fourier de cos et de sin est :

$$TF\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

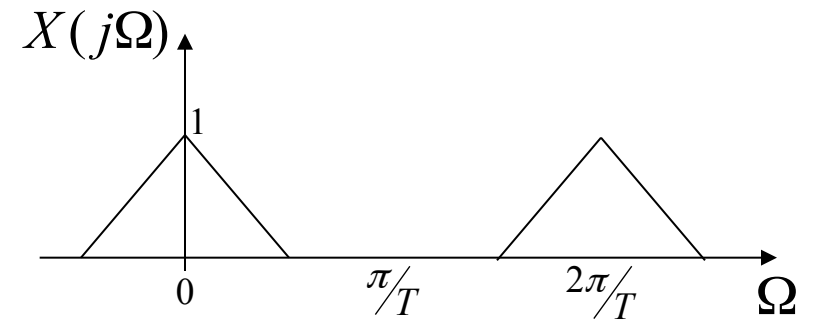
$$TF\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

+ Échelle fréquence

Fréquence physique



Fréquence normalisée



+ L'Intégrale de Fourier

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (f \in L^1):$$

Mesure “ la quantité ” d'oscillations à la fréquence ω qui est présente en f . Si $f \in L^1$ cette intégrale converge

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Donc, la Transformée de Fourier est bornée et continue.

+ Valeurs et Vecteurs Propres

- Soit $T : V \rightarrow V$ un opérateur linéaire sur un espace vectoriel V sur un corps K . Un scalaire $\lambda \in K$ est appelé valeur propre de T s' il existe un $v \in V$ vecteur non nul pour lequel :

$$T(v) = \lambda v$$

- Remarque λv est aussi un vecteur propre
- Exemple : l' opérateur différentiel sur l' espace vectoriel V . $D(e^{5t}) = 5e^{5t}$

+ Interprétation de la Transformée de Fourier

Fonction de Transfert:

Les exponentielles complexes
des opérateurs de convolution $e^{j\omega t}$

sont les vecteurs propres

Les valeurs propres

$$Le^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega(t-u)} du = \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}$$

sont la Transformée de Fourier de h à la fréquence ω .

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j\omega u} du$$

Donc nous voudrions décomposer une fonction dans une somme de vecteurs propres

+ Notion de système

- Un système fait subir une transformation à un signal d'entrée $x(t)$ et délivre un signal de sortie $y(t)$.

Filtre

- On appelle filtre, d'entrée $x(t)$ et sortie $y(t)$, un système défini par:

$$y(t) = \int_R x(u)h(t-u)du = \int_R x(t-u)h(u)du$$

- Réponse impulsionnelle $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Réponse indicielle $u(t)$

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

- Réponse en fréquence

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

+ Filtrage linéaire invariant en temps

L' invariance à la translation dans le domaine temps d'un opérateur

L

Signifie que si l' entrée $f(t)$ est retardée de τ

$$\tau, f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

la sortie a aussi un retard $g(t) = Lf(t) \Rightarrow g(t - \tau) = Lf_{\tau}(t)$

Réponse impulsionnelle

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta_u(t) du$$

Si $h(t) = L\delta(t)$ nous avons :

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) h(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t-u) du = (f * h)(t)$$

+ Corrélation des signaux

■ Définition

$$\varphi_{x,y}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(l+k)$$

■ *Algorithme*

- *Le signal $y(l)$ est décalé d' une certaine quantité k*
- *Le produit $x(l)y(l+k)$ est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
- *Les valeurs ainsi obtenus sont additionnées*

+ Propriétés

$$\Phi_{xy}(f) = \sum \varphi_{xy}(k) e^{-2\pi jfk} = X^*(f) Y(f)$$

Théorème de Parseval

$$\varphi_x(0) = \sum x^2(l) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f) df \quad k=0$$

La fonction d' autocorrélation est une fonction paire

+ La Densité Spectrale

- ... est obtenue par la Transformée de Fourier de la fonction d' autocorrélation (théorème de Wiener-Khintchine):

$$S(f) = \text{TF}\{C(p)\} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} C(p) \exp(-2\pi jfp T_e)$$

- La loi de probabilité gaussienne est importante dans la mesure où elle garde son caractère gaussien dans toute opération linéaire : convolution, filtrage, dérivation, intégration. En d' autres termes, si l' entrée d' un système linéaire est gaussienne, sa sortie est gaussienne.



Conclusions

- La série de Fourier d'une fonction périodique ne comporte que les sinusoides de fréquence égales à des multiples entiers de la fréquence fondamentale
- La TF de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie = la redistribution de l'énergie sur les axes de fréquences

+ Défauts de la TF

- La transformée de Fourier est une représentation globale du signal. Elle ne permet pas d'analyser son comportement fréquentiel local, ni sa régularité locale. La condition de convergence sur la transformée de Fourier n'indique que le **pire** ordre de singularité. Elle ignore les régularités locales.

+ Relation d'incertitude de Heisenberg

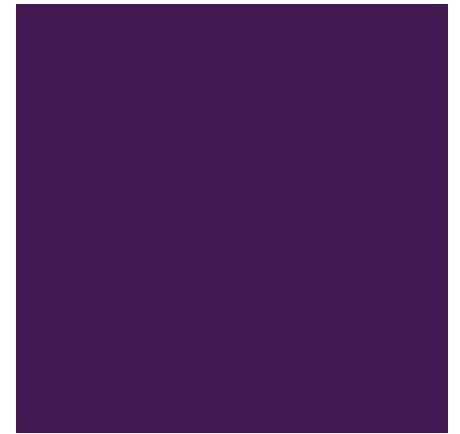
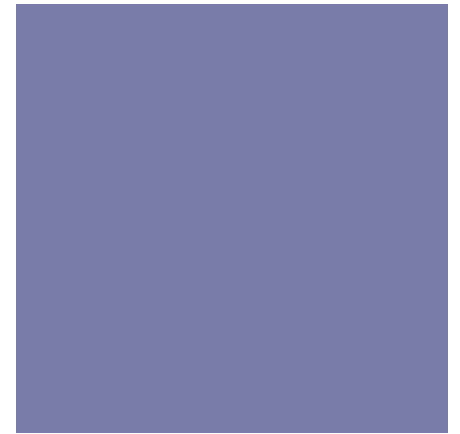
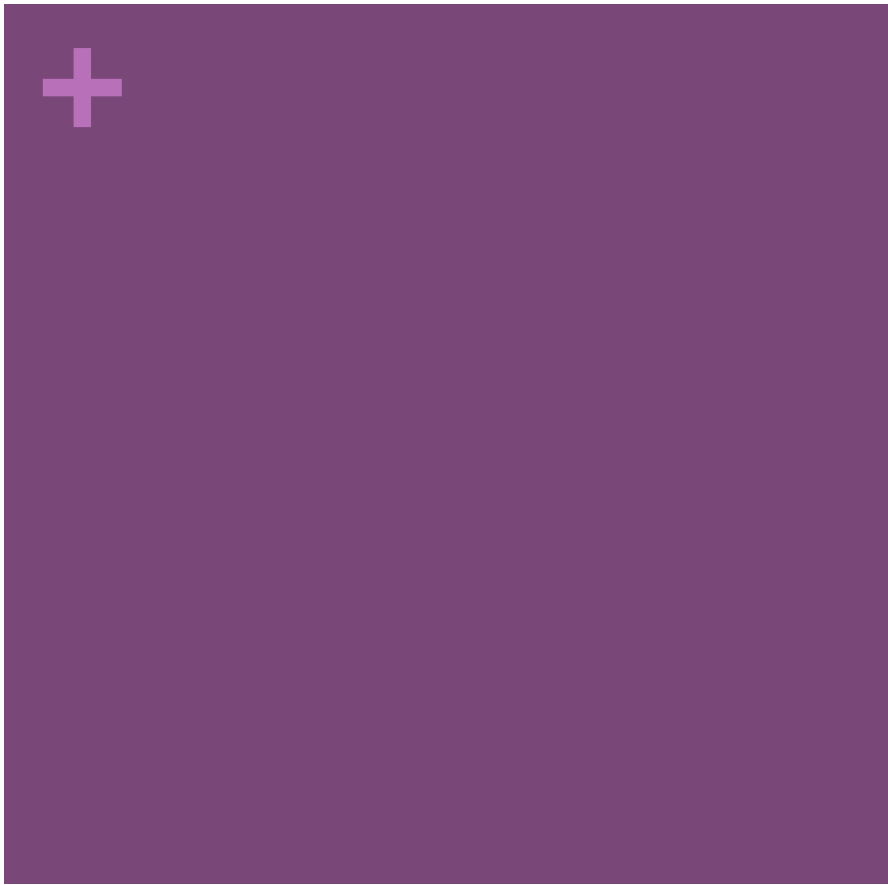
- Le principe: Le produit de la variance de x pour $|f\rangle^2$ et de la variance de x pour $|F\rangle^2$ est supérieur ou égal à

$$\frac{1}{16\pi^2}$$

- La largeur du paquet d'énergie d'un signal dans le temps est inversement proportionnelle à sa largeur dans l'espace des fréquences. On ne peut pas connaître avec une égale précision la position dans le temps et en fréquences d'un signal.

+ Défauts

- Le défaut de cette transformée est d'avoir une fenêtre indépendante de la fréquence que l'on calcule.



Transformée de Lapalace

Andrei Doncescu
andrei.doncescu@laas.fr

+ Transformée de Laplace

Définition

Si $f(t)$ désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t , définie sur le domaine \mathbb{R}^+ et nulle pour $t < 0$; on appelle **Transformée de Laplace** de $f(t)$ la fonction

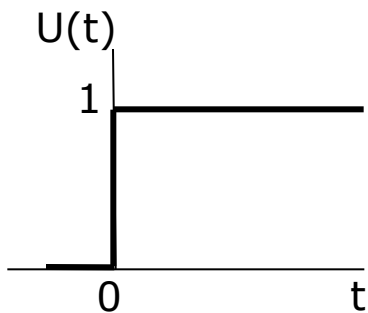
$$F(p) = \mathcal{L} f(t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt$$

où p est complexe

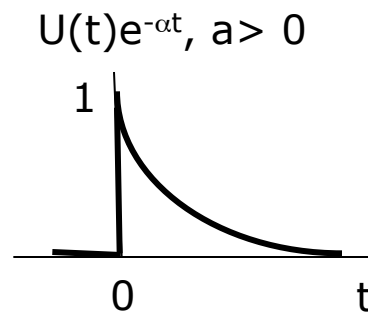
- l'existence de $F(p)$ suppose la convergence de l'intégrale
- on dit que $F(p)$ est " l' image " de $f(t)$

Transformée de Laplace

■ Exemples



Echelon unité



Exponentielle décroissante

| | Signal | TL |
|----------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| Echelon unité | $U(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| Exponentielle décroissante | $U(t)e^{-at}, a > 0$ | $\frac{1}{p+a}$ |
| Exponentielle complexe | $U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$ | $\frac{1}{p-i\omega}$ |

Note: la TL n'est pas définie pour tout p : la partie réelle de p doit

être plus grande qu'une valeur, l'abscisse de convergence.

Transformée de Laplace

■ Propriété de linéarité

Théorème

Si $V_1(t)$ a pour TL : $v_1(p)$

et $V_2(t)$ a pour TL : $v_2(p)$

alors, $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathbb{E}$

$\alpha V_1(t) + \beta V_2(t)$ a pour TL :

$\alpha v_1(p) + \beta v_2(p)$.

Exercices. Calculer les TF de
 $U(t)\cos(\omega t)$ et $U(t)\sin(\omega t)$

| | Signal | TL |
|---------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| Exponentielle complexe | $U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$ | $\frac{1}{p-i\omega}$ |
| Cosinus | $U(t)\cos(\omega t)$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| Sinus | $U(t)\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |

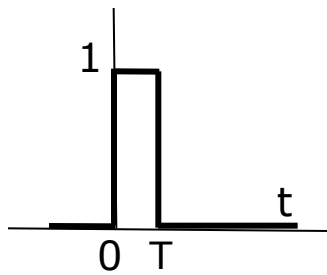
Transformée de Laplace

■ Propriété de linéarité

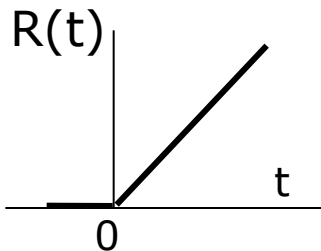
| | Signal temporel | TL |
|---------------|--|--|
| Exponentielle | | |
| complexe | $U(t)e^{(-\alpha+i\omega)t}, \omega > 0$ | $\frac{1}{p+\alpha - i\omega}$ |
| Cosinus | $U(t)e^{-\alpha t} \cos(\omega t), \alpha > 0$ | $\frac{p + \alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| Sinus | $U(t)e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| | | |

Transformée de Laplace

■ Propriétés



Impulsion



Rampe

1. Théorème du retard

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$,

alors $V(t - T)$ a pour TL : $e^{-pT}v(p)$, $\forall T > 0$.

Exercice. Montrer que la TL de l'impulsion

(cf. Fig.) est : $\frac{1 - e^{-pT}}{p}$.

2. Théorème de dérivation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$,

alors $\frac{dV(t)}{dt}$ a pour TL : $p.v(p)$.

Exercice. Vérifier que la TL de la

rampe $R(t)$ (cf. Fig.) est : $\frac{1}{p^2}$.

Transformée de Laplace

■ Propriétés

3. Théorème inverse de translation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, alors $e^{-at}V(t)$ a pour TL : $v(p + a)$, $\forall a > 0$.

Exercice. Retrouver les expressions des TL du tableau page précédente.

4. Théorème inverse de dérivation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, alors $-t.V(t)$ a pour TL : $\frac{dv(p)}{dp}$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $t.U(t).e^{-at}$.

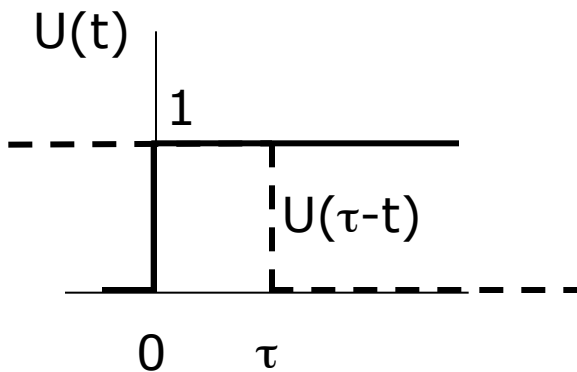
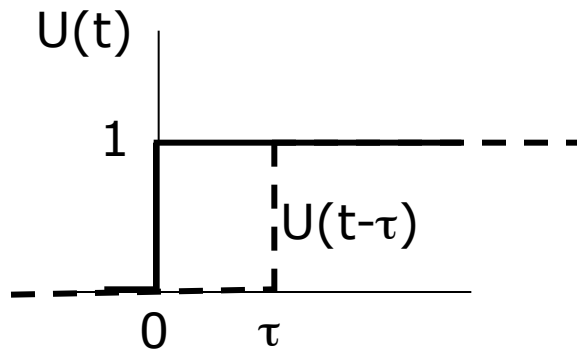
5. Théorème d'affinité - homothétie ou changement d'échelle de temps

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, alors $V(kt)$ a pour TL : $\frac{1}{k}v\left(\frac{p}{k}\right)$, $\forall k > 0$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $U(t)\sin(3t)$

Transformée de Laplace

■ Convolution



Théorème

Si $X(t)$ a pour TL : $x(p)$
et $Y(t)$ a pour TL : $y(p)$,

alors le produit de convolution

$$\int_0^{\infty} X(t)Y(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL: } x(p) \cdot y(p)$$

ou, symboliquement :

$$* \quad \text{a pour TL} \quad \cdot$$

Exercice. Montrer de deux manières différentes que $U(t) * U(t) = R(t)$

Transformée de Laplace

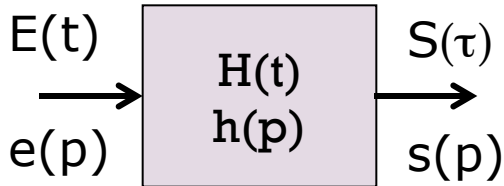
■ Opérateurs

| Opérateurs dans l'espace temps | TL |
|---|-------------------------------------|
| * (convolution entre signaux) | × (multiplication de leurs TL) |
| $\frac{d}{dt}$ (dérivation d'un signal) | × p (multiplication de sa TL par p) |
| T - périodisation | $\times \frac{1}{1-e^{-pT}}$ |

Transformée de Laplace

■ Systèmes linéaires stationnaires

Théorème



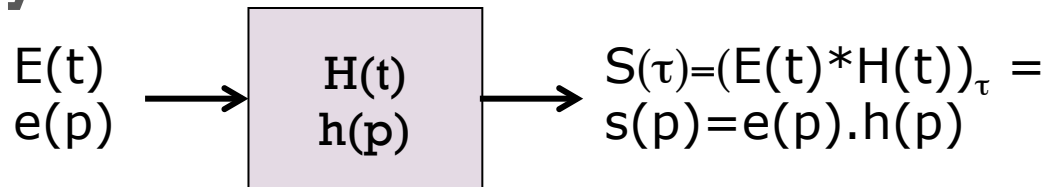
Si $E(t)$, qui a pour TL : $e(p)$ est le signal d'entrée
 $H(t)$, la réponse percussionnelle du SLS et sa TL :
 $h(p)$, la fonction de transfert du SLS

alors le signal temporel de sortie est donné par
le produit de convolution et sa TL par un produit :

$$S(\tau) = \int_0^{\infty} E(t)H(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL} \quad s(p) = e(p) \cdot h(p)$$

Transformée de Laplace

■ Systèmes linéaires stationnaires



$$\int_0^{\infty} E(t)H(\tau - t)dt$$

Transformée de Laplace

■ Déconvolution

1. Décomposition en éléments simples de première espèce

$$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)} = \frac{A}{(p-a)^2} + \frac{B}{(p-a)} + \frac{C}{(p-b)}$$

Pour calculer A (resp. C), on multiplie l'équation par $(p-a)^2$ (resp. $p-b$) et on fait $p = a$ (resp. $p = b$). On trouve :

$$A = \left[\frac{1}{p-b} \right]_{p=a} = \frac{1}{a-b} \quad C = \left[\frac{1}{(p-a)^2} \right]_{p=b} = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Pour calculer B, on multiplie l'équation par $(p-a)$ et on fait tendre p vers l'infini. On trouve: $B = -C$. Les originaux des éléments simples peuvent alors être trouvés directement à partir des tables de TL usuelles.

Transformée de Laplace

■ Déconvolution

2. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

C' est le cas où le dénominateur est un trinôme du second degré qui n' a pas de racines réelles. On décomposition en éléments simples de 2ème espèce :

$$ap^2+bp+c = a \left[\left(p + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left(P^2 + A^2 \right),$$

$$\text{avec } P = p + \frac{b}{2a} \text{ et } A = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

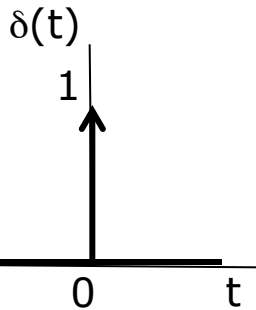
$$\frac{1}{ap^2+bp+c} = \frac{1}{a} \frac{1}{P^2+A^2} = \frac{1}{aA^2} \frac{1}{P^2/A^2 + 1}$$

Transformée de Laplace

■ Calcul opérationnel

Exercice.

On définit la distribution de Dirac $\delta(t)$ de la manière suivante:
 $\delta(t)$ a pour TL: 1.



Résoudre l'équation différentielle: $\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = \delta(t)$

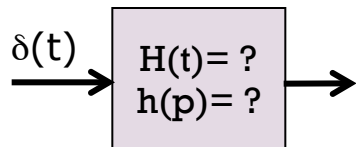
(α et ω_0 sont réels et positifs et ne dépendent pas du temps).

Discuter brièvement la nature de la solution en fonction de α .

Distribution de Dirac

Note

La méthode présentée dans cet exercice permet de retrouver la réponse percussionnelle d'un système linéaire stationnaire lorsque l'on connaît l'équation différentielle à laquelle il obéit.



Transformée de Laplace

■ Réponses

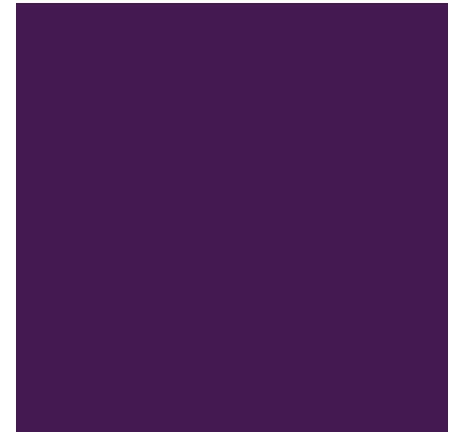
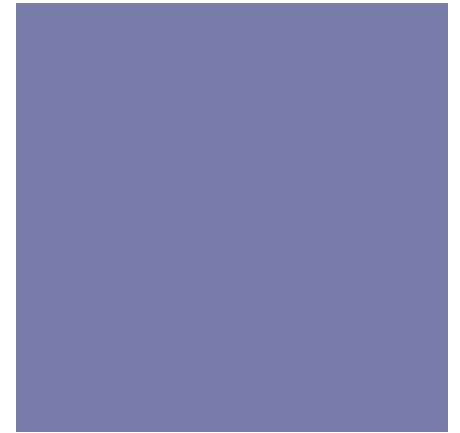
Exercice: identification d'un système linéaire stationnaire

Réponse: $H(t)$ est la dérivée de $S(t)$

Exercices. Eléments de réponse:

$$\frac{1}{p^3 + 3p^2 + 2p} = \frac{1}{p(p+2)(p+1)}; \quad \frac{1}{p^3 - 1} = \frac{1}{(p-1)(p^2 + p + 1)}$$

$$\text{et } \frac{1}{p^3 + p^2 - p - 1} = \frac{1}{(p-1)(p+1)^2}$$



Du signal analogique au
signal numérique

+ La Genèse du Signal Numérique

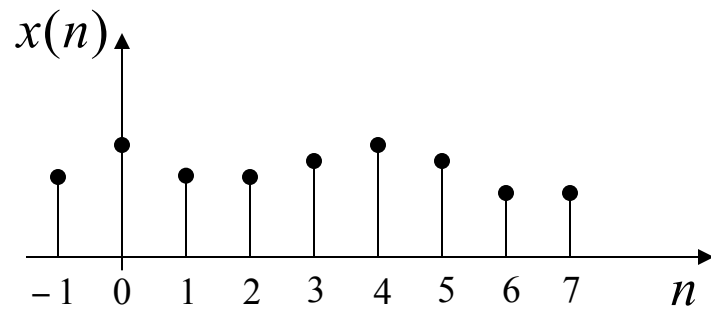
■ *De l'information cachée dans la représentation choisie*

- Échantillonnage
- Compression
- Décomposition dans un espace orthogonal

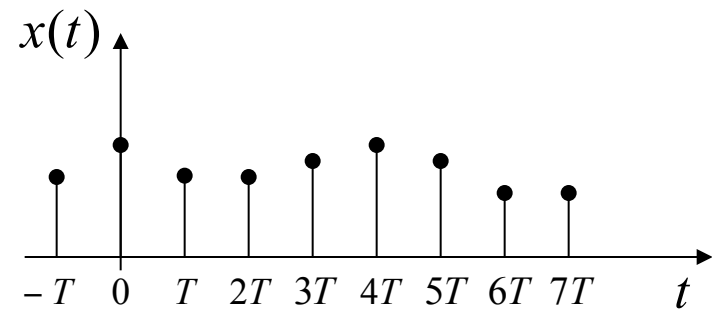
Les avances en moyen informatique (puissance de calcul) ont rendu possible l'expression et le traitement de signaux en forme numérique. Mais pour numériser, il faut d'abord échantillonner. Nous allons voir que le passage analogique – numérique implique nécessairement une perte d'information. Cette perte peut être minimisée par l'application des outils adaptés.

+ Échelle temps

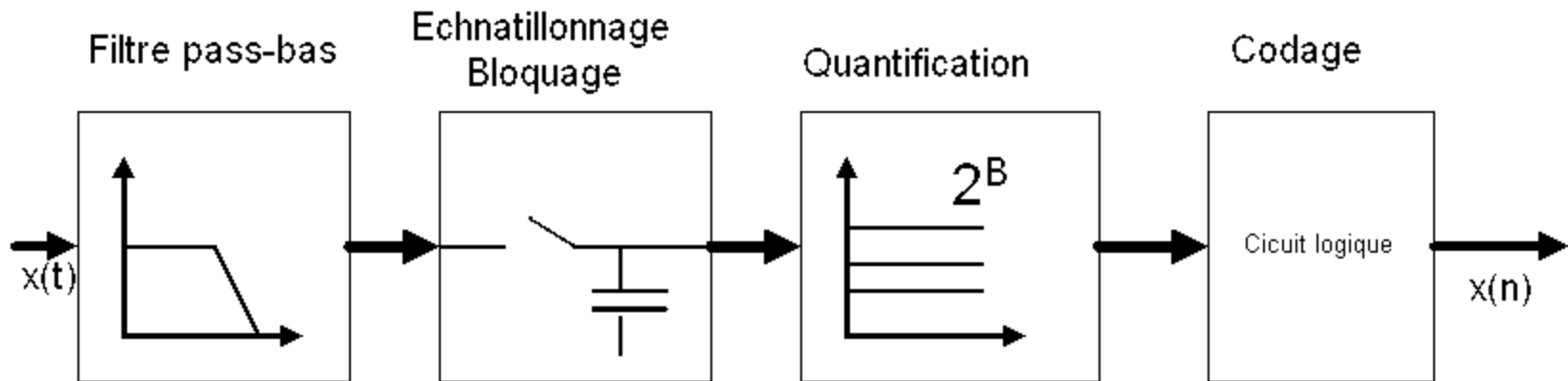
Séquence



Temps physique

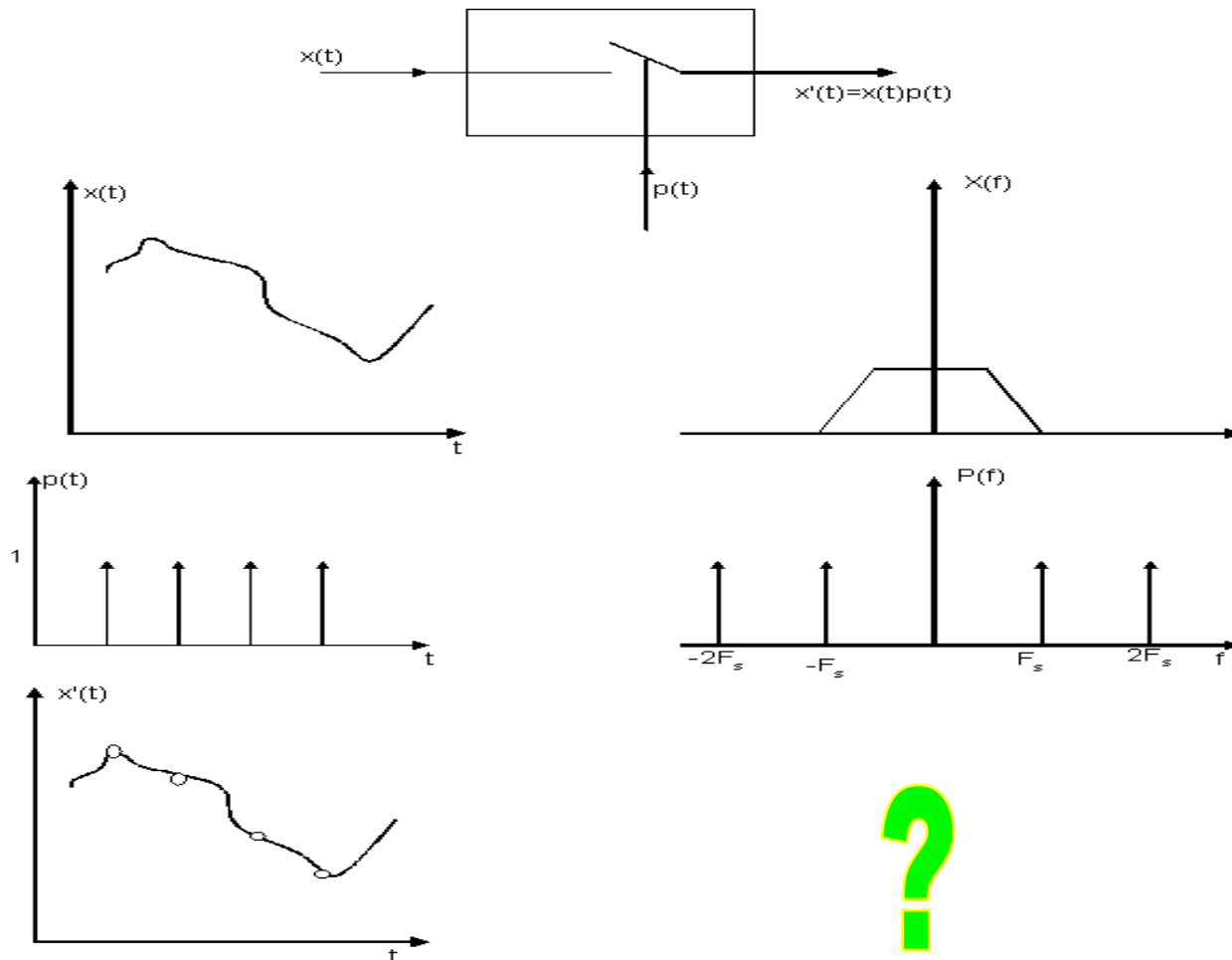


+ Échantillonnage



- Signal Analogique
- Signal discret en temps
- Signal numérique

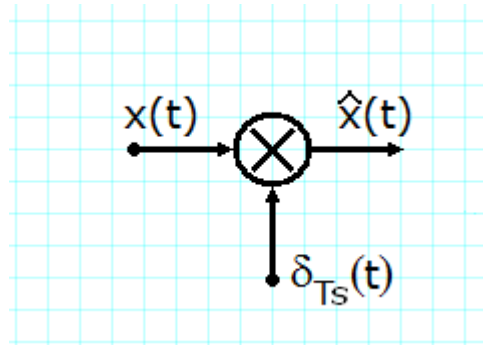
+ Modélisation mathématique de l'échantillonnage



+ Échantillonnage

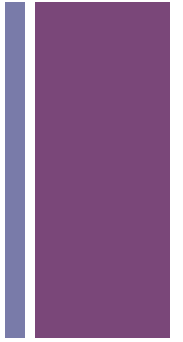
- L'échantillonnage idéal prélève des échantillons à la cadence T_e de façon instantanée.

$$\hat{x}_e = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



+

Spectre d'un signal Echantillonné



$$\hat{x}_e = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad \hat{X}(\omega) = \mathbf{F} \left\{ x(t) \delta_{T_s}(t) \right\}$$



$$X_e(f) = TF[x_a(t)] * TF\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s)\right]$$

$$X_e(f) = f_e X_a(f) * TF\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s)\right] = f_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a(f - nf_s)$$

+ Spectre du signal échantillonné

$$c(t) = \sum \delta(t - nT) \rightarrow \hat{c}(\omega) = \sum e^{-jnT\omega}$$

$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

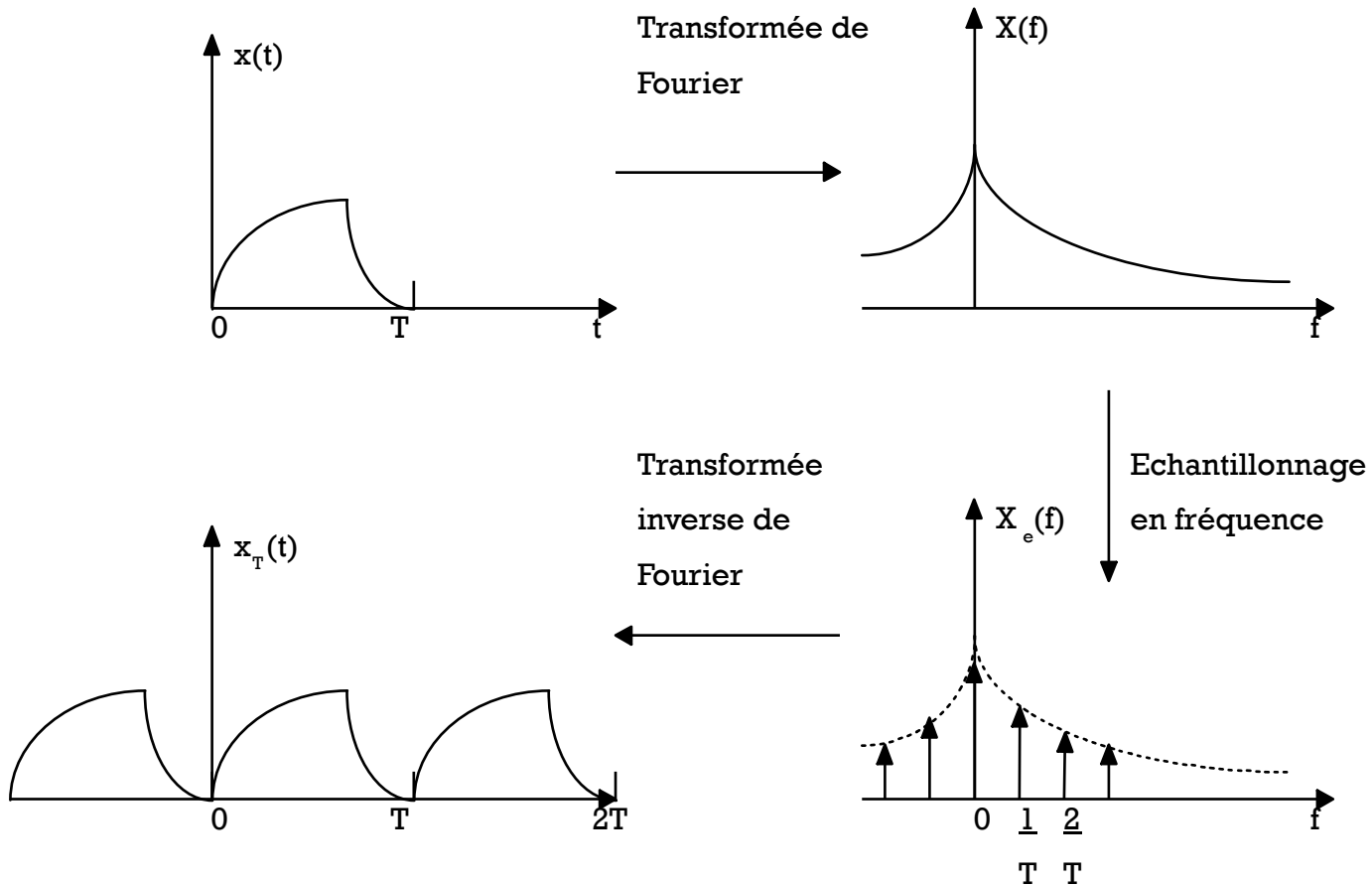
$$\hat{\delta}(\omega) = \int \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

En utilisant la formule de Poisson

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

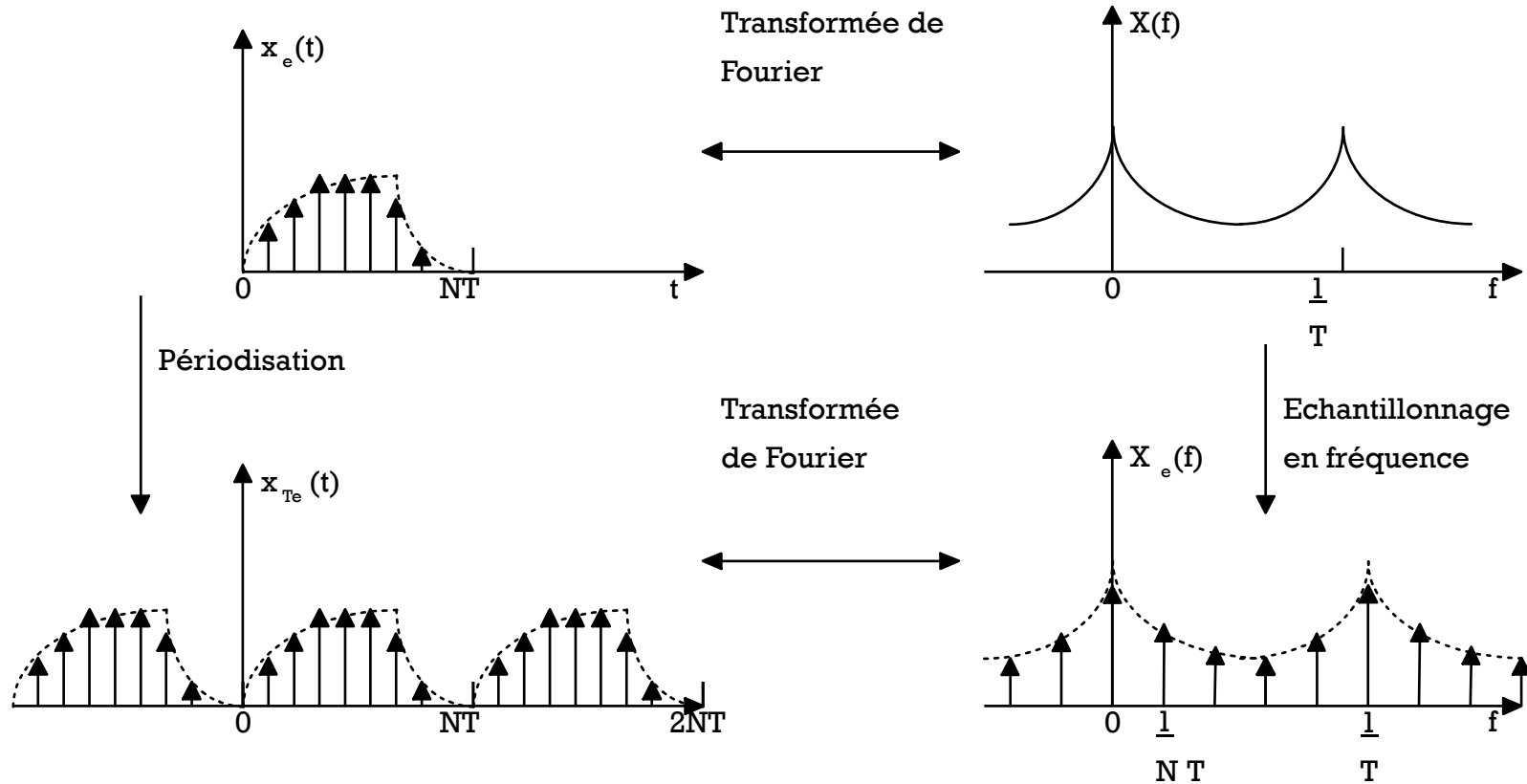
L'effet de la convolution avec une distribution de Dirac est la répétition périodique de la fonction respective.

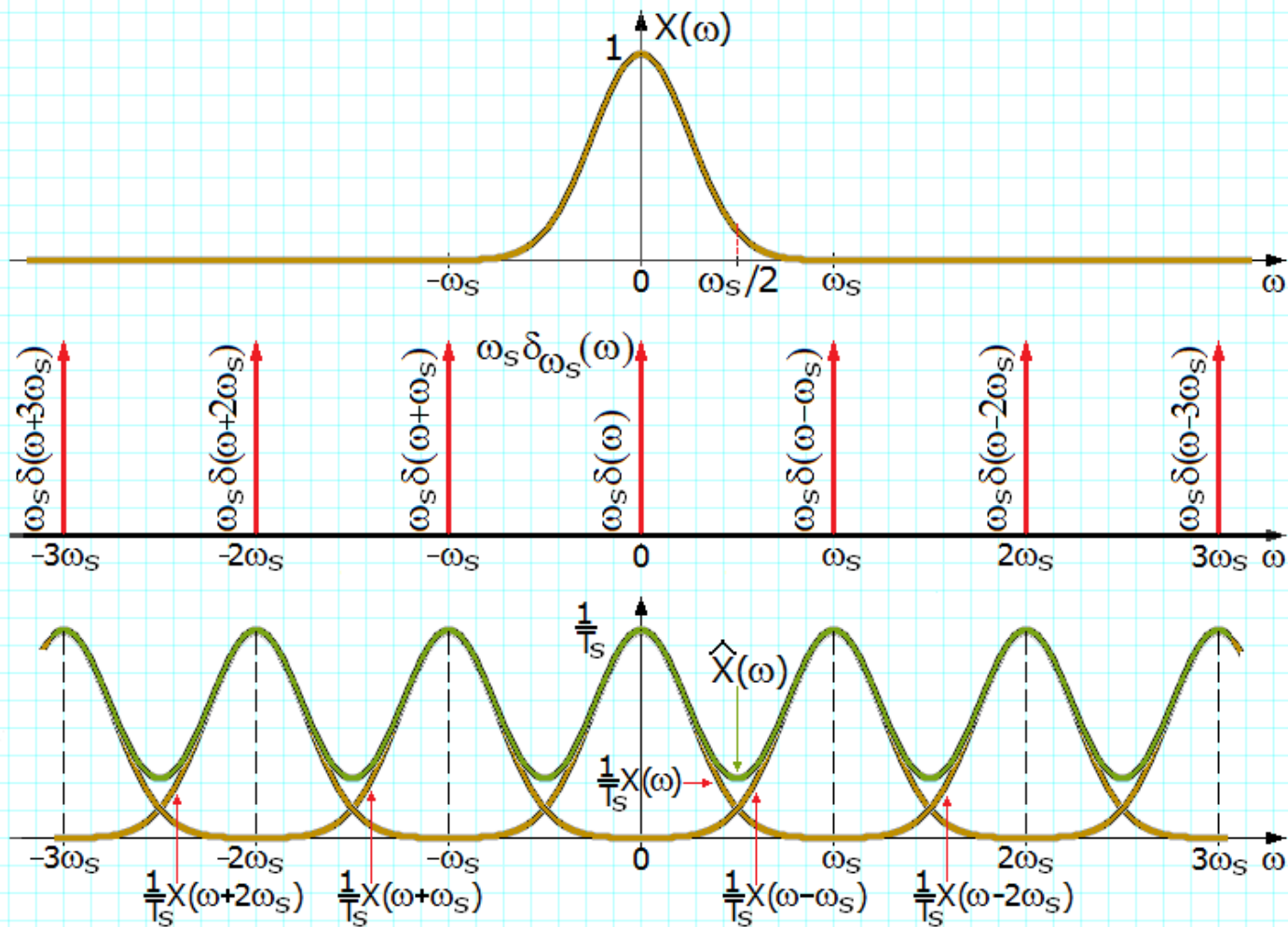
✓ Signaux de durée finie et signaux périodiques



✓ Signaux échantillonnés de durée finie

$$x_e(t) = \sum_0^{N-1} x[k] \delta(t - kT)$$





$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

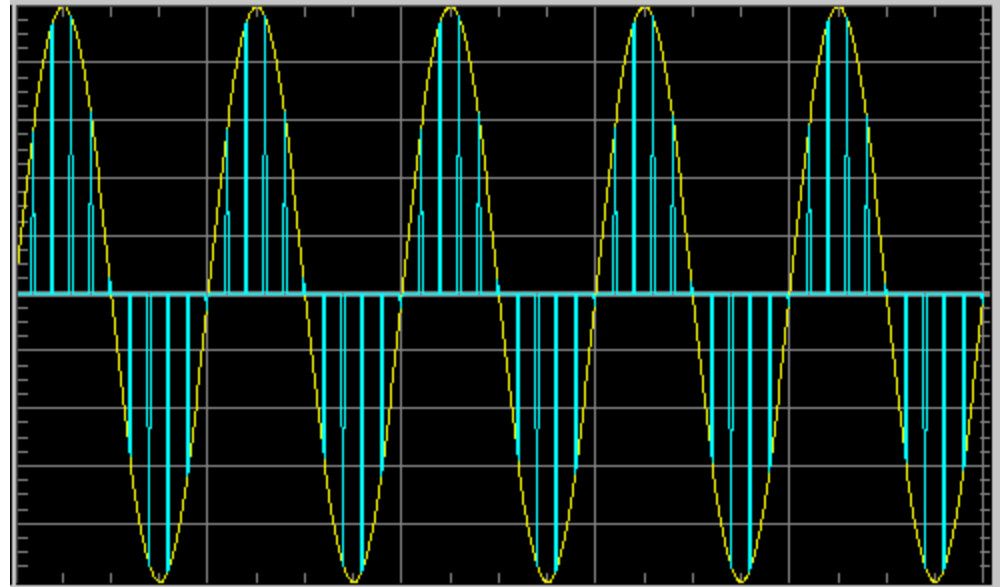
+ Théorème de Shannon

- Pour éviter une superposition des spectres élémentaires il est nécessaire d'imposer le théorème de Shannon

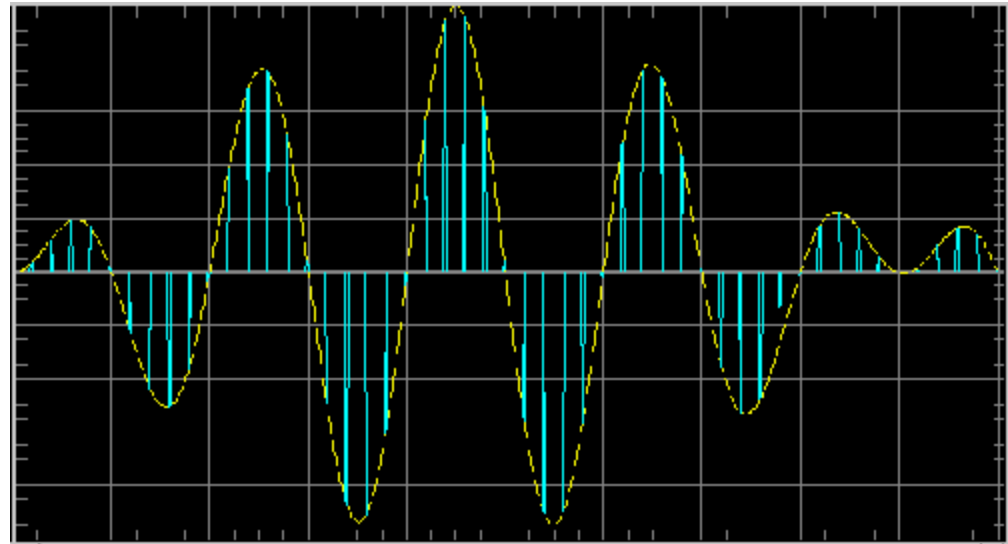
$$F_e \geq 2f_{\max}$$

Un signal de spectre borné ne peut pas être que de durée infinie. Il est donc erroné de considérer des signaux à la fois de durée et de spectre finis.

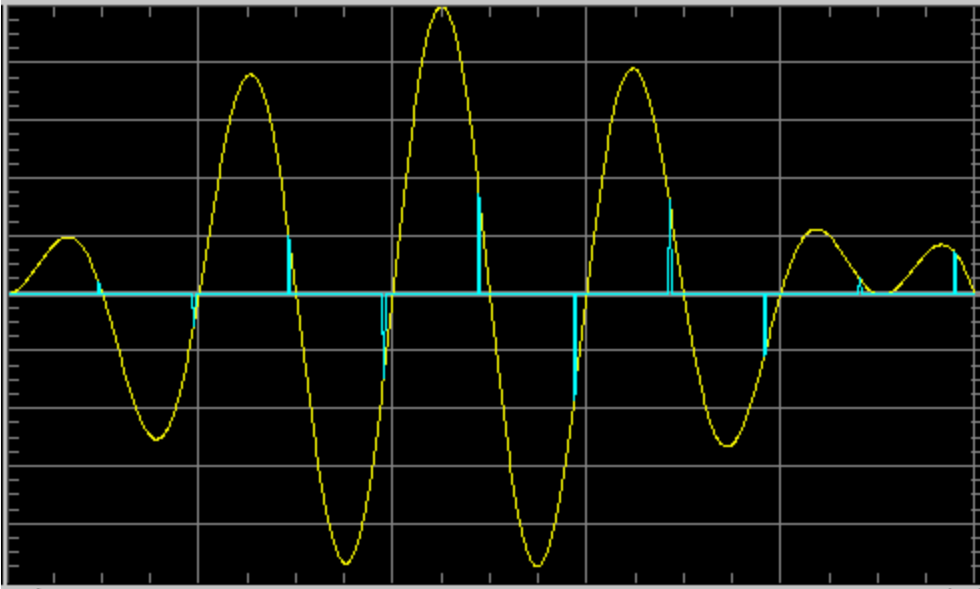
Signal Analogique



Signal échantillonnage



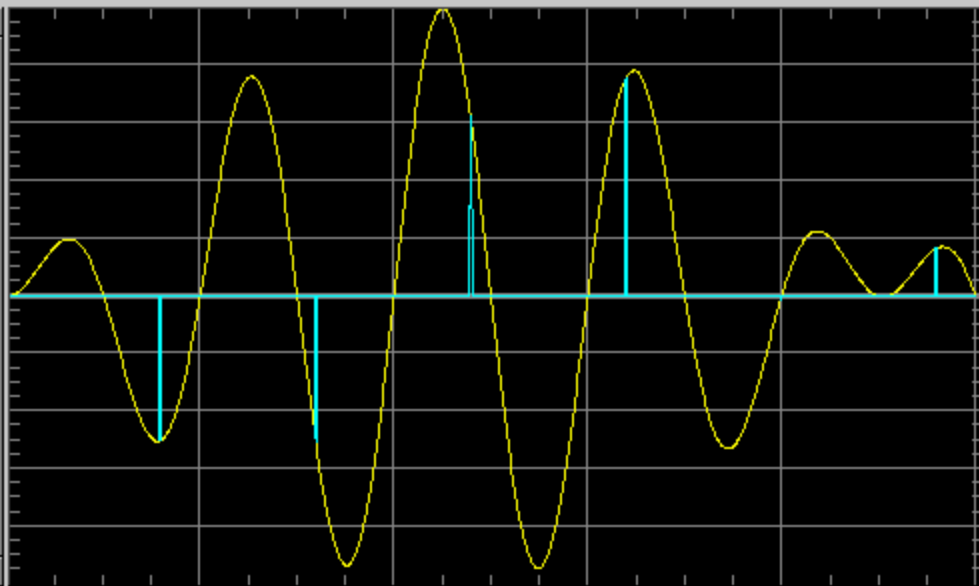
+ À la limite du théorème de l'échantillonnage



On peut, intuitivement, remarquer sur l'illustration précédente, que relier les échantillons à l'aide d'une ligne courbe, aussi bien choisie soit-elle, n'a que peu de chances de reproduire le signal original, bien que le théorème de l'échantillonnage soit, formellement, respecté.

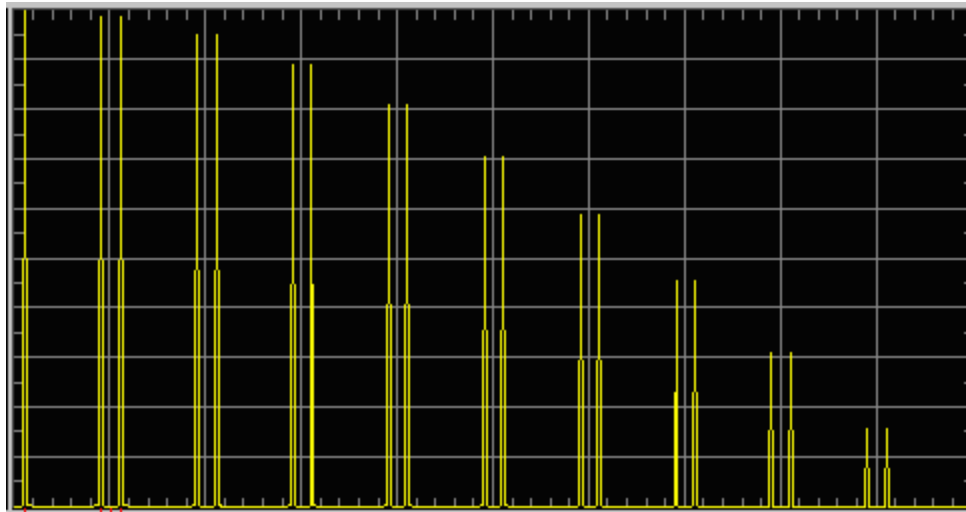


Sous-échantillonnage



Si l'on tente de relier les échantillons par une courbe, on ne va pas être en mesure de reconstituer le signal original, mais un autre, peu semblable au précédent. Ceci est la conséquence de la violation du théorème de l'échantillonnage.

+ Spectre dans le cas sinusoidal



Raies de part et d'autre de la fréquence d'échantillonnage, à $f_e - f_m$ et $f_e + f_m$

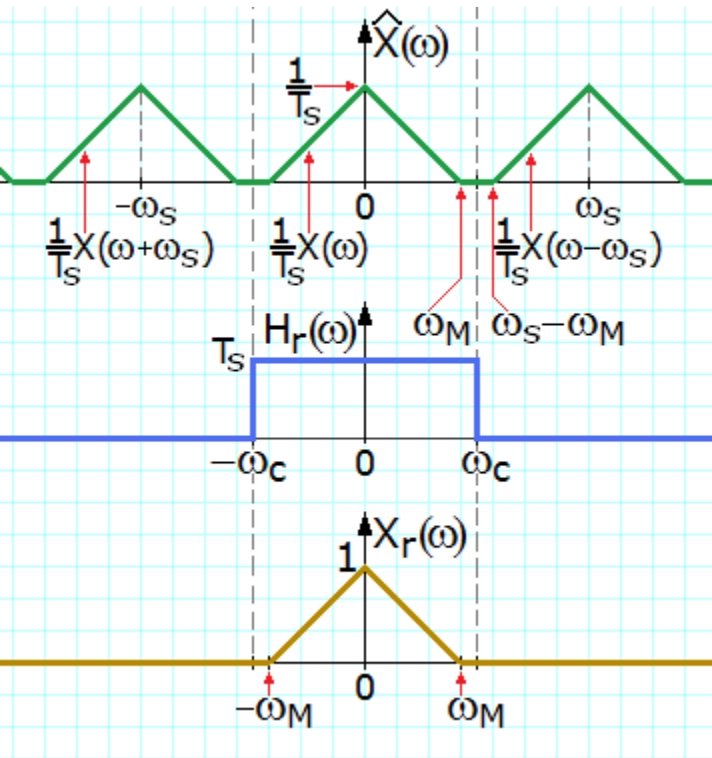
Fréquence d'échantillonnage (f_e)

Fréquence du sinus (f_m)

Le spectre d'un signal échantillonné se compose d'une série de raies réparties de part et d'autre des multiples de la fréquence d'échantillonnage. Les raies intéressantes pour la démodulation sont celles qui se situent aux alentours de 0, puisque ce sont celles qui correspondent au signal original.

Reconstruction du Signal :

$$|H_r(\omega)| = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$



La réponse est :

$$x_r(t) = \hat{x}(t) * h_r(t)$$

Le spectre est :

$$\begin{aligned} X_r(\omega) &= \hat{X}(\omega) \cdot H_r(\omega) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) T_s p_{\omega_c}(\omega) = X(\omega) \end{aligned}$$

$$x_r(t) = x(t)$$

Théorème d'Echantillonnage :WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon)

Si le signal d'énergie finie $x(t)$ a sa bande de fréquence limité à ω_M , ($X(\omega)=0$ for $|\omega| > \omega_M$), il complètement représenté par ses échantillons $\{x(nT_s)|n \in \mathbb{Z}\}$ si la fréquence d'échantillonnage est deux fois la fréquence maximum du signal

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

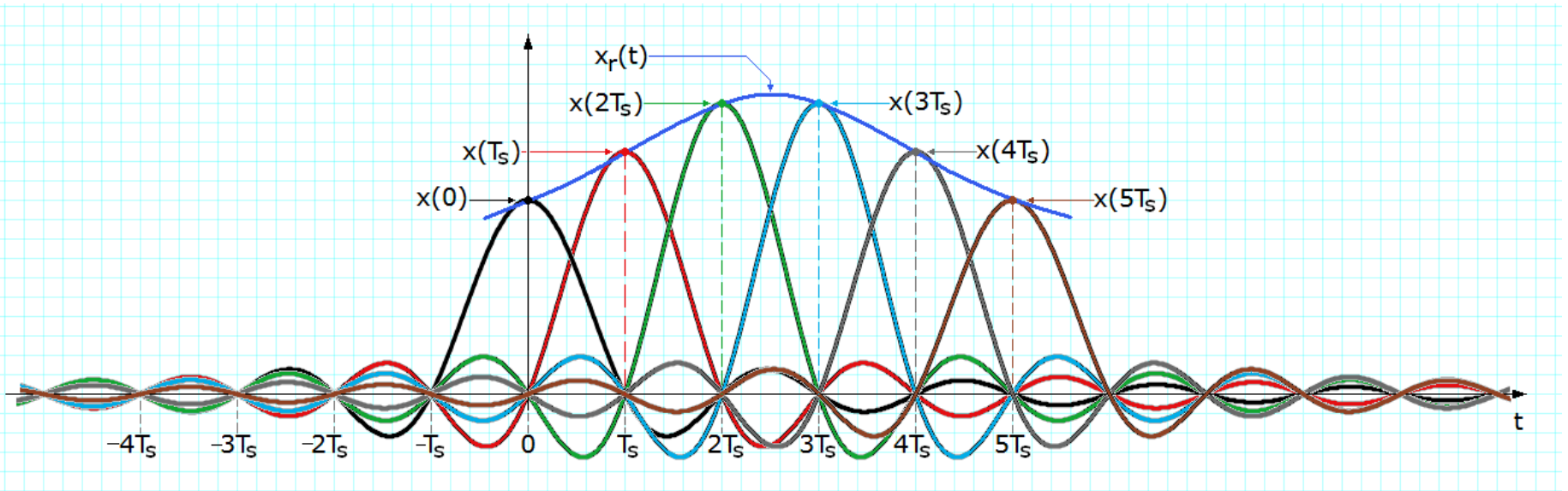
Et le signal original peut être reconstruit à partir de ses échantillons :

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_c}{\omega_s} x(kT_s) \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)}$$

Si la fréquence de coupure du filtre passe-bas est :

$$\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$

Reconstruction



Le signal est reconstruit par interpolation à partir des signaux de type

sin x / x.

$$x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M T_s (n-k)}{\omega_M T_s (n-k)}$$

$$\omega_M = \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta_{n,k} = x(nT_s)$$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{for } n = k \\ 0, & \text{for } n \neq k \end{cases}$$

✓ Échantillonnage et périodisation

- Échantillonnage idéal...

$$x_e(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kT] \delta(t - kT)$$

- ...Transformée de Fourier...

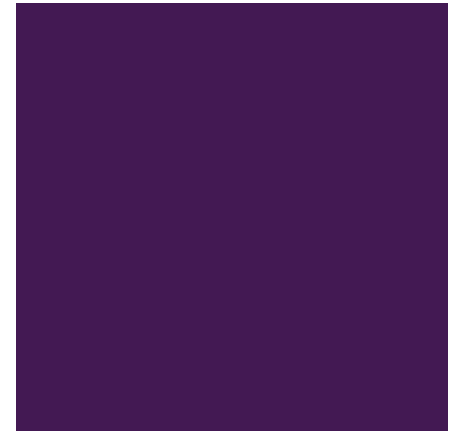
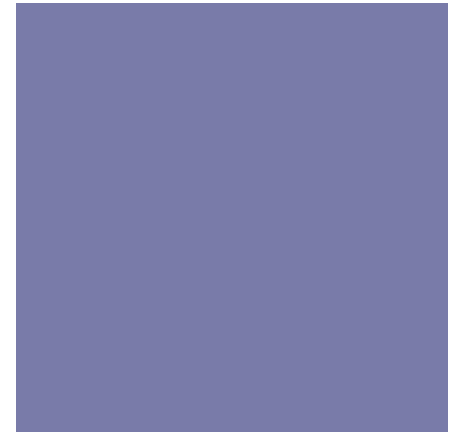
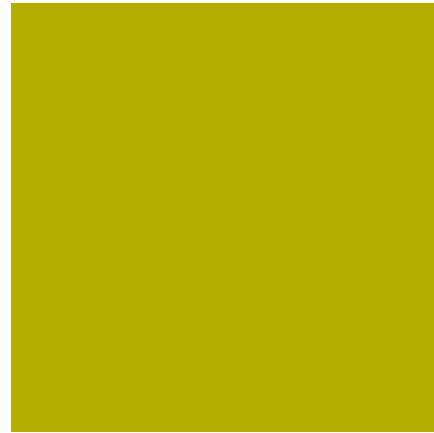
$$X_e(f) = \frac{1}{T} X(f) * \delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

⇒ ... *périodisation en fréquence.*

Échantillonnage temporel \Leftrightarrow périodisation en fréquence
Échantillonnage en fréquence \Leftrightarrow périodisation temporelle

+ Quelques valeurs

- En téléphonie, on utilise une largeur de bande de 300 à 3400 Hz. Dans le cadre du réseau numérique à intégration de services (RNIS, ISDN pour les anglo-saxons), on utilise une fréquence d'échantillonnage de 8000 Hz (au lieu des 6800 théoriquement nécessaires).
- La musique se satisfait de 16, voire 20 kHz de largeur de bande. Un disque CD (Compact Disc) utilise une fréquence d'échantillonnage de 44 kHz.
- **Remarque:** Dans les deux cas, il est essentiel que l'on ait au préalable limité la largeur de bande du signal original : des fréquences inaudibles dans le signal original deviennent audibles par le phénomène de repliement !



Encore

La Transformée de Fourier
mais
... Discrète

+ Systèmes linéaires

- *Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion unité*

$$y(k) = L\left[\sum x(l)\delta(k-l)\right] = \sum x(l)L[\delta(k-l)]$$

+ Transformée de Fourier à temps discret

- Si le temps est discrétisé

$$X(f) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) e^{-2j\pi f t} \quad \text{La T.F. est périodique de période 1}$$

- Et la transformée inverse

$$x(t) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2\pi jft} df$$

+ Propriétés

- $X(f)$ est périodique $T_0=1$

$$X(f+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) e^{-2j\pi(f+1)k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) e^{-2j\pi f k} e^{-2j\pi k} = X(f)$$

Remarques:

1. La transformée de Fourier de $X_a(t)$ d'un signal analogique n'est pas périodique
2. $X(f)$ est périodique $F_0=1$, tout intervalle de longueur unité est suffisant pour décrire complètement cette fonction

+ Règle de construction de la TFtd à partir de la TF de $x(t)$

$x(t)$ continue en t

$x_e(t = n\Delta T)$ la version échantillonnée ΔT période d'échantillonnage

$$x_e(n\Delta T) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - n\Delta T)$$

$$X_e(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - n\Delta T) \right) e^{-2\pi jft} dt$$

$$\begin{cases} X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T) e^{-2\pi jf(n\Delta T)} \\ x(n\Delta T) = \Delta T \int_{-1/2\Delta T}^{1/2\Delta T} X_e(f) e^{+2\pi jf(n\Delta T)} df \end{cases}$$

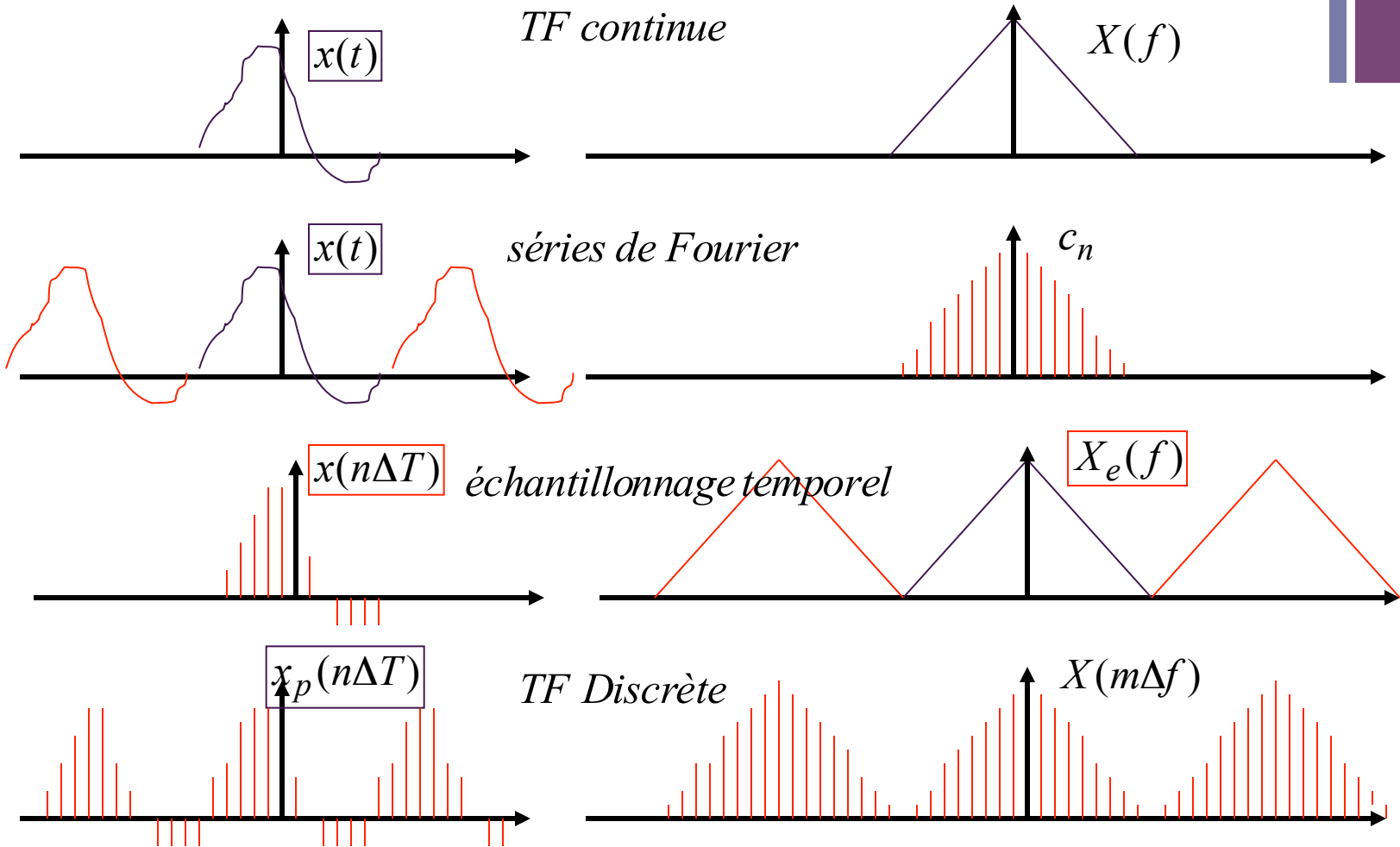
conclusion :

$x(n\Delta T) \Rightarrow X_e(f)$ est une fonction périodique en f de période $(1/\Delta T)$

- On divise l'axe des fréquence par F_e
- On périodise avec la période 1
- On divise l'amplitude par T_e

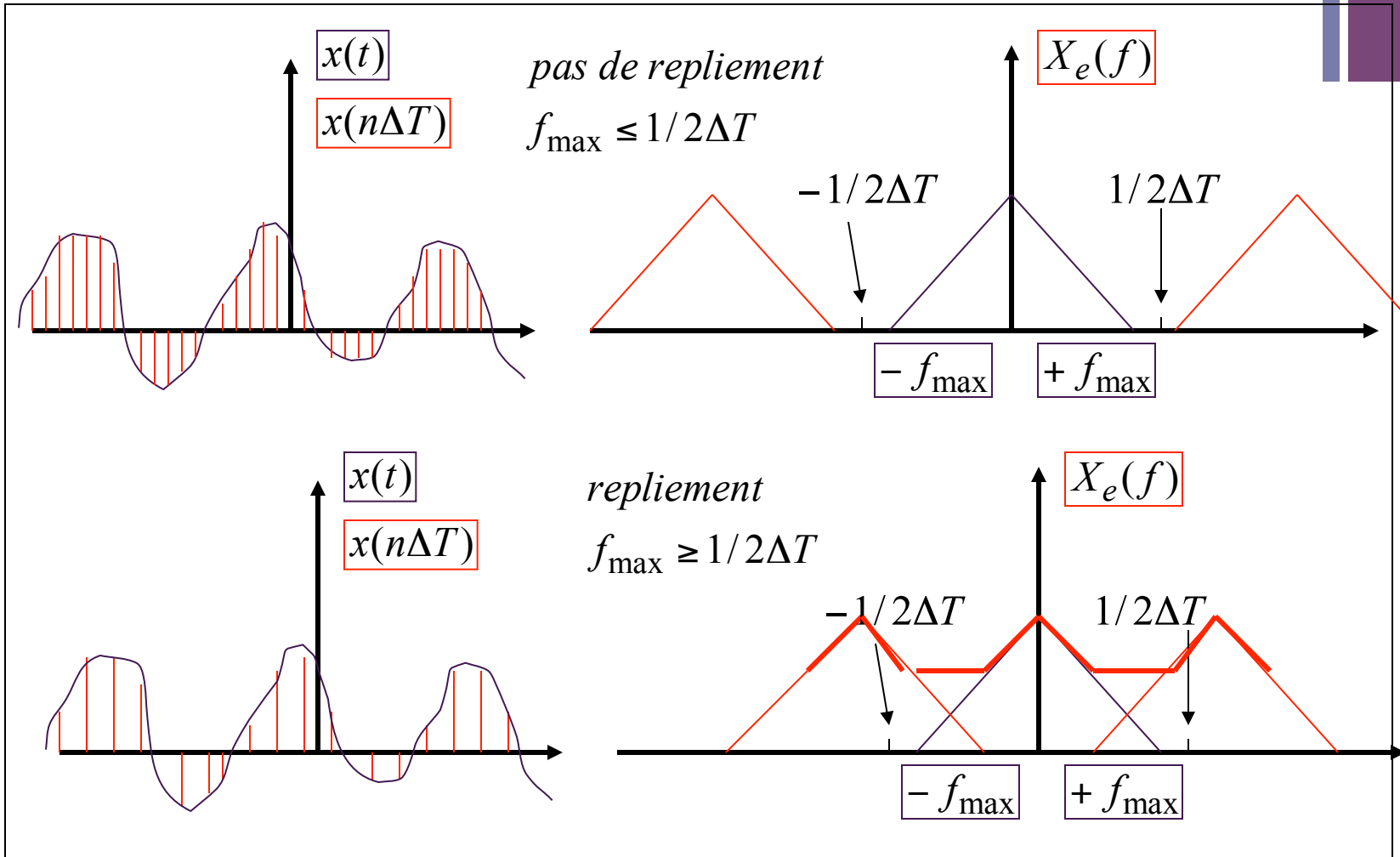
+ Transformée de Fourier Discrète

discrétisation T/F=Périodisation T/F (1)



Transformée de Fourier Discrète

repliement de spectre dans le domaine fréquentiel



+ Observations spectrales

- Précision
 - Pour mesurer la fréquence d' une seule sinusoïde
- Résolution
 - La capacité de mesurer des fréquences distinctes

+ Transformée de Fourier discrète

- En se limitant à un nombre fini de L valeurs de la fréquence, à savoir $f=k/L$, on obtient la Transformée de Fourier Discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi jkn/N}$$

- L est le nombre de points de calcul de Tftd et N est le nombre de points de la suite temporelle

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{nk} \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad \text{avec} \quad w_N = \exp(-2j\pi/N)$$

+ La Transformée de Fourier Rapide

■ Exemple $N=2^p$ où $p=3$

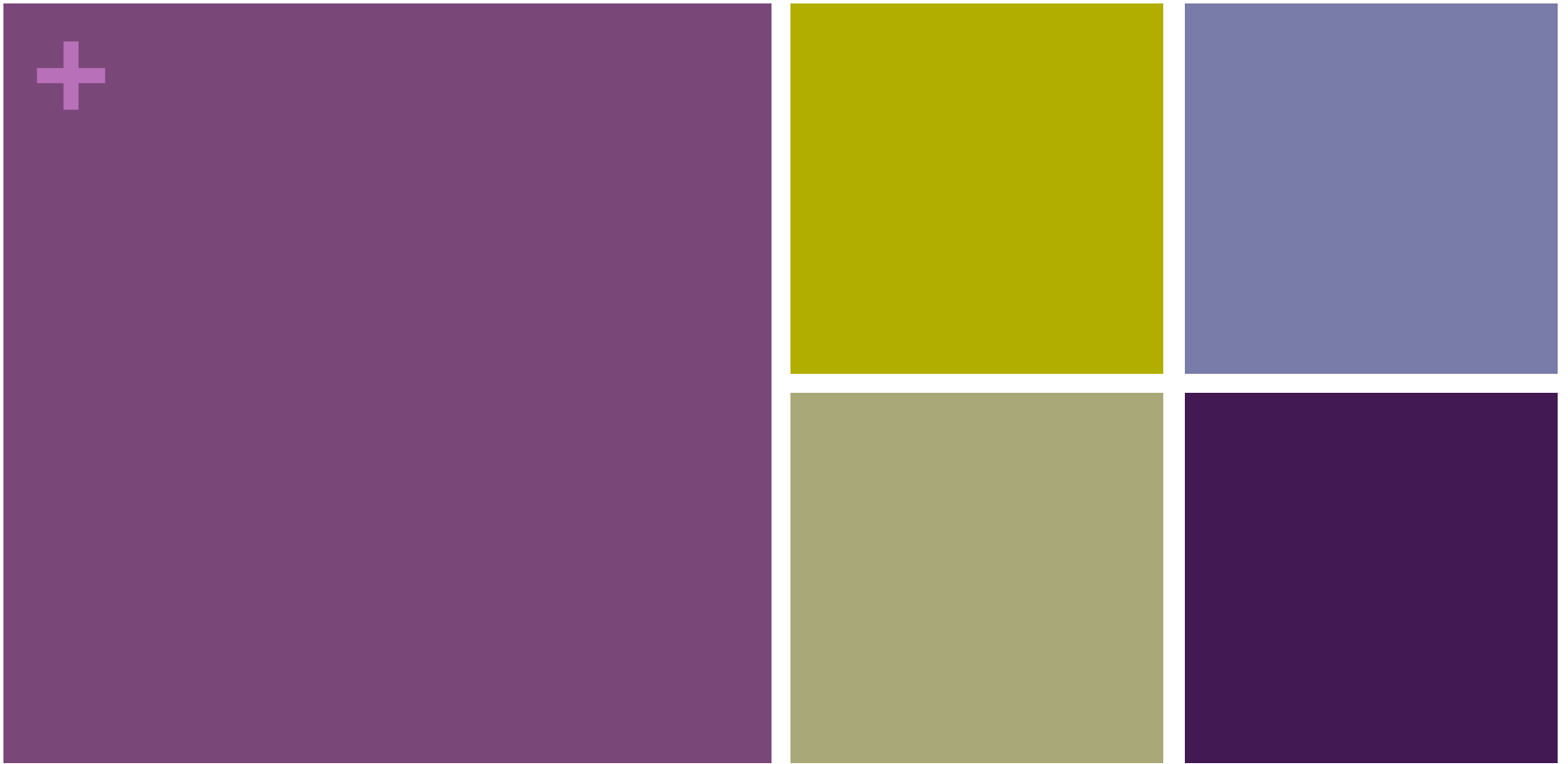
$$X_k = (x(0) + x(2)w_8^{2k} + x(4)w_8^{4k} + x(8)w_8^{6k}) + w_8^k (x(1) + x(3)w_8^{2k} + x(5)w_8^{4k} + x(7)w_8^{6k})$$

■ Ce qui donne

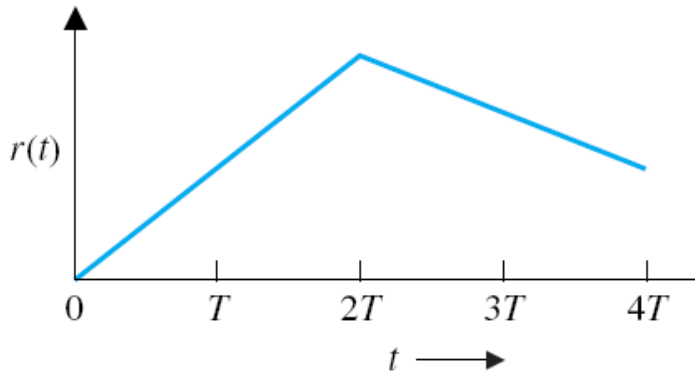
$$(x(0) + x(4)w_8^{4k}) + w_8^{2k} (x(2) + x(6)w_8^{4k})$$

$$(x(1) + x(5)w_8^{4k}) + w_8^{2k} (x(3) + x(7)w_8^{4k})$$

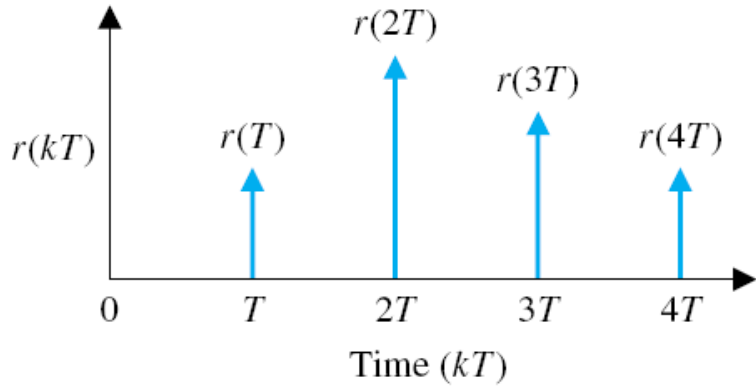
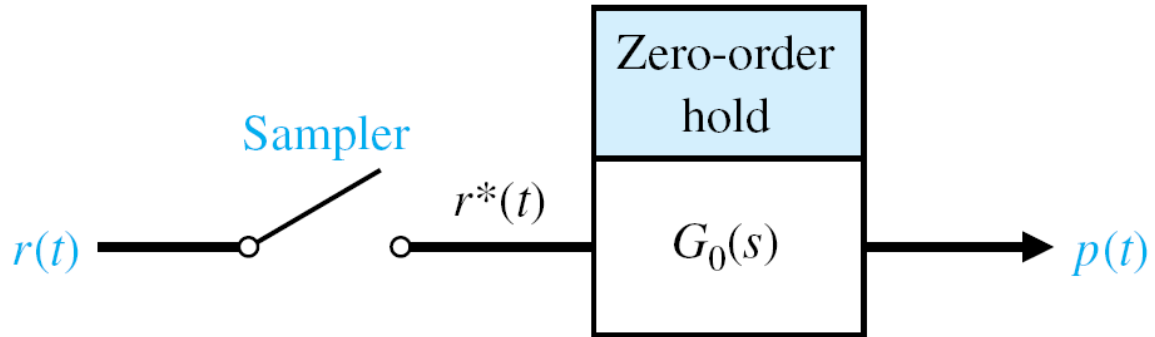
■ Une structure de papillon : addition, soustraction et multiplication



Echantillonnage avec Blocage

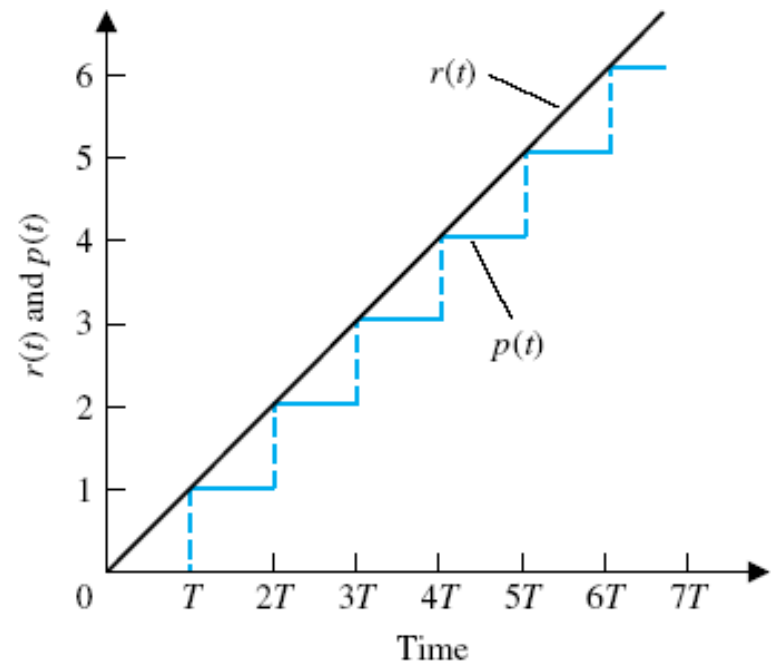
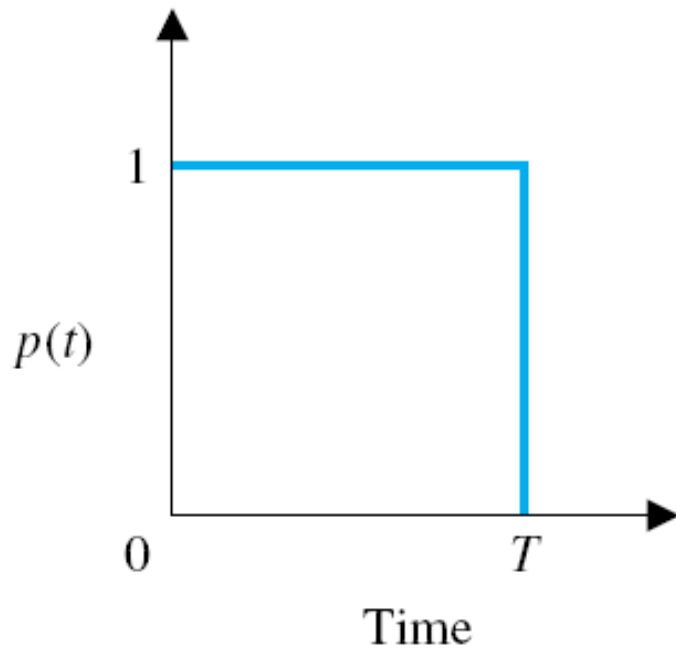


(a)

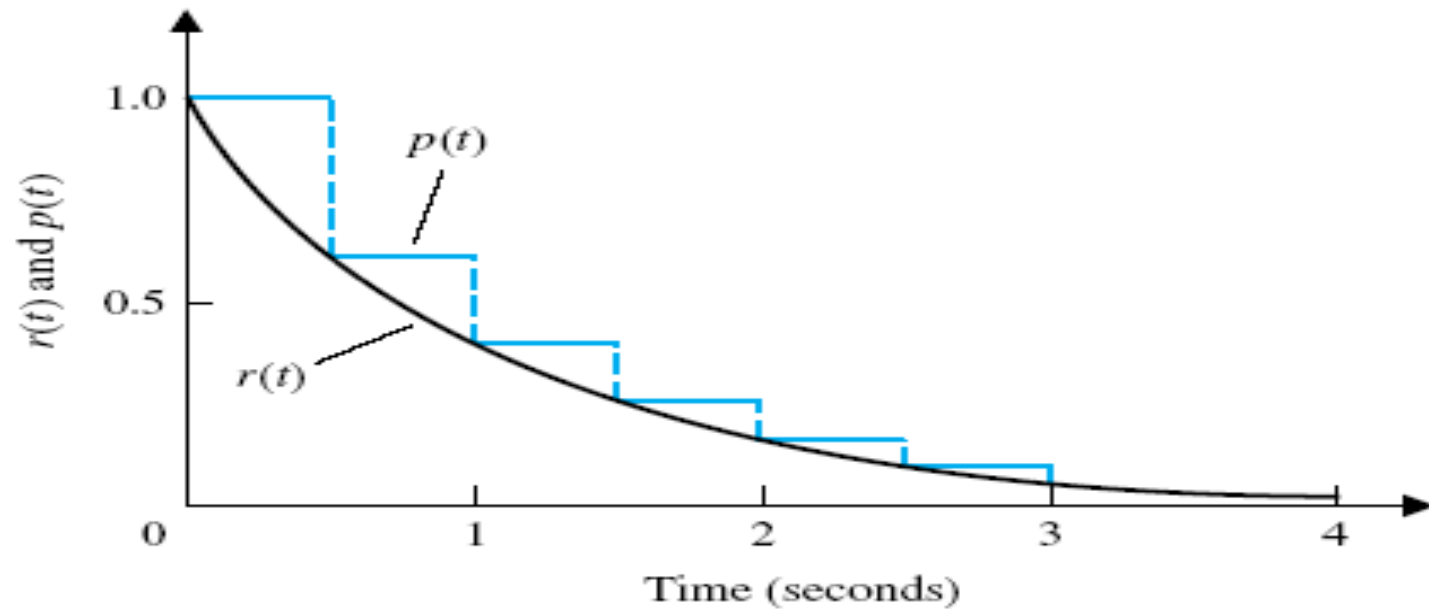




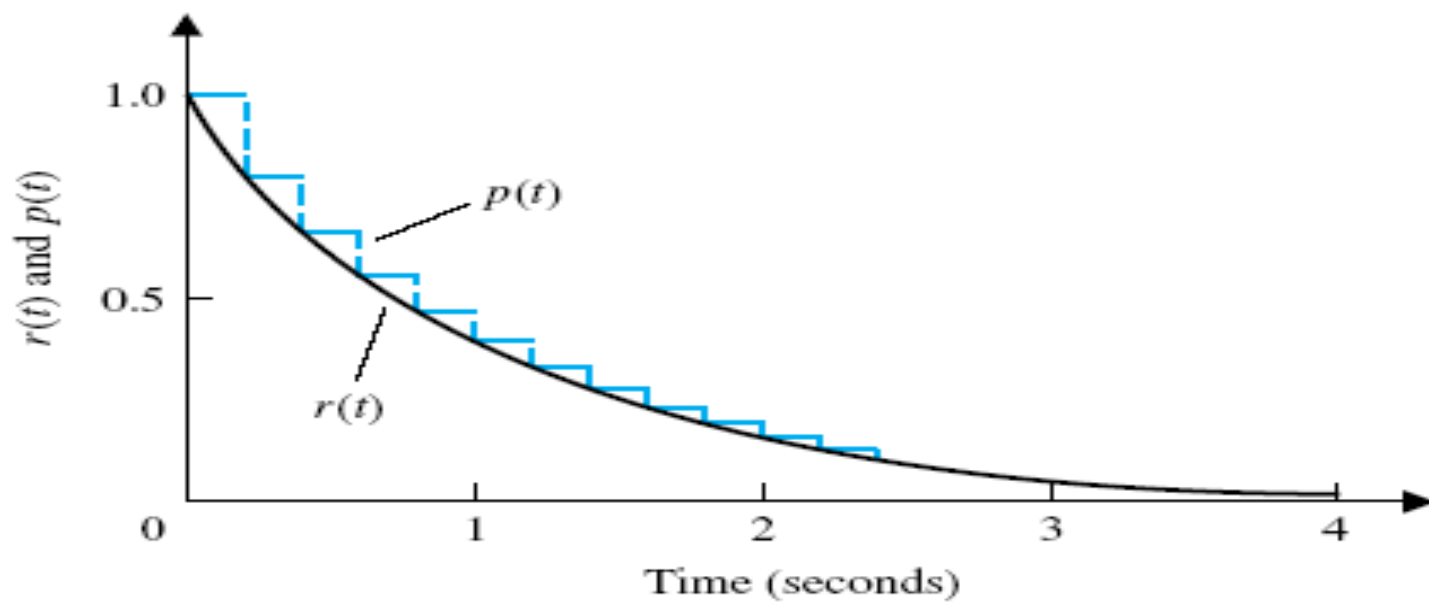
La Transformée Laplace d'un bloqueur d'ordre 0



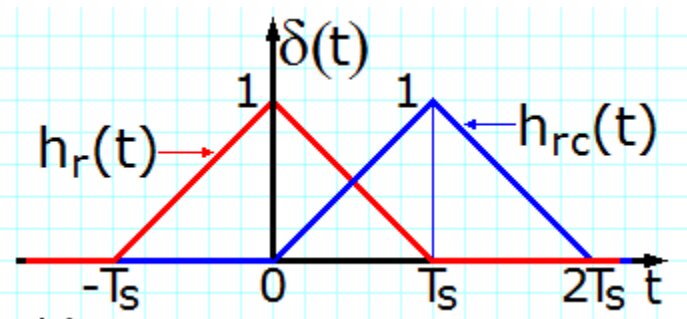
$$G_o(p) = 1/p - e^{pT} / p = (1 - e^{pT}) / p$$



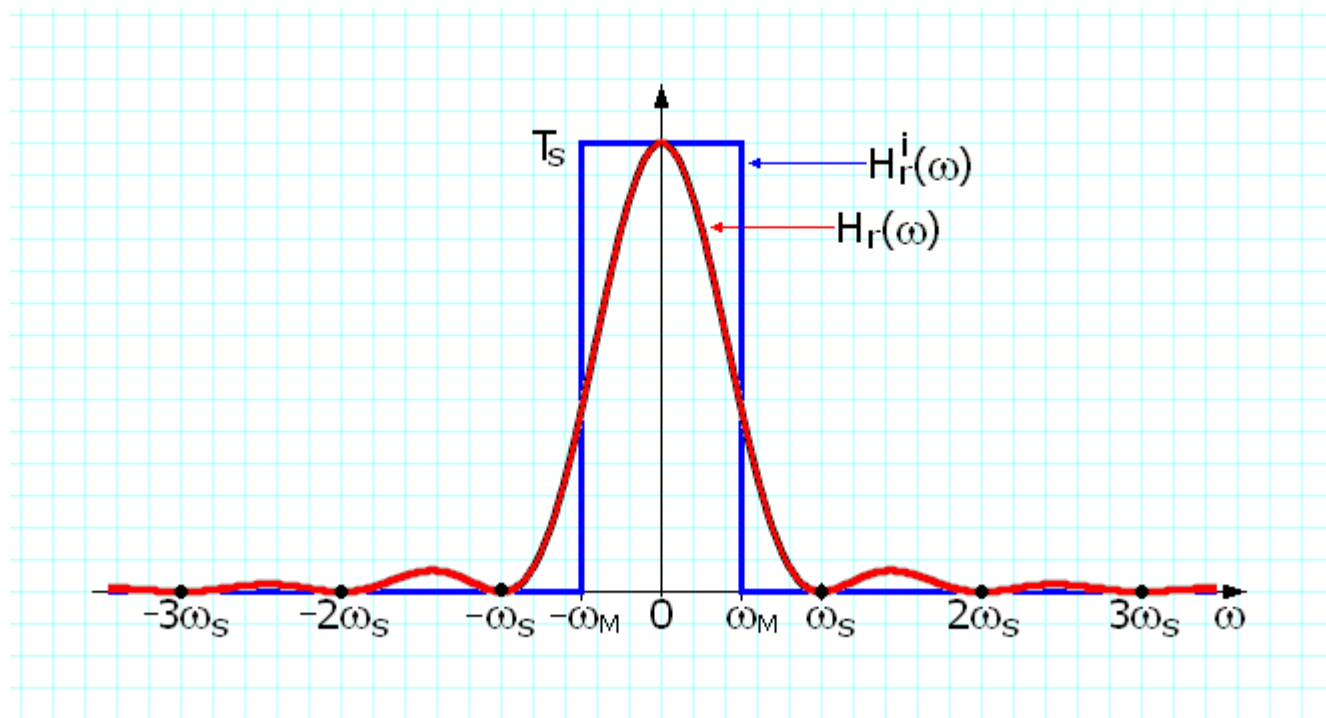
(a) $T = 0.5$ seconds



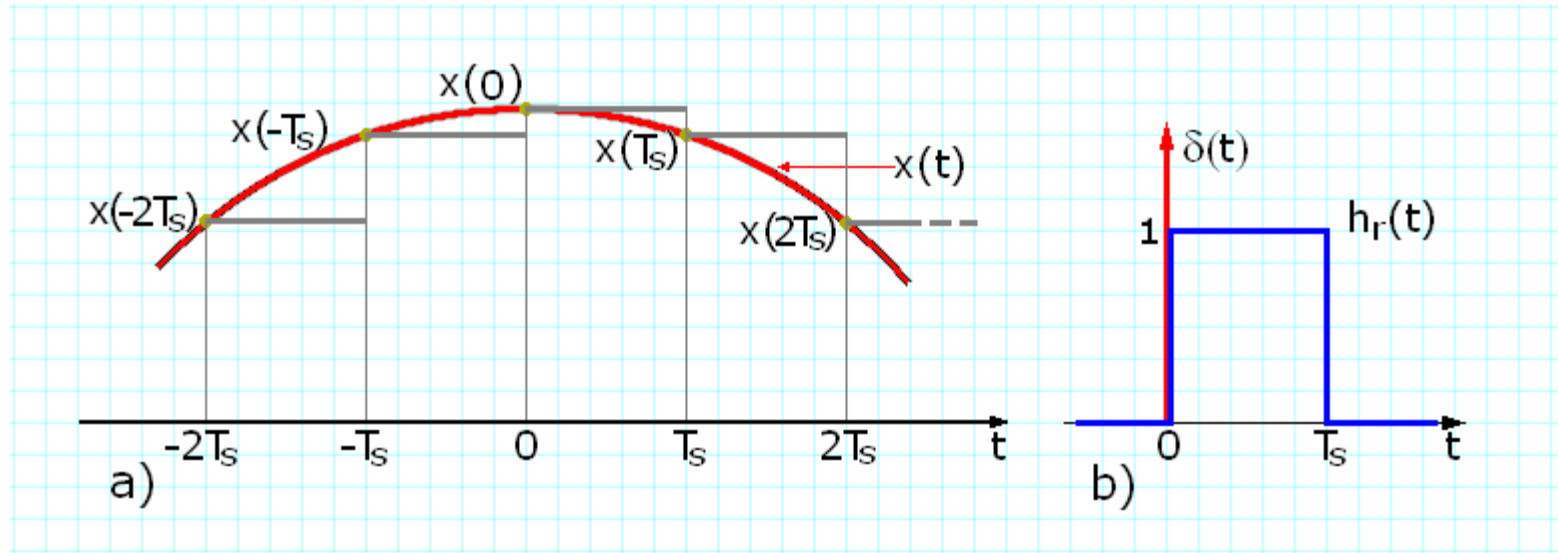
(b) $T = 0.2$ seconds



$$H_r(\omega) = T_s \left(\frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}} \right)^2 = T_s \left(\frac{\sin \frac{\omega}{\omega_s} \pi}{\frac{\omega}{\omega_s} \pi} \right)^2$$



Reconstruction par Extrapolation : Bloqueur d'ordre zéro



$$h_r(t) = p_{\frac{T_s}{2}}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) \longleftrightarrow e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega T_s}{2}}{\omega} = e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} T_s \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$H_r(\omega) = e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} T_s \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}} = e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}} \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}}$$