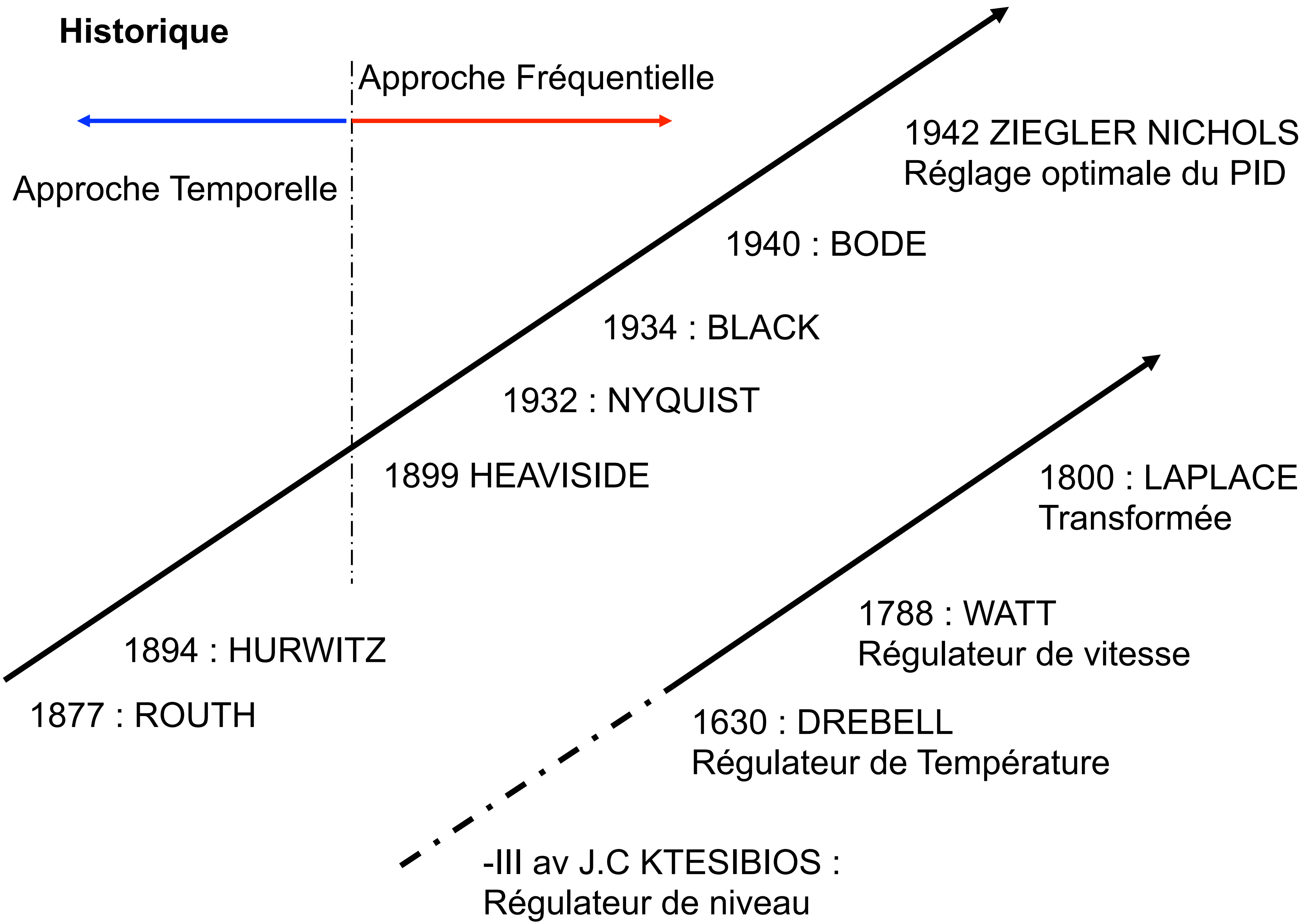
Correcteurs Numériques

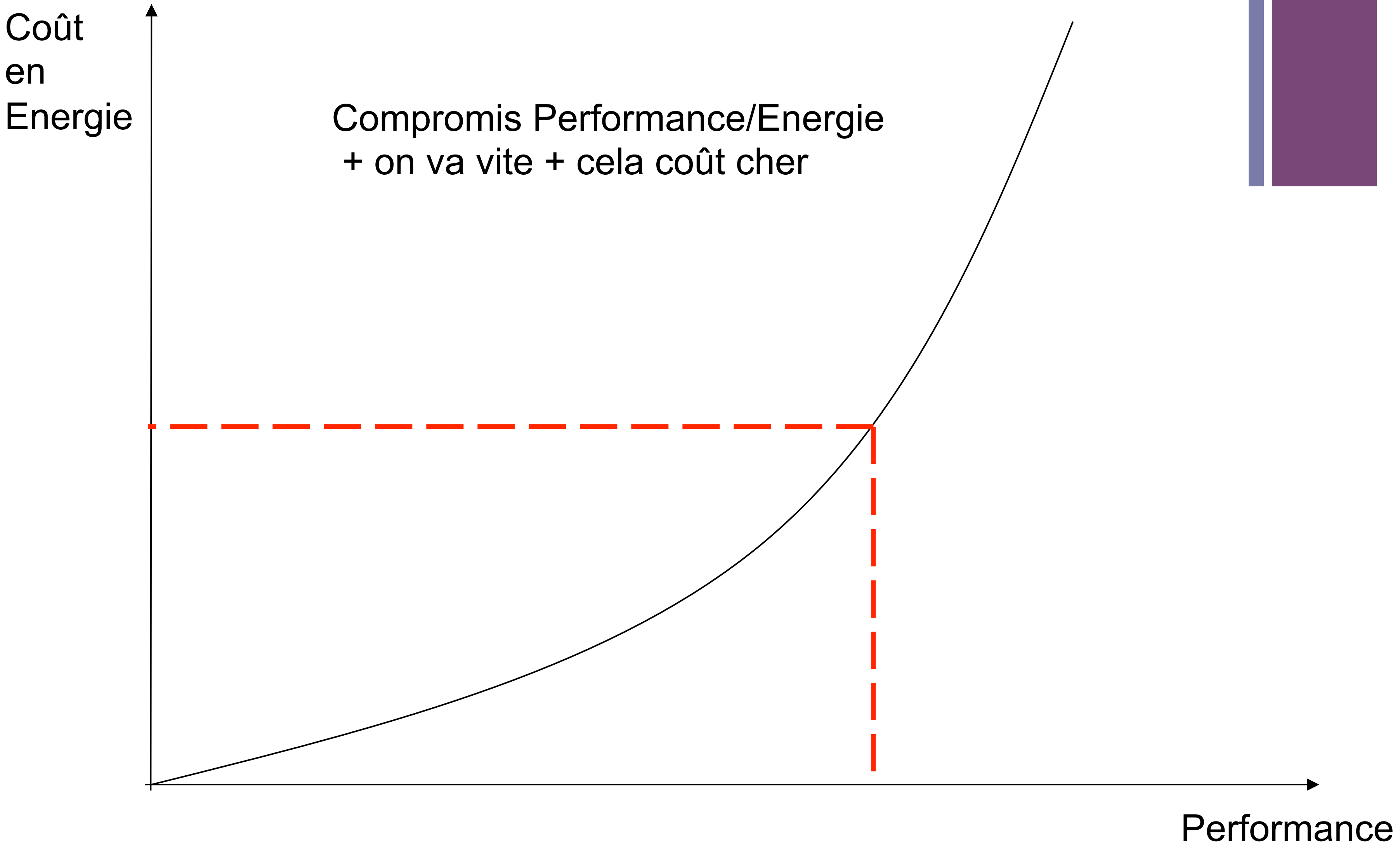
Andrei Doncescu
LAAS-CNRS

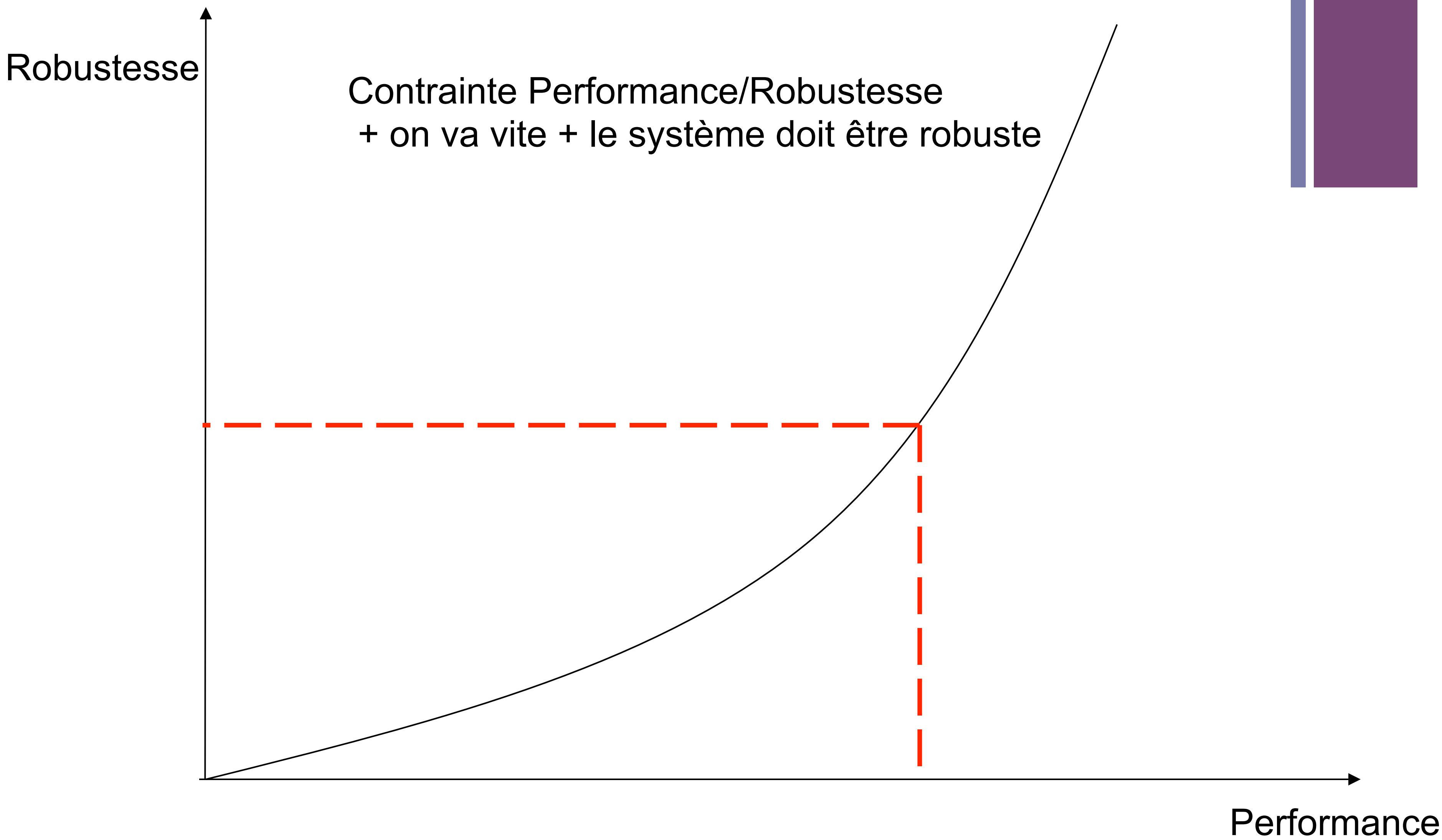
Plan

- Les racines dans le plane-z.
- Location des Poles et temps de résponse.
- Contours dans le plane-Z.
- Correcteur Proportionnel
- Correcteur P.I.D.

Historique


Approche Fréquentielle
Approche Temporelle
1942 ZIEGLER NICHOLS
Réglage optimale du PID
1940 : BODE
1934 : BLACK
1932 : NYQUIST
1899 HEAVISIDE
1894 : HURWITZ
1877 : ROUTH
1800 : LAPLACE
Transformée
1788 : WATT
Régulateur de vitesse
1630 : DREBELL
Régulateur de Température
-III av J.C KTESIBIOS :
Régulateur de niveau


Coût
en
Energie
Compromis Performance/Energie
+ on va vite + cela coût cher
Performance


Robustesse
Contrainte Performance/Robustesse
+ on va vite + le système doit être robuste
Performance

Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

- Considérons la fonction de transfert en B.O. , G(p) placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

$$G(z) = \frac{K(1-e^{-\frac{T_s}{\tau}})}{z-e^{-\frac{T_s}{\tau}}} \Rightarrow H(z) = \frac{K\left(1-e^{-\frac{T_s}{\tau}}\right)}{z-e^{-\frac{T_s}{\tau}}+K\left(1-e^{-\frac{T_s}{\tau}}\right)}$$

<u>Remarque</u> : Bien Noter que l'on pas le droit de déduire la fonction de transfert Échantillonnée en B.F. à partir de la fonction de transfert continue en B.F

Le Système en temps continu est toujours stable, le système échantillonné pourrait ne pas être.

$$z_1 = K\left(e^{-\frac{T_s}{\tau}} - 1\right) + e^{-\frac{T_s}{\tau}}$$

Le système est stable si le pôle est en module <1

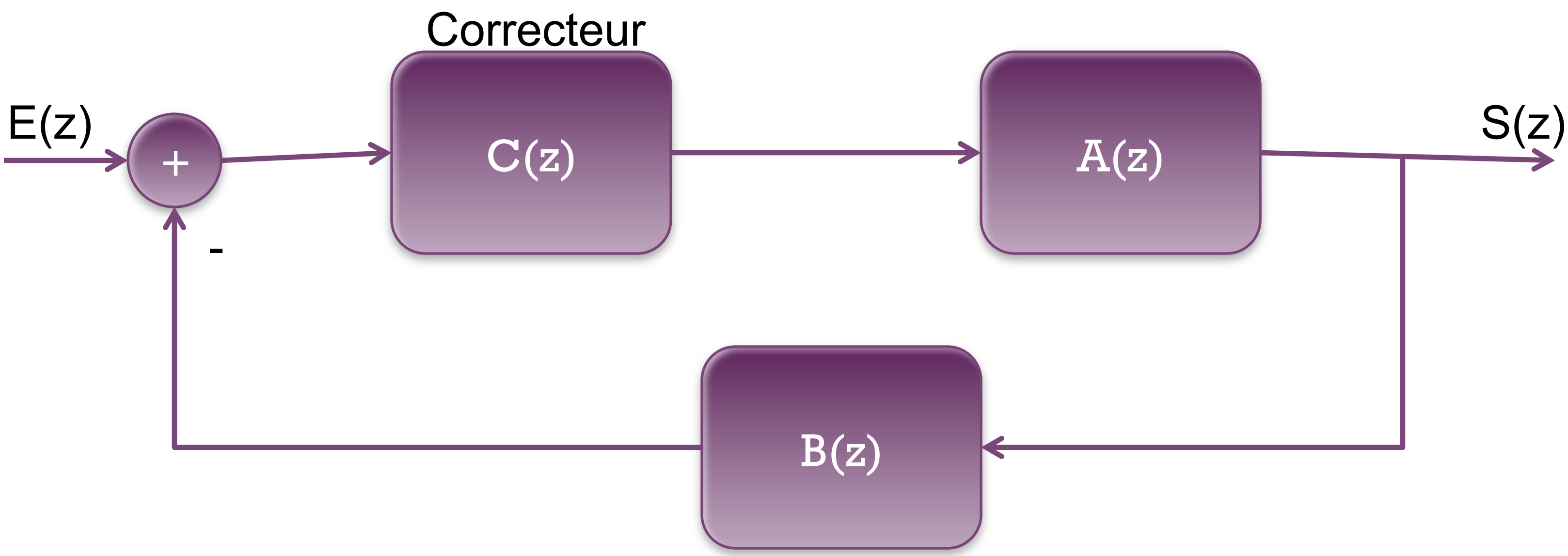
$$|z_1| < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

$$T_s < \tau \ln \frac{1 - K}{1 + K}$$

La Régle adopté par les automaticiens, consiste à évaluer la Bande Passante Et choisir

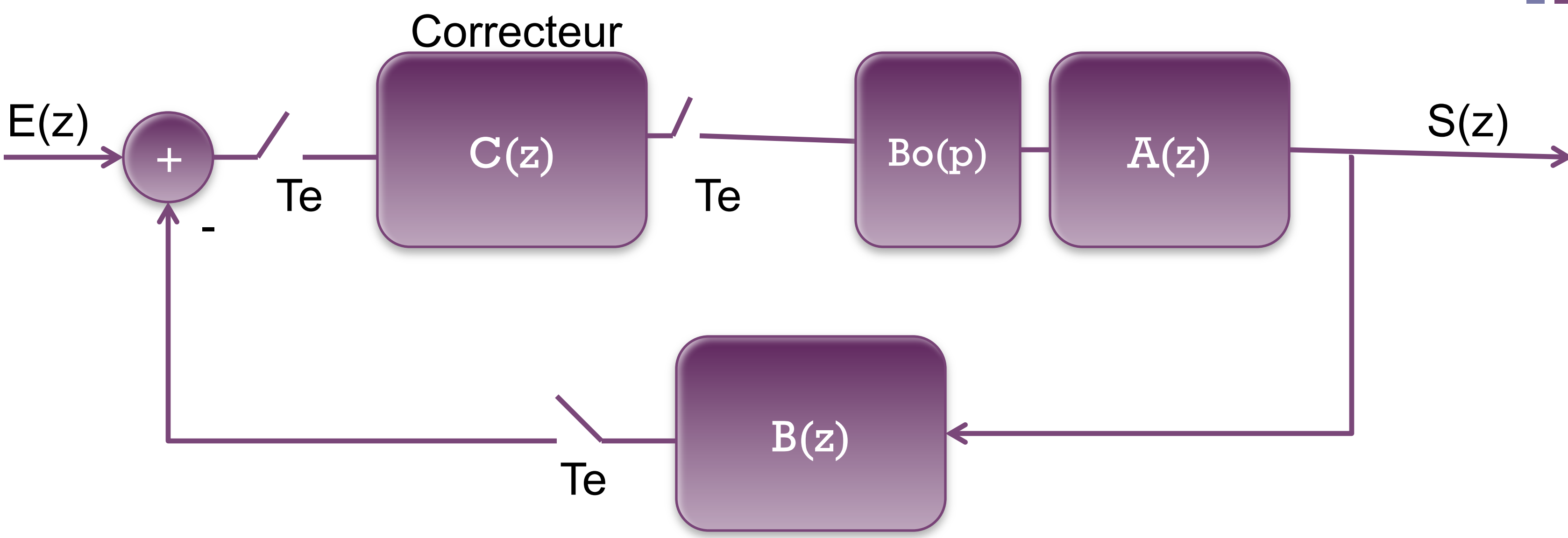
$$\boxed{6 f_{pass} < f_s < 25 f_{pass}}$$

+ Rôle du Correcteur



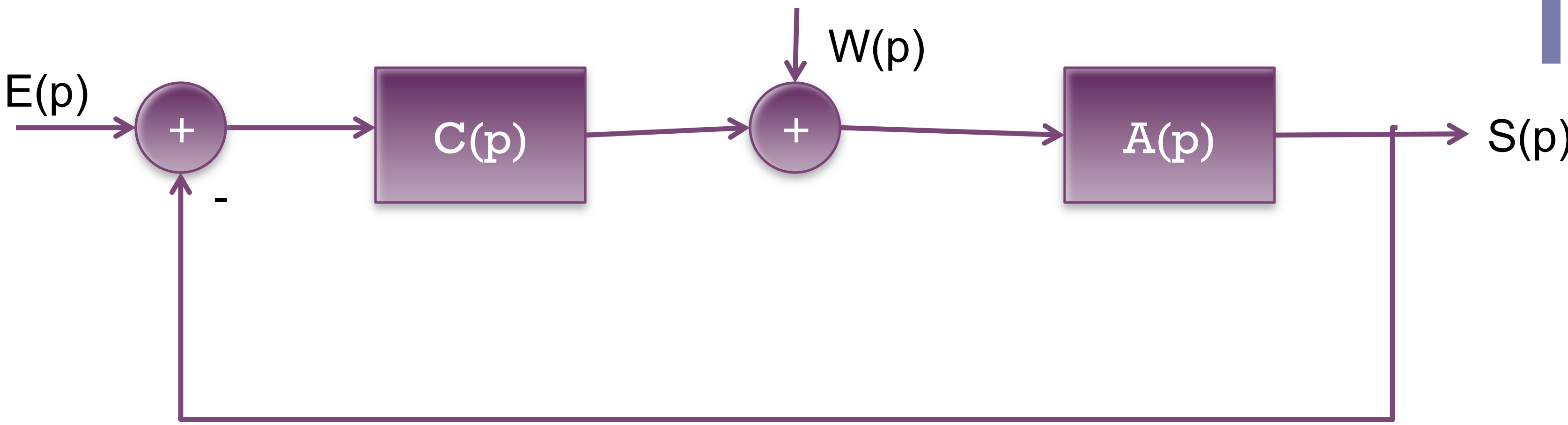
Correction des systèmes Numériques : Bien choisir la fonction de transfert C(z) de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise.

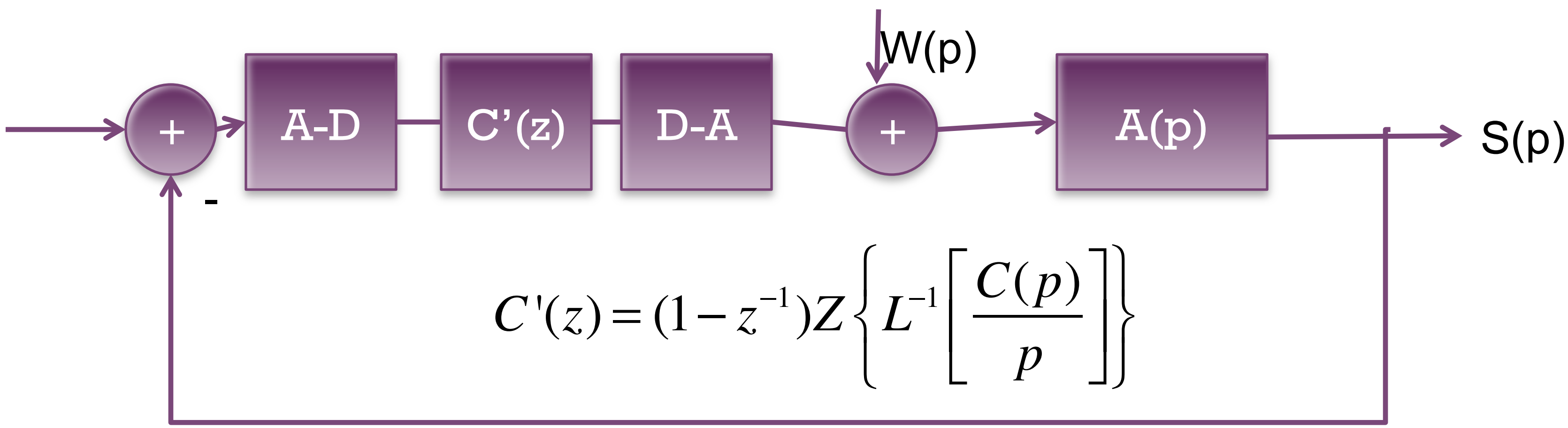
Correction Numérique d'un système à temps continu



- L'intérêt d'un correcteur numérique : souplesse et précision

Transformation d’un schéma fonctionnel d’un S.A. par adjonction de convertisseurs A-D et D-A





$$C'(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{ L^{-1}\left[\frac{C(p)}{p} \right] \right\}$$

+ Problèmes Spécifique liés aux correcteurs numériques

- Principe d'Equivalence :

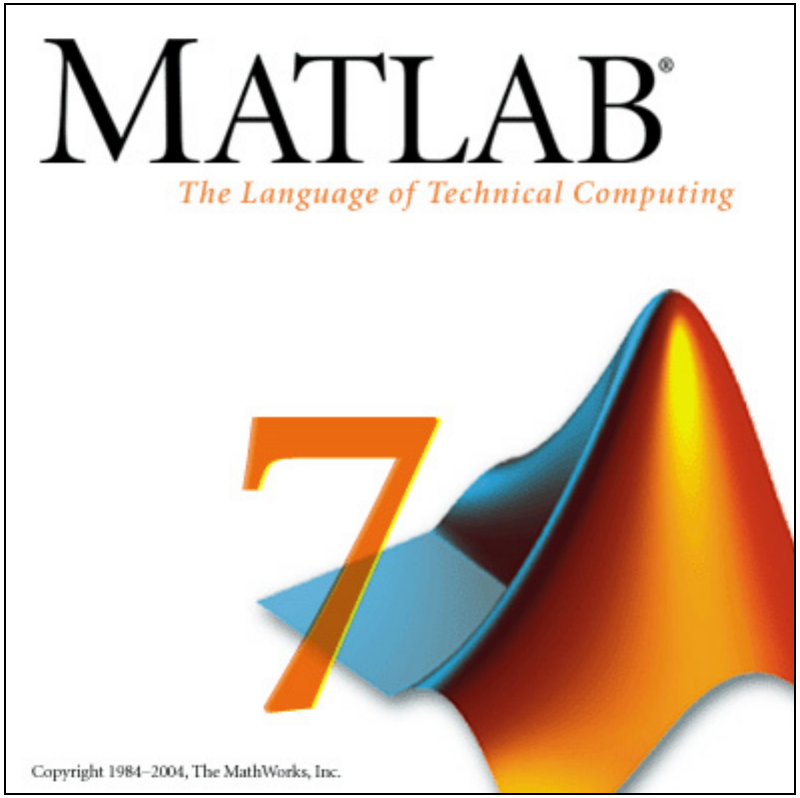
Action Proportionnelle : $C(p) = K \leftrightarrow C(z) = K$

Action intégrale : $C(p) = \frac{1}{p} \leftrightarrow C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

Action Dérivée : $C(p) = p \leftrightarrow C(z) = 1 - z^{-1}$

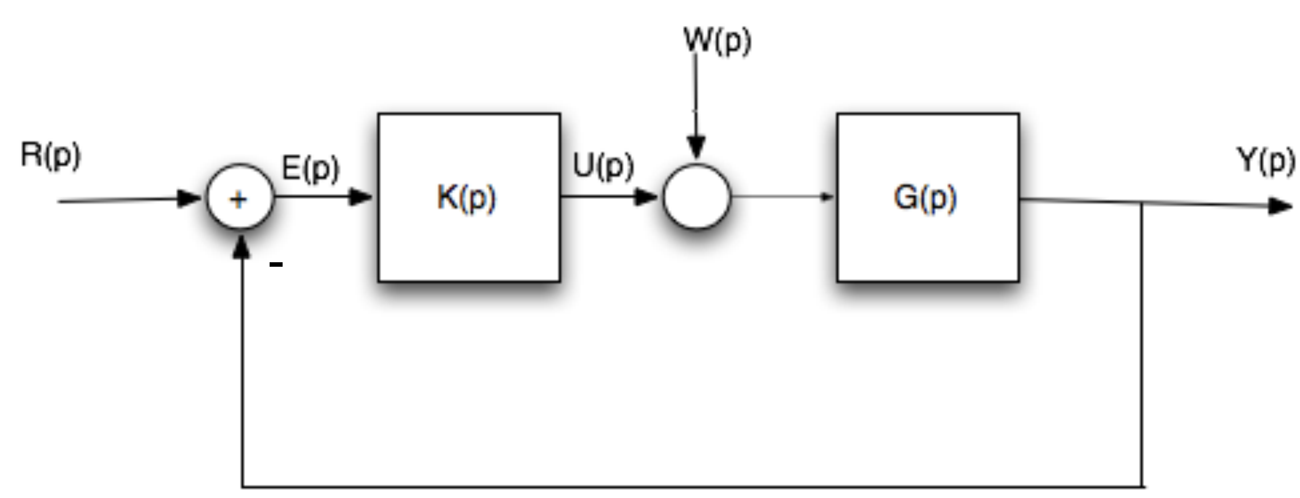
Dans le cas des Systèmes Echantillonnés si l'action intégrale améliore Systématiquement la précision en B.F.
l'action dérivée n'affecte pas forcement la rapidité
Et
le gain inférieure à 1 n'augmente pas obligatoirement la stabilité.

Les outils


MATLAB®
The Language of Technical Computing
7
Copyright 1984–2004, The MathWorks, Inc.

Numérisation d'un régulateur analogique

- Calcul dans le lieu des pôles par assignation de conditions absolues et relatives d'amortissement
- Synthèse fréquentielle robuste, en imposant des marges de gain et de phase



Synthèse du Régulateur dans le lieu des pôles

- Lieu des pôles = lieu des pôles quand un paramètre, le plus souvent de gain du régulateur, varie de zéro à l'infini
- La synthèse d'régulateur K(z)=K proportionnel se fait en construisant le lieu des pôles quand K varie de [0, ∞)

Equation Caractéristique de la B.F.

$$1 + C(z)G_{ZAS}(z) = 0$$

$$1 + K\,L(z) = 0$$

$C(z)$ = fonction *de* transfert du correcteur

$G_{ZAS}(z)$ = fonction de transfert du procédé,

$L(z)$ = gain de boucle

K = gain

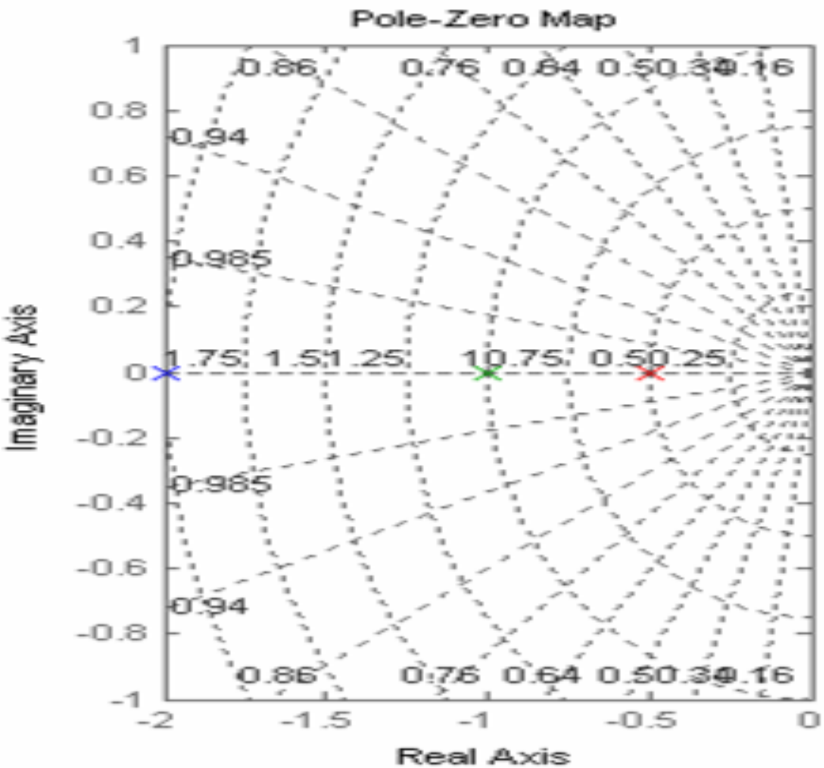
Observations

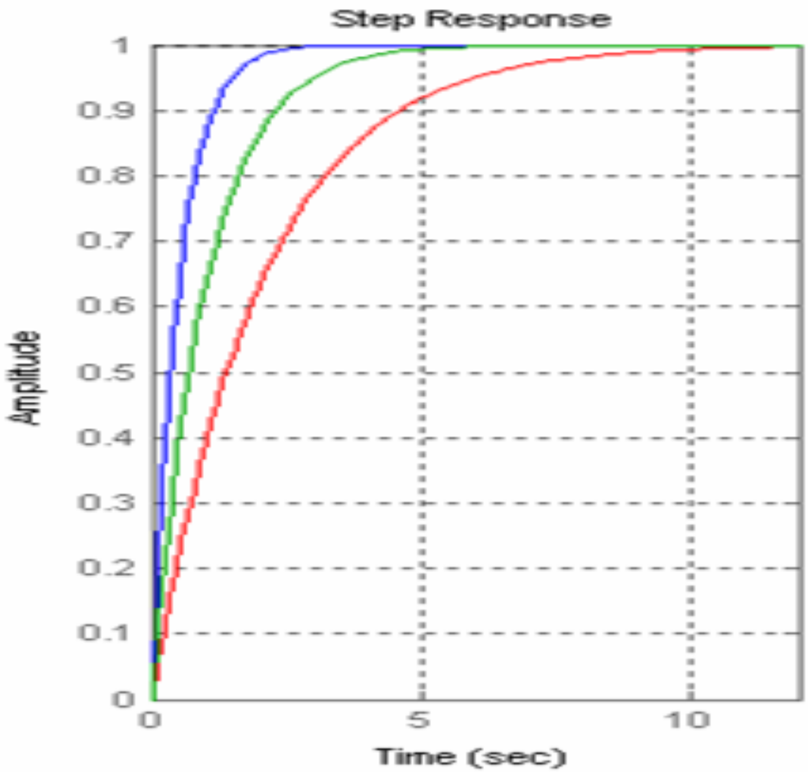
- Les même équations dans le plan p sont obtenu dans le plan z en remplacent p par z.
- Tous les régles obtenues dans le plan p peuvent être utilisées dans le plan-z.
- La représentation des pôles/zéros peut se faire en utilisant Matlab (MATLAB = **rlocus**)

+ Système du premier ordre stable

Etudions la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de la forme:

$$G(p) = \frac{1}{1+\dfrac{p}{p_i}} \quad pour \quad p_i = \{0.5\ ,\ 0.7\ ,\ 2\}$$





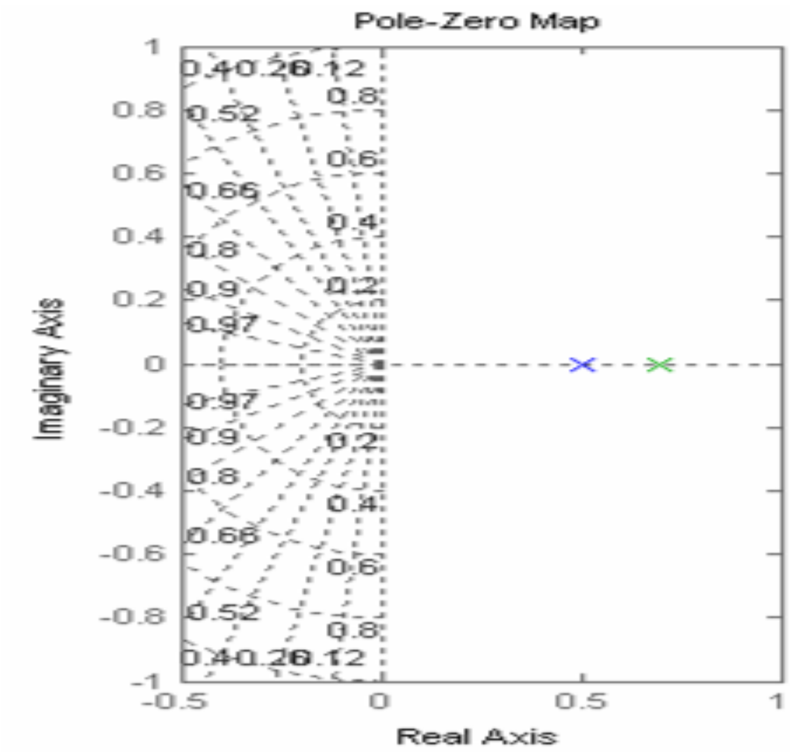
On observer que :

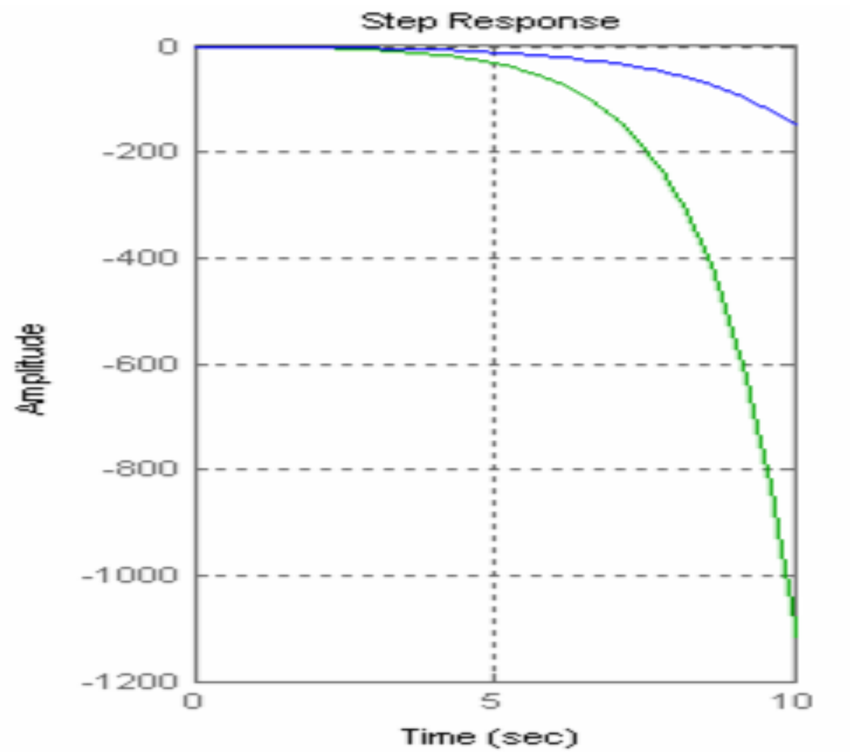
-Tous les pôles du système sont négatifs.
-Le système est stable (dans le sens entrée bornée / sortie bornée).
-Le système est d'autant plus rapide que le pole est grand en valeur absolue.

Etude d'un système du premier ordre instable

Etudions la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de la forme:

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{p_i}} \quad pour \quad p_i = \{-0.7\,,\,-0.5\}$$



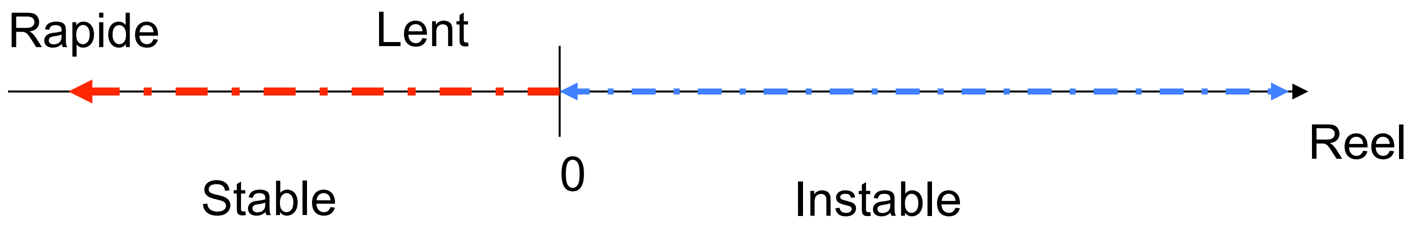


On observer que :

-Tous les pôles du système sont positifs.

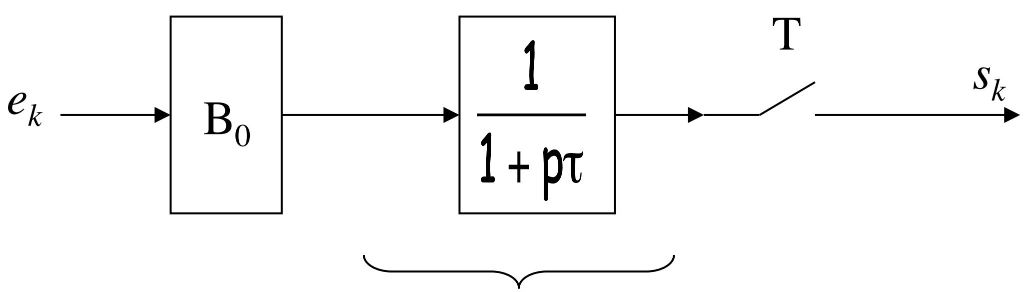
-Le système n'est pas stable (dans le sens entrée bornée / sortie bornée).

-Le système est d'autant plus rapide que le pôle est grand en valeur absolue



Exemple

1^{er} ordre échantillonné:



$$F(Z) = \left(1 - z^{-1}\right).TZ\left[\frac{1}{p\left(1 + p\tau\right)}\right]$$

On sait que :

$$TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right] = \sum_{\text{pôles de } \frac{1}{p(1+p\tau)}} \text{résidus de } \frac{1}{p(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=0} + \left[\frac{1/\tau}{p\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=-1/\tau}$$

$$= \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

$$\Rightarrow F(Z) = \left(1\text{-Z}^{-1}\right)\left[\frac{1}{\left(1\text{-Z}^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1\text{-Z}^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right] = \frac{Z-1}{Z}\left[\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{\left(Z\text{-}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{Z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}$$

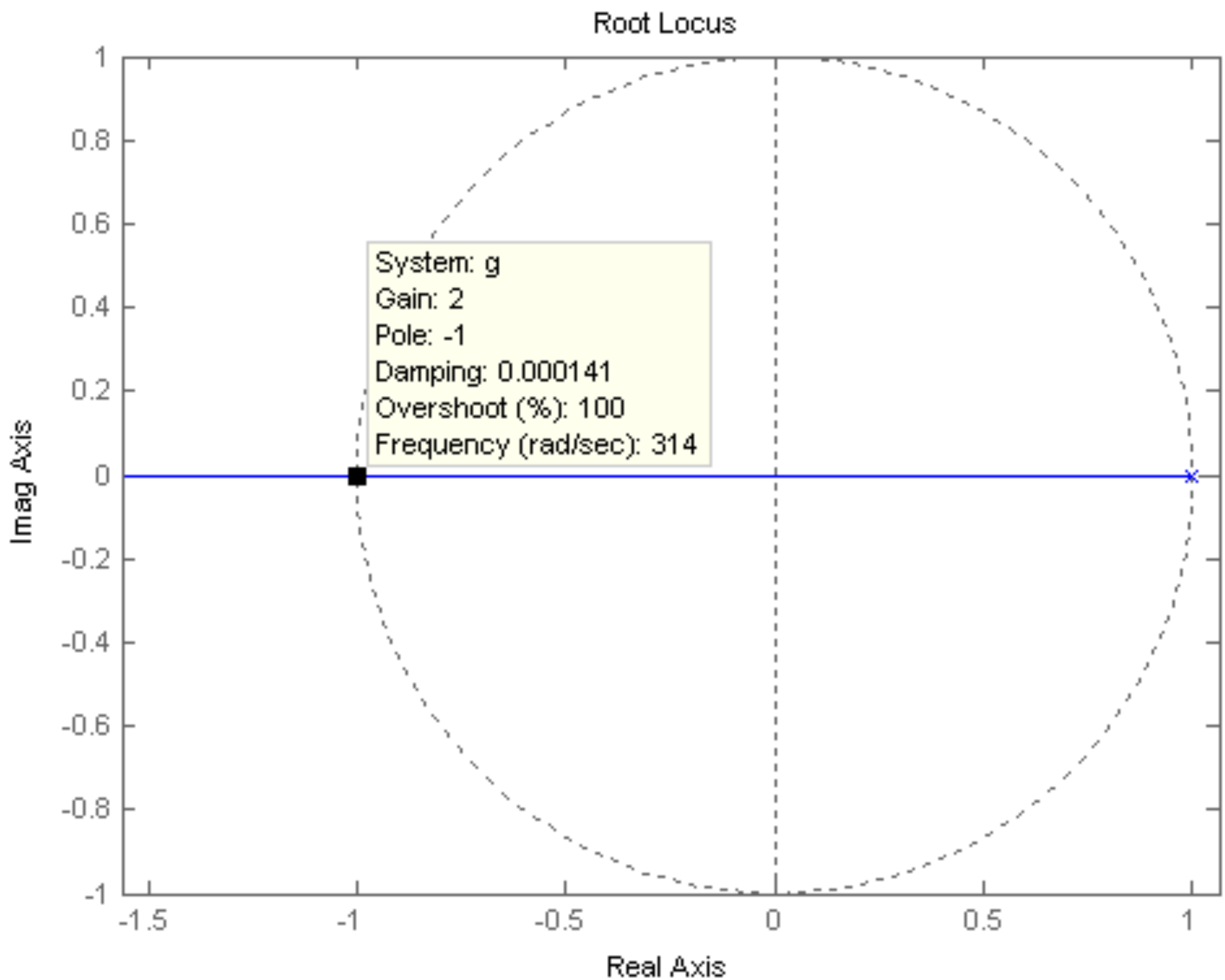
+ Exemple 1

Déterminer le lieu des racines et le gain critique pour un système du 1er ordre

$$L(z) = \frac{1}{z-1}$$

Solution

- Lieu des racines (MATLAB **rlocus**).
- Root locus: l'axe réel entre les poles et les zéros.
- Pour un Système Discret Stable le lieu des racine doit se situer entre (-1,0) and (1,0) dans le plan-z.
- Le Gain Critique K_{cr} est obtenu pour (-1,0).
- E.C. de la B.F. $z - 1 + K = 0$
- Substitution $z = -1$ donne $K_{cr} = 2$


Root Locus
System: g
Gain: 2
Pole: -1
Damping: 0.000141
Overshoot (%): 100
Frequency (rad/sec): 314
Imag Axis
Real Axis
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1

Système du second ordre stable

Un système du second ordre a une fonction de transfert de la forme :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + b_2.p^2}{a_0 + a_1.p + a_2.p^2}$$

le système :est d'ordre 2

propre si $b_2 \neq 0$,

strictement propre sinon

Zeros de G : $p \,/\, b_0 + b_1.p + b_2.p^2 = 0$

Pôles de G : $p \,/\, a_0 + a_1.p + a_2.p^2 = 0$

Etudions la réponse à un échelon d'un système du second ordre de la forme:

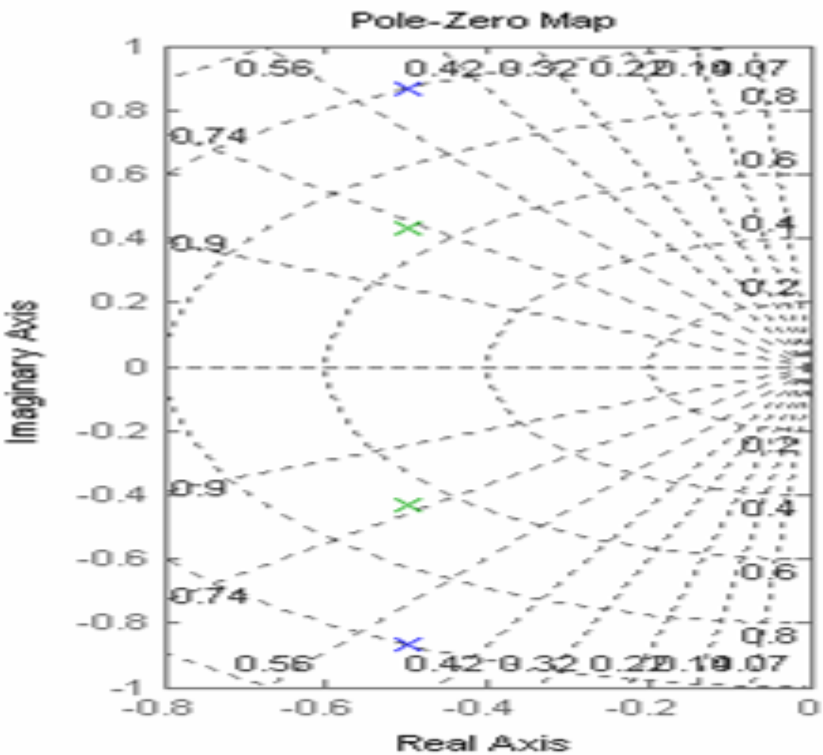
$$G(p) = \frac{c}{\left(p^2 + p + c\right)}$$

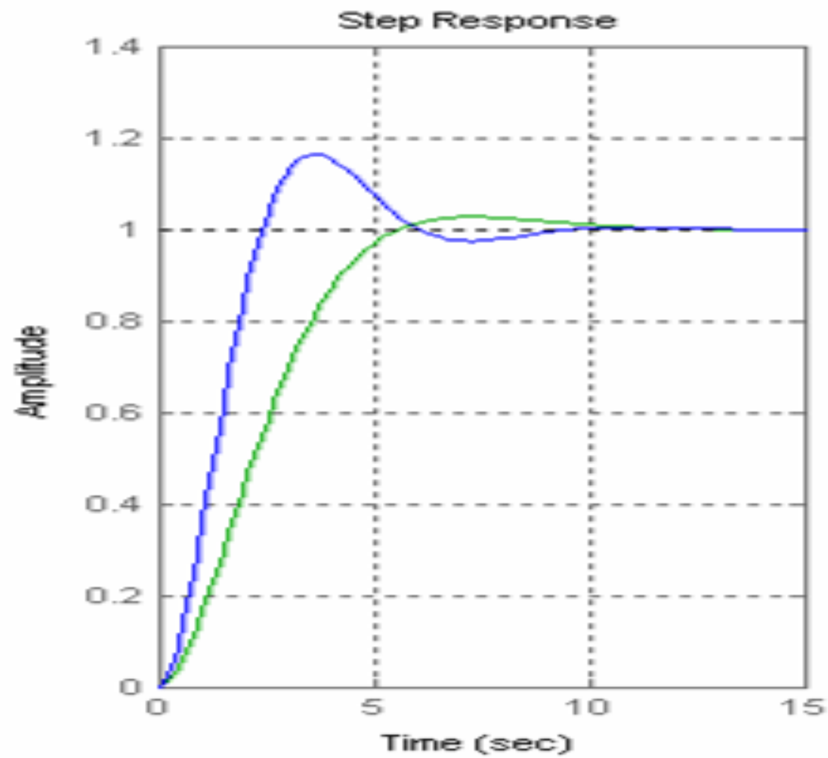
$$pour \quad c = \{1, 0.4375\}$$

Les pôles de ce système sont :

c=1 → Pôles -0.5 ± 0.866i

c=0.4375 → Pôles -0.5 ± 0.433i



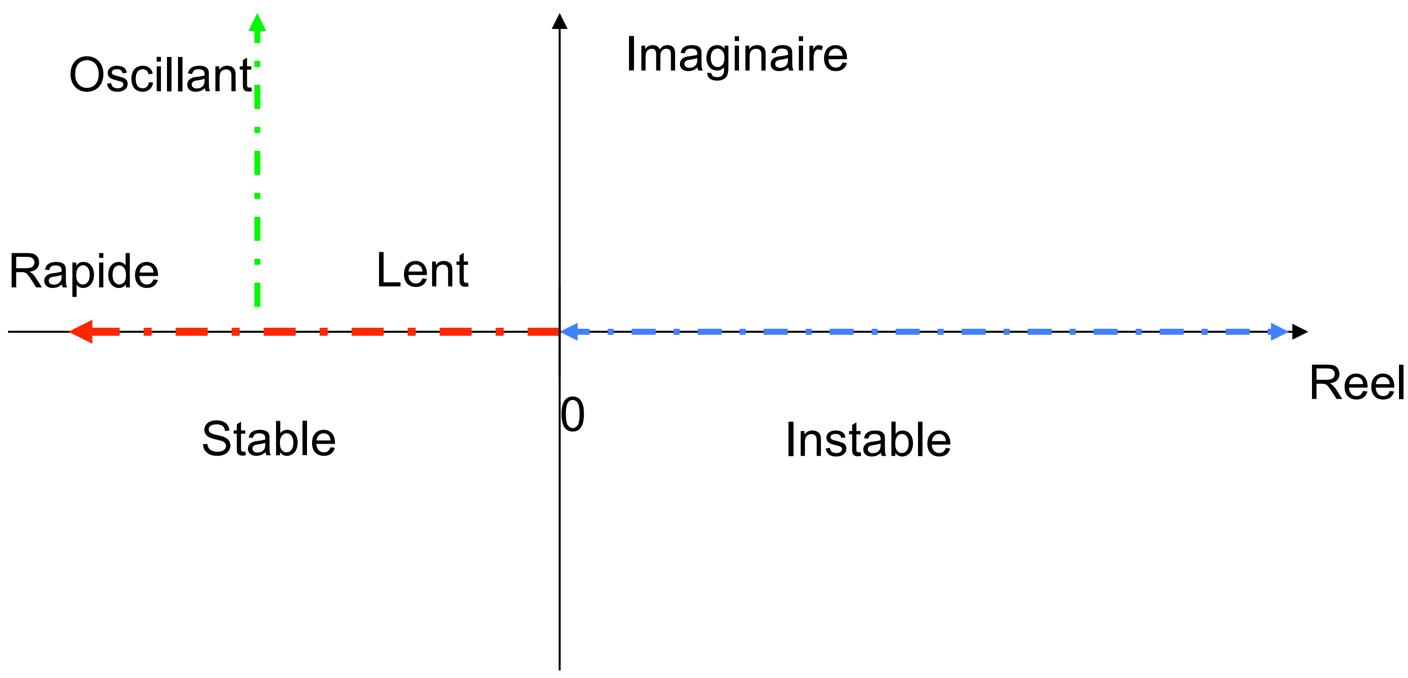


On observer que :

-Tous les pôles du système sont à parties réelles négatives.

-Le système est oscillant.

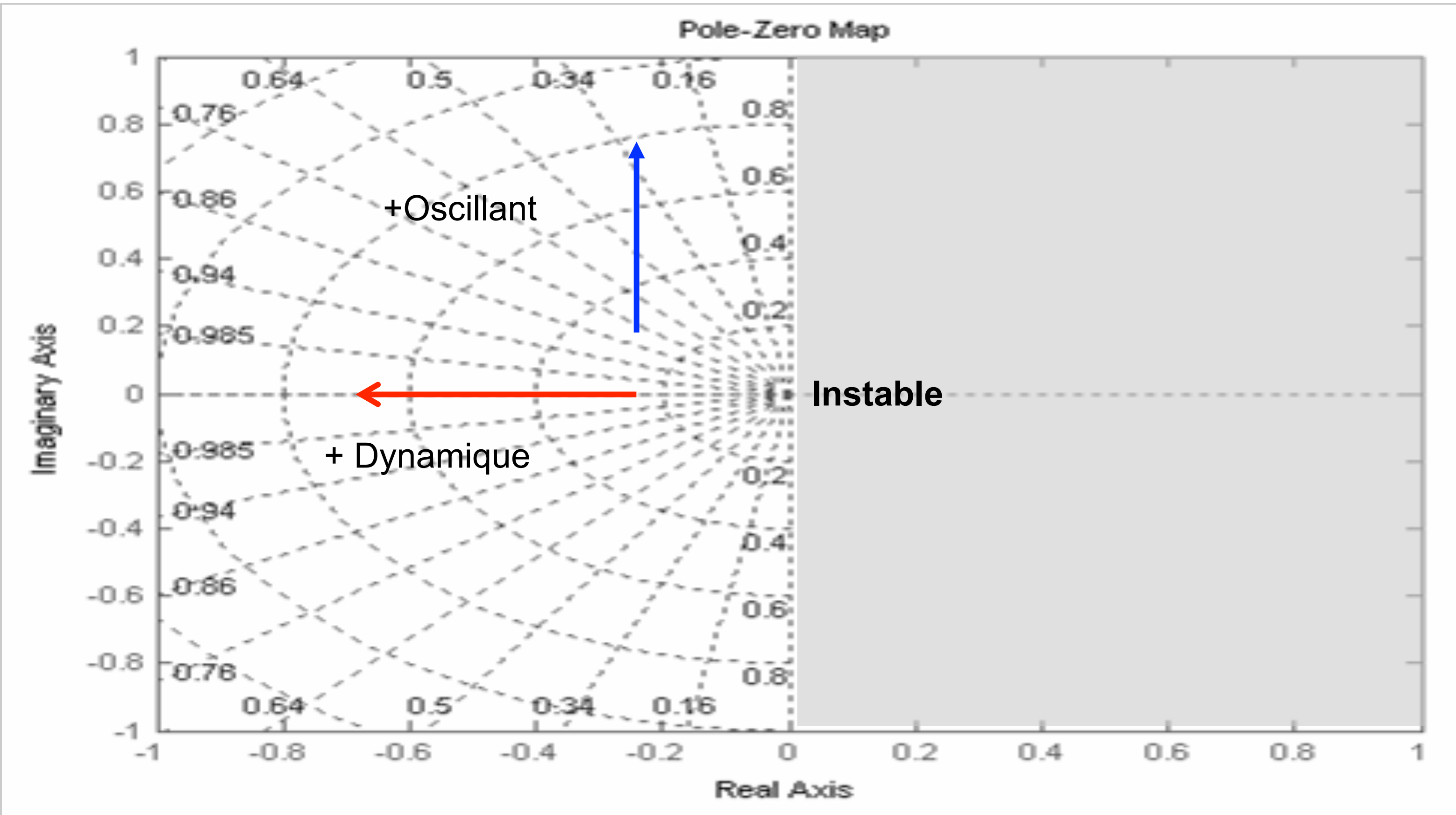
-Le système est stable (dans le sens entrée bornée / sortie bornée).



Domaine de stabilité

Un système est stable si et seulement les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative :

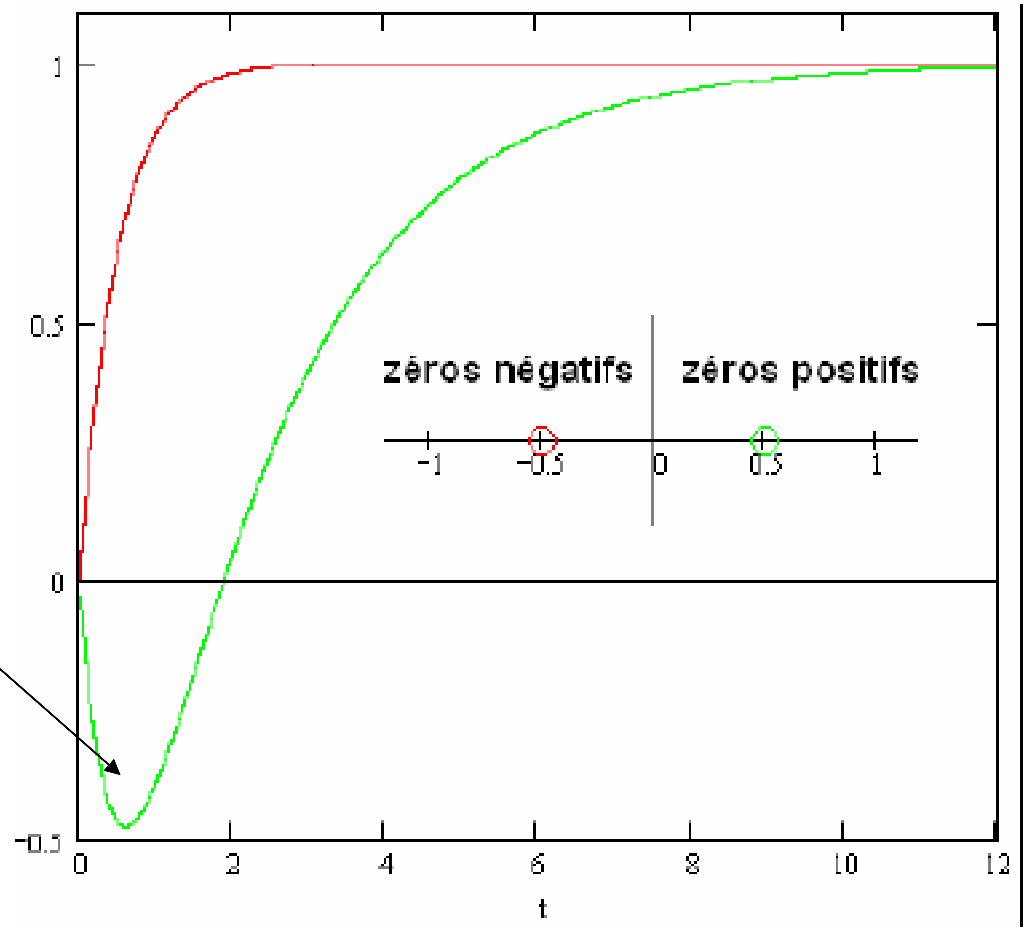
$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{est stable} \Leftrightarrow \{\forall p \, / \, A(p) = 0 \rightarrow \Re(p) < 0\}$$



Remarques : sur les zéros

Un système qui a un zéro à partie réelle positive est un système à non minimum de phase

Influence d'un zéros dans le demi plan droit



+

Création de fonction de transfert :
MATLAB : tf
SCILAB : rapport de polynôme

Affichage des pôles et zéros :
MATLAB : pzmap
SCILAB : plzr

MATLAB 6.5

```
>> B=1 ;
>> A=[1 1 1] ;
>> tf(B,A)

Transfer function:
      1
-----------
s^2 + s + 1


>> pzmap(B,A);
```

SCILAB 4.0

```
-->s=poly(0,'s');

-->B=[1];

-->A=s^2+s+1;

-->B/A
 ans  =

        1
    ---------
            2
    1 + s + s

-->plzr(B/A);
```

Exemple 2

Tracer le lieu des racines et calculer le gain critique pour un système ayant une fonction de transfert de boucle L(z), de seconde ordre.

$$L(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$

Solution

- Utilisation des règles du lieu des racines **rlocus.**
- Point d'intersection des asymptote : z_b =(1+.5)/2 = 0.75
- K_{cr} (critique) intersection de la verticale & du cercle unitaire .
- Equation Caractéristique est :

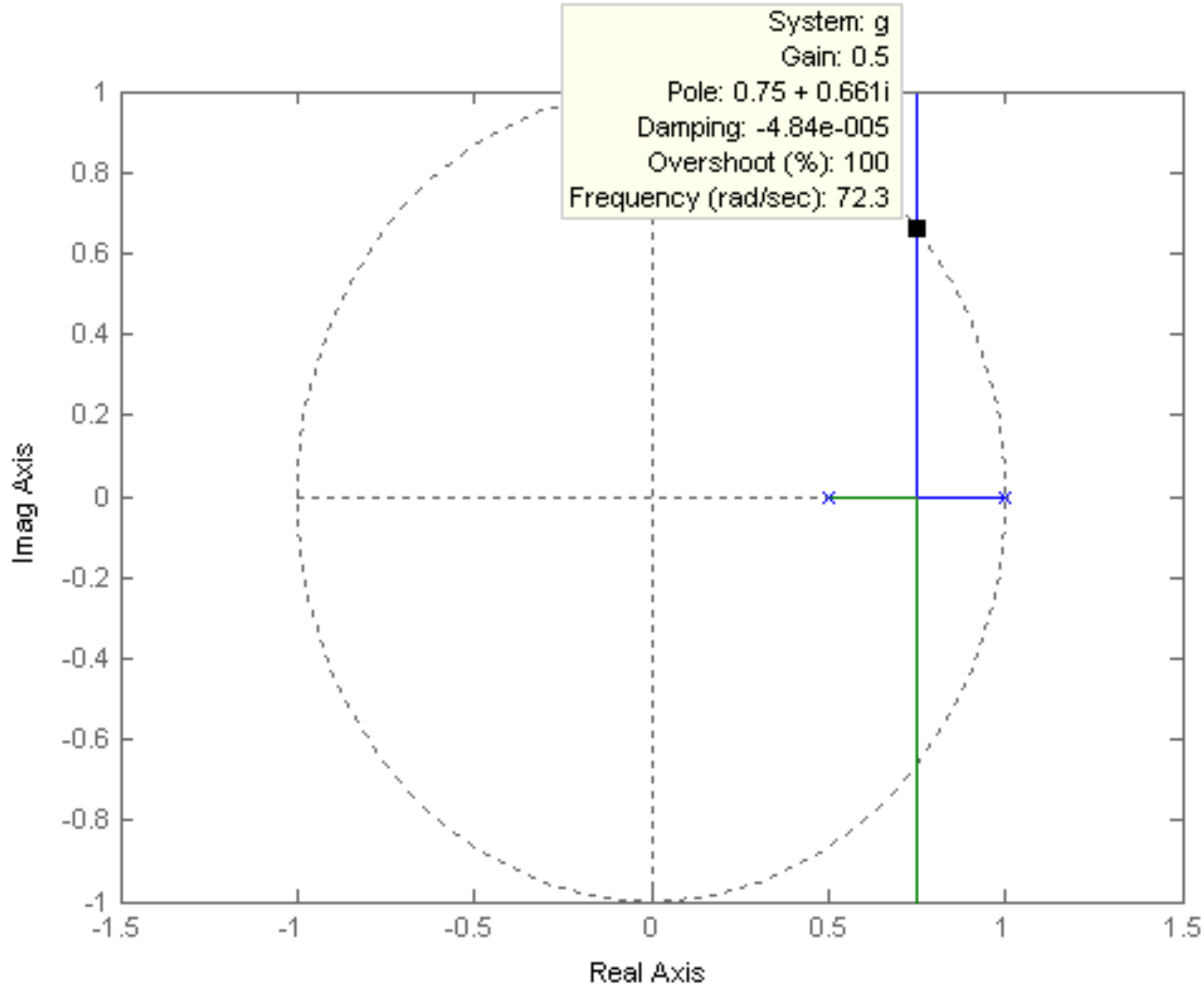
$$(z-1)(z-0.5)+K = z^2 - 1.5z + K + 0.5 = 0$$

Sur le cercle unitaire, $|z|=1$ (complexe conjugués)

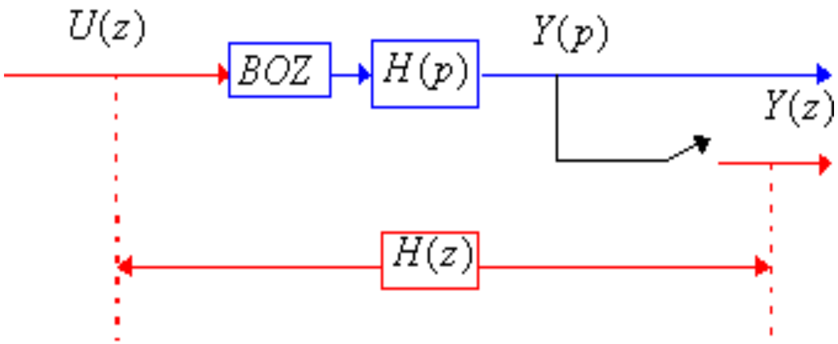
$$|z_{1,2}| = K_{cr} + 0.5 = 1 \Rightarrow K_{cr} = 0.5,\; z_{1,2} = 0.75 \pm j0.661$$

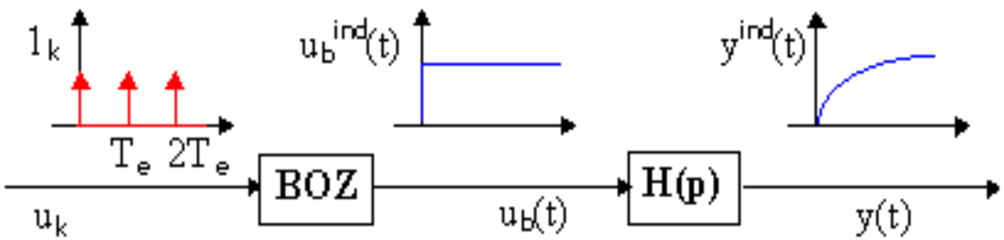
Rlocus

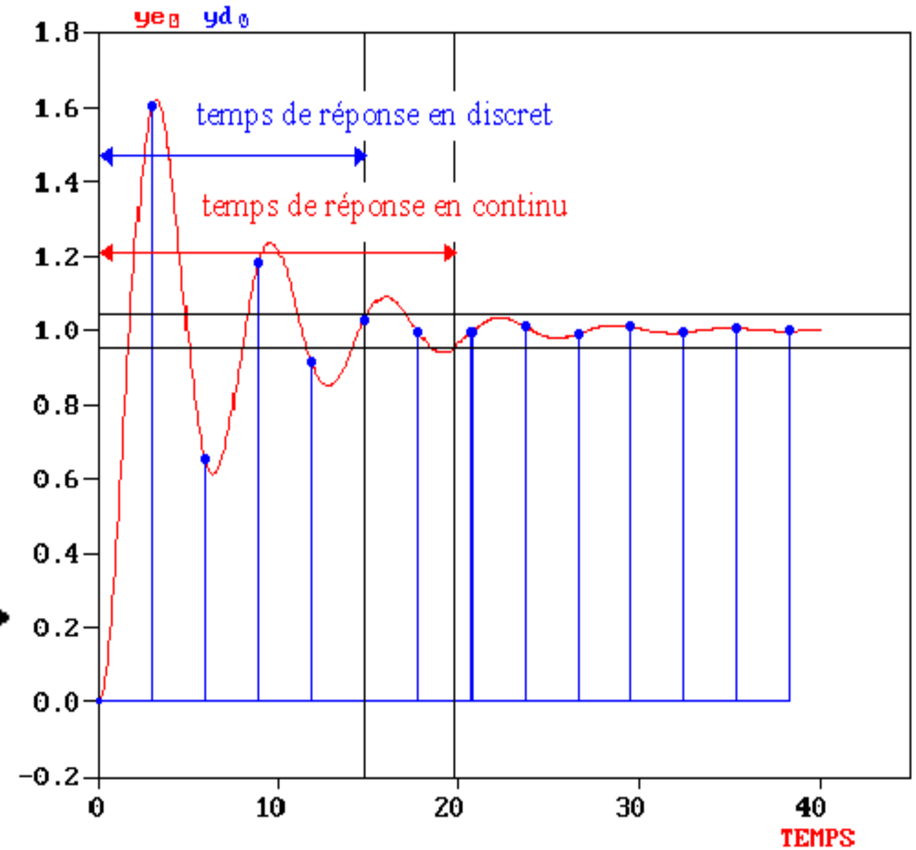
$$L(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$



Relation entre les temps de réponse d'un système continu avant et après l'échantillonnage de sa fonction de transfert par conservation de la réponse indicielle

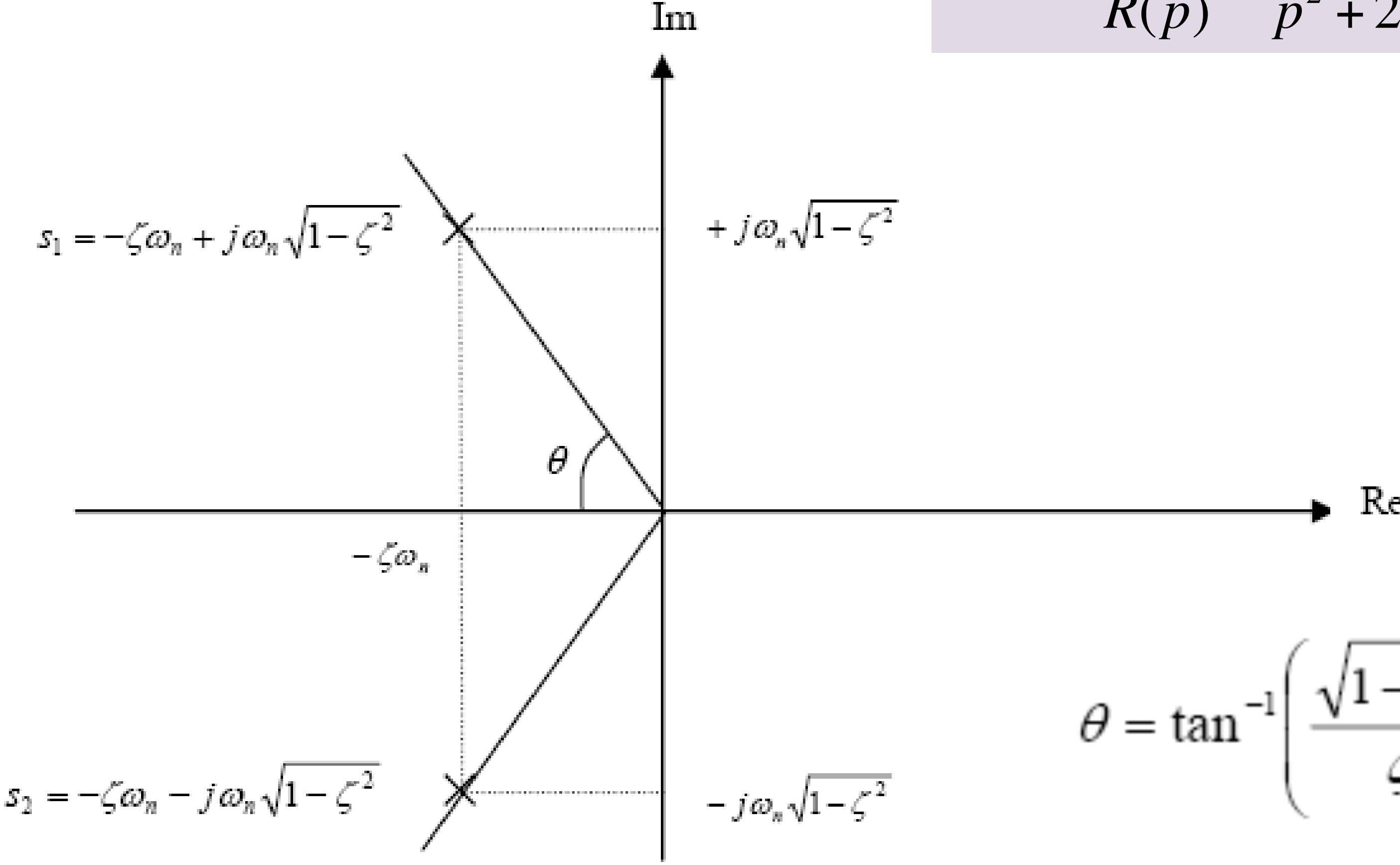






Système de 2eme ordre

$$T(p) = \frac{C(p)}{R(p)} = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\varsigma\omega_n p + \omega_n^2}$$



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right);$$

Representation des pôles dans le plan p

$$F(p)=\frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]}=\frac{N(p)}{p^2-2r+\left(r^2+\omega^2\right)}$$

Un système de second ordre s'écrit : $\dfrac{1}{1+2\varsigma\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$

ζ: représente le facteur d' amortissement

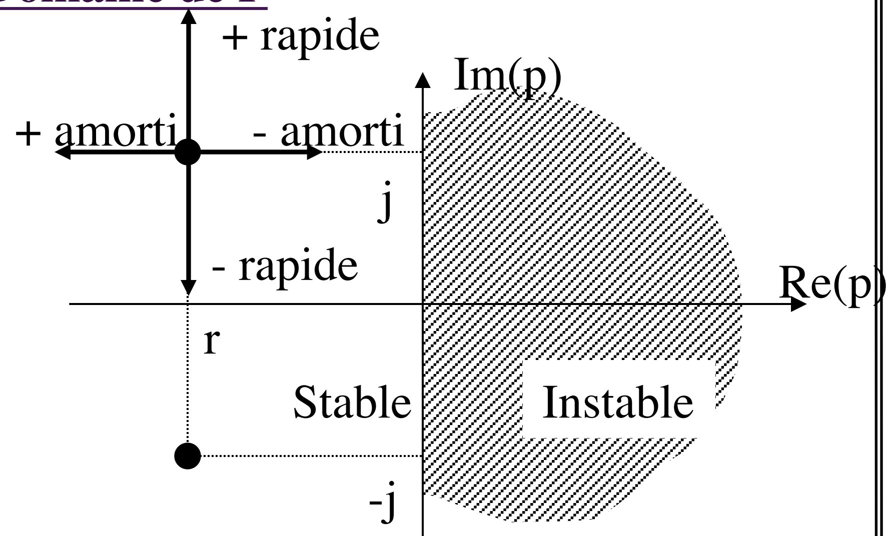
$\omega 0$: représente la pulsation caractéristique

$$\Rightarrow \omega_0{}^2=r^2+\omega^2$$

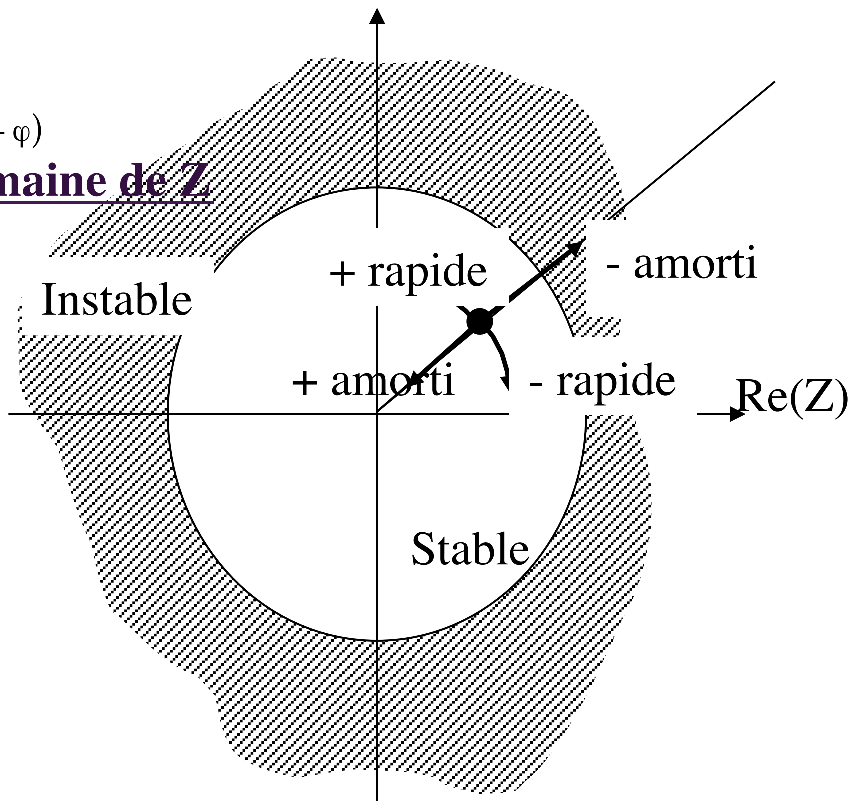
$$s_t(t)=2Ce^{rt}\cos(\omega t+\varphi)=2Ce^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow \varsigma=-\frac{r}{\omega_0}$$

Domaine de P



Domaine de Z



Système stable = pôles dans le demi plan de gauche de p

Le système est d' autant plus amorti que le pôle s' éloigne de l' axe *Im(p)*.

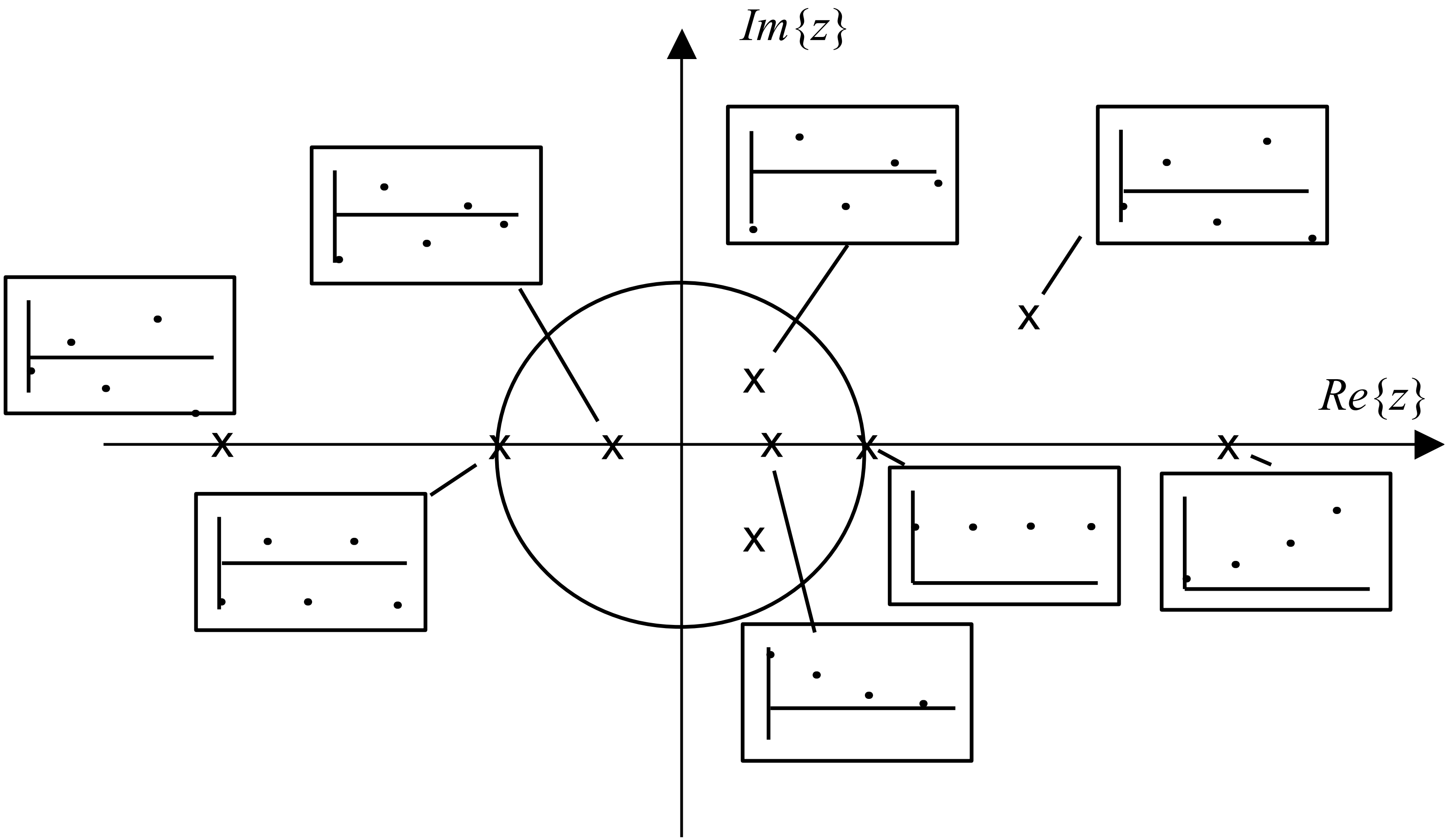
Le système est d' autant plus rapide que le pôle s' éloigne de l' axe *Re(p)*.

Système stable = pôles à l' intérieur du cercle unité

Le système est d' autant plus amorti que le pôle est près de l' origine O.

Le système est d' autant plus rapide que le pôle s' éloigne de l' axe *Re(Z)*

Locations des pôles dans le plan-z & Séquences Temporelles



Les fonctions temporelles & Pôles Réels

Continuous	Transformée de Laplace	Echantillonné	Transformée-z
$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$F(p)=\dfrac{1}{p+\alpha}$	$f(kT)=\begin{cases} e^{-\alpha kT}, & k\geq 0 \\ 0, & k<0 \end{cases}$	$F(z)=\dfrac{z}{z-e^{-\alpha T}}$

Fonctions Temporelles & Pôles Complexes Conjugués

Continu	$f(t)=\begin{cases} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t), t\geq 0 \\ 0 \quad ,t<0 \end{cases}$
Transformée de Laplace	$F(p)=\dfrac{\omega_d}{(p+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$
Echantillonné	$f(kT)=\begin{cases} e^{-\zeta\omega_n kT}\sin(\omega_d kT), k\geq 0 \\ 0 \quad ,k<0 \end{cases}$
Transformée-z	$F(z)=\dfrac{\sin(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}z}{z^2-2\cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}z+e^{-2\zeta\omega_n T}}$

Observation

Si

la Transformée Laplace F(p) d'une fonction continue f(t) a un pôle p_{s},

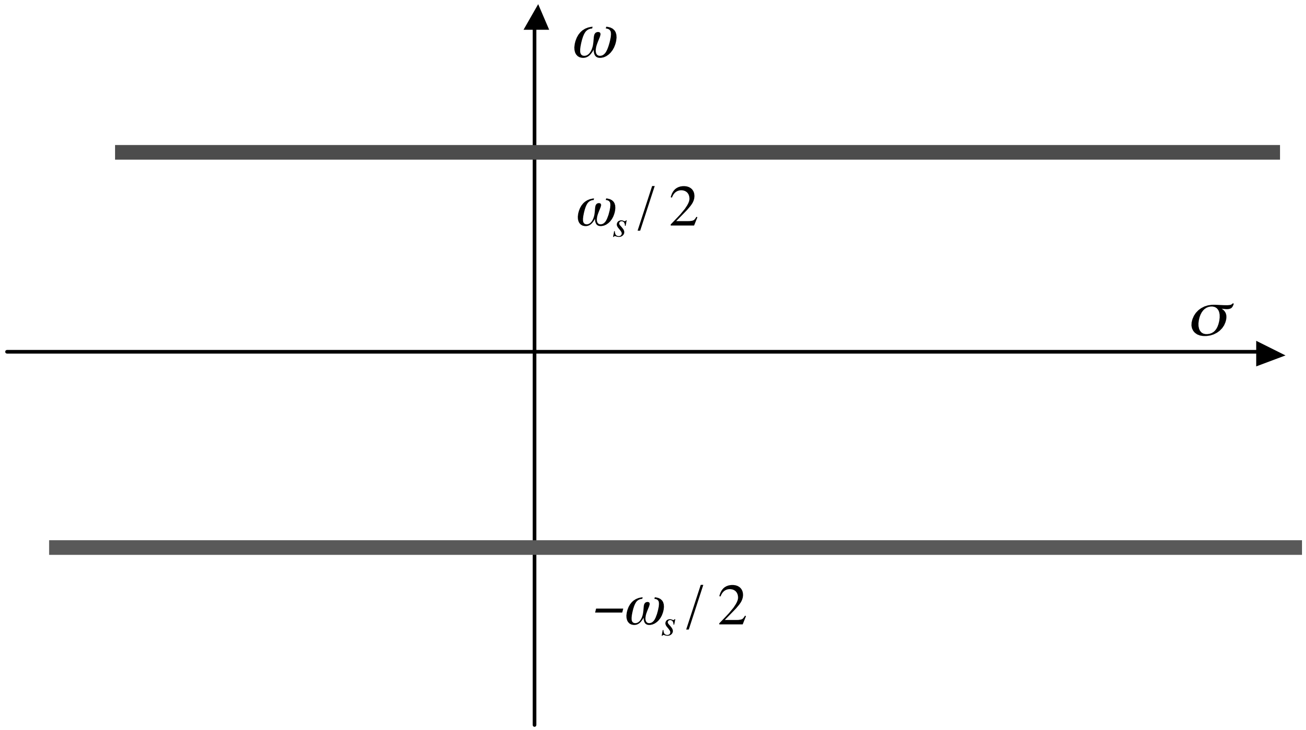
alors

Transformée en z, $F(z)$ de la fonction $f(kT)$, ayant une période d'échantillonnage T a un pole

$$p_z = e^{p_s T}$$

$$\begin{aligned} p_z &= e^{\sigma T} e^{j\omega_d T} \\ &= e^{\sigma T} e^{j(\omega_d T + k 2\pi)}, k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Correspondance



Correcteur Proportionnel d'un système numérique

Polynôme caractéristique en z d'un système de deuxième ordre.

$$\left(z - e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)T}\right)\left(z - e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)T}\right) = z^2 - 2\cos\left(\omega_d T\right)e^{-\zeta\omega_n T}\, z + e^{-2\zeta\omega_n T}$$

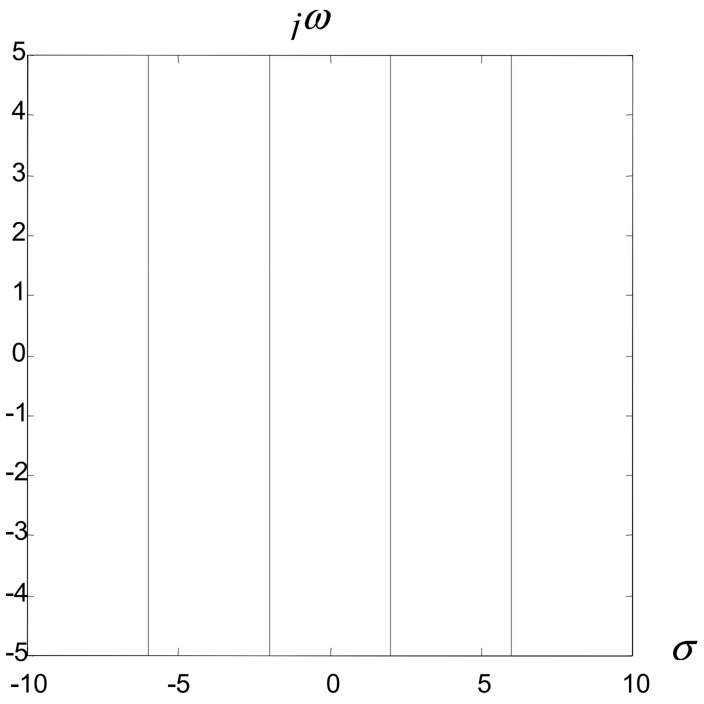
$$\text{Poles} \quad z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \angle \pm \omega_d T$$

Les Pole dans le plane p et dans le plane z

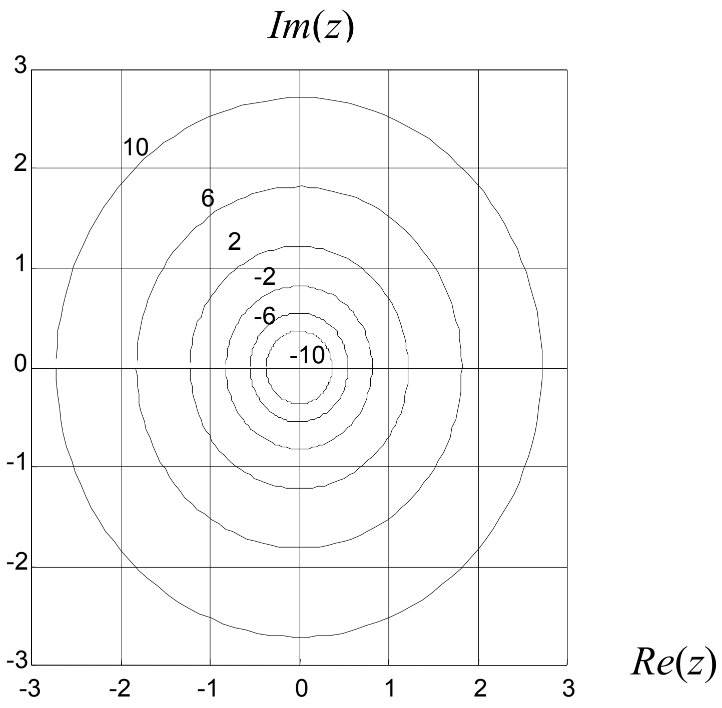
Poles $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$ $z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \angle \pm \omega_d T$

Contour	p Poles	Contour	z Poles
σ constant	Verticale	$\lvert z \rvert = e^{\sigma T}$ constant	circle
ω_d constant	Horizontale	phase z constant	Ligne radiale

Constant : σ -Contours

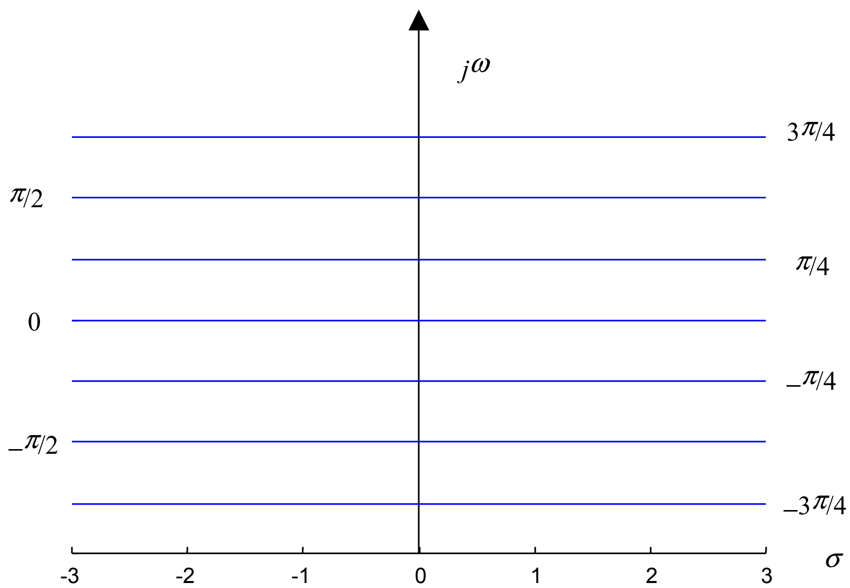


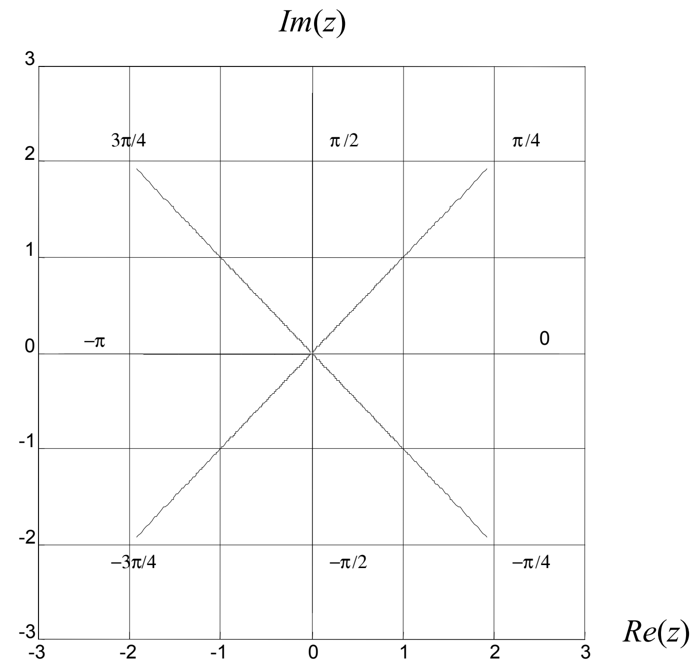
σ-contours dans le plan p.



σ-contours dans le plan z.

Contours Constant ω_d *dans le plane-p et z*





Les ω_d contours dans le plan-p.

Les ω_d contours dans le plan-z.

Contours ζ-Constant

$$\text{Poles} \quad z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \angle \pm \omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}$$

θ

- Spirale logarithmique petite pour des grandes valeurs de ζ.
- La spirale est définie par :

$$|z| = e^{-\frac{\zeta\theta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\left(\pi\theta^\circ / 180^\circ\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$|z|$ = amplitude (magnitude) pole
θ = angle

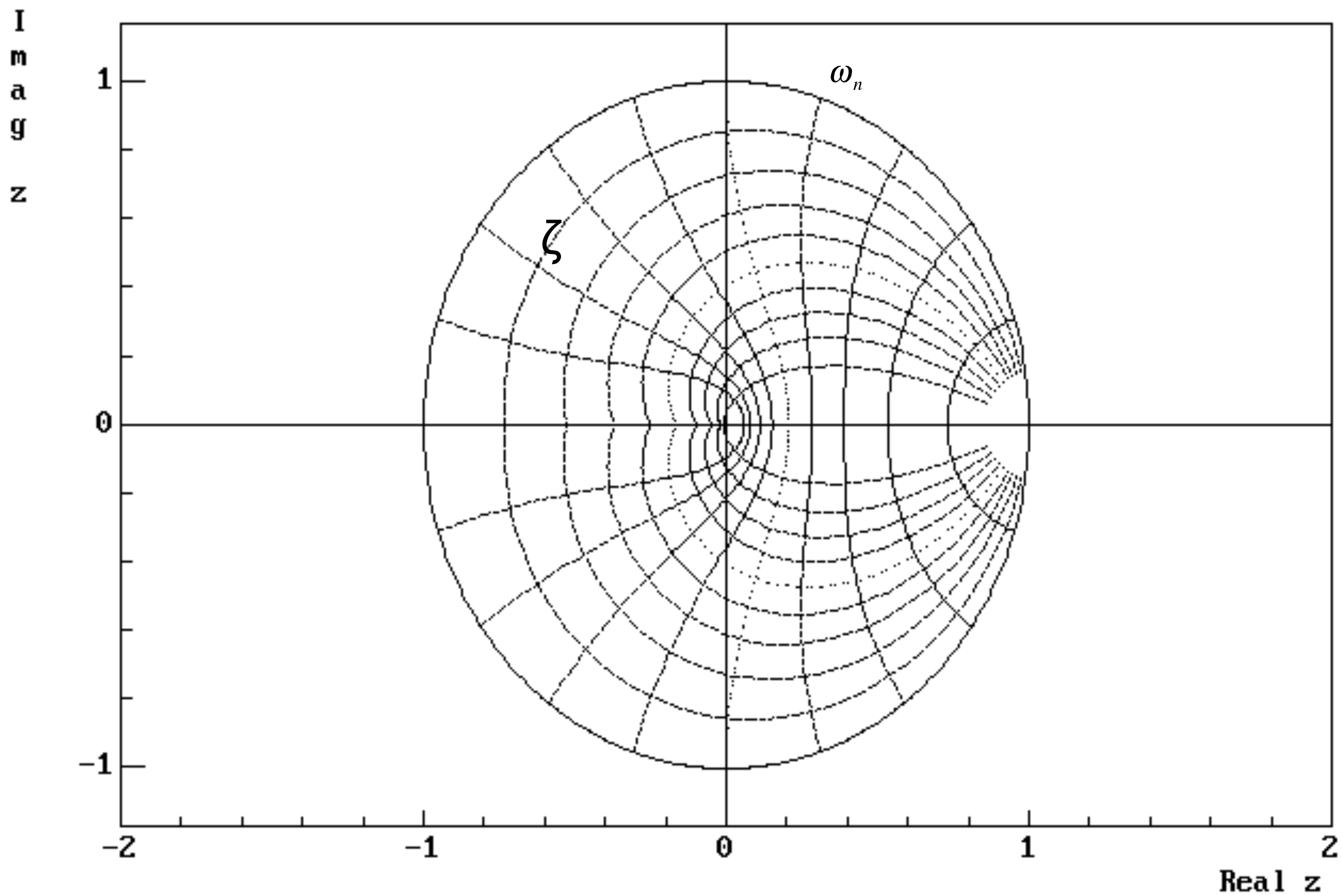
Contours Constant ω_n

$|z|$ = magnitude du pole

θ = angle du pole

$$|z| = e^{-\sqrt{(\omega_n T)^2 - \theta^2}}$$

Pour obtenir l'expression, il faut éliminer ζ



+ Caractéristique des Spirales Logarithmiques

1. Pour chaque courbe, | z | diminue de manière logarithmique quand ζ augmente.

2. Tous les spirales commencent à $\theta = 0$, | z | = 1 mais finissent dans des points différents.

3. Pour un ζ et | z | donné , on obtient θ par substitution dans l'équation :

$$\theta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\left|\ln\left(|z|\right)\right|$$

MATLAB

>> g=tf(num, den, T) % sampling period T

>> rlocus(g) % Root locus plot

>> zgrid(zeta, wn) % Plot contours

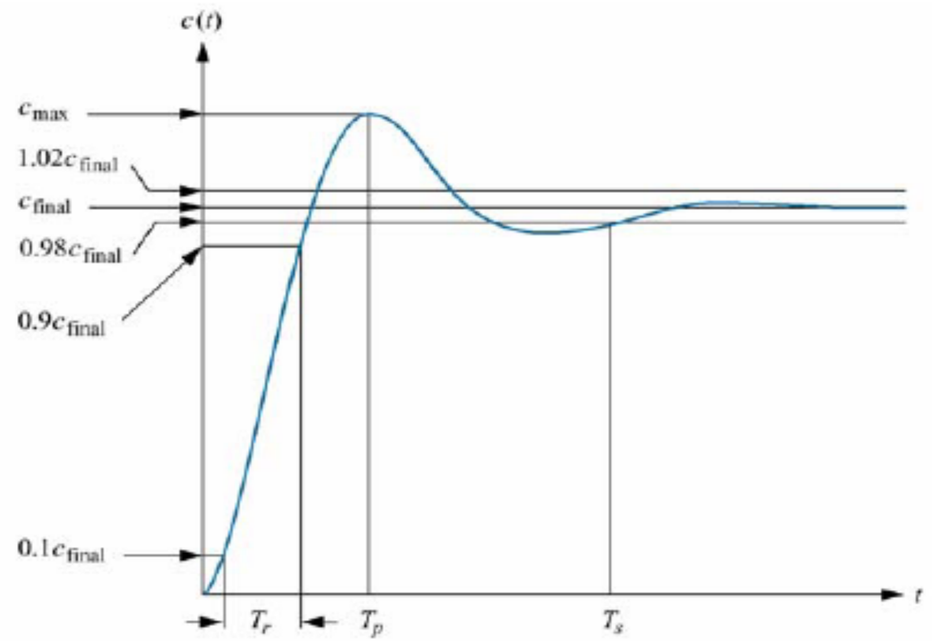
% **zeta** = vector of damping ratios (coeff. d'ammortisement)

% **wn** = vector of undamped natural (pulsation naturelle)

% frequencies (fréquences)

Design des Correcteurs dans le Plan-z

- Design Similaire avec les correcteur en continu
- Approximations difficiles à partir du continu
- Basé sur la sélection des pôles dans le plan z.



Temps de réponse

- Temps du Régime Transitoire (ex: 2% de la valeur finale).
- Temps de réponse à 2%

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

Specification

- Fréquence ω_d : angle du pole complexe divisé par la période d'échantillonnage
- Dépassement ,coefficient d'amortissement ζ, ω_n, analogue au cas continu.
- Sélection des pôles dominants
- Design Analytique : possible que pour des système d'ordre réduit.

Exemple 3

Conception d'un correcteur proportionnel pour un système numérique ayant la période d'échantillonnage de T=0.1s et :

a) $\omega_d = 5$ rad/s

b) Une constante de temps 0.5 s

c) $\zeta = 0.7$

$$L(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$

Solution

- Utilisation de MATLAB.
- MATLAB **rlocus**

(a) Angle du pole = $\omega_d T$= 5x0.1 = 0.5rad = 28.65°

(b) 1/(constant de temps)= $\zeta\ \omega_n$ = 1/ 0.5 = 2 rad /s

module du pole = exp(-$\zeta T \omega_n$) = 0.82

(c) Utilisation de ζ .

- Echantillonnage de la réponse échelon : commande MATLAB **step**
- Une augmentation du Gain diminue ζ (réponse oscillatoire).

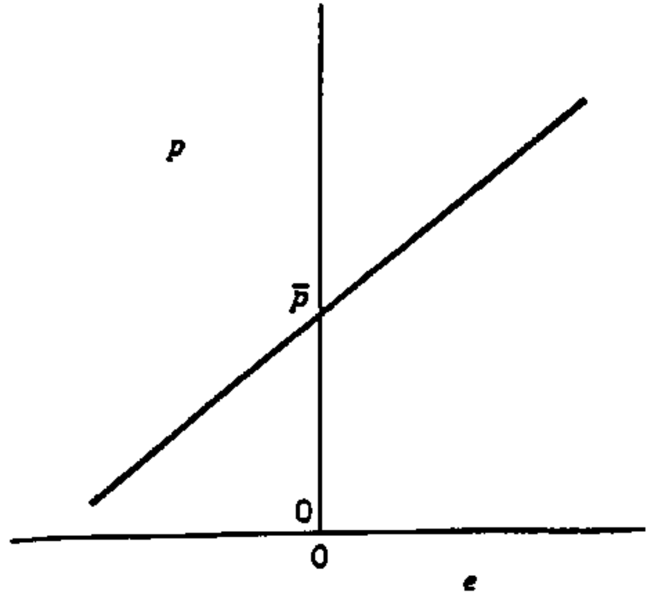


Figure 8.4. Proportional control: ideal behavior (slope of line $= K_c$).

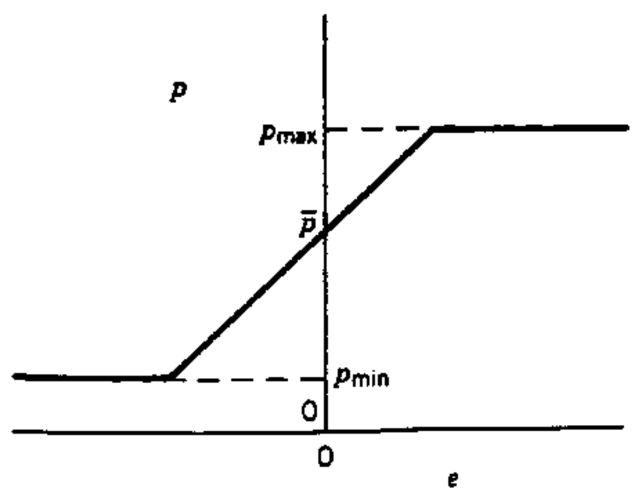
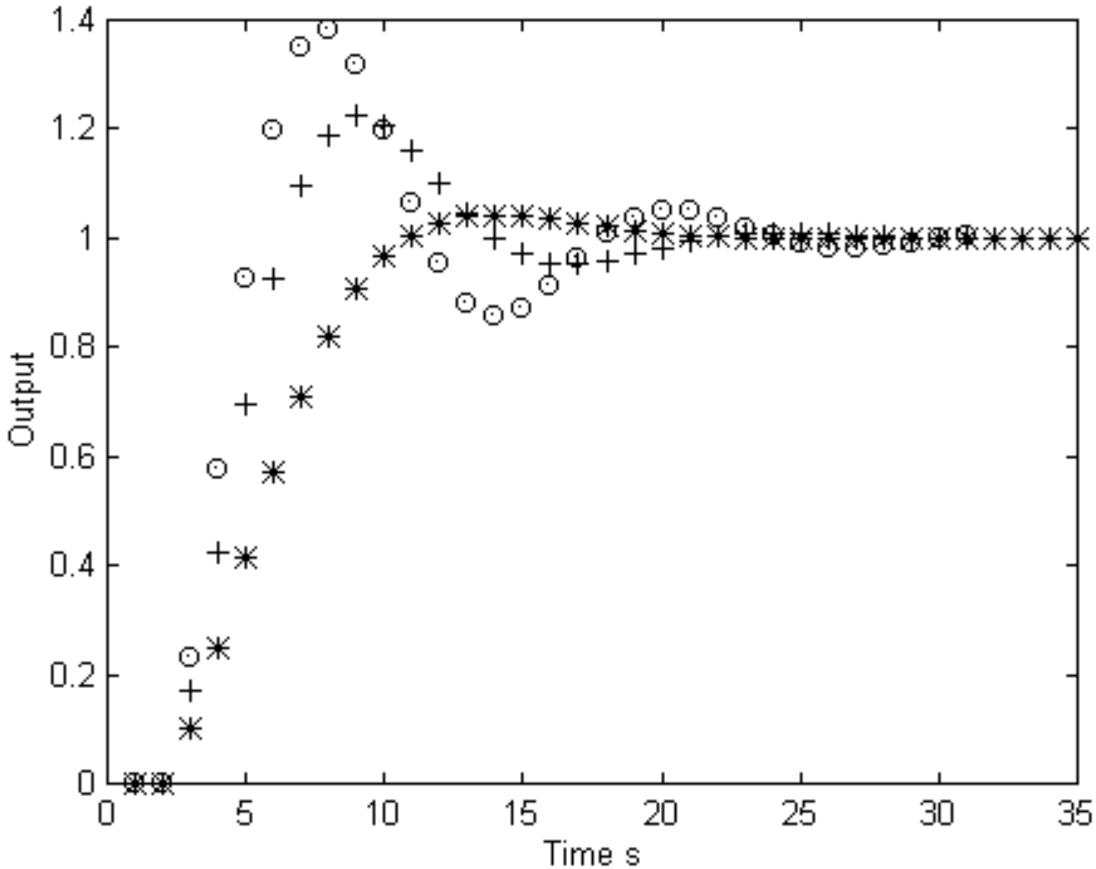


Figure 8.5. Proportional control: actual behavior.

Correcteur P : résultats

Design	Gain	ξ	ω_n rad/s
a	0.23	0.3	5.24
b	0.17	0.4	4.60
c	0.10	0.7	3.63

Temps de Response



(a) = o , (b) = -, (c) = +.

a	0.23	0.3	5.24
b	0.17	0.4	4.60
c	0.10	0.7	3.63

Design Analytique

$$L(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$

Equation caractéristique de la B.F.

$$z^2 - 1.5z + K + 0.5 = z^2 - 2\cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}\, z + e^{-2\zeta\omega_n T}$$

Identification des coefficients en z

$$z^1 : \qquad 1.5 = 2\cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}$$

$$z^0 : \qquad K + 0.5 = e^{-2\zeta\omega_n T}$$

(a) $\omega_d = 5$

z^1 equation: $z^1 : 1.5 = 2\cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}$

$$\zeta\omega_n = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{1.5}{2\cos(\omega_d T)}\right) = 10\left|\ln\left(\frac{1.5}{2\cos(0.5)}\right)\right| = 1.571$$

$$\omega_d^2 = \omega_n^2\left(1-\zeta^2\right) = 25$$

$$\frac{\omega_d^2}{(\zeta\omega_n)^2} = \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} = \frac{25}{(1.571)^2} \Rightarrow \zeta = 0.3, \omega_n = 5.24\,\text{rad/s.}$$

z^0 equation: $z^0 : \quad K + 0.5 = e^{-2\zeta\omega_n T}$

$$K = e^{-2\zeta\omega_n T} - 0.5 = e^{-2\times 1.571\times 0.1} - 0.5 = 0.23$$

(b) τ= 0.5 s

$$\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.5} = 2\,\text{rad/s}$$

$$\omega_d = \frac{1}{T}\cos^{-1}\left(\frac{1.5e^{-\zeta\omega_n T}}{2}\right) = 10\cos^{-1}\left(0.75e^{-0.2}\right) = 4.127\,\text{rad/s}$$

$$\frac{\omega_d^2}{(\zeta\omega_n)^2} = \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} = \frac{(4.127)^2}{2^2}$$

$$\zeta = 0.436 \qquad\qquad \omega_n = 4.586\,\text{rad/s}$$

$$K = e^{-2\zeta\omega_n T} - 0.5 = e^{-2\times 2\times 0.1} - 0.5 = 0.17$$

(c) $\zeta = 0.7$

z^0 équation: $$z^1 : 1.5 = 2\cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}$$
$$= 2\cos(0.0714\omega_n)e^{-0.07\,\omega_n}$$

Résoudre numériquement

$$\omega_n = 3.63\,\mathrm{rad/s}$$

Z^0 équation: $$K = e^{-2\zeta\omega_n T} - 0.5 = e^{-0.14\times 3.63} - 0.5 = 0.10$$

Graphiquement: dessiner le lieu des racines et trouver l'intersection avec la spirale logarithmique pour un ζ donné. (difficile sans MATLAB).

Exemple 4

Conception d'un correcteur proportionnel pour un système de contrôle numérique ayant une période d'échantillonnage de T=0.1 s et les caractéristiques suivantes :

a) Erreur de vitesse $e(\infty) = 10\%$

b) $\zeta = 0.7$

$$G(p) = \frac{1}{p(p+5)}$$

+ Solution

$$G_{ZAS}(z) = \frac{4.261\times10^{-3}(z+0.847)}{(z-1)(z-0.606)}$$

E.C. pour la B.F

$$1+KG_{ZAS}(z) = z^2 - \left(1.606 - 4.261\times10^{-3}K\right)z + 0.606 - 3.608\times10^{-3}K$$

$$= z^2 - 2\cos\left(\omega_d T\right)e^{-\zeta\omega_n T}z + e^{-2\zeta\omega_n T}$$

- Equation a 3 paramètres ζ , ω_n & K
- Evaluation des 2 inconnues pour obtenir la 3eme à partir des spécifications de conception.

(a) Design pour $e(\infty) = 10\%$

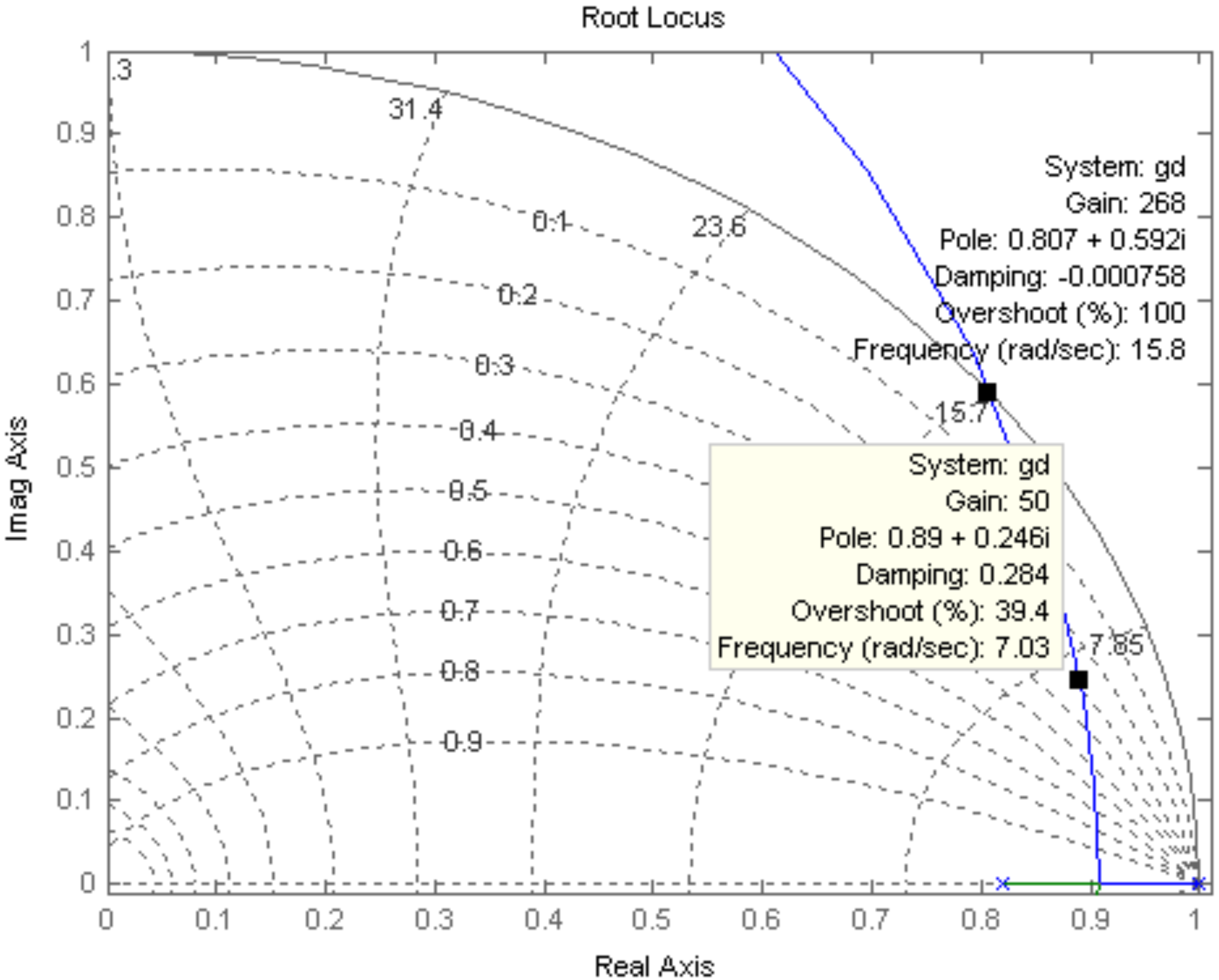
$$K_v = \frac{1}{T}\frac{z-1}{z}KG(z)\Bigg|_{z=1} = 10K\frac{4.261\times 10^{-3}(1+0.847)}{(1-0.606)} = \frac{K}{5}$$

- Erreur de vitesse constante
- La même erreur que pour le correcteur proportionnel analogique : 10% .

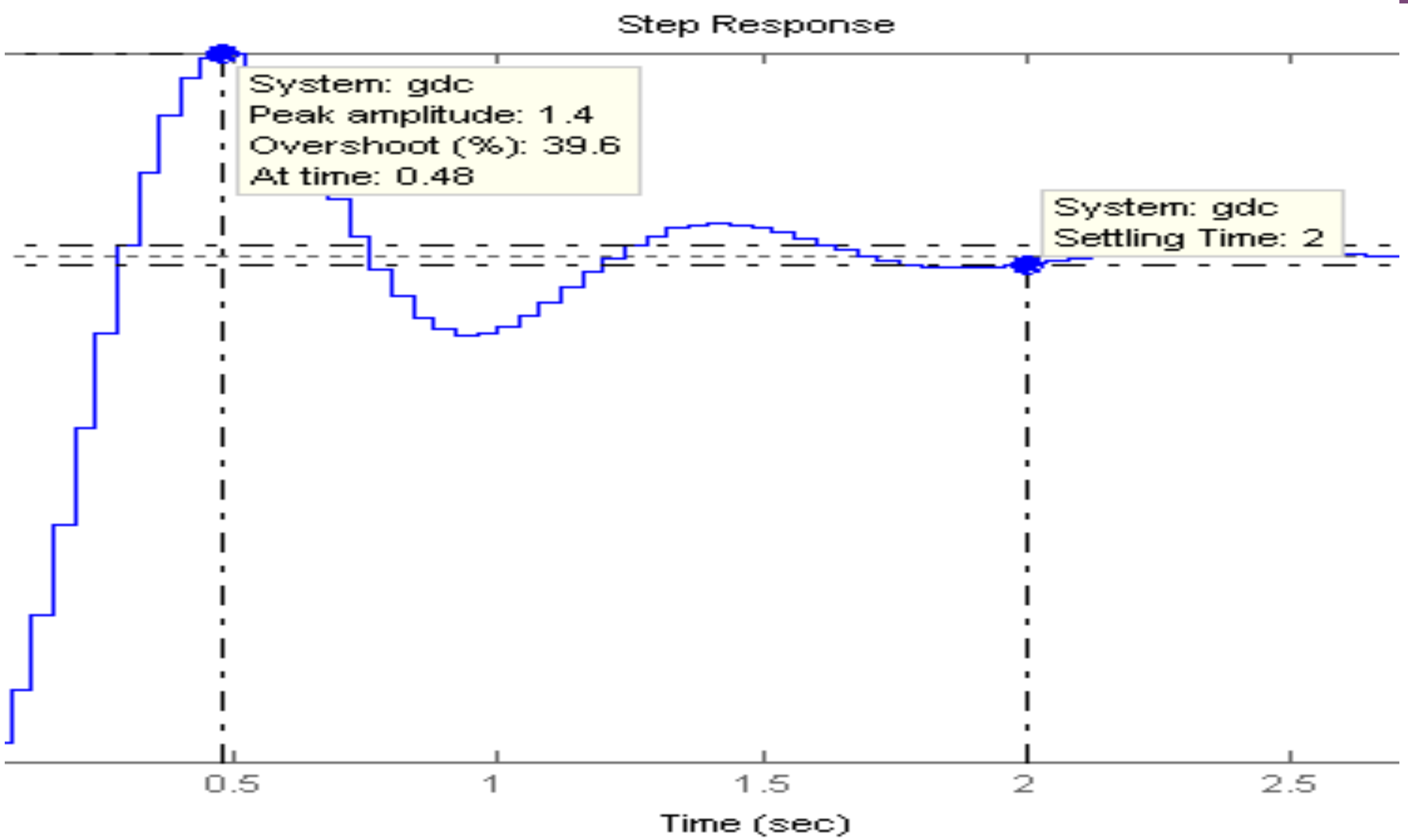
$$\frac{K}{5} = K_v = \frac{100}{e(\infty)\%} = \frac{100}{10} = 10$$

$$K = 50$$

Lieu des racines pour K=50



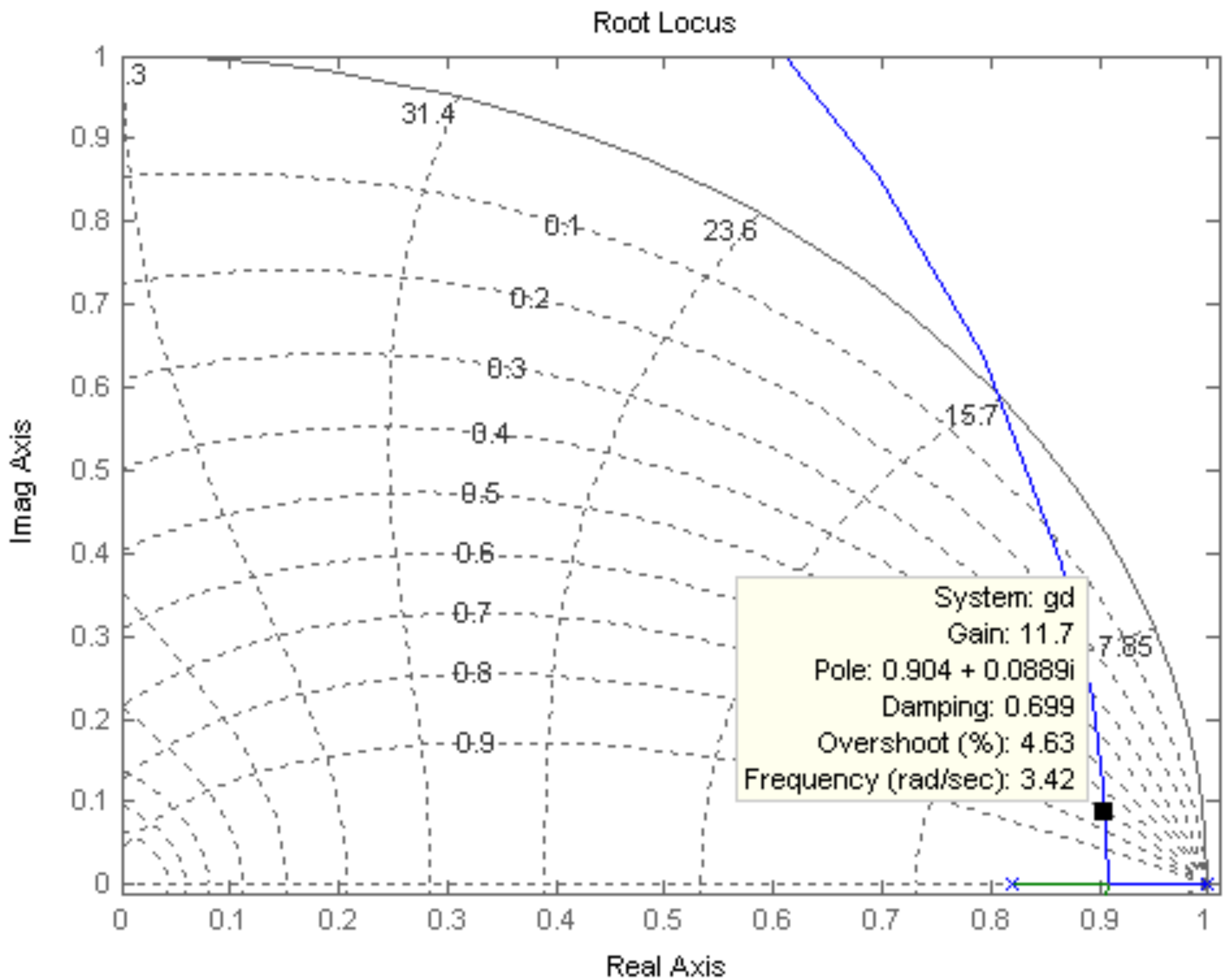
+ Temps de réponse pour $K = 50$



b) Design pour ζ= 0.7

- Difficile à trouver la solution analytique ζ
- MATLAB: déplacement du curseur sur ζ =0.7 et K = 10.
- K_{cr}=109, système stable pour K = 50 et K = 10.
- Pour (a), K=50, ζ = 0.18 (fortement oscillateur)
- Pour (b), K =10, $e(\infty)$ = 50% erreur de vitesse.
- Le correcteur P ne peut pas fournir une bonne erreur statique en même temps que une bonne réponse transitoire.

Lieu des racines pour ζ constant



Amélioration de la précision

- Le présence dans la fonction de transfert en B.O., d'un intégrateur (pôle=1) assure la nullité de l'erreur de position
- Si ce pôle est double, l'erreur de vitesse est nulle
- Pour améliorer la précision en B.F. d'un système à temps discret :

$$C(z) = \frac{K}{\left(1 - z^{-1}\right)^{n}}$$

Correcteur Intégral

La sortie du régulateur dépend de l'erreur :

$$p(t) = \overline{p} + \frac{1}{\tau_I}\int_0^t e(t^*)dt^*$$

τ_I , est un paramètre ajustable

La régulation par intégration est rependue parce que permet d' éliminer l'offset

$$p(t) = \overline{p} + K_c\left(e(t) + \frac{1}{\tau_I}\int_0^t e(t^*)\, dt^* \right)$$

$$\frac{P'(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c\left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}\right)$$

Analyse des performances par introduction d'un intégrateur

- Soit un système à temps discret de F.T. en B.O. G(z) placé dans une boucle à retour unitaire :

$$G(z) = \frac{2}{1-0.5z^{-1}} = \frac{2z}{z-0.5}$$

- Soit en B.F. :

$$H(z) = \frac{2z}{3z-0.5}$$

- L'équation de récurrence est : $s_k = 0.17 s_{k-1} + 0.67 e_k$

- Système Stable :

$$p_1 = \frac{0.5}{3} = 0.17 < 1$$

Analyse des performances par introduction d'un intégrateur

- L'erreur de position :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1+G(z)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1+\dfrac{2z}{z-0.5}} = 0.2 = 20\%$$

- Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe (B.O.) :

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} . \frac{2z}{z-0.5}, K=1$$

- F.T. en B.F.

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0.5)+2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2-1.5z+0.5} = \frac{2}{3-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Analyse des performances par introduction d'un intégrateur

- L'équation de récurrence (réponse indicielle) :

$$s_k = 0.5 s_{k-1} - 0.17 s_{k-2} + 0.67 e_k$$

- Les pôles sont : $|p_1| = |p_2| = 0.4$
- Les pôles sont plus proches de 1 que le système non-corrigé 0.17
- La marge de stabilité est légèrement diminuée par l'intégrateur
- Apparition d'un faible dépassement 6%
- Rapidité accrue, tm<<

Compensation de la perte de stabilité par le placement des pôles

$$G(z)=\frac{K}{1-z^{-1}}\frac{2}{1-0.5z^{-1}}=\frac{2Kz^{2}}{(z-0.5)(z-0.5)},K\neq 1$$

$$H(z)=\frac{2Kz^{2}}{(1+2K)z^{2}-1.5z+0.5}$$

$$\Delta=0.25-4K$$

$$\left|p_{1,2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2(1+2K)}}\Rightarrow\left|p_{1,2}\right|=0.25,K=3.5$$

$$H(z)=\frac{7}{8-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$s_{k}=0.1875s_{k-1}-0.0625s_{k-1}+0.875e_{k}$$

Compensation de la perte de stabilité par le placement des pôles

ek	1	1	1	1	1	1	1	1	1
sk	0.875	1.039	1.015	1.000	0.999	1.00	1.00	1.00	1.00

Corriger la stabilité à l'aide d'un amplificateur de gain K>1

Attention : il ne s'agit pas d'un cas général

Remarque : Il n'est pas aussi facile de corriger « intuitivement » un système à temps discret, comme dans le cas continu

Action Dérivée

- Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert :

$$C(z) = K\left(1 - z^{-1}\right), K > 0$$

- Soit A(z) un système échantillonné placé dans une boucle à retour unitaire, avec un F.T. en B.F :

$$H(z) = \frac{1}{z + 0.9},$$

$$p_1 = -0.9$$

$$s_k = -0.9 s_{k-1} + e_{k-1}$$

ek	1	1	1	1	1	1	1	1	1
sk	0	1	1.01	0.91	0.181	0.837	0.247	0.778	0.300

Remarque sur l’action intégrale

“Reset Windup”

- La sortie du correcteur change tant que $e(t^*) \neq 0$.
  - Quand l’erreur est importante, l’intégrale devient assez grande et peut produire la saturation

Action Dérivée

- Le système est peu stable
- Le régime oscillateur très peu amorti
- Très peu précis

En présence du correcteur à action dérivée

$$G(z) = C(z)A(z) = \frac{K\left(1 - z^{-1}\right)}{z - 0.1} = \frac{K\left(z - 1\right)}{z\left(z - 0.1\right)}$$

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K\left(z - 1\right)}{z^2 + \left(K - 0.1\right)z - K}$$

$$s_k = \left(0.1 - K\right)s_{k-1} + Ks_{k-2} + Ke_{k-1} + Ke_{k-2}$$

$$\left|p_1\right| = \frac{0.1 - K + \sqrt{\left(K - 1\right)^2 + 4K}}{2}$$

$$\left|p_2\right| = \frac{K - 0.1 + \sqrt{\left(K - 1\right)^2 + 4K}}{2}$$

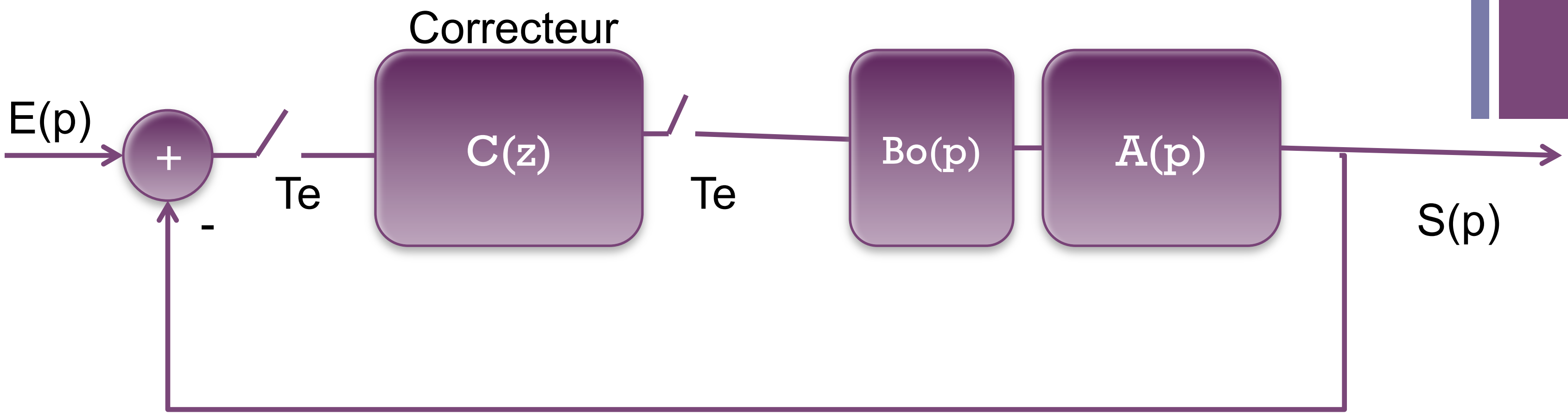
Action Dérivée

- Condition de stabilité => K<0.55
- K=0.4 $$s_k = -0.3 s_{k-1} + 0.4 s_{k-2} + 0.4 e_{k-1} - 0.4 e_{k-2}$$

ek	1	1	1	1	1	1	1	1	1
sk	0	0.400	-0.120	0.196	-0.107	0.110	-0.076	0.067	-0.050

- Le système est effectivement plus stable, puisqu'il converge vers une valeur fini, beaucoup plus vite, conformément au calcul des nouveaux pôles : 0.5,0.8
- **Ce type de correction est inacceptable, erreur de position de 100 % , ;-)**

Synthèse d'un correcteur numérique par discrétisation d'un correcteur continu



- Etudier l'asservissement en temps continu puis à rechercher le modèle numérique continu au correcteur continu C(p)
- Il faut tenir compte de la présence du bloqueur
- Fréquence d'échantillonnage grande permet de le négliger.

Synthèse d'un correcteur numérique par discrétisation d'un correcteur continu

- Les équivalences sont :

$$dérivation : p \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_s}$$

$$bilinéaire : p \leftrightarrow \frac{2\left(1-z^{-1}\right)}{T_s\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$\mathrm{mod}\, ale : p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_s}$$

- Les équivalence temporelle sont adaptées pour conserver le gain statique du système :

$$G(p) = \frac{1}{p - p_i} \leftrightarrow G(z) = \left(-\frac{1}{p_i}\right)\frac{1-e^{p_i T_s}}{z - e^{p_i T_s}}$$

$$G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \leftrightarrow G(1) = -\left(\frac{1}{p_i}\right)\frac{1-e^{p_i T_s}}{1 - e^{p_i T_s}}$$

- On peut choisir de conserver la valeur du gain pour une autre fréquence que la fréquence nulle, autour de laquelle porte la correction du système.

Exemple

- On souhaite asservir un système continu de fonction de transfert G(p) en utilisant un correcteur numérique en imposant le cahier des charges suivant :
  - Marge de phase $\Delta\varphi = 45^{\circ}$
  - Temps de monté $t_m = 0.2s$

- On donne :

$$G(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{10}+1\right)^3}, K > 0$$

+ Solution

- Synthèse du correcteur en temps continu

$$\omega_{c_0} \approx \frac{3}{t_m} \approx 15 rad/s$$

$$G\left(\omega_{c_0}\right) = 1 \Rightarrow K = 5.86$$

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi\left(\omega_{c_0}\right) = \pi - 3arctg\left(\frac{15}{10}\right) = 11^{\circ}$$

- Il est nécessaire d'introduire un correcteur de phase +34° :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin\frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = 3.55$$

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c_0} \Rightarrow T = 0.035s$$

$$C(p) = \frac{1 + 0.124p}{1 + 0.035p}$$

Calcul du correcteur numérique équivalent

- Equivalence à la dérivation (pour simplifier) :

$$p \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_s}$$

$$C(z) = \frac{1+0.124\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T_s}\right)}{1+0.035\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T_s}\right)}$$

- Choix de la fréquence d'échantillonnage : 6Bp:25Bp

$$G\left(2\pi f_{pas}\right) = \frac{5.86}{\left(\sqrt{\dfrac{4\pi^2 f_{pas}^2}{100}+1}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_{pas} = 2.8\,Hz$$

$$f_s = 100\,Hz \Leftrightarrow T_s = 0.01s$$

$$donc$$

$$C(z) = \frac{1+12.4\left(1-z^{-1}\right)}{1+3.5\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{13,4z-12.4}{4.5z-3.5}$$

+ Validation des résultats

- Modèle à temps discret équivalent à l'ensemble de l'asservissement :

$$G(z) = \frac{5.86}{\left(\frac{1-z^{-1}}{10T_s}+1\right)^3} = \frac{5.86}{\left(11-10z^{-1}\right)^3}$$

$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{5.86\left(13.4z-12.4\right)}{\left(11-10z^{-1}\right)^3\left(4.5z-3.5\right)+5.86\left(13,4z-12,4\right)}$$

$$H(z) = \frac{78.5-72.5z^{-1}}{6.068-21066z^{-1}+27555z^{-2}-16050z^{-3}+3500z^{-4}}$$

$$s_k = 3.47s_{k-1} - 4.54s_{k-2} + 2.65s_{k-3} - 0.58s_{k-4} + 0.01294e_k - 0.01195e_{k-1}$$

Simulation de la suite d'Echantillons

k	0	5	10	15	20	25	30	35	40
t	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
ek	1	1	1	1	1	1	1	1	1
sk	0.013	0.389	0.978	1.225	1.044	0.761	0.672	0.785	0.920

$$t_m \approx 0.12s$$

$$D = 40\% \rightarrow \zeta = 0.3$$

$$\zeta_{BF} = 0.3 \Rightarrow \Delta\varphi \approx 30^{\circ}$$

Le système est un peu plus rapide et un peu moins stable que prévu.

Due aux l'ensemble d'approximations

Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale

- La technique de la synthèse par méthode polynomiale consiste à corriger de sorte que F.T. en B.O. G(z) correspond à un système du second ordre

$$G(z)=\frac{K\left(1+e^{-2\zeta\omega_n T_s}-2e^{-\zeta\omega_n T_s}\cos\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{z^2-2ze^{-\zeta\omega_n T_s}\cos\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}+2e^{-\zeta\omega_n T_s}}$$

Donc en BF

$$H(z)=\frac{K_{BF}\left(1+e^{-2\zeta_{BF}\omega_{nBF}T_s}-2e^{-\zeta_{BF}\omega_{nBF}T_s}\cos\omega_{nBF}T_s\sqrt{1-\zeta_{BF}^{\ 2}}\right)}{z^2-2ze^{-\zeta_{BF}\omega_{nBF}T_s}\cos\omega_{nBF}T_s\sqrt{1-\zeta_{BF}^{\ 2}}+2e^{-\zeta_{BF}\omega_{nBF}T_s}}$$

Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale

- Précision : Si G(z) possède un pôle égal à 1 l'erreur de position est nulle

- Pour que la boucle d'asservissement initiale possède les performances :

$$G(z) = C(z)A(z)$$

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)}$$

+ Exemple

- Considérons le système échantillonné à une période Ts=0.2s de F.T. :

$$A(z) = \frac{z+0.3}{z-0.8}$$

- On souhaite placer ce système dans un boucle de retour unitaire et on veut que les système en B.F. :

$$\varepsilon_p = 0;$$
$$t_m = 0.8s$$
$$\xi_{BF} = 0.45 \Rightarrow M_\varphi = 45^\circ$$
$$D \approx 20\%$$

Solution :

$$G(z)=\frac{a}{(z-1)(z-b)};z=1\Rightarrow \varepsilon_p=0$$

$$H(z)=\frac{a}{(z-1)(z-b)+a}=\frac{a}{z^2-(1-b)z+a+b}$$

$$H(z)=\frac{K_{BF}\left(1+e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_s}-2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_s}\cos\omega_{nBF}T_s\sqrt{1-\xi_{BF}{}^2}\right)}{z^2-2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_s}\cos\omega_{nBF}T_s\sqrt{1-\xi_{BF}{}^2}+2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_s}}$$

$avec:$

$$\xi_{BF}=0.45$$

$$\omega_{nBF}=\frac{3}{t_m}=3.75rad/s$$

$$H(z)=\frac{0.39K_{BF}}{z^2-1.12z+0.51}$$

$$1+b=1.12$$

$$a+b=0.51$$

$$a=0.39$$

$$b=0.12$$

- Gain statique égal à 1
- Puisque l'erreur de position nulle

$$G(z)=\frac{0.39}{(z-1)(z-0.12)}$$

$$C(z)=\frac{G(z)}{A(z)}=\frac{0.39(z-0.8)}{(z-1)(z-0.12)(z+0.3)}$$