FILS Master2 2013

TD3 - FFT

Convolution

1. Trouver la convolution numérique des signaux :
   $x(n)=0.5n[u(n)-u(n-6)]$ et
   $h(n)=2\sin(n\pi/2)\ [u(n+3)-u(n-4)]$
2. Vérifier en utilisant la commande ***conv***

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier à temps discrets est :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n}$$

où $\omega = 2\pi f / F_s$ est la pulsation normée.
C'est une fonction à fréquence continue. Il est d'usage de la représenter sur l'intervalle (-1/2,1/2) ou (0.1), du fait de sa périodicité.

Donc, la transformée de Fourier discrète est :

$$X(k) = \sum_n x[n]e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$$

k=0,1,…,N-1

Syntaxe :
Y=fft(x) ;

Exemple : Décalage en temps

Soit {x[n]} un signal nul à l'extérieur de l'intervalle {-n0,…,n1} où n0 et n1 sont deux entiers positifs et soit y(n)=x(n-n0) obtenu par décalage en temps de n0 échantillons.

1. Déterminer la TFtd de {x[n]} en fonction de celle de {y[n]}
2. Ecrire un programme qui vérifie le résultat précédent pour n0=5. Pour cela prendre x[n] égal entre –5 et 5 et y(n)=x(n-5). Pour évaluer numériquement la TFtd sur 256 points de fréquence uniformément répartis sur l'intervalle (0.1) on utilise la fonction fft.

Solution

```
Clear ; clg
Lfft=256 ;
f=(0 :Lfft-1)/Lfft ;
n0=5 ;n1=5 ;
yt= ones(n1+n0+1,1) ;
yf=fft(yt,LFFT) ;
xf=yf.*exp(+2*j*pi*5*f') ;
plot(real(xf)) ;
plot(imag(xf)) ;
```

Exercice :

Calculer les transformées de Fourier discrètes des séquences :

1. x1[n]=u[n]-u[n-10]
2. x2[n]=sin(nπ/5)
3. x3[n]=cos(nπ/5)

```
n=0 :20 ;
zeros=[ones(1,10),zeros(1,11)] ;
X=fft(x1) ;
plot(X) ;
```

ou

```
w=-pi :2*pi/512 :pi-2*pi/512 ;
plot(w,fftshift(abs(x1))),grid
plot(w,fftshift(angle(x1))),grid
```

Observation d'une sinusoïde complexe

1. Considérons la suite x(n) obtenue par échantillonnage de la sinusoïde complexe $exp(2j\pi F_0 t)$ à la cadence Fe=1/T. En posant $f_0=F_0/Fe<1$ on a x(n)=$exp(2j\pi f_0 n)$.

a) Déterminer l'expression de la TFtd de la suite $x(n)=\exp(2j\pi f0n)$ *où* $fo=7/32$ *et* $n\in\{0,\ldots,31\}$. En déduire la valeur de la TFtd aux points de fréquence $f=k/32$, pour $k\in\{0,\ldots,31\}$
b) En utilisant la commande ***fft,*** afficher le module de la TFD de *x(n)*
c) Soit à présent f0=0.2. Afficher le module de la TFD de x(n). Comment expliquez-vous le résultat obtenu ?

Théorème d'échantillonnage

1. Générez un signal sinusoïdal grâce au code suivant :

```
t = 0:0.01:10;
x = sin(2*pi*5*t);
plot(t(1:100),x(1:100));
```

a) Quelle est la fréquence maximale du signal analogique ?
b) Quelle est ici la fréquence d'échantillonnage ?
c) `x` est donc un signal échantillonné, donc conceptuellement obtenu en multipliant le signal analogique *sin(2pft)* par un train d'impulsions unités de période $\Delta t = 1/Fe$, où *Fe* est la fréquence d'échantillonnage. Par les propriétés de la Transformée de Fourier, le spectre de ce signal échantillonné est donc celui du signal analogique convolue avec la Transformée de Fourier du train d'impulsion unités. Quelle est donc l'allure du spectre du signal échantillonné ?
d) Dans Matlab, calculez le spectre d'amplitude de ce signal, en utilisant les commandes *abs* et ***fft***, et affichez ce spectre par les commandes ***plot*** et ***fftshift***. Commentez.
e) La relation qui lie la fréquence d'échantillonnage *Fe* et la résolution fréquentielle Δf de cette représentation est la suivante :

$$\Delta f = \frac{Fe}{N}$$

avec *N* le nombre de points d'échantillonnage du signal. Analysez donc le graphique obtenu, éventuellement en zoomant sur la partie intéressante du spectre grâce à la commande *zoo*m
f) Le théorème d'échantillonnage, où théorème de Shannon, précise que, afin de pouvoir reconstruire le signal original sans erreur, la fréquence d'échantillonnage d'un signal analogique doit être au moins le double de la fréquence maximale présente dans le signal. Quelle conclusion en tirez-vous quant à l'échantillonnage du signal *x(t)* ci-dessus ?
g) Augmentez la fréquence du signal analogique : 10 Hz - 15 Hz, 20 Hz, … . Que constatez-vous ?
h) Continuez à l'augmenter progressivement jusqu'à 70 Hz - 80 Hz et au delà. Que se passe-t-il ? Commentez et expliquez. Générez et analysez d'autres signaux, telle la somme de deux sinus. Mettez en évidence les mêmes effets.