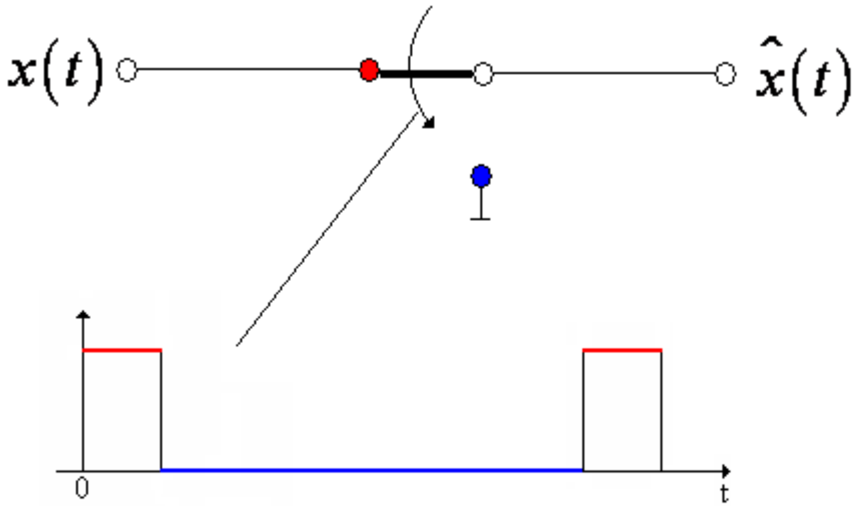
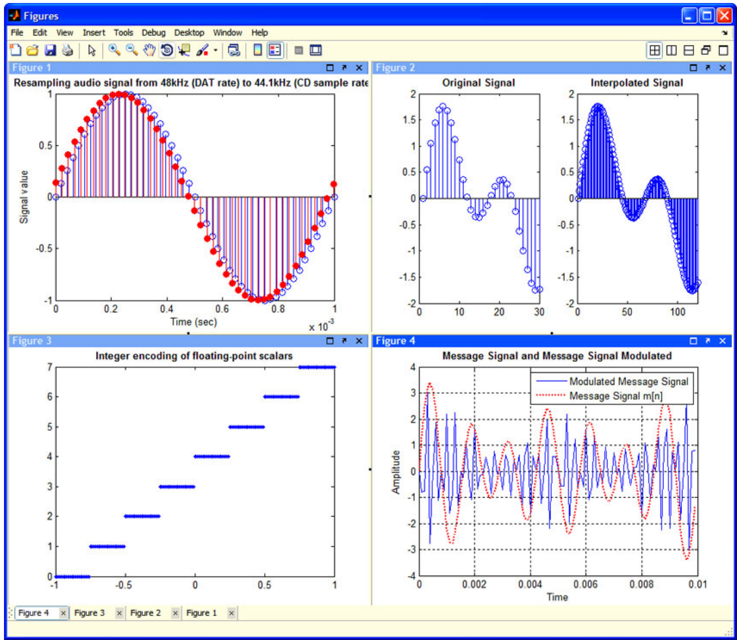
Modélisation et Analyse des Systèmes Discrets

Andrei Doncescu
LAAS-CNRS

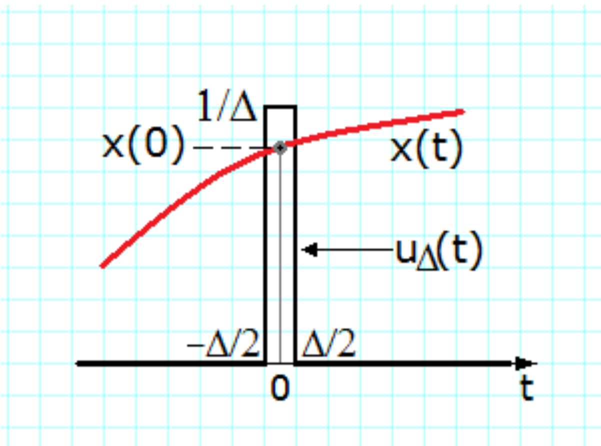
ECHANTILLONNAGE Réel

Echantillonnage idéal – discrétisation dans le temps





$$u_\Delta = \frac{1}{\Delta}\left[\sigma\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$$



Un échantillon de $x(t)$ est obtenu par la multiplication du signal continu $x(t)$ avec l'impulsion rectangulaire $u_\Delta(t)$:

$$x(t)u_\Delta(t) \cong x(0)u_\Delta(t)$$

Un autre échantillon est obtenu par la même multiplication translatée (shifted) de kT_s.

$$x(t)u_\Delta(t-kT_s) \cong x(kT_s)u_\Delta(t-kT_s)$$

Modélisation de l'échantillonnage :

$$x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_\Delta(t-kT_s) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,u_\Delta(t-kT_s)$$

Petite valeurs de Δ:

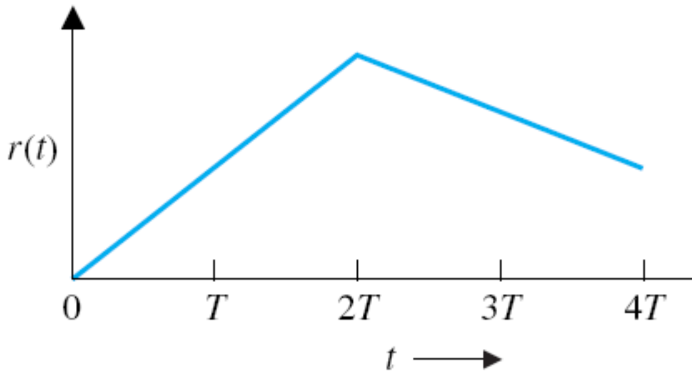
$$\lim_{\Delta\to 0} u_\Delta(t) = \delta(t)$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_\Delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s)x(kT_s) = \delta_{T_s}(t)$$

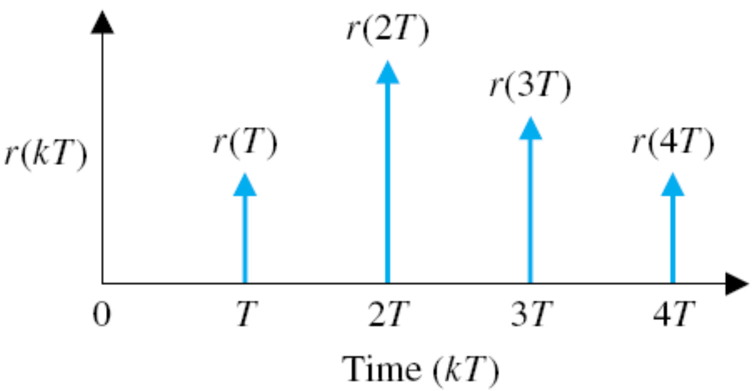
Rappel : Echantillonnage Idéal de $x(t)$:

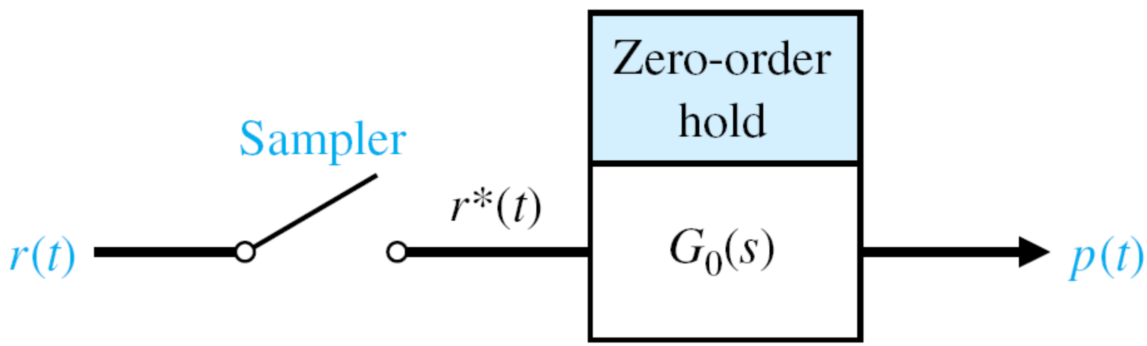
$$\hat{x}(t) = x(t)\,\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s)$$

Notation anglo-saxone :

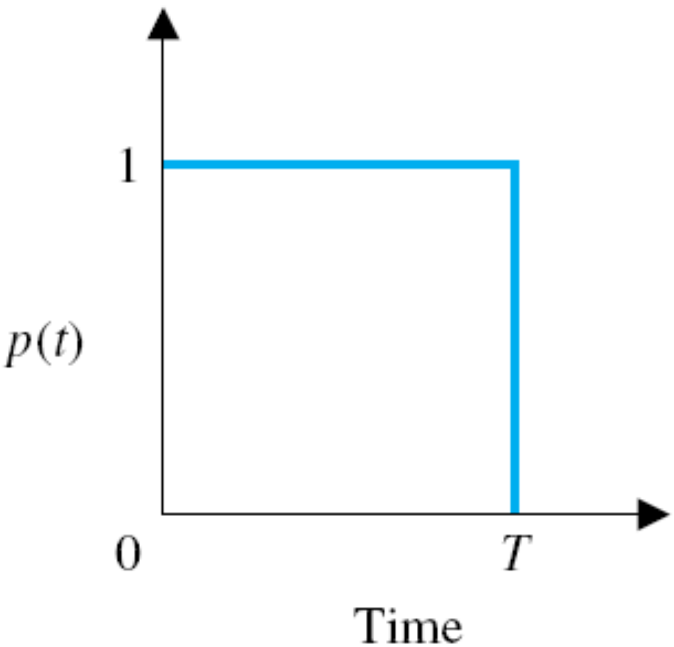


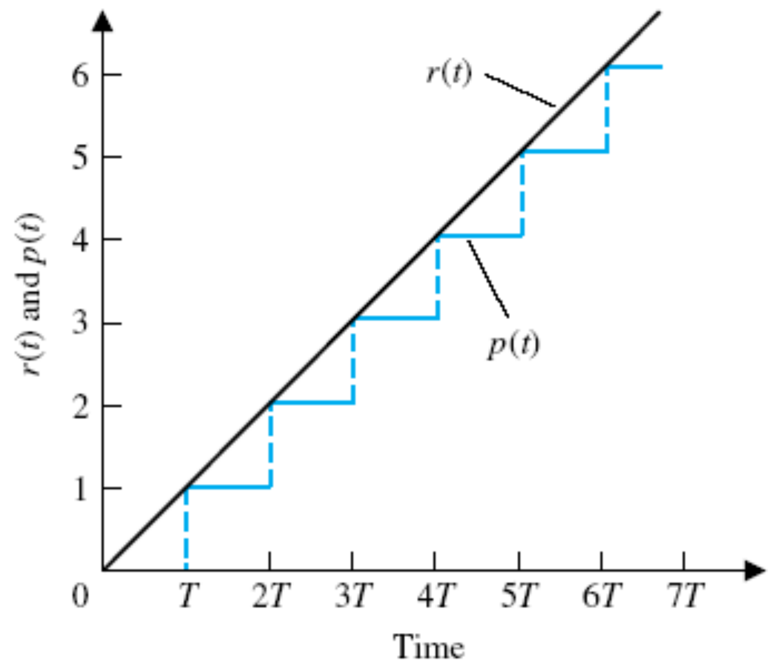
(a)



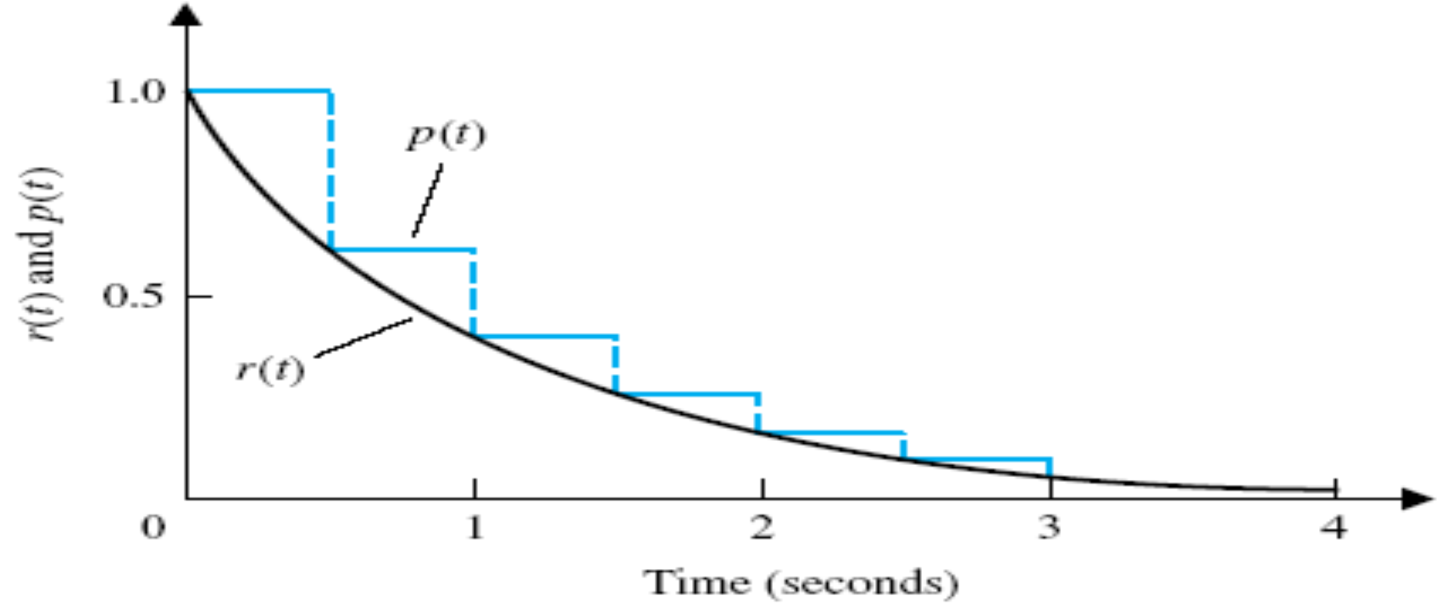


La Transformée Laplace d’un bloqueur d’ordre 0 (Boz)

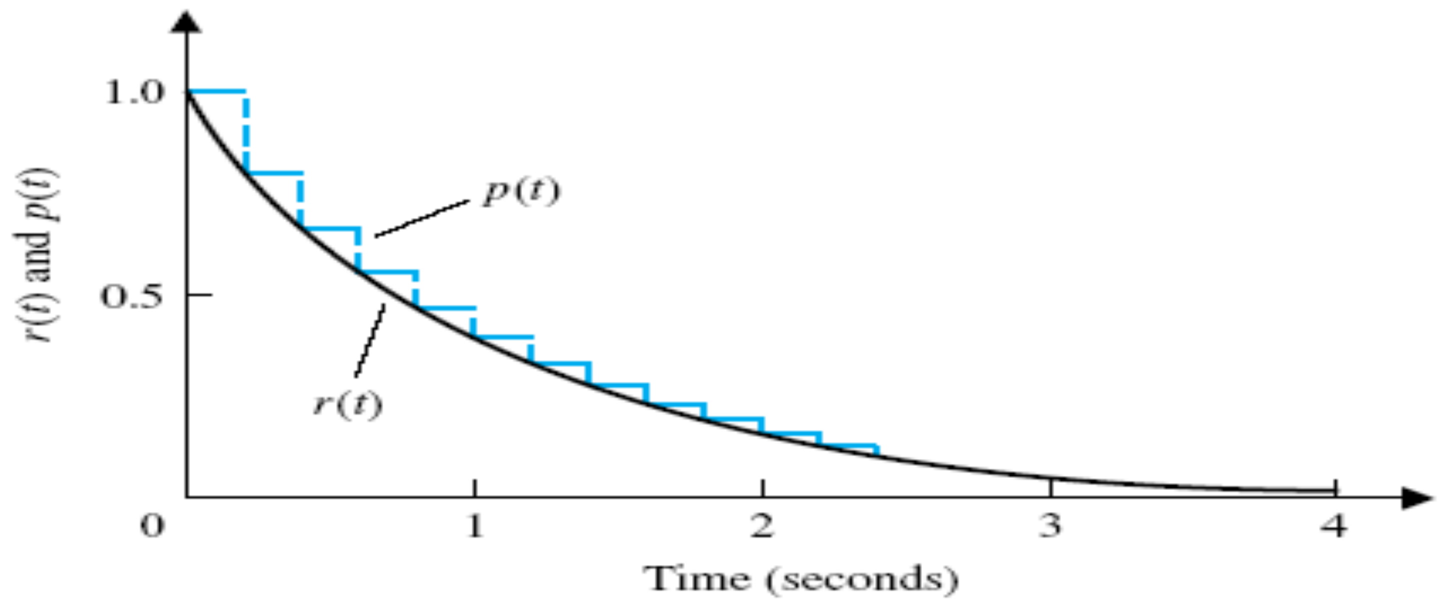




$$G_o(p) = 1 / p - e^{pT} / p = (1 - e^{pT}) / p$$

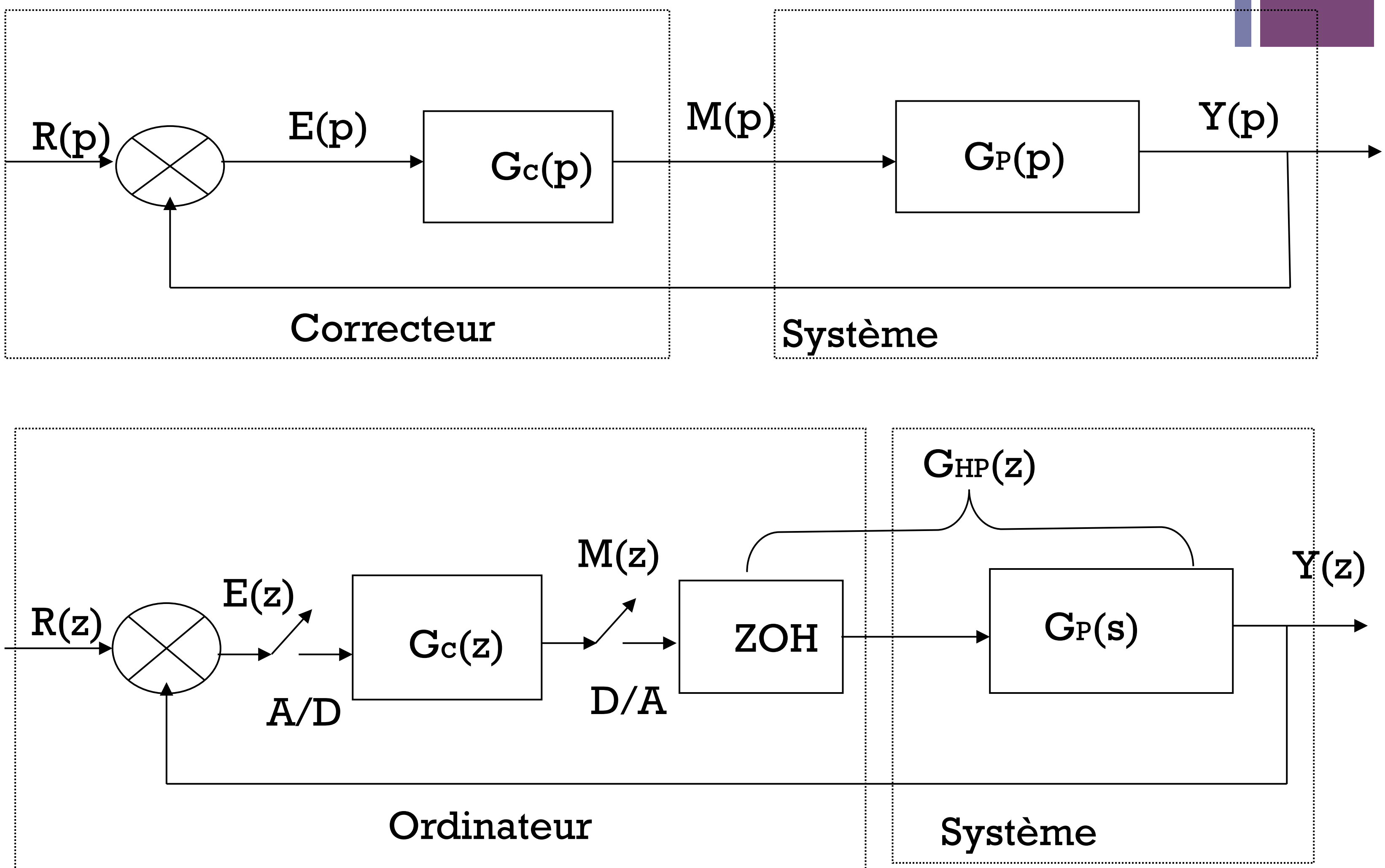


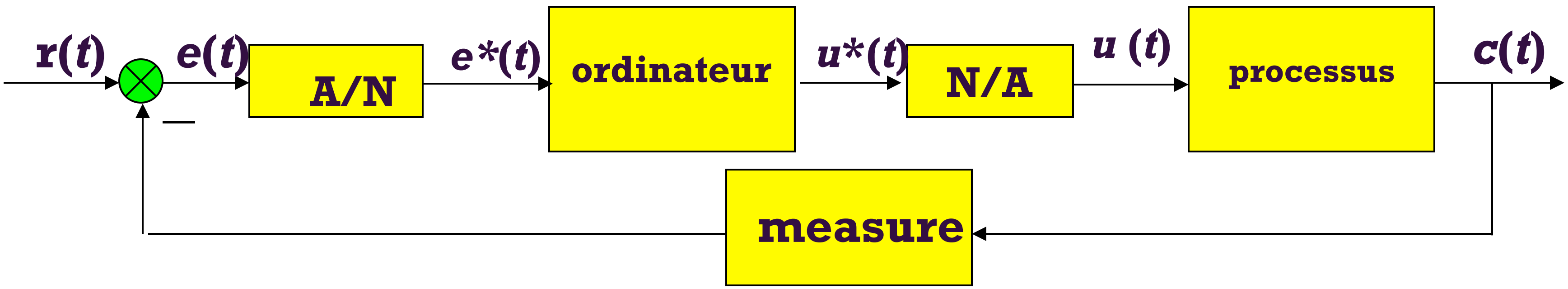
(a) $T = 0.5$ seconds



(b) $T = 0.2$ seconds

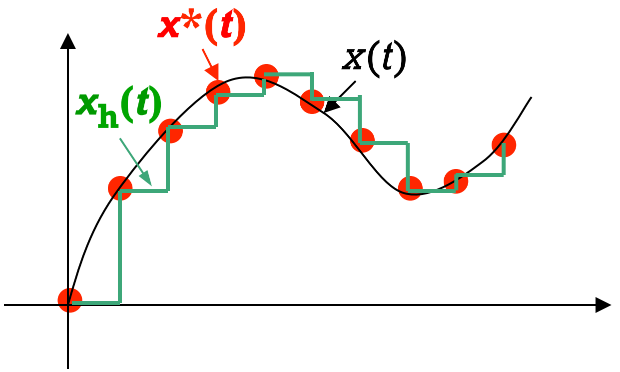
La Transformée en z



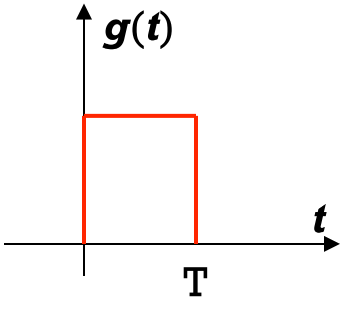


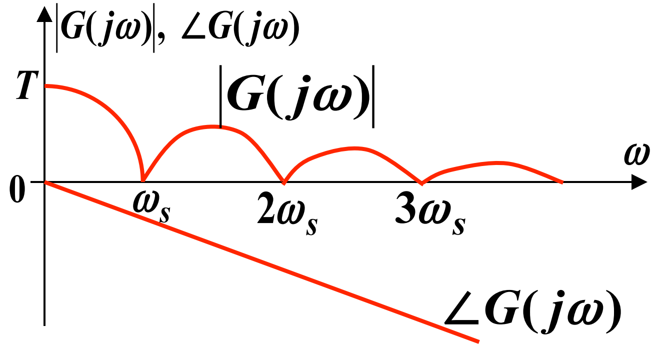
La forme mathématique de $x_h(t)$:

$$x_h(t) = x(kT) \qquad kT \le t < (k+1)T$$



$$G(s) = L\left[1(t) - 1(t-T)\right] = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$





$$G(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\Rightarrow\begin{cases}\left|G(j\omega)\right|=T\dfrac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\\ \angle G(j\omega)=-(\omega T/2)\end{cases}$$

La Transformée en z

Comment il est possible de représenter mathématiquement un systèmes échantillonné ?

Pour les systèmes à temps continu l'outil mathématique est la Transformée de Laplace. Elle permet de définir les fonction de transfert, l'analyse de la stabilité et le design des correcteurs.

La Transformée en Z

- Le Signal Echantillonné est :

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

- La Transformée Laplace est

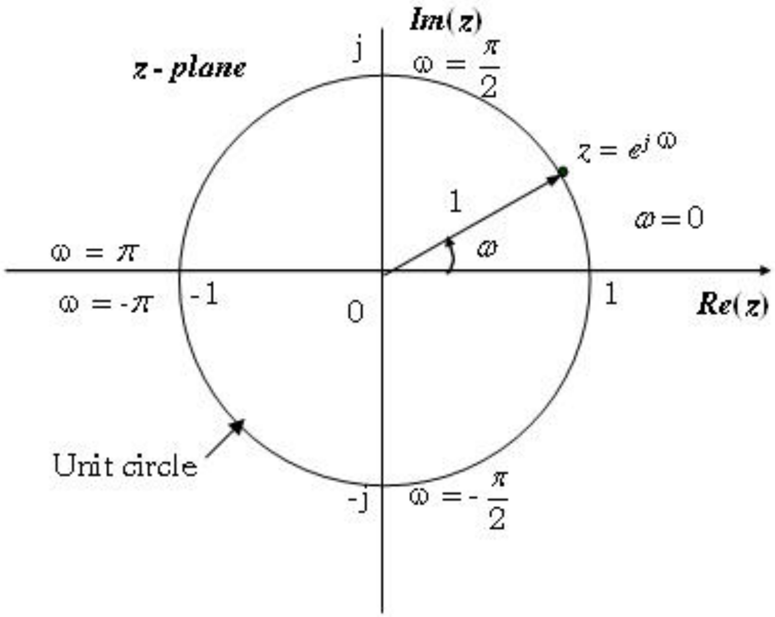
$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$z = e^{Tp}$$

$$p = \sigma + j\omega$$

$$p = \frac{1}{T}\ln z$$

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

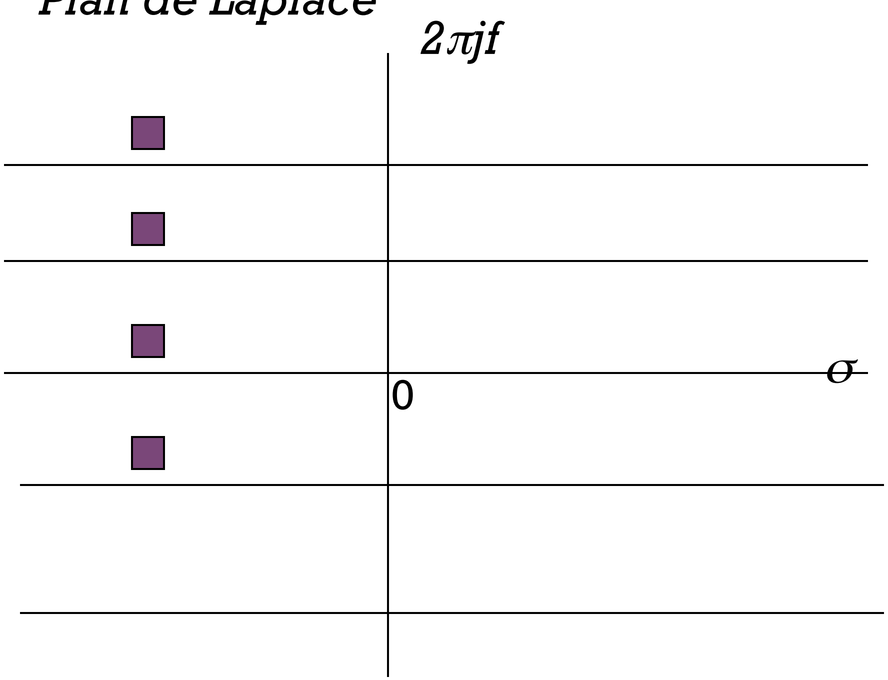


Lien avec la Transformée de Laplace

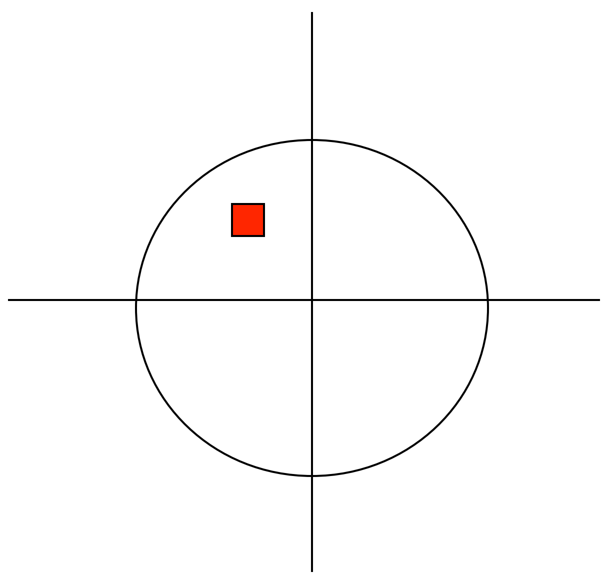
- Pour *p=σ+2πjf*, *σ l'amortissement et f=fréquence*

$$Tz\{x(n)\} = TL\{x(n)\}\Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{n\in Z} x(n)e^{-npT} = \sum_{n\in Z} x(n)z^{n}$$

Plan de Laplace



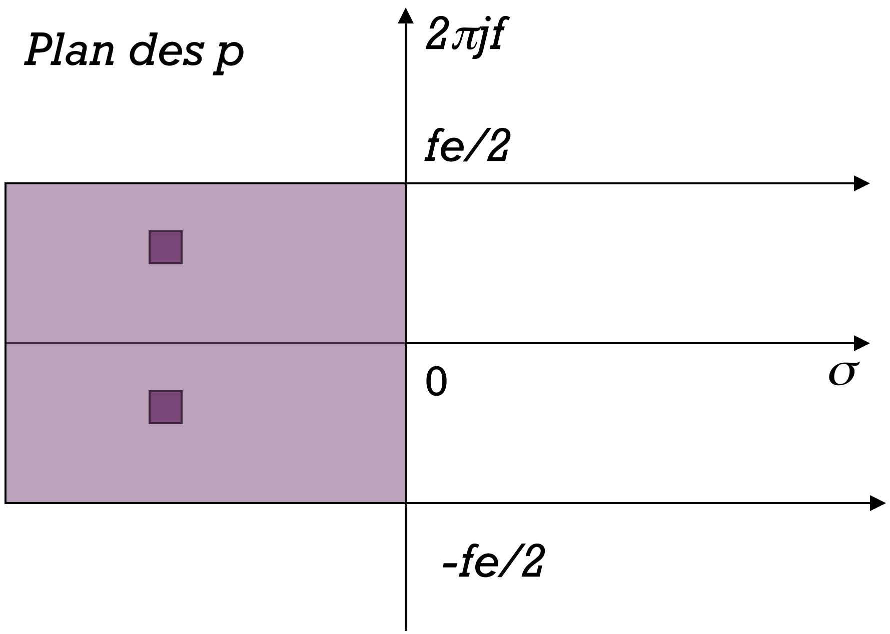
Plan des {z}

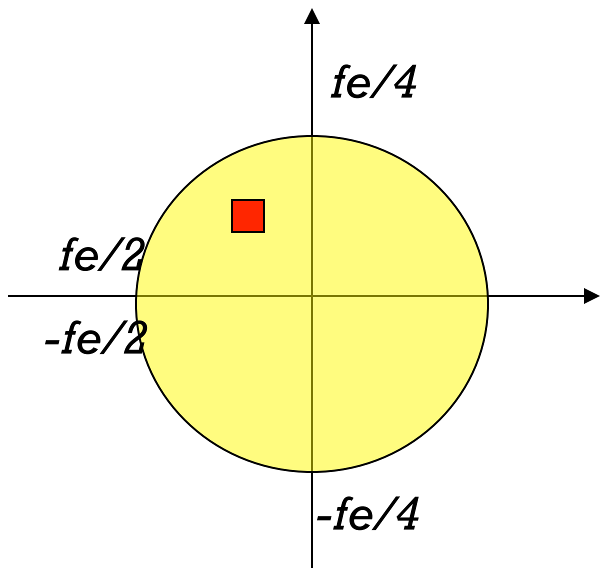


Plan Transformée en Z

$$p = \sigma + j2\pi f$$

$$f \in \left[(k - \frac{1}{2}) f_e, (k + \frac{1}{2}) f_e \right] \text{ et } \sigma < 0 \quad \longrightarrow \quad Z = e^{\sigma t} e^{j 2 \pi f T_e}$$





Représentation par la Transformée en z

- *Définition*

On appelle transformée en z bilatérale d'une suite $\{x(n)\}$, la somme $X_b(z)$ définie par :

$$Xb(z) = Tzb \;= \sum_{n \in Z} x(n) z^{-n}$$

Remarque :
On peut considérer la transformée monolatérale:

$$Xb(z) = Tzb\left\{\; x(n) \;\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

La Transformée Inverse

$$\mathrm{x}[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{X}(z) z^{n-1} dz.$$

Pourquoi la Transformée en z?

- Généralisation de la Transformée de Fourier
- Pourquoi est-elle une généralisation ?
  - Problème de convergence de la T.F.
  - Utilisation de l'Analyse Complexe
  - Adaptée pour les signaux et systèmes discrets en temps

Définition

- La Transformée en Z d'une sequence $x(n)$ est :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

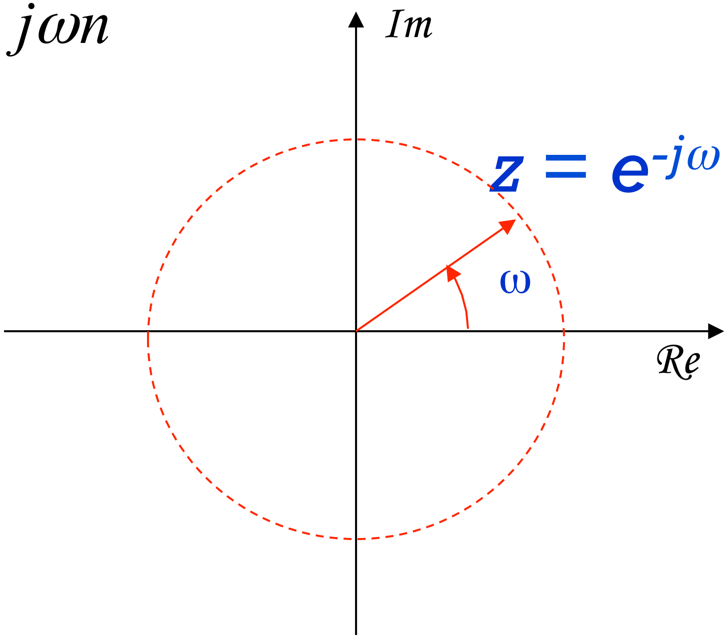
Transformée de Fourier

$z = e^{-j\omega}$.

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

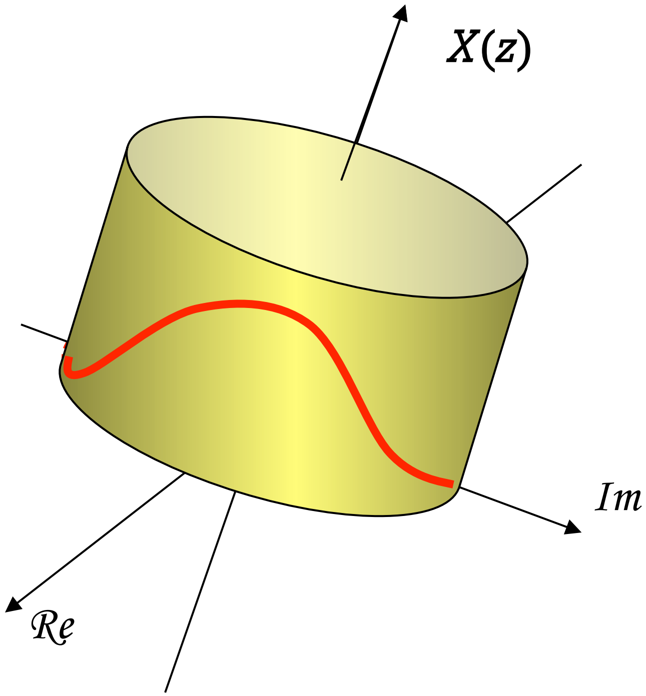
Le Plan z

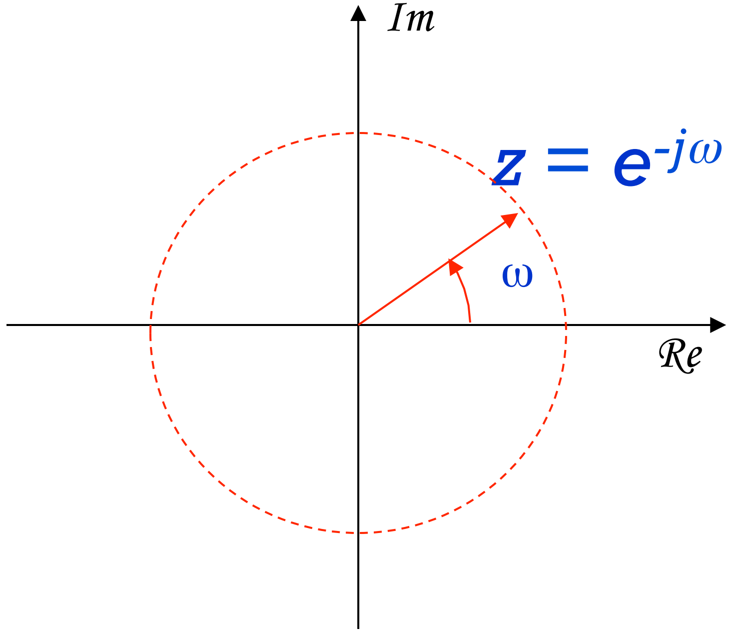
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$



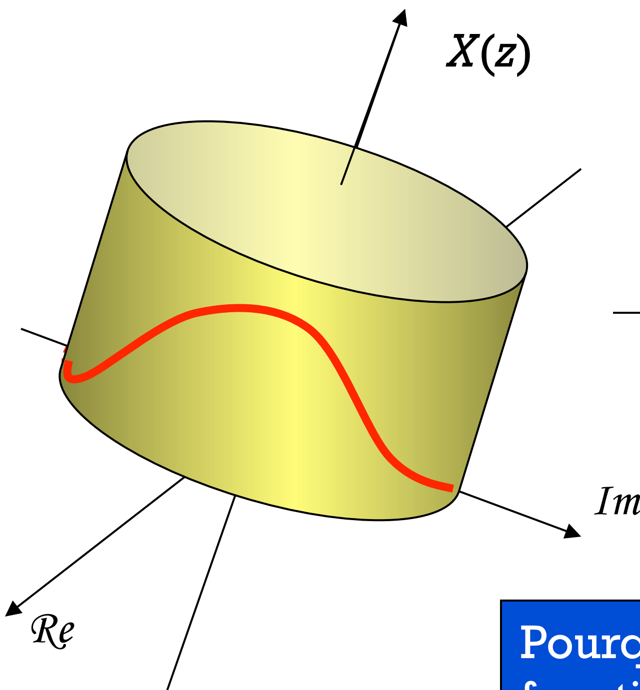
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

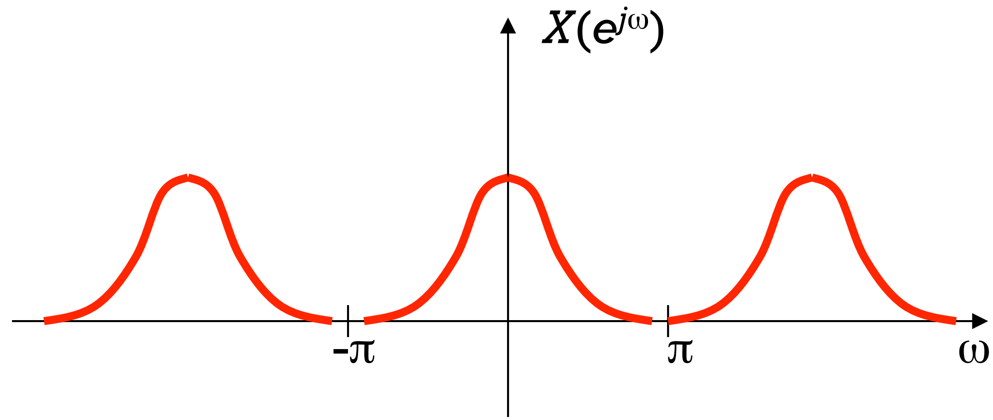
Plan-z





Périodicité de la TF





Pourquoi la Transformée de Fourier est une function périodique de periode 2π ?

Linéarité

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

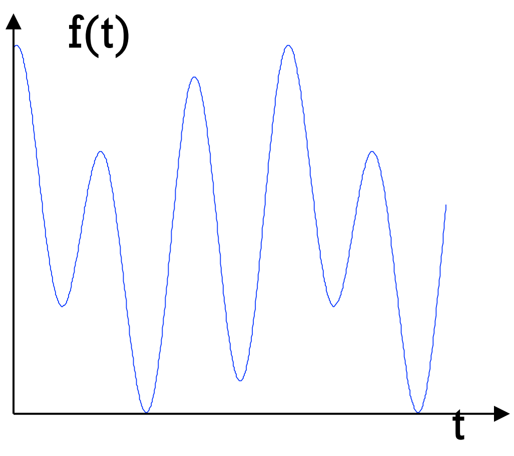
$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

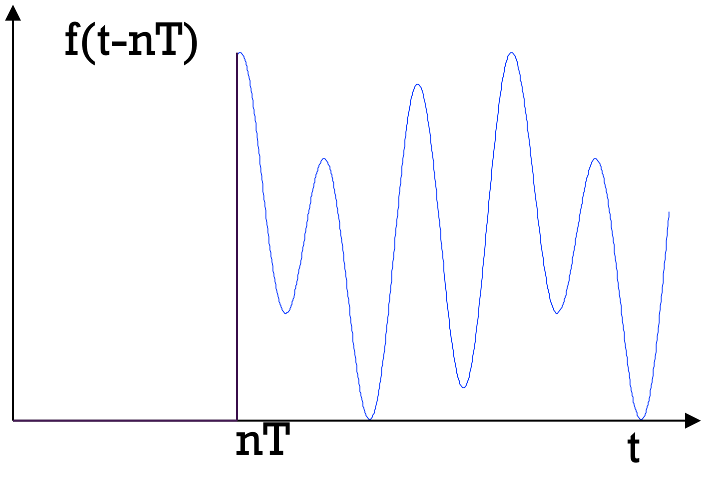
$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \qquad \underbrace{z \in R_x \cap R_y}$$

La Transformée en z : théorèmes

Théorème du retard:

La transformée en z de f(t) est F(z), trouver la transformée en z de f(t-nT) ?





Retard

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z) \qquad z \in R_x$$

La Transformée en z : théorèmes

Si f(t)=0 pour t<0 a la transformée en z est F(z), alors

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z) \quad \text{et}$$

$$Z[f(t+nT)] = z^{n}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right]$$

Démonstration:

$$Z[f(t-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-k}z^{n-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)}z^{-n} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)}$$

La Transformée en z

Pour un signal continu f(t), ses échantillons s'écrivent :

$$f_s(t) = f(kT) = f(0) + f(T) + f(2T) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)$$

La transformée en z de f(t) est :

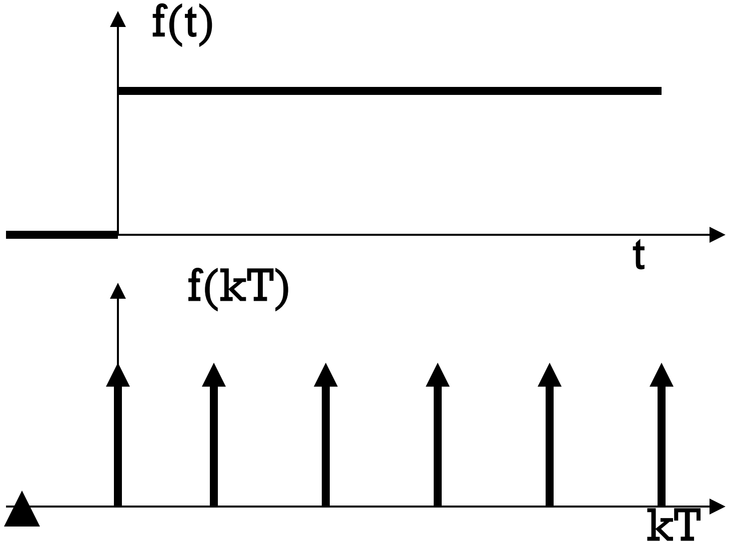
$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

$$= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots$$

où z^{-1} représente un retard d'une période d' échantillonnage dans le temps

Calcul de La Transformée en z

Calculer la Transformée en z de la fonction échelon .



La Transformée en z

Application de la définition :

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

La Transformée en z

Soit la méthode

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

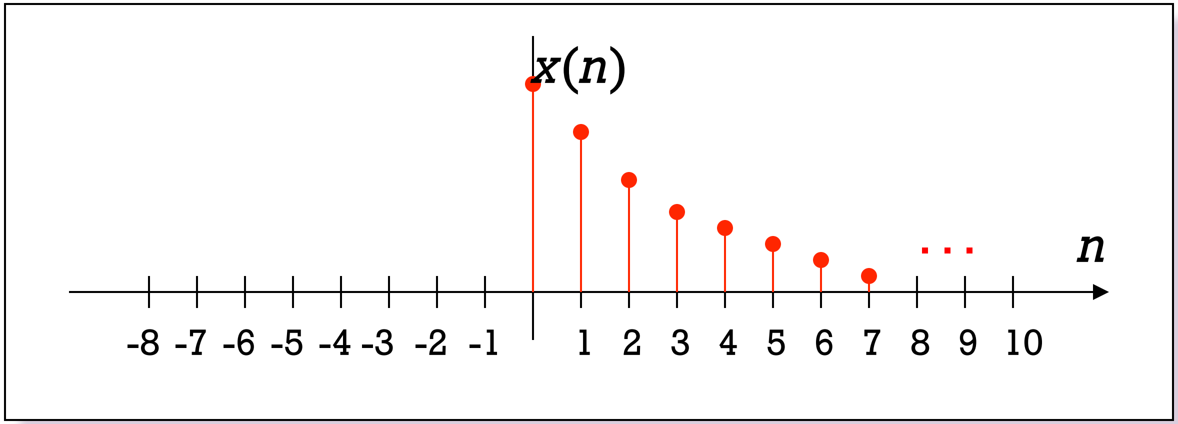
$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$z^{-1}F(z) = z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \cdots$$

$$F(z) - z^{-1}F(z) = 1 \Rightarrow \boxed{F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}}$$

Exemple:

$$x(n) = a^n u(n)$$



Exemple:

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Pour que $X(z)$ convergence, il faut imposer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}| < \infty \Rightarrow |az^{-1}| < 1$$

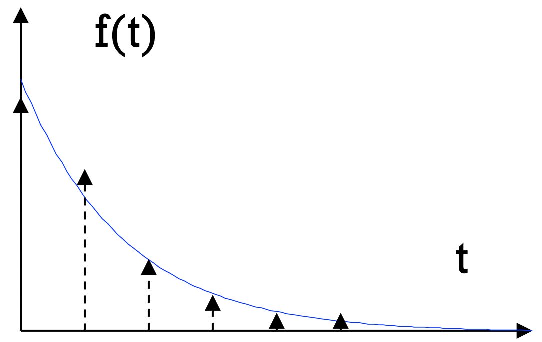
$$\Rightarrow |z| > |a|$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$|z| > |a|$$

La Transformée en z

Calculer la transformée en z de $f(t) = e^{-at}$



Solution: $f(kT) = e^{-akT}$

$$F(z) = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

La Transformée en z

Calculer la transformée en z de la fonction cos.

Solution:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t; \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}; \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}$$

+

La Transformée en z

$$F(z) = Z[\cos \omega kT] = Z\left[\frac{e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}}{2}\right]_e = \frac{1}{2}(Z[e^{j\omega kT}] + Z[e^{-j\omega kT}])$$

$$Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{-j\omega T} z^{-1} + 1 - e^{j\omega T} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega T} z^{-1})(1 - e^{-j\omega T} z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2 - (e^{-j\omega T} z^{-1} + e^{j\omega T} z^{-1})}{1 - (e^{-j\omega T} z^{-1} + e^{j\omega T} z^{-1}) + z^{-2}} = \frac{2 - 2z^{-1}\cos \omega T}{2(1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2})}$$

$$= \frac{1 - z^{-1}\cos \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}}$$

Dérivée de $X(z)$

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad z \in R_x$$

+

Les Transformées en Z

$$X(z) = Z\left[x(t)\right] = Z\left[x^*(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$1/p$	$\frac{z}{z-1}$
t	$1/p^2$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

Transformée en z

Calculer la Transformée en z de la fonction $f(t) = 1 - e^{-at}$

Solution:

$$F(z) = Z[f(kT)] = Z\left[1 - e^{-at}\right] = Z[1] - Z[e^{-at}]$$

$$Z[1] = Z[step] = \frac{1}{1 - z^{-1}}; \quad Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

Multiplication par une séquence Exponentielle

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \qquad z \in |a| \cdot R_x$$

Calcul de la transformée en z

$$f(t) = e^{-at}\cos\omega t$$

Solution 1:

$$Z\left[\cos\omega t\right] = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}} = F(z)$$

$$Z[f(t)] = F(z); \quad F[e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT})$$

$$Z[e^{-at}\cos\omega t] = \left.\frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}\right|_{z = e^{aT} z}$$

$$= \frac{1 - e^{-aT} z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$$

Solution 2:

$$F(z) = Z[e^{-at}\cos\omega t] = Z\left[\frac{e^{-at+j\omega t} + e^{-at-j\omega t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(Z[e^{-at+j\omega t}] + Z[e^{-at-j\omega t}])$$

$$Z[e^{-at}] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-aT+j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-aT-j\omega T}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

Calculer la Transformée en z de :

$$f(t) = te^{-at}$$

Solution:

$$Z\left[t\right] = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = F(z)$$

$$Z[f(t)] = F(z); \quad F[e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT})$$

$$Z[te^{-at}] = \left.\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right|_{z=e^{aT}z}$$

$$= \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$$

Théorème de la Valeur Initiale

$$x(n) = 0, \qquad \text{for } n < 0$$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Théorème de la Valeur Finale

Supposons que f(t), où f(t)=0 pour t<0, a la transformée en z, F(z), alors la valeur finale est donnée par :

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

Convolution de Séquences

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$
$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z) \qquad z \in R_x \cap R_y$$

Convolution de Séquences

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-n} \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n}$$

$$= X(z)Y(z)$$

+

$x(t)$	$X(z)$
$k_1x_1(t) \pm k_2x_2(t)$	$k_1X_1(z) \pm k_2X_2(z)$
$x(t-mT)$	$z^{-m}X(z) + \sum_{i=0}^{m-1} x(iT-mT)z^{-i}$
$x(t+kT)$	$z^{m}X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(iT)z^{m-i}$
$tx(t)$	$-Tz\dfrac{dX(z)}{dz}$
$e^{\pm\alpha t}x(t)$	$X(z)\big\vert_{z=ze^{\mp\alpha T}}$
$a^{k}x(t)$	$X(z)\big\vert_{z=\frac{z}{a}}$
valeur Initiale	$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{z\to\infty} X(z)$
valeur Finale	$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$
Convolution	$Z\left[x_1(t) * x_2(t)\right] = Z\left[\sum_{i=0}^{k} x_1(iT)x_2(kT-iT)\right] = X_1(z)X_2(z)$

+

Déduire d'autres transformées

$x(t)$	$X(z)$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}=\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
$te^{-\alpha t}$	$\left.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right\|_{z=ze^{\alpha T}}=\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
a^k	$\left.\frac{z}{z-1}\right\|_{z=\frac{z}{a}}=\frac{z}{z-a}$
t^2	$-Tz\frac{d}{dz}\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\delta(t-mk)$	z^{-m}

+

Transformée en z : exemples

Supposon $f(k)=0$ for $k<0$, calculer la Transformée en z de :

$f(k)=9k(2^{k-1})-2^k+3$, $k=0,1,2\ldots.$

Transformée en z : exemples

$$F(z) = Z[9k(2^{k-1}) - 2^k + 3] = Z[9k(2^{k-1})] - Z[2^k] + Z[3]$$

$$\boxed{Z[a^t f(t)] = F\left(\frac{z}{a}\right);} \quad \mathrm{Z[1]} = \frac{1}{1 - \mathrm{z}^{-1}} = \frac{z}{z-1}; \quad \mathrm{Z[t]} = \frac{\mathrm{Tz}^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z[2^k] = Z[2^k \times 1] = \frac{z/2}{z/2-1} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

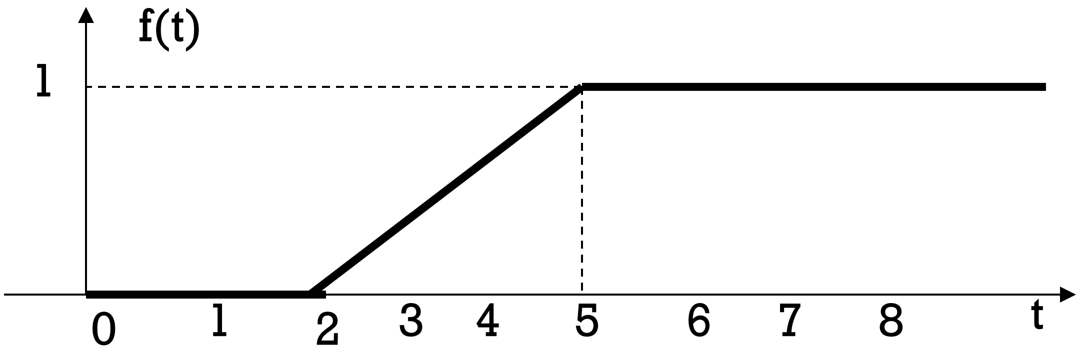
$$Z[9k(2^{k-1})] = Z[9k2^k2^{-1}] = \frac{9}{2}Z[k2^k] = \frac{9}{2}\frac{(z/2)}{(\mathrm{z}/2-1)^2} = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

$$F(z) = Z[9k(2^{k-1})] - Z[2^k] + Z[3] = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{2+z^{-2}}{(1-2z^{-1})^2(1-z^{-1})}$$

Transformée en z : examples

Calculer la Transformée en z de la courbe x(t) ci-dessous.



Transformée en z : examples

Solution: A partir de la figure, nous avons

K	0	1	2	3	4	5	6…
f(k)	0	0	0	1/3	2/3	1	1…

La définition de la Transformée en z :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 0 + 0 + 0 + \frac{z^{-3}}{3} + \frac{2z^{-4}}{3} + z^{-5} + z^{-6} + \cdots$$

$$= \frac{z^{-3} + 2z^{-4}}{3} + z^{-5}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$= \frac{z^{-3} + 2z^{-4}}{3} + \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}}{3(1 - z^{-1})}$$

Transformée en z : exemples

Calculer la Transformée en z de $F(p)=\dfrac{a^2}{p^2(p+a)}$

Solution: Décomposition en fractions élémentaires.

$$F(p)=\frac{a^2}{p^2(p+a)}=\frac{k_1}{p^2}+\frac{k_2}{p}+\frac{k_3}{s+a}=\frac{a}{p^2}+\frac{-1}{p}+\frac{1}{p+a}$$

$$F(z)=Z[F(p)]=Z[\frac{a}{p^2}]-Z[\frac{1}{p}]+Z[\frac{1}{p+a}]$$

$$=\frac{aTz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$=\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$1/p$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$1/p^2$	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$\dfrac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

Développement en Fractions Partielles

$$Si: \quad X(s) = \frac{A(p)}{(p+a_1)(p+a_2)\cdots(p+a_n)} = \frac{K_1}{p+a_1} + \frac{K_2}{p+a_2} + \cdots + \frac{K_n}{p+a_n}$$

$$alors: \quad X(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i z}{z - e^{-a_i T}}$$

Exemple

$$Z\left[\frac{5(p+4)}{p(p+1)(p+2)}\right] = Z\left[\frac{10}{p} - \frac{15}{p+1} + \frac{5}{p+2}\right] = \frac{10z}{z-1} - \frac{15z}{z-e^{-T}} + \frac{5z}{z-e^{-2T}}$$

Méthode des Résidus

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} res\left[X(p)\cdot\frac{z}{z-e^{Tp}}\right]_{p=-a_i} = \sum_{i=1}^{n} R_i \rightarrow \text{Residus}$$

$$R_i = \frac{1}{(q-1)!}\lim_{p\to -a_i}\frac{\partial^{q-1}}{\partial\, \mathrm{p}^{q-1}}\left[(p+a_i)^q X(p)\frac{z}{z-e^{Tp}}\right] \qquad \text{Pour des } \textit{pôles} \text{ de } X(p)$$

Calcul de la Transformée en Z

Exemple

$$Z\left[\frac{10}{p(p+1)^2}\right]=\frac{10}{p(p+1)^2}\cdot\frac{z}{z-e^{Tp}}\bigg|_{p=0}+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{10}{p}\cdot\frac{z}{z-e^{Tp}}\right]$$

$$=\frac{10z}{z-1}+\frac{-z^2+ze^{-T}(1-T)}{\left(z-e^{-T}\right)^2}$$

Transformée en Z inverse

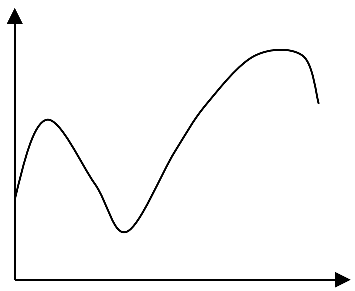
$$x(kT)=Z^{-1}\left[X(z)\right]\qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{TZ}^{-1}$$

Développement en fractions simples

$$Si:\quad X(z)=\frac{A(z)}{(z-e^{-a_1T})(z-e^{-a_2T})\cdots(p-e^{-a_nT})}=\frac{K_1z}{z-e^{-a_1T}}+\frac{K_2z}{p-e^{-a_2T}}+\cdots$$

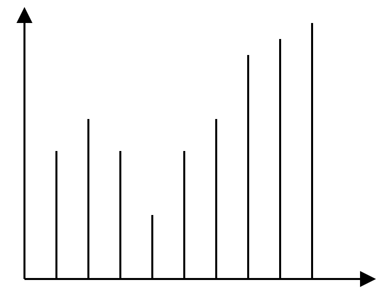
$$alors:\quad X(kT)=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{-a_ikT}$$

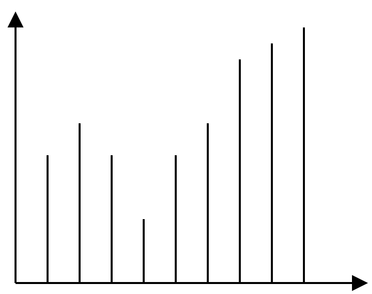
Transformée en z Inverse



Transformée en z

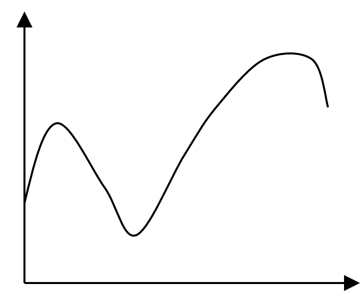
=





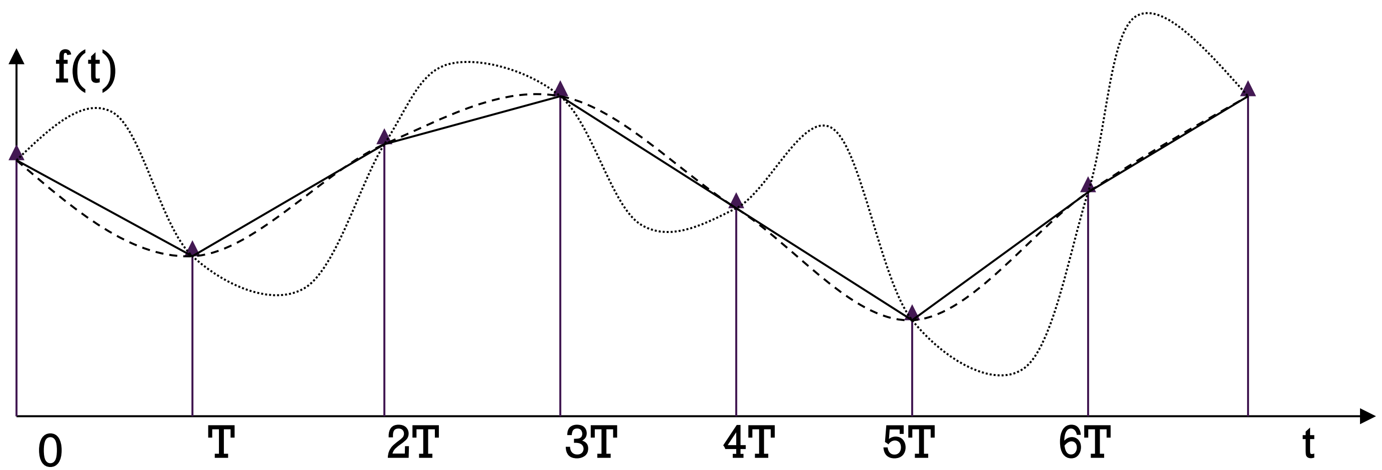
Transformée en z Inverse

≠

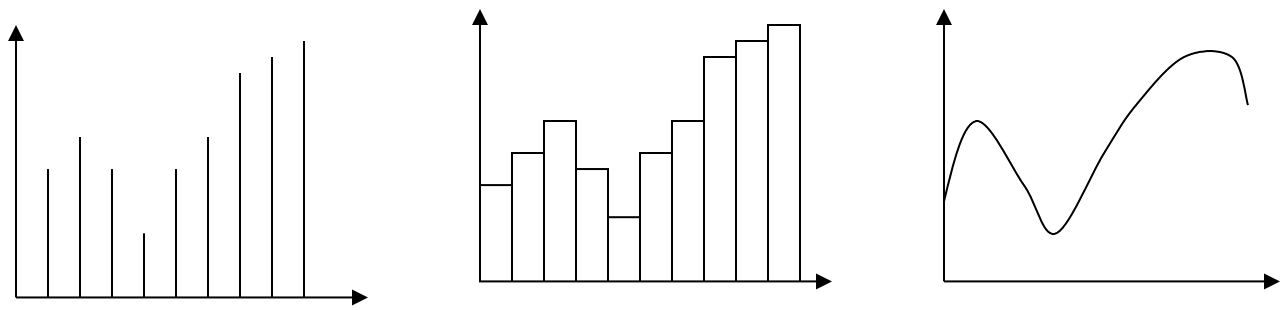


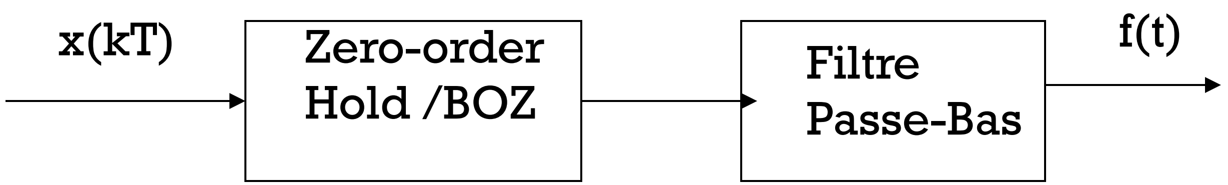
Transformée en z Inverse

La Transformée en z Inverse permet de retrouver la série temporelle f(kt) uniquement. Par contre ne permet pas de retrouver le signal d'origine. De nombreuses fonctions f(t) sont candidates pour une f(kT) donnée.



Transformée en z Inverse





La Transformée en *z* Inverse

- Basée sur l'intégrale de Cauchy
- Méthode d'identification par "inspection"
  - Décomposition en fractions simples
  - Identification de la série géométrique

Exemple: Calculer la transformée z inverse de :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Transformée en z inverse

- Supposons que la TZ se présente sous la forme :

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Développement en fractions simple :

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_m}{\left(1 - d_i z^{-1}\right)^m}$$

- Le premier terme existe si M>N
  - B_r est obtenu par division longue
- Le deuxième terme représente le pôles simples
- Le troisième terme représente les pôles multiples
- Chaque terme permet d'obtenir le TZ inverse par identification

Transformée en Z inverse

Exemple

$$x(kT) = Z^{-1}\left[\frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right] = 1 - e^{-2kT}$$

Séries des Puissances

$$Si: \qquad X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2} + K_3 z^{-3} + \cdots$$

$$alors: \quad X(kT) = K_1\delta(t-T) + K_2\delta(t-2T) + K_3\delta(t-3T) + \cdots$$

Exemple

$$x(kT) = Z^{-1}\left[\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z}\right]$$

$$= Z^{-1}\left[1 + 3.5z^{-1} + 4.75z^{-2} + 6.375z^{-3} + \cdots\right]$$

$$= 1 + 3.5\delta(t-T) + 4.75\delta(t-2T) + 6.375\delta(t-3T) + \cdots$$

Transformée en z Inverse : exemples

Méthode de la division-longue :

Exemple : F(z)=z/(z-0.5), trouver les f(kT).

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + \cdots \\
\hline
z - 0.5 & z \\
 & z - 0.5 \\
\hline
 & 0.5 \\
 & 0.5 - 0.25z^{-1} \\
\hline
 & 0.25z^{-1} \\
 & 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2} \\
\hline
 & \vdots
\end{array}
$$

$$F(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + \ldots.$$

$$f = \{1, 0.5, 0.25, \ldots.\}$$

$$f(k) = 0.5^{k}$$

Transformée en Z inverse

Méthode des résidues

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{n} res\left[X(z)\cdot z^{k-1}\right] = \sum_{i=1}^{n} R_i \rightarrow residues$$

$$R_i = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z\rightarrow -a_i} \frac{\partial^{q-1}}{\partial\ z^{q-1}}\left[(z+a_i)^q X(z) z^{k-1}\right] \qquad \text{poles d'ordre q de } X(z)$$

Exemple

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}\right] = \left.\frac{z^2\cdot z^{k-1}}{(z-1)(z-0.5)}(z-1)\right|_{z=1} + \left.\frac{z^2\cdot z^{k-1}}{(z-1)(z-0.5)}(z-0.5)\right|_{z=0.5}$$

$$= 2-(0.5)^{\frac{kT}{T}}$$

Systèmes Représentés par des Equations aux Différences

Soit une équation différentielle :

$$\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+a_2\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}c(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}c(t)+a_nc(t)$$

$$=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}r(t)+b_mr(t)$$

On obtient :

$$\frac{d}{dt}c(t)\approx\frac{c\left[(k+1)T\right]-c(kT)}{T}\overset{\Delta}{=}\frac{c(k+1)-c(k)}{\mathrm{T}}\overset{\Delta}{=}\frac{\Delta c(k)}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \text{différence linéaire}$$

+

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dc(t)}{dt}\right) \approx \frac{\Delta^2 c(k)}{T^2} = \frac{\Delta\left[\Delta c(k)\right]}{T^2}$$

$$= \frac{\Delta\left[c(k+1) - c(k)\right]}{T^2} = \frac{c(k+2) - 2c(k+1) + c(k)}{T^2}$$

$\Rightarrow$ équation aux différences d'ordre 2

...

$$\frac{dc(t)}{dt} \approx \frac{c(k) - c(k-1)}{\mathrm{T}} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\nabla c(k)}{T} \Rightarrow \text{ équation aux différence d'ordre 1}$$

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} \approx \frac{\nabla^2 c(k)}{T^2} = \frac{\nabla\left[\nabla c(k)\right]}{T^2}$$

$$= \frac{\nabla\left[c(k) - c(k-1)\right]}{T^2} = \frac{c(k) - 2c(k-1) + c(k-2)}{T^2}$$

$\Rightarrow$ ordre 2

...

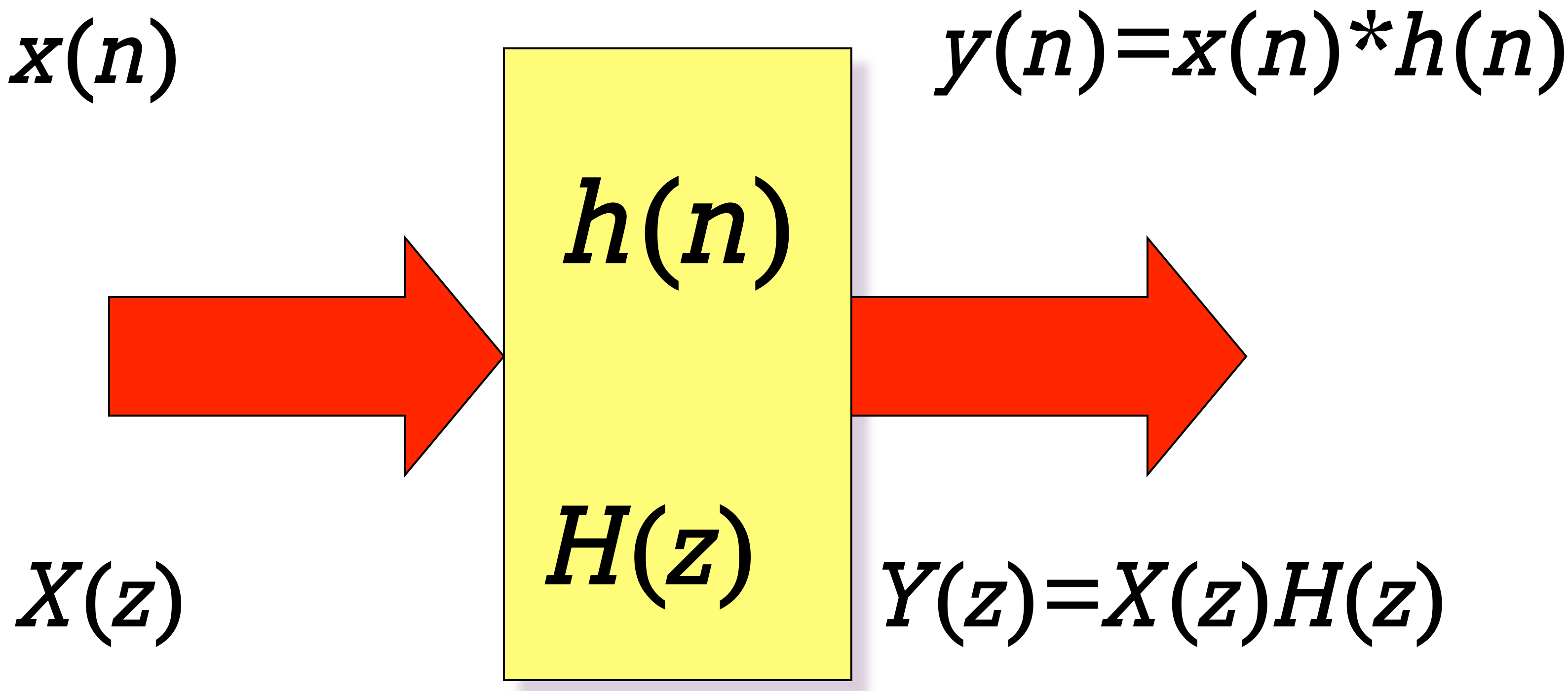
Equation aux différences d'ordre N

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

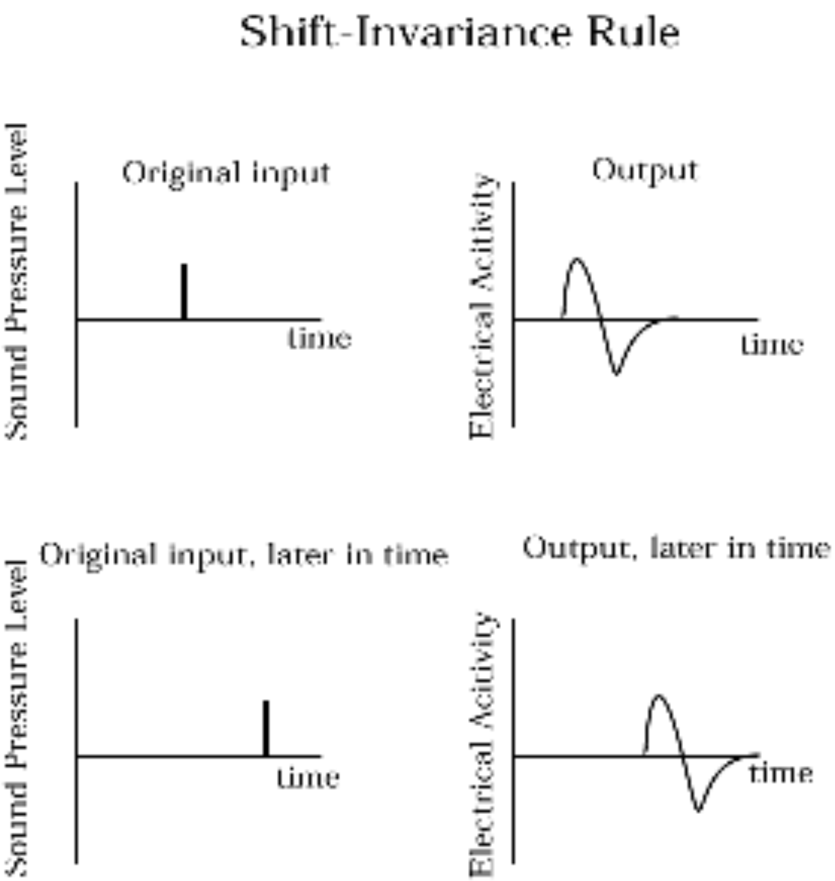
$$\boxed{H(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Système Invariant à la Translation : causal, sans mémoire, stable



Systèmes linéaires invariants

- *Définition*



$$Lx(k)=y(k) \quad Lx(k-k_0)=y(k-k_0)$$

Modèle Linéaire Discrets

Soit, l'équation linéaire, aux différences finies

$$\sum_{l=0}^{L-1} b_l y(n-l) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k x(n-k)$$

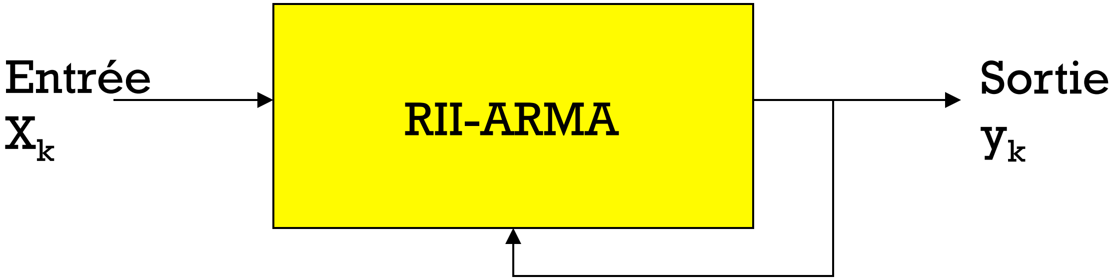
Est un modèle *ARMA* d'ordre *(K,L)*

<u>*Questions:*</u>

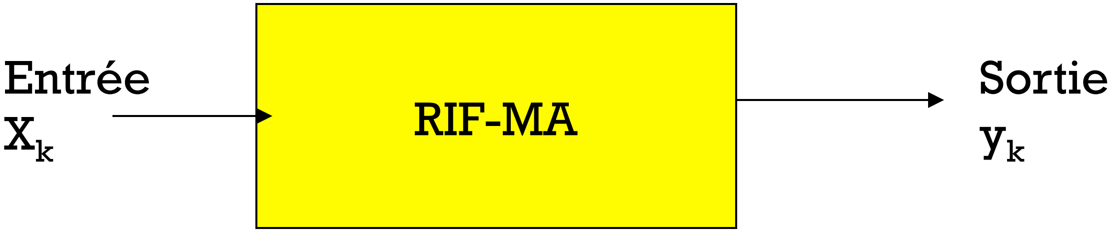
1. Quel l'ordre minimal *(K,L)* qui permettre de représenter le signal de façon convenable ?
2. Comment déterminer les $\{a_k\}$ et les $\{b_l\}$? Ces coefficients restent-ils invariants lorsque l'on considère différentes réalisation du signal ?

Filtres

Filtres récursifs



Filtres non-récursifs



Stabilité des Modèles ARMA

- La CNS pour qu'un système linéaire, de réponse impulsionnelle {h(n)} soit stable est que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \; sommabilit\acute{e}$$

- La stabilité d'un système *AR* ou *ARMA* exige que les pôles de la fonction de transfert *H(z)* soient à l'intérieur du cercle unité du plan {*z*}

Systèmes discrets

- Un système est discret lorsque toutes les grandeurs variables du système sont des signaux discrets.
- La réponse du système ne dépend pas uniquement des signaux discrets d'entrée mais aussi de l'état interne du système, donc nous avons une relation de récurrence

+ Systèmes discrets

- Si le système est linéaire et invariant dans le temps nous avons l'équation de type récurrence :

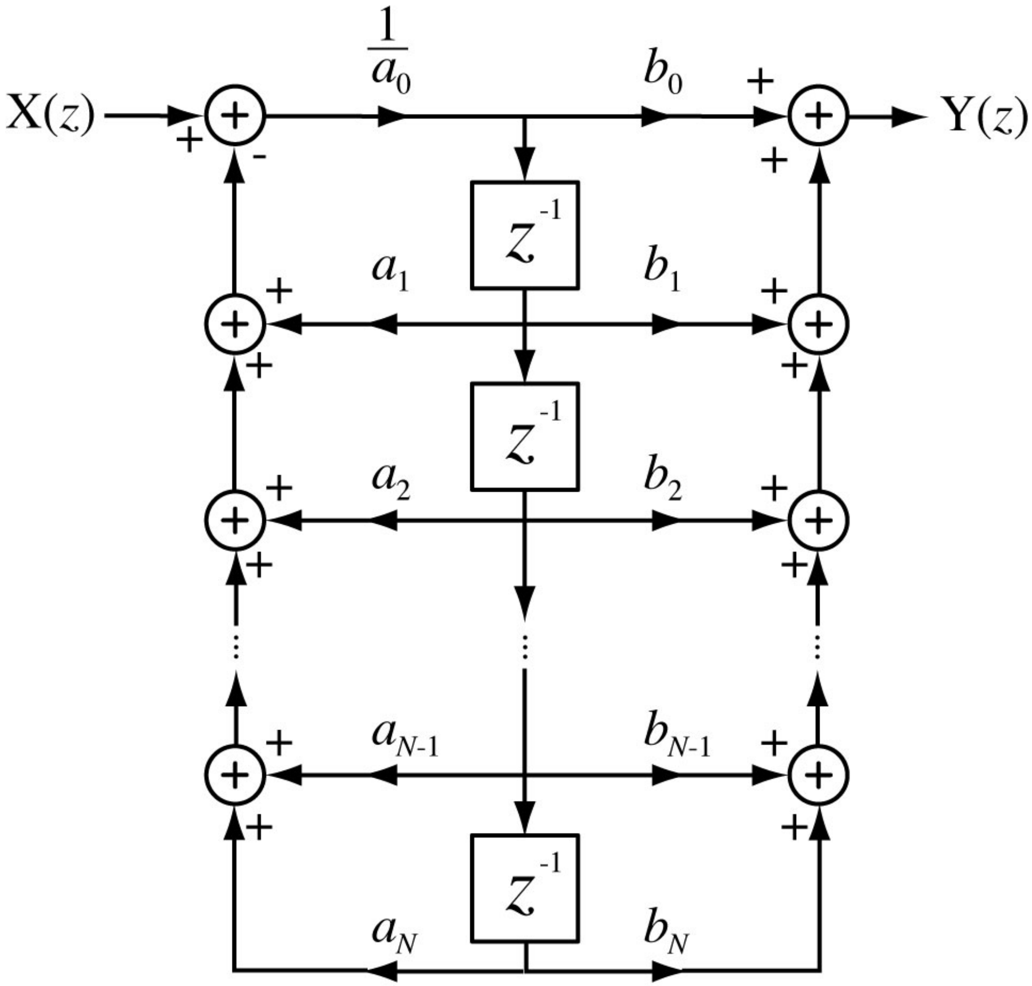
$$\sum_{n=0}^{N} b_n y(k-n) = \sum_{m=0}^{M} a_m x(k-m)$$

<u>Exemple</u> (l'importance des conditions initiales)

$$y(k)=0 \quad \forall k<0$$
$$x(k)=u(t)$$

$$y(0) = x(0) - ay(-1) = 1$$
$$y(1) = x(1) - ay(0) = 1 - a$$
$$y(2) = 1 - ay(1) = 1 - a + a^2$$
$$y(k) = \frac{1-(-a)^{k+1}}{1+a} u(k)$$

Implémentation de la T.z.



Représentation sous la forme Factorielle

Contribution des *pôles* en 0 et des *zéros* en c_r

$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$

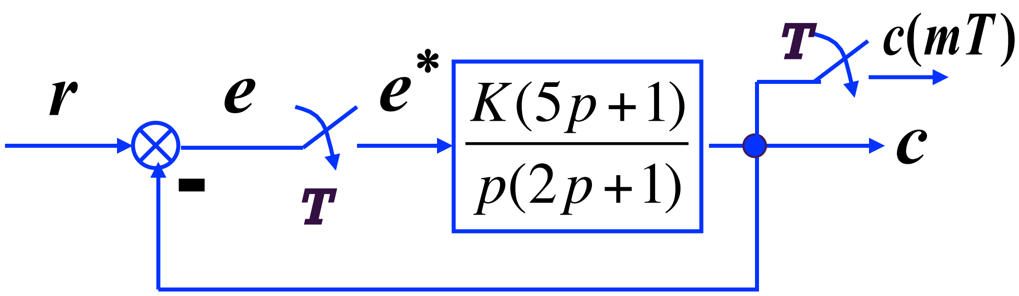
Contribution des *zéros* en 0 et *pôles* en d_r

Systèmes Représentés par des Equations aux Différences

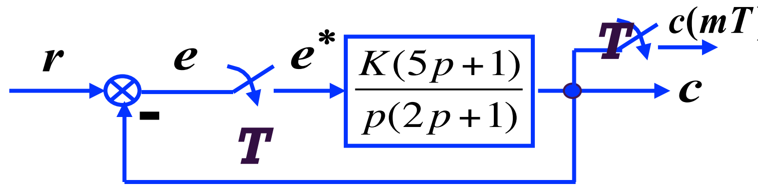
$$c(k)+\alpha_1 c(k-1)+\alpha_2 c(k-2)+\cdots+\alpha_{n-1}c(k-n+1)+\alpha_n c(k-n)$$
$$=\beta_0 r(k)+\beta_1 r(k-1)+\beta_2 r(k-2)+\cdots+\beta_{m-1}r(k-m+1)+\beta_m r(k-m)$$

Pour trouver la solution il est très simple par récursivité

Exemple



$K = 10,\ T = 0.5\text{s},\ r(t) = 1(t)$
Determiner la sortie $c^*(mT)$.



$$\frac{C(p)}{e^*(p)}=\frac{K(5p+1)}{s(2p+1)} \Rightarrow 2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+\frac{dc(t)}{dt}=5K\frac{de^*(t)}{dt}+Ke^*(t)$$

$$\because \quad 2\frac{d^2c(t)}{dt^2}\approx 2\frac{c(k)-2c(k-1)+c(k-2)}{T^2}; \quad \frac{dc(t)}{dt}\approx\frac{c(k)-c(k-1)}{T}$$

$$5K\frac{de^*(t)}{dt}\approx 5K\frac{e^*(k)-e^*(k-1)}{T}; \quad Ke^*(t)=Ke^*(k)$$

$\therefore$ L'équation aux différences :

$$\frac{2+T}{T^2}c(k)-\frac{4+T}{T^2}c(k-1)+\frac{2}{T^2}c(k-2)=\frac{5K+KT}{T}e^*(k)+\frac{5K}{T}e^*(k-1)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k)-\frac{4+T}{2+T}c(k-1)+\frac{2}{2+T}c(k-2)=\frac{5KT+KT^2}{2+T}e^*(k)+\frac{5KT}{2+T}e^*(k-1)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k)=\frac{5KT+KT^2}{2+T}e^*(k)+\frac{5KT}{2+T}e^*(k-1)+\frac{4+T}{2+T}c(k-1)-\frac{2}{2+T}c(k-2)$$

Solution

Pour $K = 10$, $T = 0.5$s, nous avons:

$$c(k) = 11e^*(k) + 10e^*(k-1) + 1.8c(k-1) - 0.8c(k-2)$$

Considérons $e^*(k) = r(k) - c(k) = 1 - c(k)$:

$$c(k) = 1.75 - \frac{41}{60}c(k-1) - \frac{4}{60}c(k-2)$$

If $c(0) = 0$, on applique la récursivité :

$$c(1) = 1.75 - \frac{41}{60}c(0) - \frac{4}{60}c(-1) = 1.75$$

$$c(2) = 1.75 - \frac{41}{60}c(1) - \frac{4}{60}c(0) \approx 0.554$$

$$c(3) = 1.75 - \frac{41}{60}c(2) - \frac{4}{60}c(1) \approx 1.255$$

......

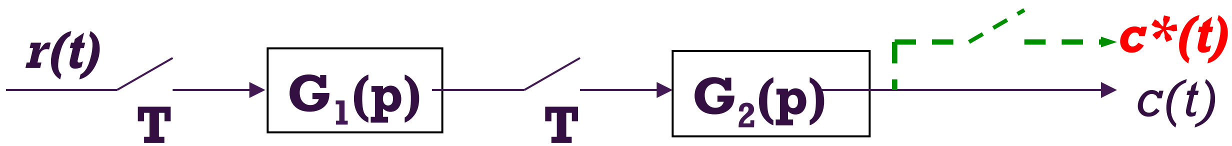
$$c(m) = 1.75 - \frac{41}{60}c(m-1) - \frac{4}{60}c(m-2)$$

Modélisation mathématique de l'échantillonnage

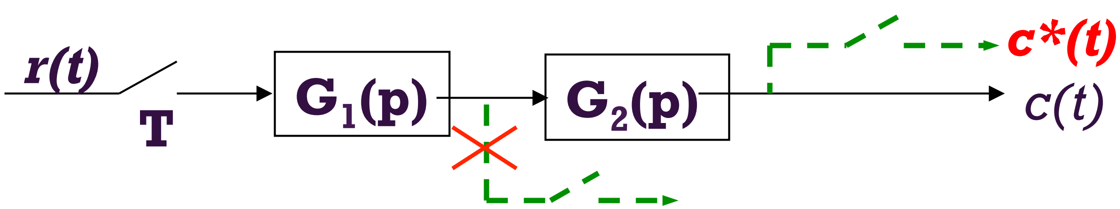
Definition: ***La fonction de transfert d'un système est définie :***

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

La fonction de transfert d'un système en B.O.

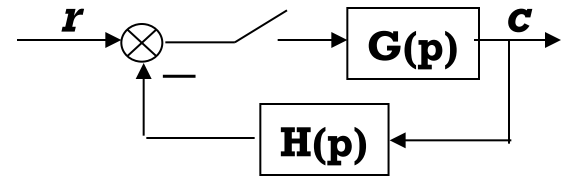


$$G_1(z) = Z\,[\,G_1(p)]$$
$$G_2(z) = Z\,[\,G_2(p)]$$

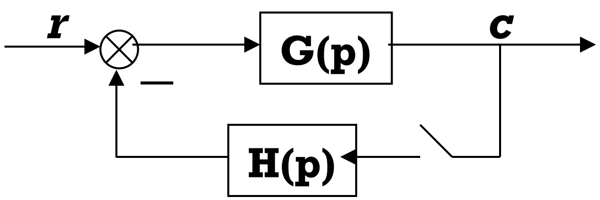


$$G_1G_2(z) = Z\,[\,G_1(p)G_2(p)\,]$$

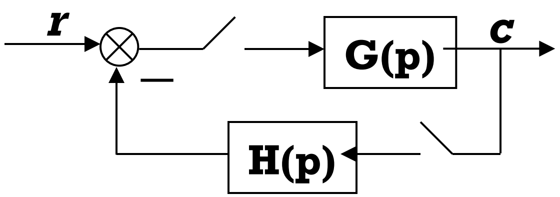
La fonction de transfert d’un système en B.F.



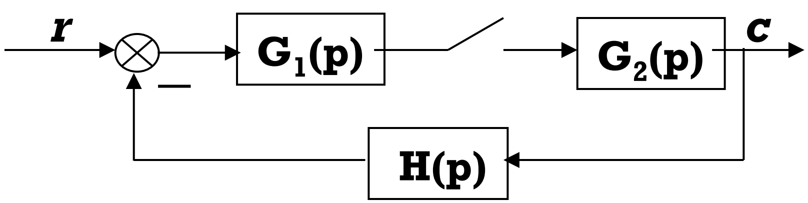
$$C(z)=\frac{R(z)G(z)}{1+GH(z)} \quad \Rightarrow \quad GH(z)=Z\left[G(p)H(p)\right]$$



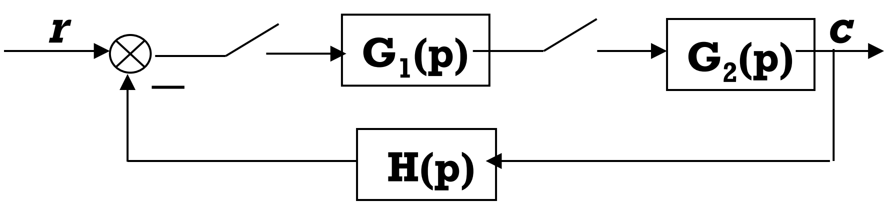
$$C(z)=\frac{RG(z)}{1+GH(z)} \quad \Rightarrow \quad RG(z)=Z\left[R(p)G(p)\right]$$



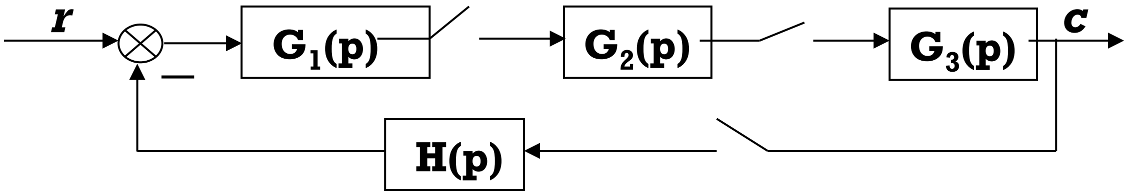
$$C(z)=\frac{R(z)G(z)}{1+G(z)H(z)}$$



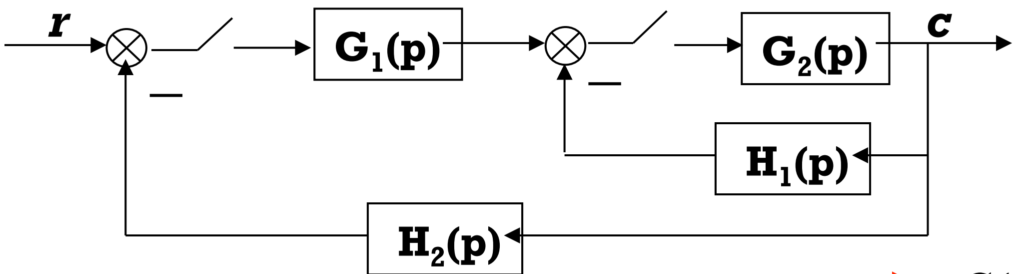
$$C(z)=\frac{RG_1(z)G_2(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$



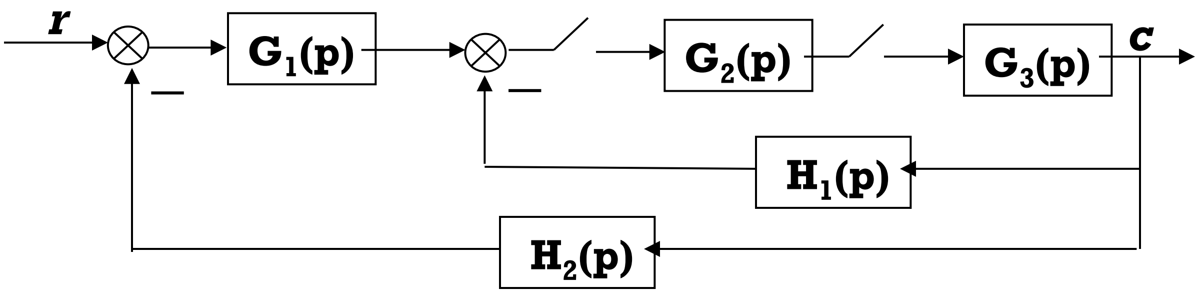
$$C(z)=\frac{R(z)G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$$



$$C(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z)G_3(z)G_1(z)H(z)}$$



$$C(z) = \frac{R(z)G_1(z)G_2(z)}{1 + G_2H_1(z) + G_1(z)G_2H_2(z)}$$



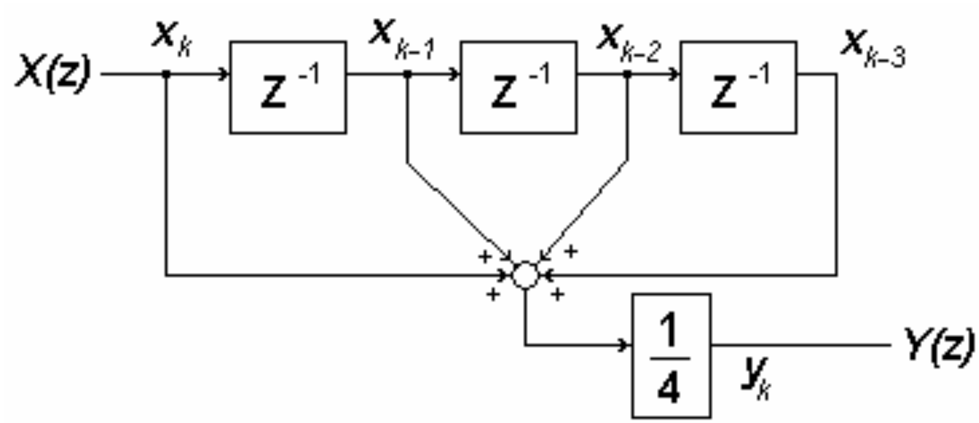
$$C(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z)G_3H_1(z) + G_2(z)G_1G_3H_2(z)}$$

Algorithme de Calcul de la Moyenne

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1} + x_{k-2} + x_{k-3}}{4}$$ (Non-Recursif)

$$Y(z) = X(z)\frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4} = X(z)\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^4}$$ Transformée en Z

Diagramme Bloques



Fonction de Transfert

$$\frac{Y}{X}(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^4}$$

Remarque: Chaque [Z^{-1}] block peut être vu comme un élément mémoire qui mémorise la valeur précédemment utilisée

Stabilité d'un système discret

L'équation caractèristique est :

$$1+GH(z)=0$$

$$z=e^{Tp} \qquad \therefore \qquad 1+GH(e^{Tp})=0$$

Supposons: $p=\alpha+j\beta \;\Rightarrow\; e^{Tp}=e^{T(\alpha+j\beta)}=e^{\alpha T}\cdot e^{j\beta T}$

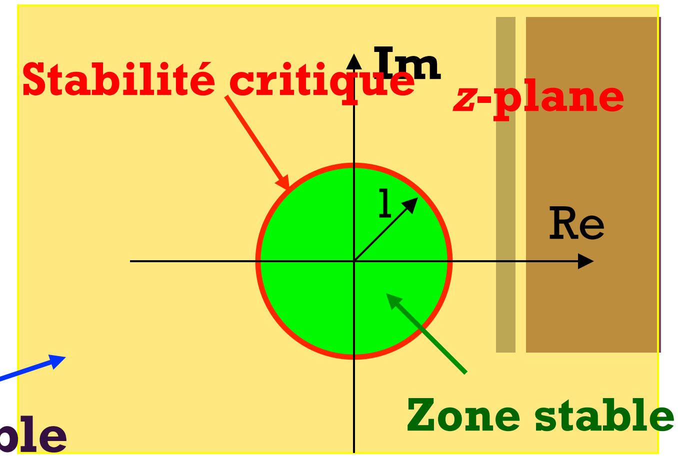
Dans le plane p, α **doit être négatif:**

$$\left|e^{Tp}\right|=|z|=e^{\alpha T}<1$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système discret :
Les racines de l'équation caractèristique 1+*GH*(*z*)=0 doit être à l'interieur du cercle unitaire du plan z:

$$|z_i|<1$$

Analyse de Stabilité



Critère de Stabilité

Dans l'équation caractèristique 1+*GH*(*z*)=0, on fait la substition :

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \text{——} \; W \text{ (transformation bilinéaire) .}$$

(On applique le critère de Routh dans le plan w) .

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Démo}: \quad w = \alpha + j\beta \;, z = x + jy \;, \text{alors}: \\ w = \alpha + j\beta = \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{x+jy+1}{x+jy-1} \cdot \left(\dfrac{x-1-jy}{x-1-jy} \right) = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - j\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2} \\ \qquad\qquad \alpha \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2-1 \le 0 \Rightarrow x^2+y^2 \le 1 \\ \text{(pour la partie gauche du plan } w) \quad \Rightarrow \quad \text{(à l'intérieur du circle } \textit{unitaire du planz}) \end{array} \right)$$

Exemple

$$1 + G(z) = 1 + \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 0$$

Determiner K pour avoir un système stable.

Solution :

soit $z = \dfrac{w+1}{w-1}$

$$1 + \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 0 \Rightarrow 0.632Kw + 1.264w + (2.736 - 0.632K) = 0$$

$$\textit{Critère Routh}: \quad \begin{array}{ll} 0.632K & 2.736 - 0.632K \\ 1.264 & \\ 2.736 - 0.632K & \end{array}$$

Nous avons: 0 < K < 4.33.

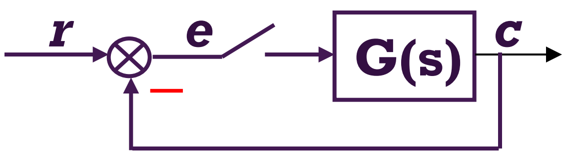
Analyse de l'erreur statique

Utilisation du Théorème de la Valeur Finale

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1}(z-1)E(z)$$

Analyse de l'erreur statique

$$E(z) = R(z) - c(z) = R(z) - \frac{R(z)G(z)}{1+G(z)} = \frac{R(z)}{1+G(z)}$$

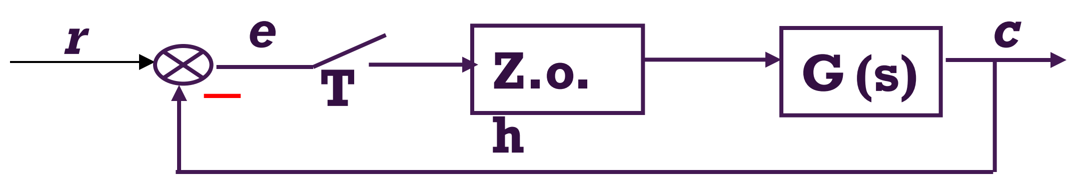


$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+K_p^*} & r(t) = 1(t) \Leftrightarrow R(z) = \dfrac{z}{z-1}; \quad K_p^* = \lim\limits_{z\to 1} G(z) \\ \dfrac{T}{K_v^*} & r(t) = t \quad \Leftrightarrow R(z) = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}; \quad K_v^* = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z) \\ \dfrac{T^2}{K_a^*} & r(t) = t^2 \quad \Leftrightarrow R(z) = \dfrac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}; \quad K_a^* = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2 G(z) \end{cases}$$

+

Exemple



Z.o.h —Zero-order hold.

$$T = 1s \qquad G(s) = \frac{K}{p(p+5)}$$

1) Determiner *K* pour assurer la stabilité.

2) Si $r(t) = 1 + t$, determiner e_{ss}=?

Solution

1)

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p}\cdot\frac{K}{p(p+5)}\right]$$

$$= (1-e^{-Tp})Z\left[\frac{K}{p^2(p+5)}\right]$$

$$= (1-e^{-Tp})Z\left[\frac{K/5}{p^2} + \frac{-K/5}{p} + \frac{K/25}{p+5}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\left(\frac{KTz/5}{(z-1)^2} - \frac{Kz/5}{z-1} + \frac{Kz/25}{z-e^{-5T}}\right)\Bigg|_{T=1}$$

$$\approx -\frac{K}{5}\cdot\frac{z^2 - 2.2067z + 0.2135}{(z-1)(z-0.0067)}$$

$$L'\text{équation caractéristique du system}:$$

$$1+G(z)=1-\frac{K}{5}\cdot\frac{z^2-2.2067z+0.2135}{(z-1)(z-0.0067)}=0$$

$$(5-K)z^2+(2.2067K-5.0335)z+(0.0335-0.2135K)=0$$

$$z=\frac{w+1}{w-1}\quad\Rightarrow\quad 0.9932w+(9.993-1.573K)w+(10.067-2.4202K)=0$$

$$0<K<4.16$$

2)

$$K_p^*=\lim_{z\to1}G(z)=\lim_{z\to1}\frac{K}{5}\cdot\frac{z^2-2.2067z+0.2135}{(z-1)(z-0.0067)}=\infty$$

$$K_v^*=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}-\frac{K}{5}\cdot\frac{z^2-2.2067z+0.2135}{(z-0.0067)}\approx 0.2K$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p^*}+\frac{T}{K_v^*}\quad=0+\left.\frac{T}{0.2K}\right|_{T=1}=\frac{5}{K}$$