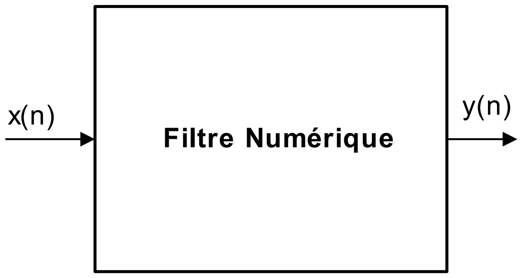
Filtrage
Master2-FILS

TP6. FILTRAGE NUMERIQUE

1. Introduction

Dans les filtres analogiques, l'entrée et la sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Pour les filtres numériques l'entrée et la sortie sont reliées par une équation aux différences linéaire à coefficients constants.



$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Comme pour les filtres analogiques, la sortie d'un filtre numérique est le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle h(n).

$$y = h * x$$

$$y(n) = \sum_{p} h(n-p)x(p) = \sum_{p} h(p)x(n-p)$$

La représentation fréquentielle est donné pour les signaux échantillonnés par la Transformée en Z.

2. Transformée en Z

Les fonctions de transfert sont décrites par :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z)$$

où

$$B(z) = b(1) + b(2)z^{-1} + \cdots + b(M)z^{-(M-1)}$$

$$A(z) = a(1) + a(2)z^{-1} + \cdots + a(N)z^{-(N-1)}$$

$X(z)$ et $Y(z)$ sont les transformée en Z de l'entrée et de la sortie $x(n)$ et respectif $y(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n}$$

En MATLAB le filtre $H(z)$ est représenté par des vecteurs formés par les coefficients polynomiaux de $B(z)$ et $A(z)$.

Un filtre numérique est un système discret utilisé dans le but de modifier l'amplitude et/ou la phase d'un signal. Les systèmes utilisés sont linéaires et invariants en temps. La réponse dans le domaine temps d'un SDLIT est donnée par le produit de convolution entre le signal d'entrée x[n] et la réponse impulsionelle notée h[n]

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum h[k]x[n-k]$$

Par l'utilisation de la transformée Z nous avons :

Y(z)=H(z)X(z)

Où H(z) est la fonction de transfert du SDLIT. Pour avoir des filtres réalisables physiquement il faut imposer la causalité et la stabilité du système.

Le système décrit par des équations aux différences finies

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

nous permet de définir deux types de filtres :

Filtres à réponse impulsionnelle infinie RII

$$X(z) = \sum_{n} x[n] z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Les pôles peuvent s'interpréter comme des résonances.

Filtres à réponse impulsionnelle finie RFI

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1}$$

Filtres à réponse impulsionnelle infinie RII

3. MATLAB

La réponse à une impulsion d'un système linéaire invariant sous MATLAB

Syntaxe Matlab

```
[h,t]=impz(b,a)
[h,t]=impz(b,a,n)
[h,t]=impz(b,a,n,Fs)
```

Déterminer et représenter graphiquement la réponse impulsionnelle d'un SLIT définie par l'équation :

1.y[n]-0.9y[n-1]=0.3x[n]+0.6x[n-1]+0.6x[n-2]

2. $H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}}{1-1.8\cos(\pi/16)z^{-1}+0.8z^{-2}}$

Solution :

1.

```
b=[0.3,0.6,0.6] ;
a=[1,-0.9]
[h,t]=impz(b,a) ;
impz(b,a),grid
stem(t,h),grid
```

2.

```
b=[1,0.5]
a=[1,-1.8*cos(pi/16)),0.81] ;
h=impz(b,a) ;
impz(b,a),grid
```

La réponse fréquentielle d'un système linéaire invariant sous MATLAB

[H,W]=freqz(b,a,n)
[H,W]=freqz(b,a,n,Fs)
freqz(b,a)

Exercice

Déterminer la réponse en fréquence du système défini par :

1. y[n]-0.9y[n-1]=0.3x[n]+0.6x[n-1]+0.3x[n-2]
2. $H(z)=\dfrac{0.634-0.634z^{-2}}{1-0.268z^{-2}}$

b=[0.3,0.6,0.3]
a=[1,0.9]
[H,W]=freqz(b,a) ;.
figure(2) ; freqz(b,a) ;

.

Réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée sous MATLAB

Syntaxe :
Y= filter(b,a,x) ;

Exercice :
Déterminer la sortie d'un système défini par :

a) y[n]-0.9y[n-1]=0.3x[n]+0.6x[n-1]+0.6x[n-2]

b) $H(z)=\dfrac{1+0.5z^{-1}}{1-1.8\cos(\pi/16)z^{-1}+0.8z^{-2}}$

à la séquence d'entrée x1[n]=u[n]-u[n-10],   0<=n<=40

```
b=[0.3,0.6,0.6]
a=[1,-0.9]
x=[ones(1,10),zeros(1,31)] ;
y=filter(b,a,x) ;
n=0 :40 ;
subplot(3.1.1),stem(n,x),grid,title(x[n]')
subplot(3.1.2),impz(b,a), grid, title,('h[n]')
subplot(3.1.3), stem(n,y),grid,title('y[n]')
b=[1,0.5]
a=[1.-1.8*cos(pi/16),0.8] ;
y=filter(b,a,x) ;
subplot(3.1,1),stem(n,x),grid,title('x[n]')
subplot(3.1,2),stem(b,a),grid,title('h[n]')
subplot(3.1,3),stem(n,y),grid,title('y[n]')
```

Filtres à réponse impulsionnelle finie RFI

Synthèse par la méthode des fenêtres

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Type de filtre	*h(n)*	*h(0)*
FPB	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	***$2f_c$***
FPH	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	***$1-2f_c$***
FPBande	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	***2(f2-f1)***
F Réjecteur	$-2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} + 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	***1-2(f2-f1)***

Etudier l'effet de la troncature sur la réponse en fréquence

Fenêtre	**L de la bande de transition normalisée**	**Ripple dB**	**Lobe principal dB**	**Attenuation dans la bande d'arrêt**	**Function |n|<=(N-1)/2**
Rectang.	0.9/N	0.7416	13	21	1
Hanning	3.1/N	0.0546	31	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3.9/N	0.0194	41	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5.5/N	0.0017	57	75	
Kaiser					

Exercice

Calculer les coefficients du RIF passe-bas avec les spécifications :
Fréquence de coupure Fc=1.5 kHz
Largeur de la bande de transition 0.5 kHz
Atténuation dans la bande d'arrêt > 50 dB
Fréquence d'échantillonnage 8 kHz