



Stabilité des Systèmes Discrets et Echantillonnés

Andrei Doncescu

<http://homepages.laas.fr/adoncesc/ENACold.htm>

+ Plan du Cours

- Equivalence discrète
 - Rappel (trouver l'équivalence discrète du system)
 - Intégration Numérique
 - Correspondance Zéro-Pole
 - Equivalence du Echantillonneur-Bloqueur

- Implémentation par Simulation
 - Evaluation

- Stabilité
 - Cas continu
 - Cas Discret



Stabilité et Répétabilité

Les circuits analogiques sont affectés par :

- Température
- Age

Tolérance des composants :

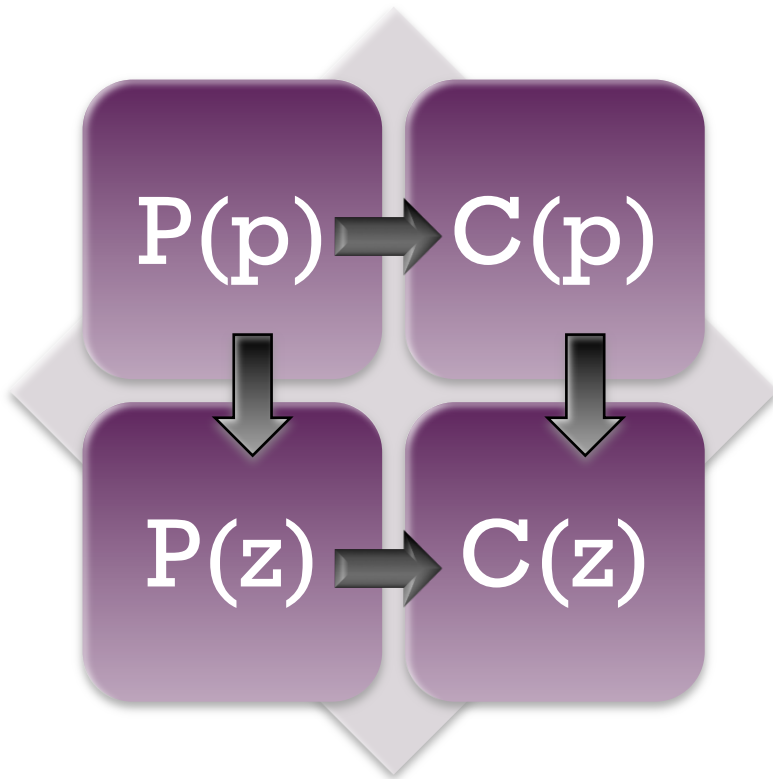
2 systèmes analogiques :

utilisant le même design

les même composantes

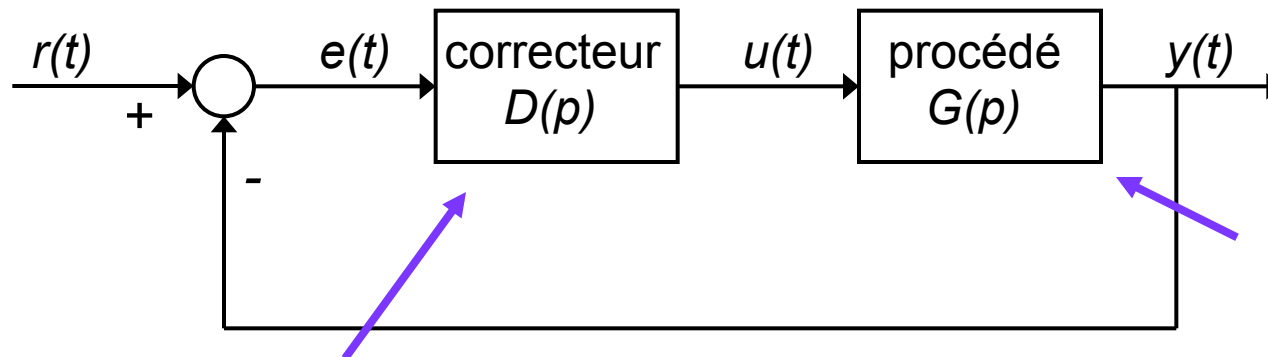
on obtient des différents performances

+ Approximation de $C(p)$ par $C(z)$



- Concevoir un correcteur à temps continu $C(p)$ pour $P(p)$
- Approximer $C(p)$ par un correcteur à temps discret $C(z)$

+ Equivalence Numérique



Transformation Discrète
Zero order hold (ZOH)

Transformation numérique

Intégration Numérique

- Rectangle Forward
- Rectangle Backward
- Trapèze (Méthodes de Tustin, Transformation Bilineaire)
- Bilineaire avec prewarping

Correspondance des Zéro-Pôle

Equivalence Echantillonneur Bloqueur

- Zero order hold (ZOH)
- Triangle hold (FOH)

Emulation

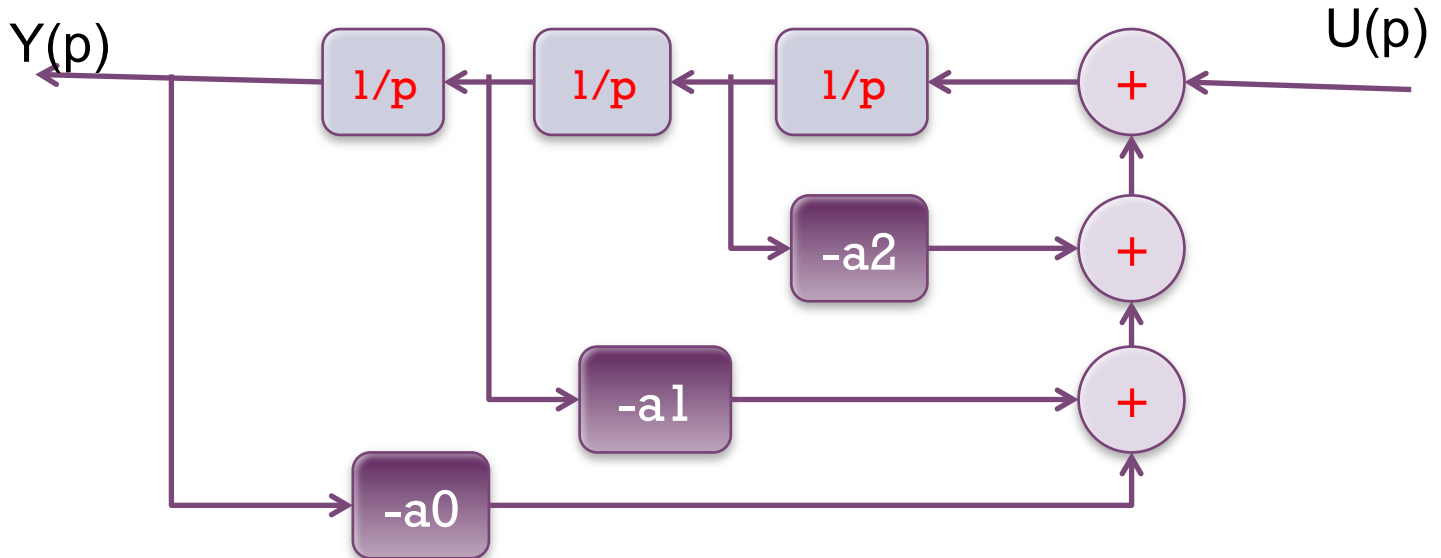
But : Trouver une fonction de transfert discrète ayant les mêmes caractéristiques fréquentielles

Implémentation: Commande constante entre les échantillons
Procédé pas constant entre les échantillons

+ Exemple

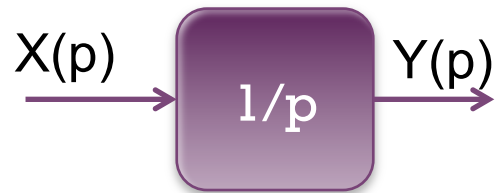
Une fonction de transfert $C(p)$, peut être réaliser avec des intégrateurs, gains, et des additionneurs

$$C(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$



+ Intégrateur / Intégration

Trouver une approximation discrète d'un intégrateur



$$F(z) = 1/p$$
$$C(z) = C(p)_{p=F^{-1}(z)}$$

+ Intégration Numérique

■ Concept Fondamental

- Représentations de $H(p)$ sous forme d'une équation *différentielle*.
- Construction d'une équation aux différences finies .

■ Exemple

- Remarque : Pôles Réels

Exemple

Fonction de Transfert

Equation Différentielle

$$\frac{U(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{a}{p + a} \quad \Rightarrow \quad \dot{u} + au = ae$$

+ Intégration Numérique

Fonction de Transfert

$$\frac{U(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{a}{p + a}$$

Equation Differentielle

$$\dot{u} + au = ae \quad \Rightarrow$$

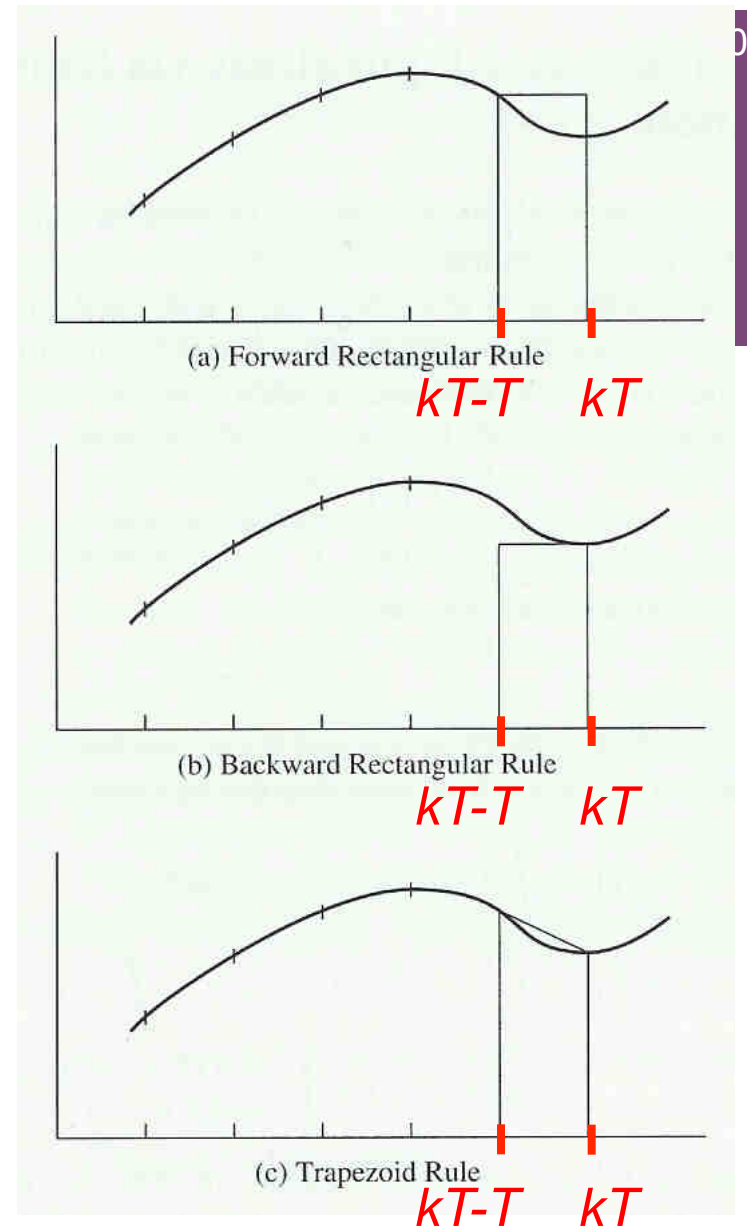
$$u(t) = \int_0^t (-au(\tau) + ae(\tau)) d\tau \quad (\text{continu}) \Rightarrow$$

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} (-au + ae) d\tau + \int_{kT-T}^{kT} (-au + ae) d\tau$$

$$= u(kT - T) + \left\{ \text{surfacede } (-au + ae) \text{ sur } [kT - T, kT[\right\}$$

+ Intégration Numérique

- “Forward” rectangle
 - $kT-T$
- “Backward” rectangle
 - kT
- Trapèze



+ Intégration Numérique

- Forward (Règle d'Euler)
- (Approximation kT - T)

Equation aux différences

$$\begin{aligned}u_1(kT) &= u_1(kT - T) + T \left[-au_1(kT - T) + ae(kT - T) \right] \\ &= (1 - aT)u_1(kT - T) + aTe(kT - T)\end{aligned}$$

Fonction de Transfert

$$U_1(z) = (1 - aT)z^{-1}U_1(z) + aTz^{-1}E(z) \quad \Rightarrow$$

$$H_F(z) = \frac{U_1(z)}{E(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{aT}{z - 1 + aT} = \frac{a}{\frac{z - 1}{T} + a}$$

+ Intégration Numérique

- Règle des Rectangles “Backward” (Approximation kT)

Equation

$$u_2(kT) = u_2(kT - T) + T[-au_2(kT) + ae(kT)] \Leftrightarrow$$

$$u_2(kT) + aTu_2(kT) = u_2(kT - T) + aTe(kT) \Leftrightarrow$$

$$u_2(kT) = \frac{1}{1+aT}u_2(kT - T) + \frac{aT}{1+aT}e(kT)$$

Fonction de Transfert

$$U_2(z) = \frac{1}{(1+aT)z}U_2(z) + \frac{aT}{1+aT}E(z)$$

$$H_B(z) = \frac{U_2(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+aT)z}} \frac{aT}{(1+aT)} = \frac{aTz}{(1+aT)z-1} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}$$

+ Intégration Numérique

- Règle du Trapèze (Tustin, bilinear trans.)
- (app $\frac{1}{2}$ (ancienne valeur + actuelle valeur))

Equation

$$\begin{aligned}
 u_3(kT) &= u_3(kT - T) + \frac{T}{2} \left[-au_3(kT - T) + ae(kT - T) - au_3(kT) + ae(kT) \right] \\
 &= \frac{1 - (aT/2)}{1 + (aT/2)} u_3(kT - T) + \frac{aT/2}{1 + (aT/2)} \left[e(kT - T) + e(kT) \right]
 \end{aligned}$$

Fonction de Transfert

$$H_T(z) = \frac{U_3(z)}{E(z)} = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z + aT - 2} = \frac{a}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + a}$$

+Intégration Numérique

■ Comparison avec $H(p)$

$H(p)$	Methode	Fonction de Transfert
$\frac{a}{p+a}$	Forward	$H_F(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a}$
$\frac{a}{p+a}$	Backward	$H_B(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}$
$\frac{a}{p+a}$	Trapeze	$H_T(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} + a}$

+ Intégration Numérique

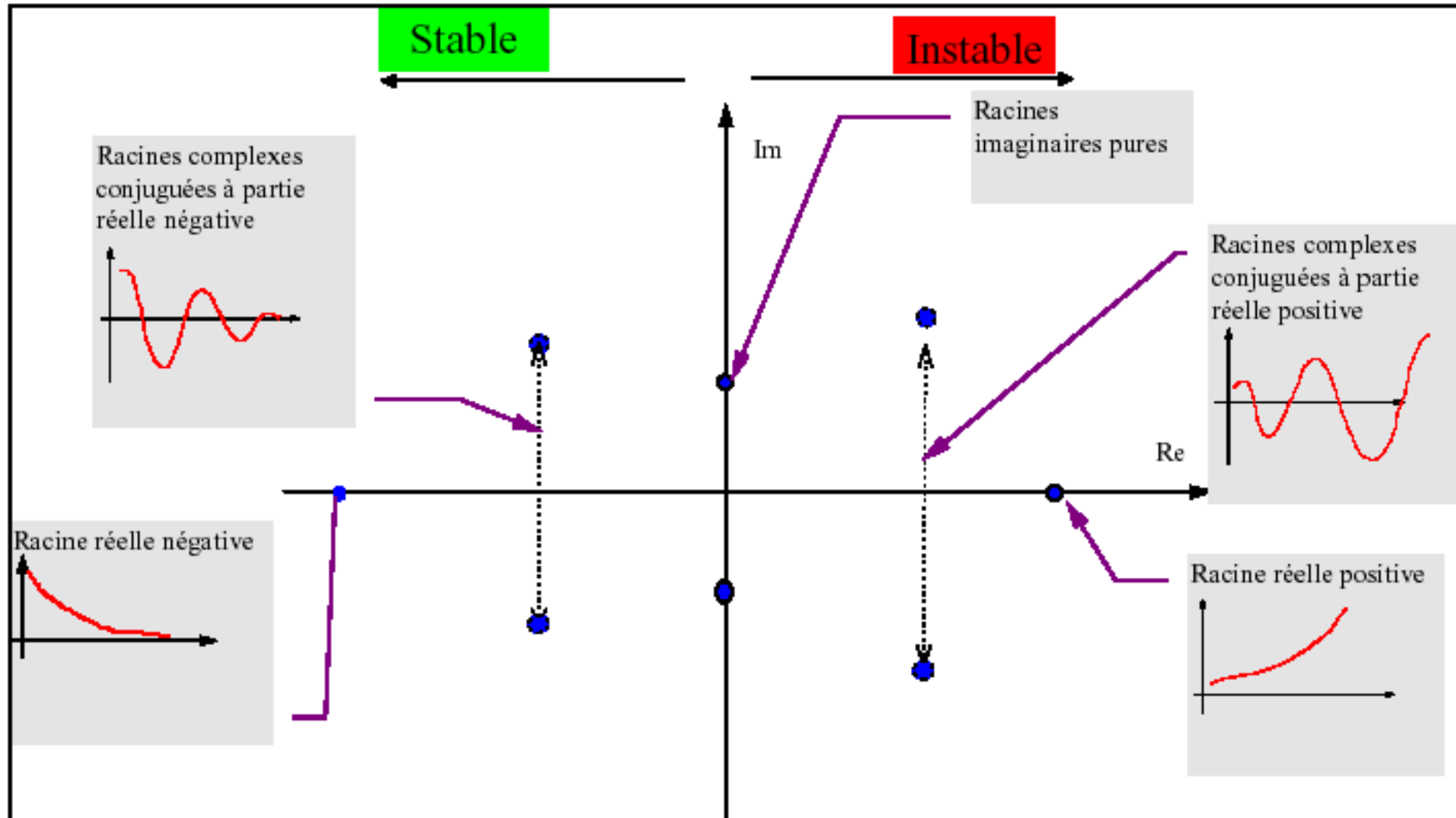
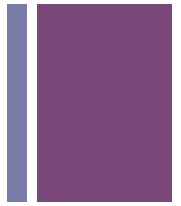
■ Transform $p \leftrightarrow z$

Method	Approximation
Forward	$p = \frac{z-1}{T}$ ou $z = 1 + Tp$
Backward	$p = \frac{z-1}{Tz}$ ou $z = \frac{1}{1 - Tp}$
Trapeze	$p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ ou $z = \frac{1 + (T/2)p}{1 - (T/2)p}$

Comparaison par rapport à la stabilité

- Dans le plan p , $p = j\omega$ est la frontière entre la stabilité et l'instabilité

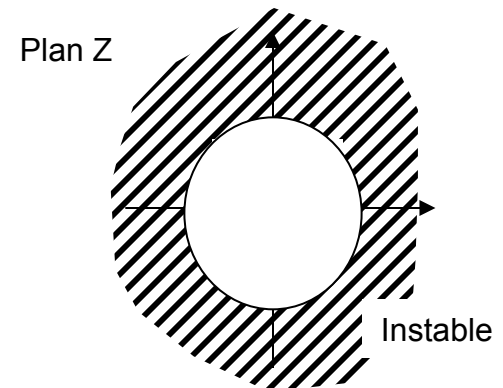
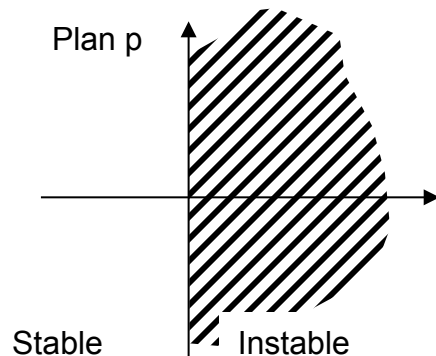
+Stabilité des Systèmes Continus



+ Stabilité et précision des SAE

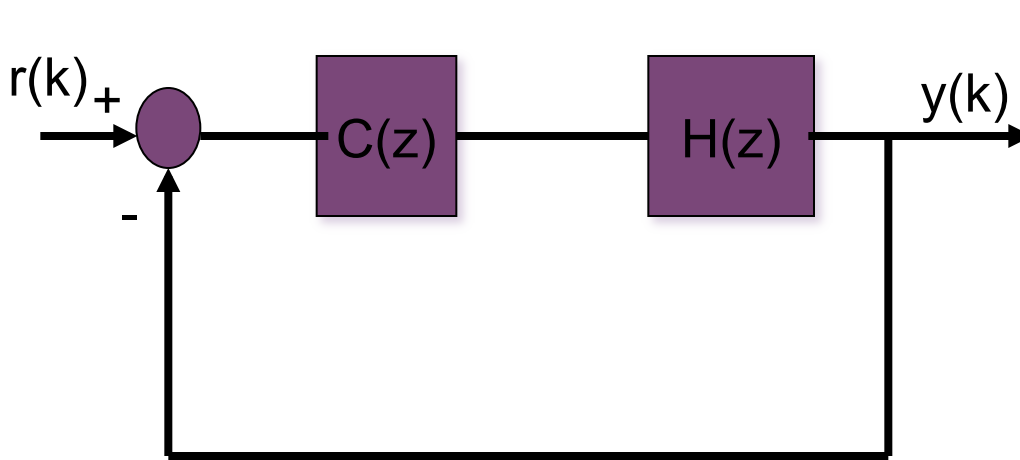
Il n'existe pas de représentation graphique pour les transmittances en Z donc pas d'équivalent du critère de Nyquist pour les SAE.

Dans le plan p , un système est stable si les pôles de sa transmittance sont à partie réelle négatives. On peut transposer cette propriété au plan Z , les pôles de la transmittance en Z doivent-êtré tel que $|Z_p| < 1$



+ Stabilité des systèmes échantillonnés

Le système asservi est stable SSI sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

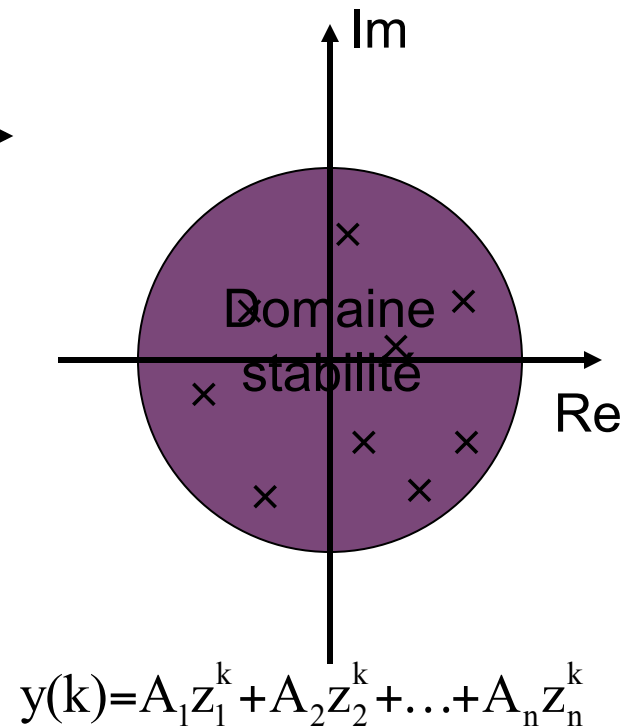


$$\text{FTBF} = \frac{C(z)H(z)}{1+C(z)H(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + 1}$$

$$\text{FTBF} = \frac{A_1 z}{z - z_1} + \frac{A_2 z}{z - z_2} + \dots + \frac{A_n z}{z - z_n} = \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_n}{1 - z_n z^{-1}}$$

Condition de stabilité :

$$y(k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty \text{ ssi } |z_i| < 1 \forall i=1 \dots n$$



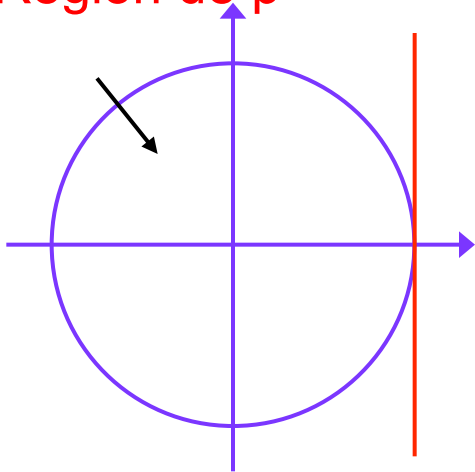
+ Integration Numérique - stabilité

Forward $z = 1 + Tp$ pour $p = j\omega$

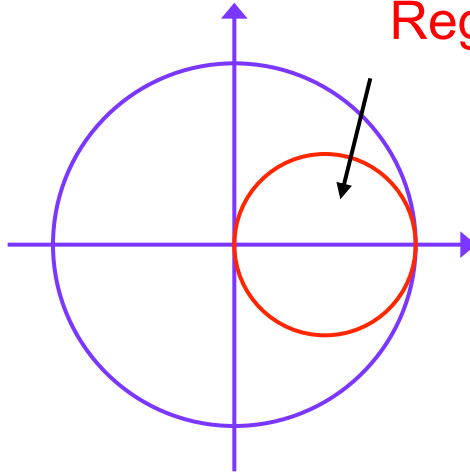
Backward $z = \frac{1}{1 - Tp}$ pour $p = j\omega$

Trapeze $z = \frac{1 + (T/2)p}{1 - (T/2)p}$ pour $p = j\omega$

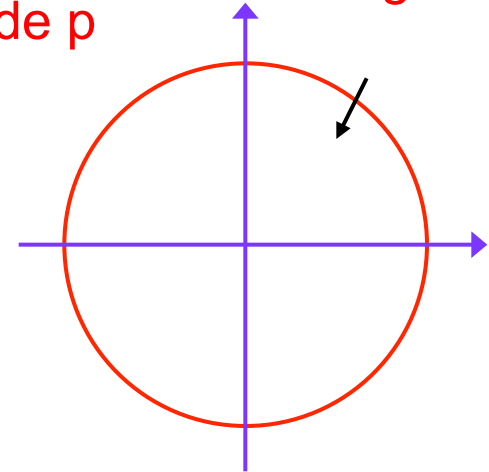
(Forward)
Region de p



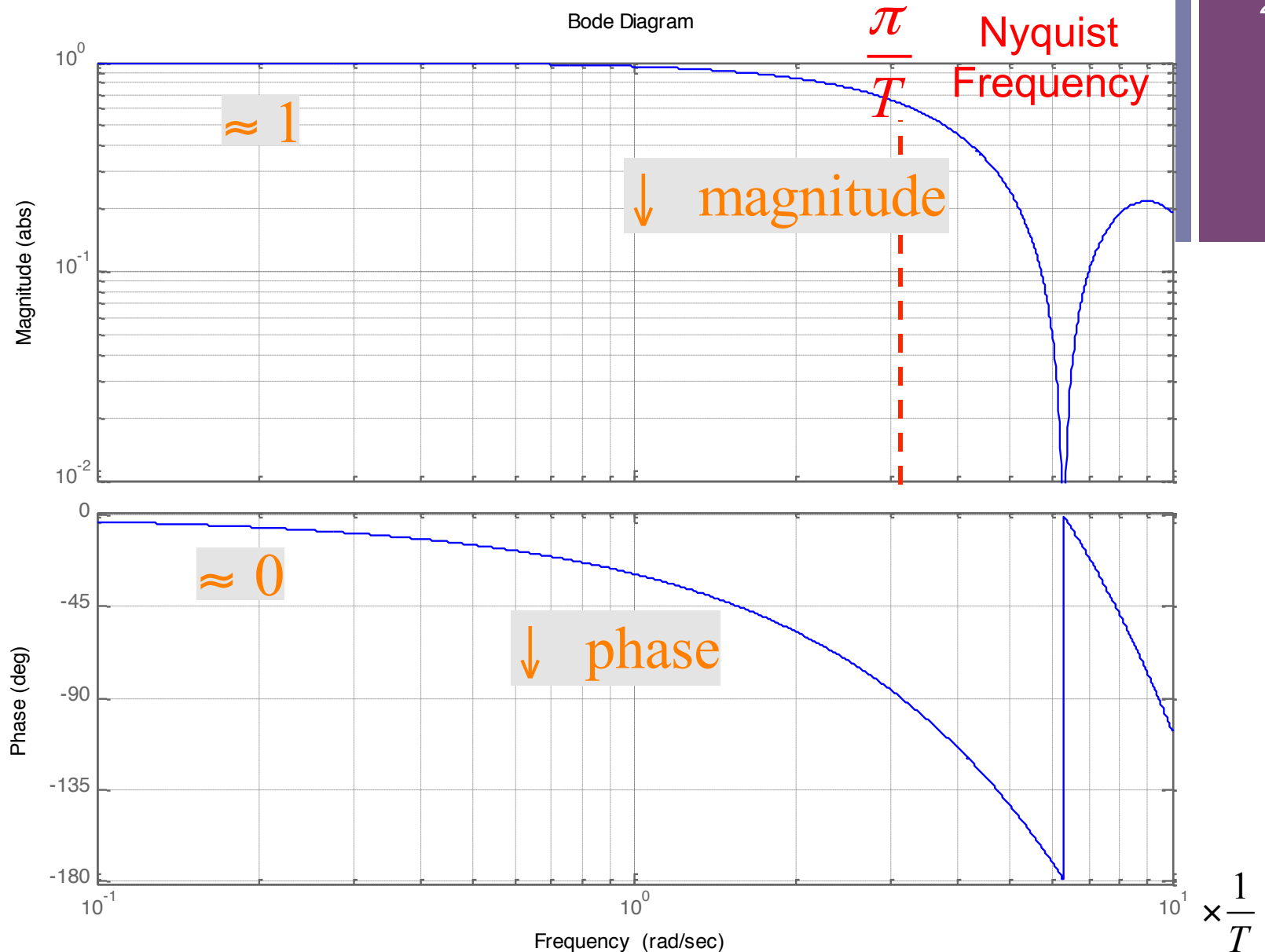
(Backward)
Region de p



(Trapeze)
Region de p



Plan-z



Rappelons que la courbe de réponse d'un système à temps discret n'a de sens que sur l'intervalle $[0, f_e/2]$

+ Intégration Numérique

■ Conclusions :

■ Distorsions avec « forward » et « backward ».

■ “FORWARD” peut produire l’instabilité d’un filtre analogique stable par discrétisation.

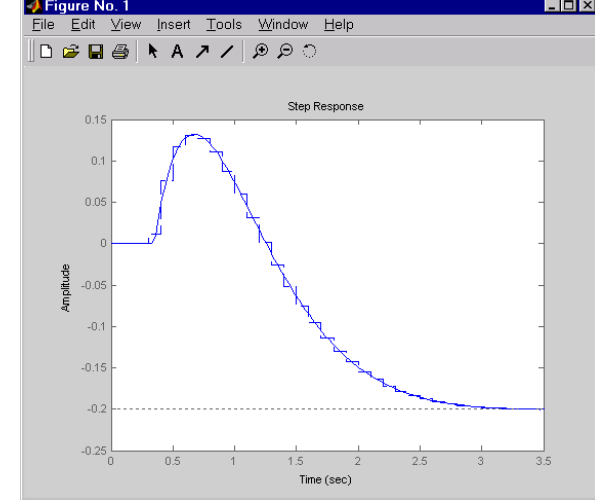
■ “TRAPEZE” transforme une région en p stable dans une région z stable .
L’axe $j\omega$ est compressée dans un cercle unitaire de périmètre 2π .

■ Les 3 méthodes conservent l’ordre du correcteur. Si $C(p)$ est d’ordre $C(z)$ n aussi.

■ Tous les approximations ont des erreurs significatives proche de la fréquence Nyquist.

■ “TRAPEZE” semble une méthode meilleure.

■ $|H(j\omega)|^2$, $\omega = a$??????????



+ Intégration Numérique

$$H(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

↓

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{(\omega^2 / a^2) + 1}$$

↓ ($\omega = a$)

$$|H(ja)|^2 = \frac{1}{2}$$

■ $H_T(z)$?

■ Quelle est la fréquence pour $|H_T(z)|^2 = 0.5$?

+ Intégration Numérique

$$H_T(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} j \tan(\omega T / 2) + a} = \frac{1}{\frac{1}{a} \frac{2}{T} j \tan(\omega T / 2) + 1}$$

$$z = e^{j\omega T}, \quad z_1 = e^{j\omega_1 T}$$

$$|H_T(z_1)|^2 = \frac{1^2}{\left(\frac{1}{a} \frac{2}{T} \tan(\omega_1 T / 2)\right)^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

⇓

Fréquence d'échantillonnage élevée

$$a = \frac{2}{T} \tan(\omega_1 T / 2) \quad \text{or} \quad \omega_1 = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{aT}{2}\right)$$

$$\text{Remarque, } \omega_1 \approx \frac{2}{T} \left(\frac{aT}{2}\right) = a, \quad aT / 2 \ll 1$$

Attenuation des Distorsions

- Trapèze avec « pre-warping »

$$p = \frac{\alpha(z-1)}{(z+1)}, \text{Re}(p) < 0 \rightarrow |z| < 1$$

- But : Garder la réponse fréquentielle du Module

$$C(j\omega_0) = C_z(e^{j\omega_0 T})$$

$$C(p) = C_z(z), \text{ pour basse fréquences}$$

et

$$p = j\omega_0, \text{ Fprewarping}$$

$$j\omega_0 = a(e^{j\omega_0 T} - 1) / (e^{j\omega_0 T} + 1)$$

$$= ja \tan(\omega_0 T / 2)$$

$$a = \omega_0 / \tan(\omega_0 T / 2)$$

+ Intégration Numérique

$$T = 0.1$$
$$\omega_s \approx 60 \omega_b$$

Exemple, filtre d'ordre 3

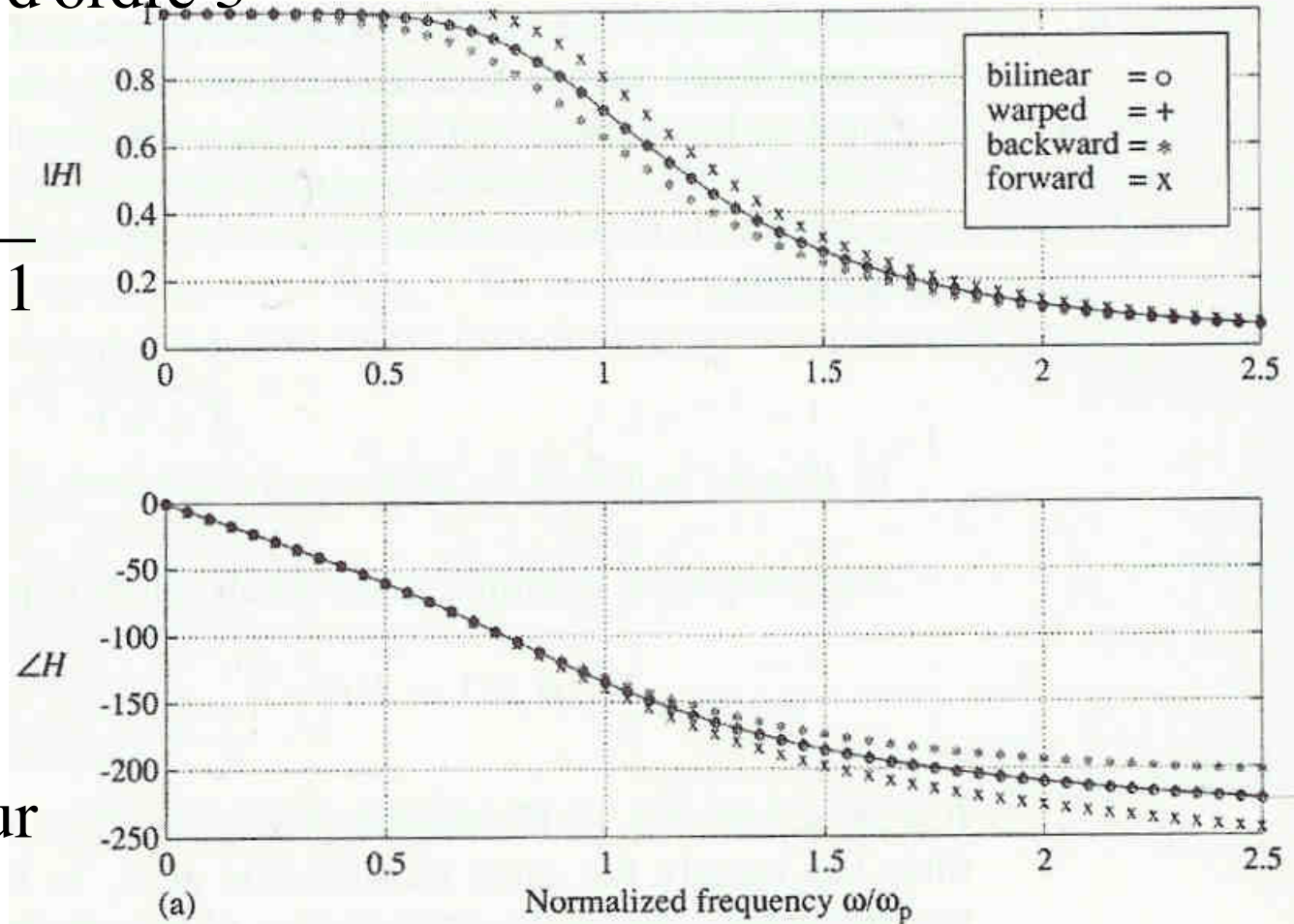
$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

avec

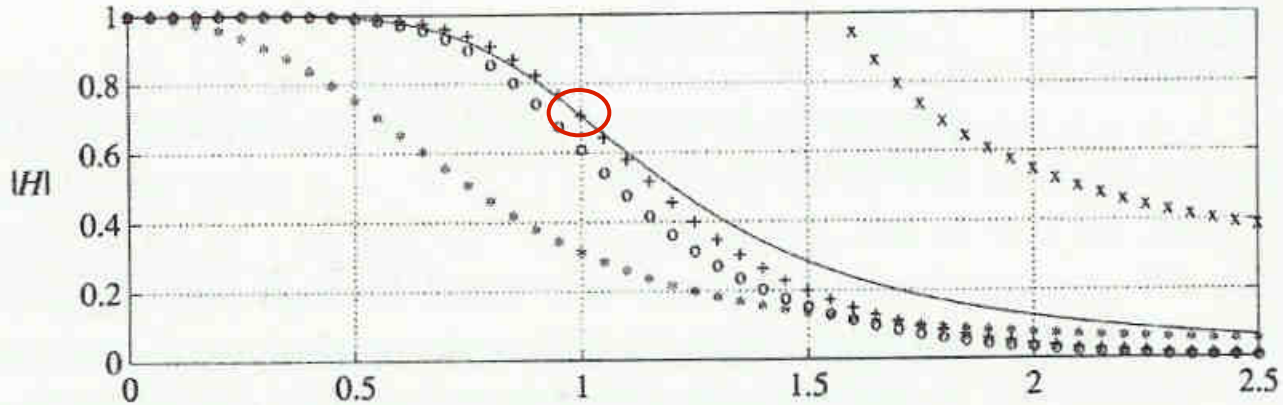
$$T = \begin{cases} 0.1 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

Prewarping pour

$$\omega / \omega_b = 1$$



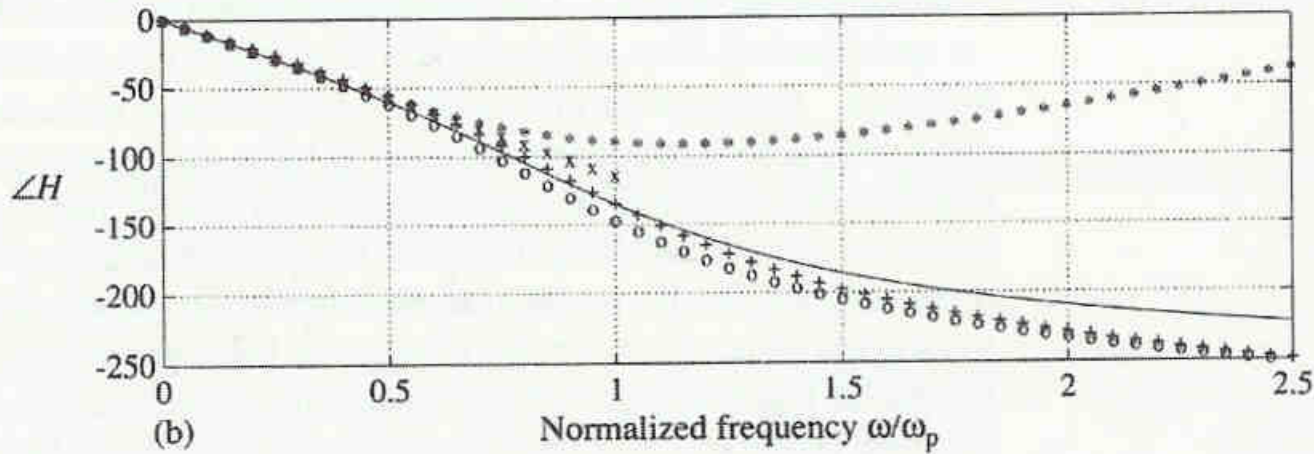
+ Integration Numérique



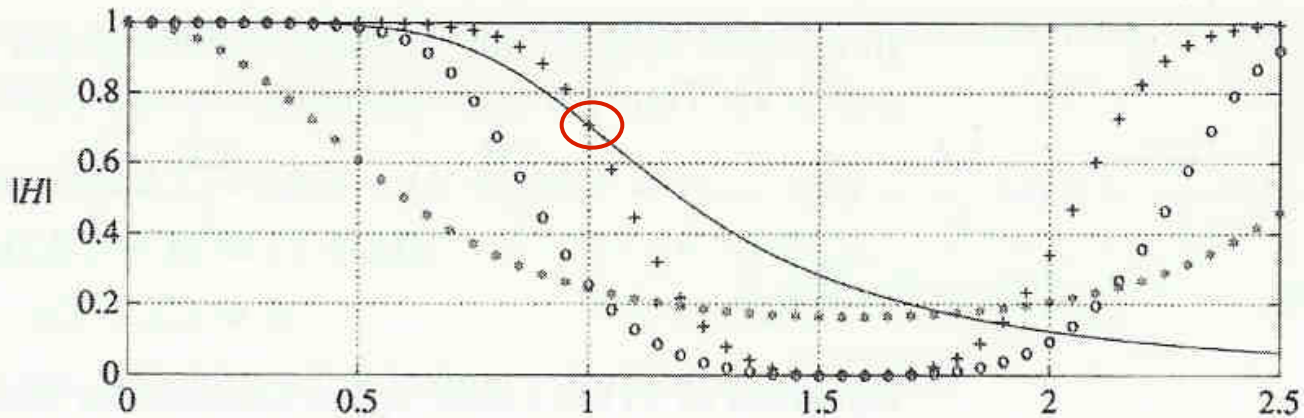
bilinear	= ○
warped	= +
backward	= *
forward	= x

$T = 1$
 $\omega_s \approx 6 \omega_b$

prewarp



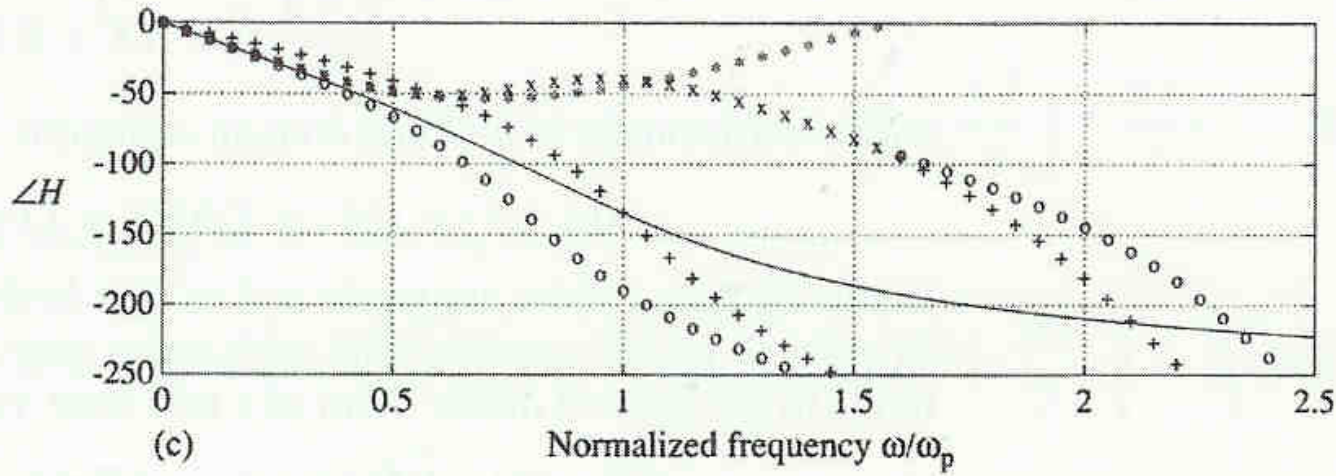
+ Integration Numérique



bilinear	= o
warped	= +
backward	= *
forward	= x

$$T = 2$$

$$\omega_s \approx 3 \omega_b$$



Remarque,
prewarp

+ Correspondance des Zéro-Pole

- Correspondance entre les pôles ($z = e^{pT}$).
- Idée, utilisation de la même correspondance pour les zéros.
- Règles (R1-4):
 1. Tous les pôles sont remplacés par $z = e^{pT}$.
 1. Par exemple, $p = -a$ correspond à $z = e^{-aT}$
 2. À tous les zéros correspondent $z = e^{pT}$.
 - Par exemple, $p = -b$, $z = e^{-bT}$
 3. zéros pour $j\omega = \text{infinie}$ va à $z = e^{j\pi} = -1$ (hautes fréquences)
 4. Gain Identique pour des fréquences critiques ($p=0$)
 - $H(p)$ pour $p=0 = H(z)$ pour $z=1$

+ Correspondance des Zéro-Pole

Exemple (1)

Calcul de l'équivalence de la fonction de transfert discrète

$$H(p) = \frac{a}{p+a}$$

$$\text{Pole (R1)} \quad p = -a \quad \rightarrow \quad z = e^{-aT} = \alpha$$

$$\text{Zero (R3)} \quad H(p) \Big|_{p=\infty} = 0 \quad \rightarrow \quad z = -1$$

$$\text{Gain (R4)} \quad K \frac{z+1}{z-e^{-aT}} \Big|_{z=1} = \frac{a}{p+a} \Big|_{p=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1-e^{-aT}}{2}$$

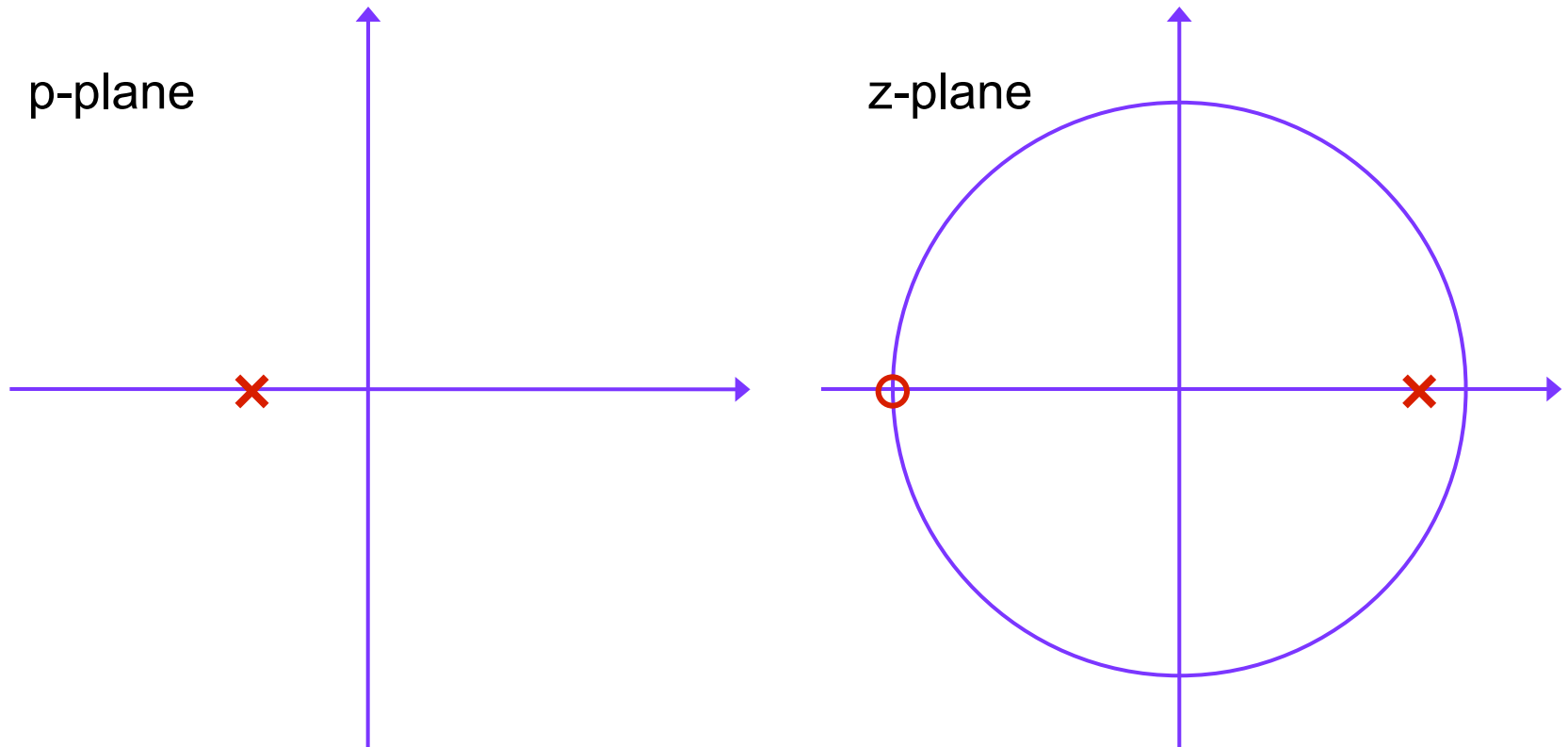
$$H(z) = K \frac{z+1}{z-\alpha}$$

+ Correspondance des Zéro-Pole

$$H(p) = \frac{a}{p + a}$$

zp-correpondance
→

$$H(z) = K \frac{z + 1}{z - \alpha}$$



+ Correspondance des Zéro-Pole

Introduire du retard

Remarque, $u(k)$ dépend de $e(k)$. (R3)

$$\frac{U(z)}{E(z)} = H(z) = K \frac{z+1}{z-\alpha} = K \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}\alpha}$$

$$u(k) = \alpha u(k-1) + Ke(k) + Ke(k-1)$$

Solution: 1er zéro pour $p=\infty$ correspond à $z=\infty$
(identique à Matlab) :

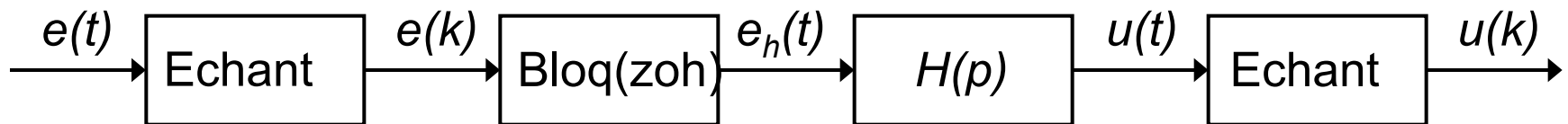
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{1}{z-\alpha} = K \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}\alpha}$$

$$u(k) = \alpha u(k-1) + Ke(k-1)$$

+ Equivalence de l' Echantillonneur- Bloqueur (Zoh)

- Construire un filtre $H(z)$, t.q.
 - $e(k)$ est $e(t)$ échantillonné
 - $H(z)$ a comme sortie $u(k)$
 - $u(k)$ approxime la sortie continue $H(p)$ qui a comme entrée le signal continu $e(t)$.

Zero order hold (ZOH) (invariant à l'échelon),



+ Bloqueur

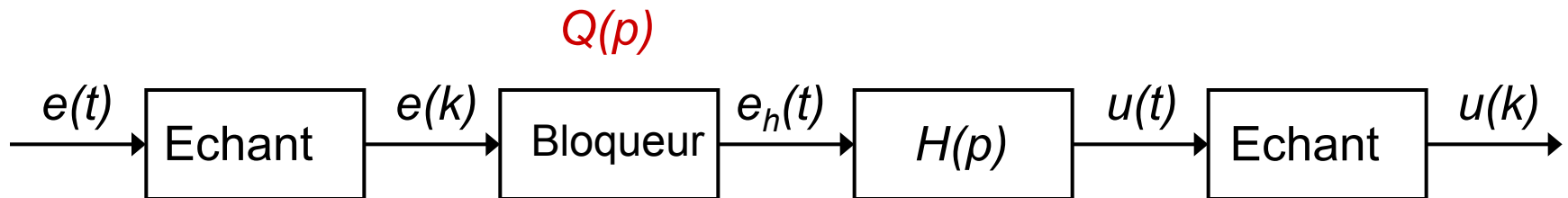
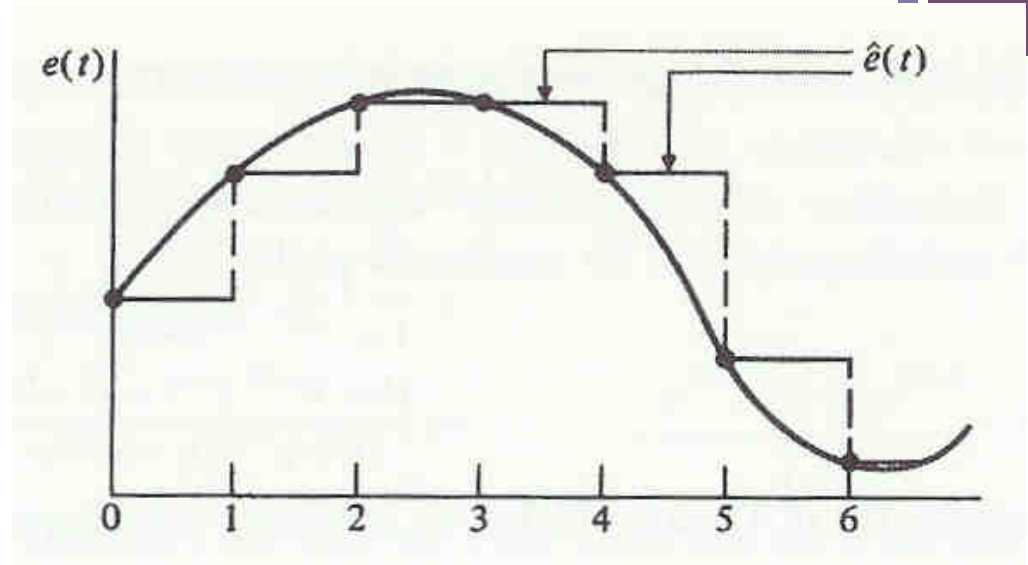
Définir

$$q(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

$$Q(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp})$$

$$E_h(p) = Q(p) e(k)$$

$e(k)$ est un gain



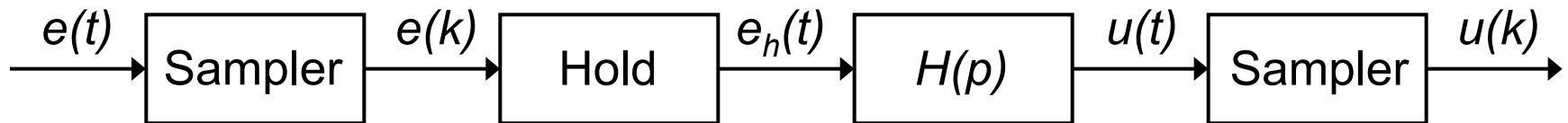
+ Equivalence du Blocage

■ Transformation Zoh

- Trouver $H(z)$ à partir de $e(t) = \delta(t) \rightarrow e(k) = \delta_k$
- Transformée de Laplace inverse pour trouver le signal continu.
- Echantillonnage du Signal Continu pour trouver le signal Discret.

$$U(p) = H(p)Q(p)e(k) = H(p)Q(p)\delta(k)$$

$$u(t) = L^{-1} \{ H(p)Q(p) \} \delta(k) = L^{-1} \left\{ H(p) \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp}) \right\} \delta(k)$$



+ Equivalence du Blocage

Sortie du signal continu :

$$u(t) = L^{-1} \left\{ H(p) \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp}) \right\} \delta(k) = (1(t) - 1(t - T)) L^{-1} \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\} \delta(k)$$

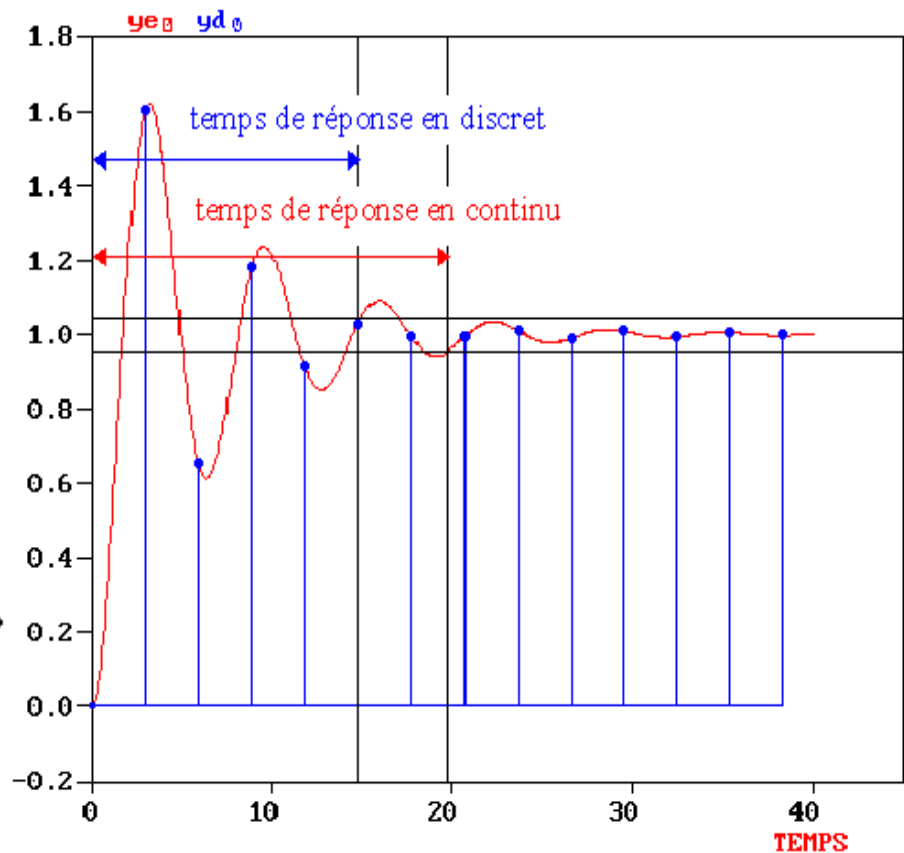
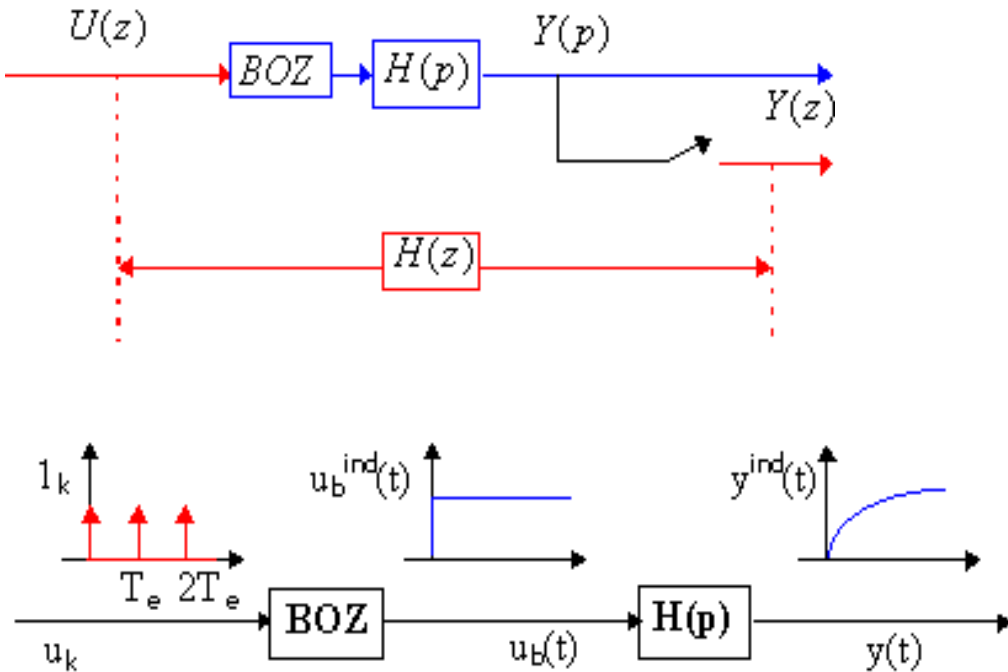
Discrétisation du Signal de Sortie et calcul de la $H(z)$

$$u(k) = [u(t)]_{kT=t}$$

$$Z \{ u(k) \} = U(z) = H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\}$$

$$Z \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\} \equiv Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\} \right\}$$

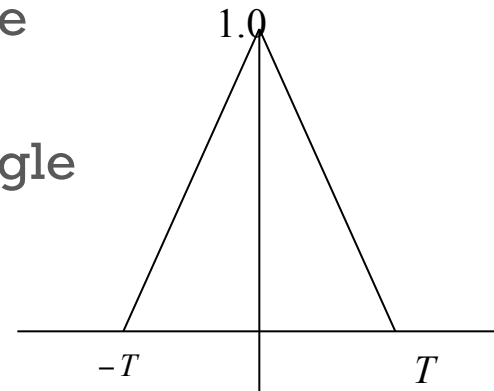
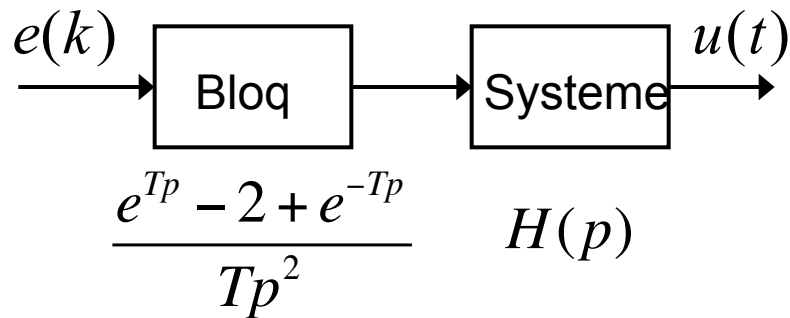
Relation entre les temps de réponse d'un système continu avant et après l'échantillonnage de sa fonction de transfert par conservation de la réponse indicielle



Equivalence du Blocage

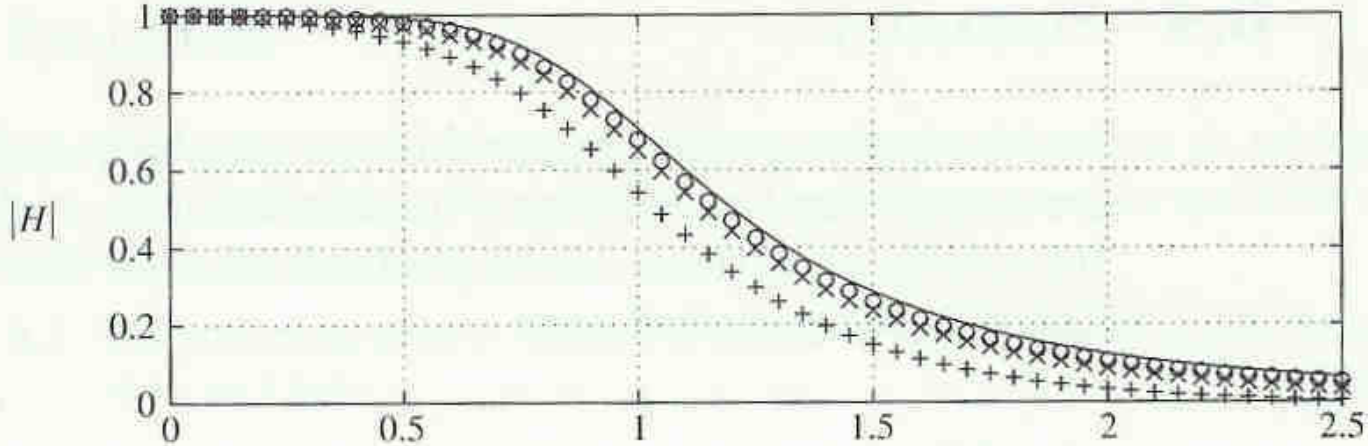
■ Triangle

- Extrapolation des échantillons pour connecter chaque échantillon par une ligne droite
- La Réponse impulsionnelle d'un triangle



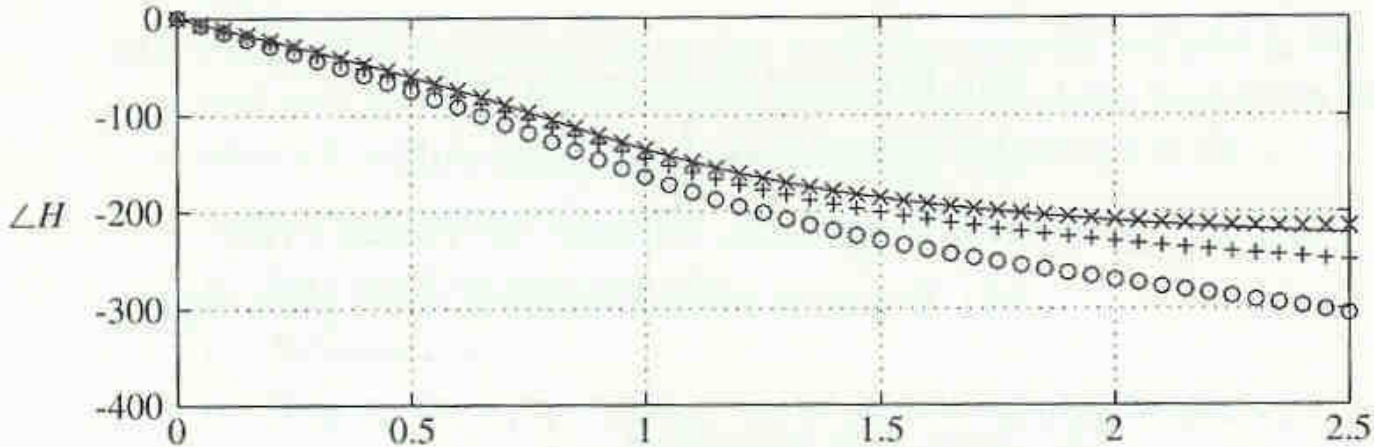
Donc

$$H(z) = \frac{(z-1)}{Tz} Z \left\{ \frac{H(p)}{p^2} \right\}$$

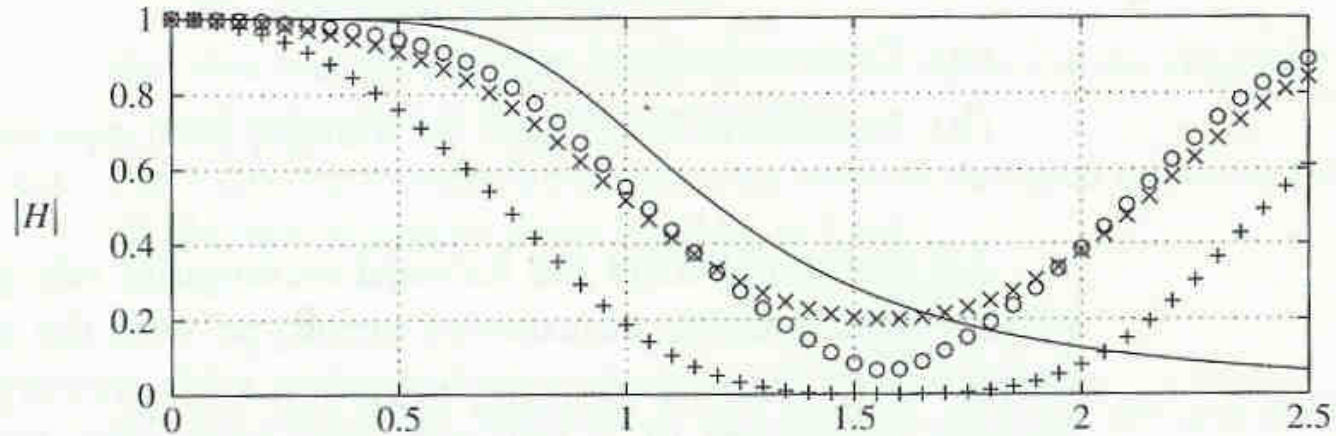


- + Zero-pole
- o ZOH
- x Triangle

$T = 1$

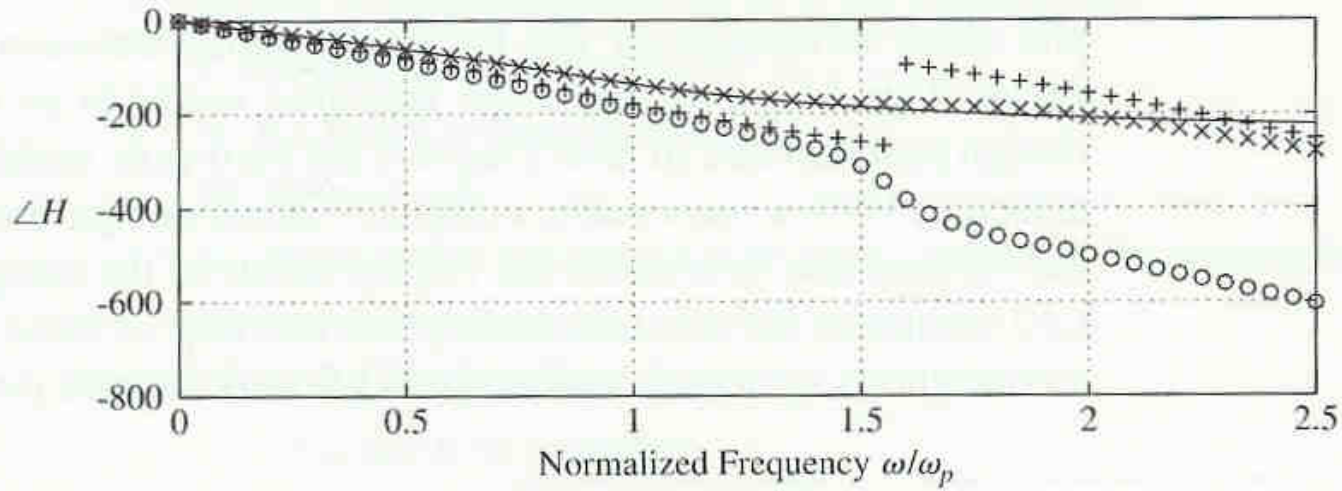


Normalized Frequency ω/ω_p
(a)



+ Zero-pole
o ZOH
x Triangle

$T = 2$



Normalized Frequency ω/ω_p

(b)

■ Conclusions

- Méthode d'intégration
- Correspondance Zéro-pole
- Blocage
- Tous les méthodes sont équivalente pour des fréquence d'échantillonnage élevées
- Matlab

$SYS_D = c2d(SYS, T_s, method)$ where

method	=	'zoh'	zero-order hold
method	=	'foh'	first-order hold (triangle hold)
method	=	'tustin'	Tustin's bilinear method
method	=	'prewarp'	bilinear with prewarping
method	=	'matched'	zero-pole matching

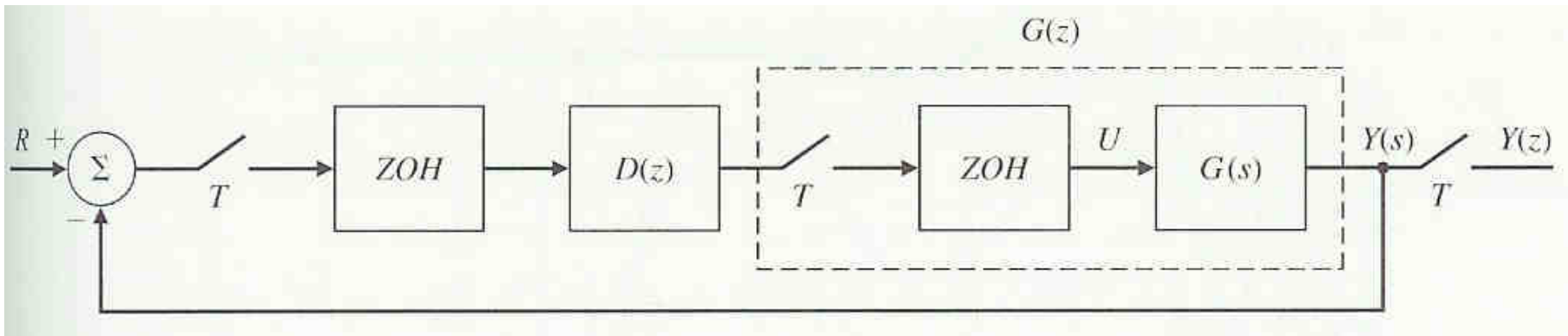
+ Evaluation de l'Equivalence

■ Emulation

- Plusieurs techniques.

■ Evaluation

- Analyse dans le domaine de z .
- (ZOH)
- Simulation



+ Evaluation

- Exemple, utilisation Matlab

Sys. continu (antenne)

$$G(p) = \frac{1}{p(10p+1)}$$

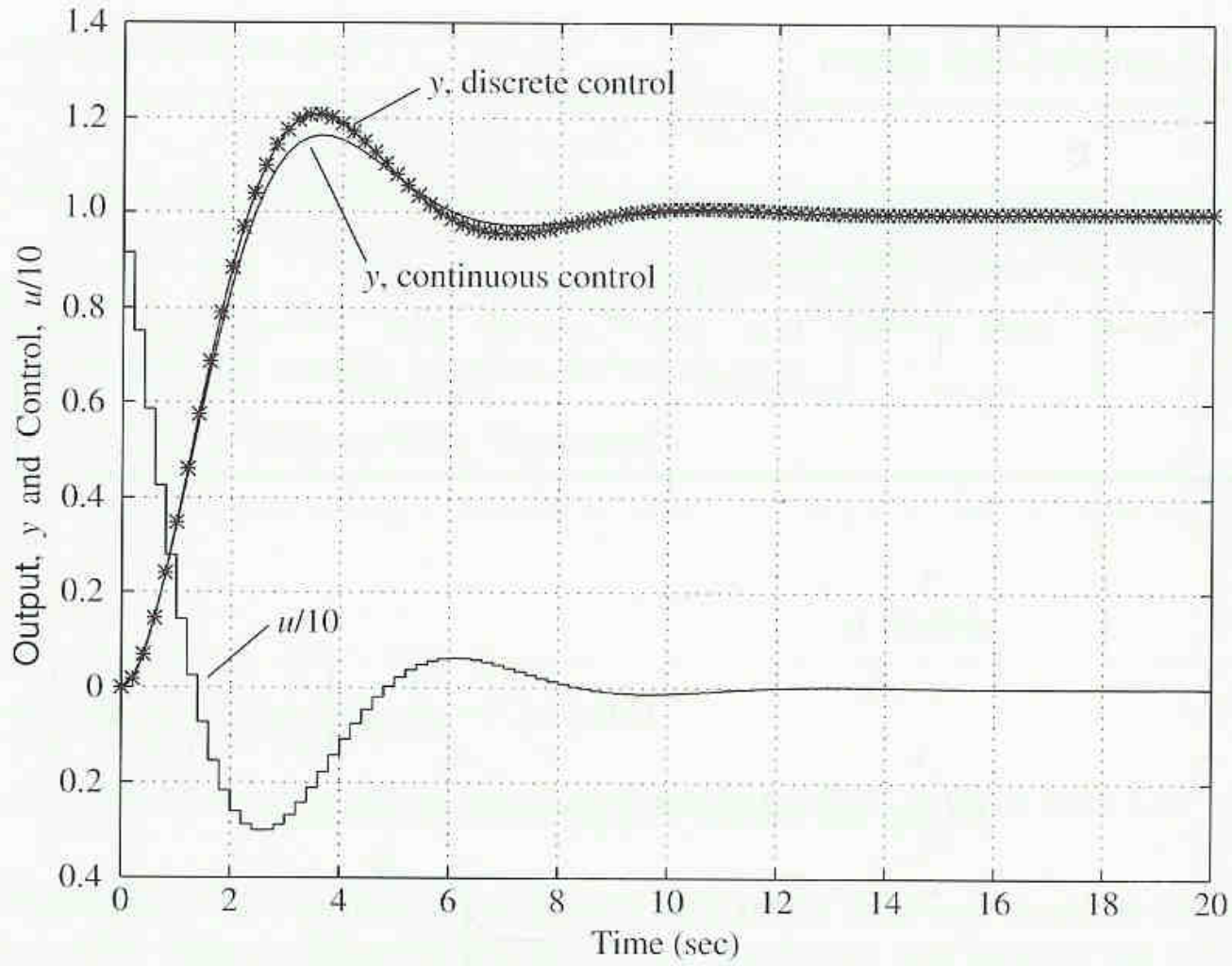
Cont. correcteur

$$D(p) = \frac{(10p+1)}{p+1}$$

```
sysD_c = tf([10 1],[1 1]);  
T = 0.2; % 30*wn., T = 1  
sysD_d = c2d(sysD_c,T,'matched'); % zero-pole matched  
sysG_c = tf([1],[10 1 0]);  
sysG_d = c2d(sysG_c,T,'zoh'); % zero order hold  
sysCL_c = feedback(sysD_c*sysG_c,1);  
sysCL_d = feedback(sysD_d*sysG_d,1);  
step(sysCL_c); hold on;  
step(sysCL_d);
```



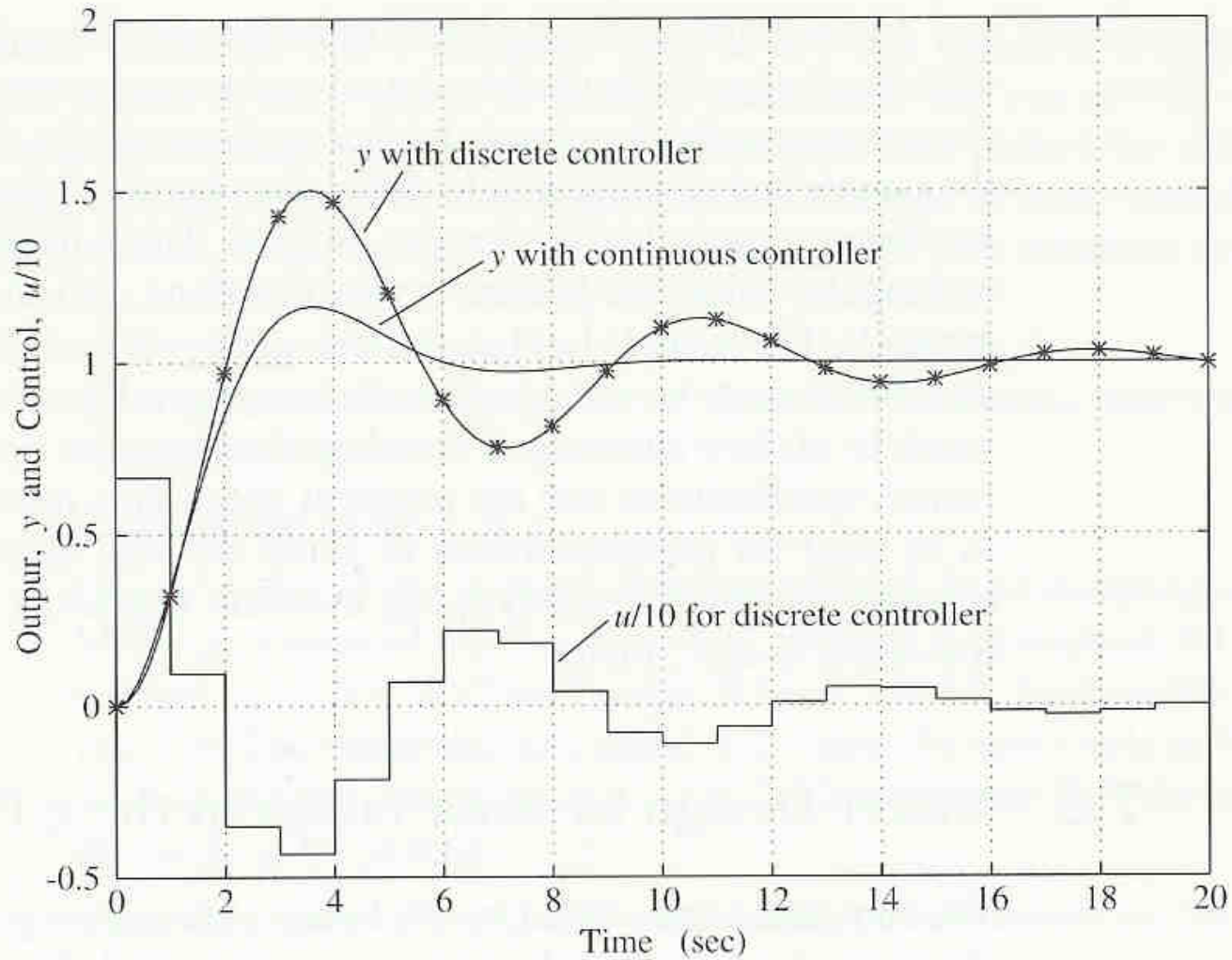
Evaluation



$T = 0.2$
 $(\omega_s \approx 30 \omega_n)$



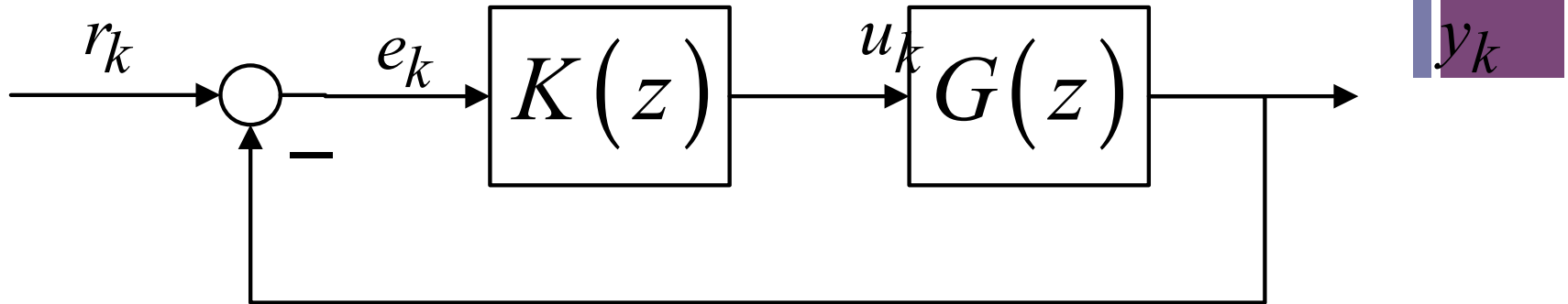
Evaluation



$T = 1$
 $(\omega_s \approx 6 \omega_n)$



■ Système Asservi Discret



$$L(z) = K(z)G(z)$$

$$T(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)}$$

Stable \Leftrightarrow pôles de T à l'intérieur du cercle 1

+ Test de Stabilité

On peut utiliser le critère de Routh Hurwitz dans la mesure où l'on trouve un changement de variable qui fait correspondre au cercle unité en Z , un demi plan gauche en W , on utilise pour cela la transformée bilinéaire :

$$W = \frac{Z - 1}{Z + 1} \text{ ou encore } Z = \frac{1 + W}{1 - W}$$

En conclusion, on transforme $F(Z)$ en $F(W)$ et on applique le critère de Routh-Hurwitz au dénominateur de $F(W)$.

On peut transposer ce qui a été fait pour les systèmes analogique, aux système RII

La réponse forcée se sépare en une réponse transitoire et une permanente :



La fonction de transfert peut s' écrire :

$$F(p) = \frac{A_m \cdot p^m + A_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + A_0}{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La stabilité de F passe par la résolution de l' équation suivante :

$$D(p) = B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0 = 0$$

On peut démontrer qu' une **condition nécessaire** de stabilité est que tous les coefficients de $D(p)$ soient du même signe.

Cette condition devient **suffisante** pour les systèmes du premier et du second ordre.

Ce critère permet d' établir la stabilité d' un système encore à partir des coefficients de son dénominateur. Il permet aussi de déterminer si le système est juste oscillant et dans le cas d' un système instable, il donne le nombre de pôle à partie réelle positive.

On forme le tableau suivant :

Degré	Coefficient		
p^n	B_n	B_{n-2}	$B_{n-4} \dots$
p^{n-1}	B_{n-1}	B_{n-3}	$B_{n-5} \dots$
p^{n-2}	$\frac{B_{n-1} \cdot B_{n-2} - B_n B_{n-3}}{B_{n-1}}$	$\frac{B_{n-1} \cdot B_{n-4} - B_n B_{n-5}}{B_{n-1}}$	\dots
p^{n-3}	\vdots	\vdots	
\vdots			

Colonne des pivots

Enoncé du critère :

- Si tous les éléments de la 1ère colonne (pivots) sont de même signe
 ⇒ **Stabilité et donc $\text{Re}[p_i] < 0$**
- S' il y a λ changement de signe, il y a λ pôle à partie réelle > 0
 ⇒ **Instabilité**
- Une ligne de zéros indique la présence de racines imaginaires pures et le caractère **juste oscillant du système**. Ces racines sont les zéros de l'équation auxiliaire $p^{m-2} + \dots = 0$
 Pour continuer le calcul on remplace cette ligne par :

$$\begin{array}{|c|ccc|} \hline p^m & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline p^{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|ccc|} \hline p^m & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline p^{m-1} & m a_1 & (m-1) \cdot a_2 & (m-2) \cdot a_3 \\ \hline \end{array}$$

- Si l'on trouve un pivot nul, on peut continuer en le remplaçant par ε . Les caractéristiques du système seront déduites en le faisant tendre ε vers 0 .

Cependant il est toujours possible d'utiliser la transformation bilinéaire $(W = \frac{Z-1}{Z+1})$ qui fait passer de l'intérieur du cercle unité en Z au 1/2 plan gauche en W, **pour obtenir la FTBO et appliquer le critère de Black, ou la FTBF et appliquer le critère de Routh-Hurwitz.**

$$Z = \frac{1+W}{1-W}$$

Exemple d'application :

$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$$\text{avec } D(Z) = Z^2 + (0,37K - 1,37)Z + 0,37 + 0,26K$$

$$D(W) = (2,74 - 0,11K)W^2 + (1,26 - 0,52K)W + 0,63K$$

W^2	$2,74 - 0,11K$	$0,63K$	$\Rightarrow K < \frac{2,74}{0,11} = 24,9$
W^1	$1,26 - 0,52K$	0	$\Rightarrow K < \frac{1,26}{0,52} = 2,42$
W^0	$0,63K$		$\Rightarrow K > 0$

Systeme stable si $0 < K < 2,42$

+ Critère de Jury

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$c_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-1-k} \\ c_{n-1} & c_k \end{vmatrix}$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
3	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-1}	
4	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	\dots	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	\dots		
6	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	\dots		
:	:	:	:	:	:	:
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3		
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0		
$2n-3$	q_0	q_1	q_2			

+ Enoncé du critère

Toutes les racines de $D(z)$ sont situées à l'intérieur du cercle unité

Ssi les $(n+1)$ conditions sont satisfaites :

- $D(1) > 0$ et $D(-1) > 0$ pour n pair
- $D(1) > 0$ et $D(-1) < 0$ pour n impair
- $|a_0| < a_n$ avec $a_n > 0$
- $|c_0| > |c_{n-1}|$
- $|d_0| > |d_{n-2}| \dots$
- $|q_0| > |q_2|$



Cas particuliers

Systeme de 2eme ordre : $D(z)=a_2z^2+a_1z+a_0$

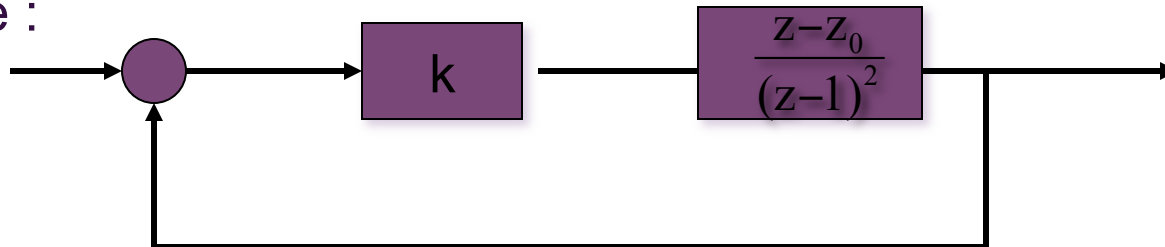
$$|a_0| < a_2, a_2+a_1+a_0 > 0 \text{ et } a_2-a_1+a_0 > 0$$

Systeme de 3eme ordre : $D(z)=a_3z^3+ a_2z^2+a_1z+a_0$

$$|a_0| < a_3, a_3+ a_2+a_1+a_0 > 0, -a_3+ a_2-a_1+a_0 < 0$$

$$|a_0^2- a_3^2| > |a_0a_2- a_1a_3|$$

Exemple :



Quelle est la condition de stabilité sur k du système asservi ?



$$-|1-kz_0| < 1$$

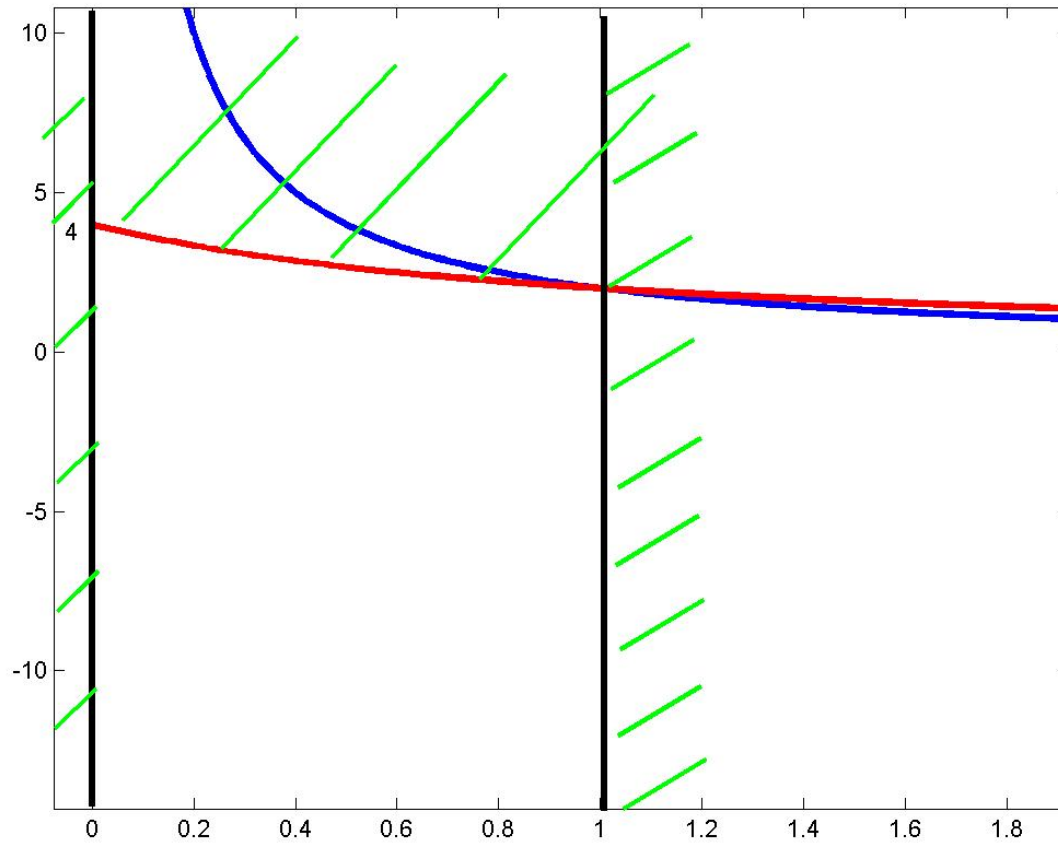
$$-1+(k-2)+k-kz_0 > 0$$

$$-1-(k-2)+k-kz_0 > 0$$

$$-0 < z_0 < 1$$

$$-k < 2/z_0$$

$$-k < 4/(1+z_0)$$



+ Critère de Stabilité de Nyquist

- Verification de la stabilité en B.F.
 - Avec le correcteur $KD(p)$ et $G(p)$ le procédé

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{KD(p)G(p)}{1 + KD(p)G(p)}, \quad D(p)G(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$$

Equation Caractéristique (EC)

$$1 + KD(p)G(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a(p) + Kb(p)}{a(p)} = 0$$

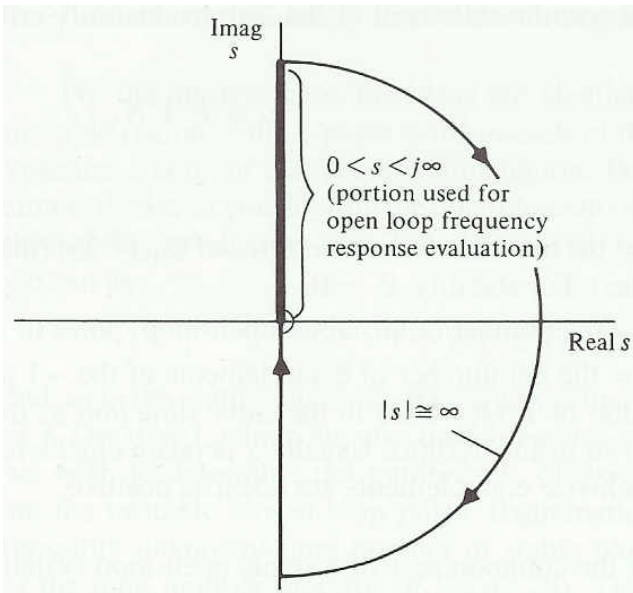
Remarque, le nombre de pôles en E.C. égale au nombre de pôles de la B.O. $D(p)G(p)$.

Remarque, les zéros de la E.C. sont les pôles de la B.F.

+ Critère de Stabilité de Nyquist

Approche, utilisation de l'équation caractéristique :

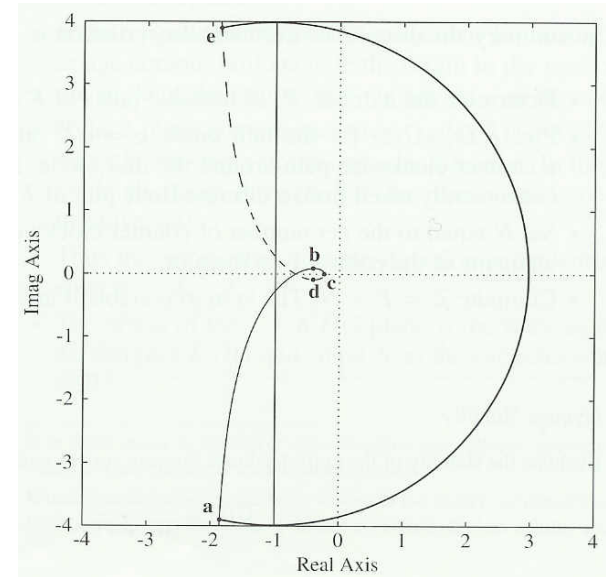
- ❑ Suivre un contour qui encercle RHP.
- ❑ Evaluation de $CE = 1 + KD(p)G(p)$ sur le contour. (Evaluation de $KD(s)G(s)$ et regarder -1)



$$KD(s)G(s)$$



Les pôles ou les zéros donnent des encerclements



+ Critère de Stabilité de Nyquist

■ Cas continu

- $Z = P + N$

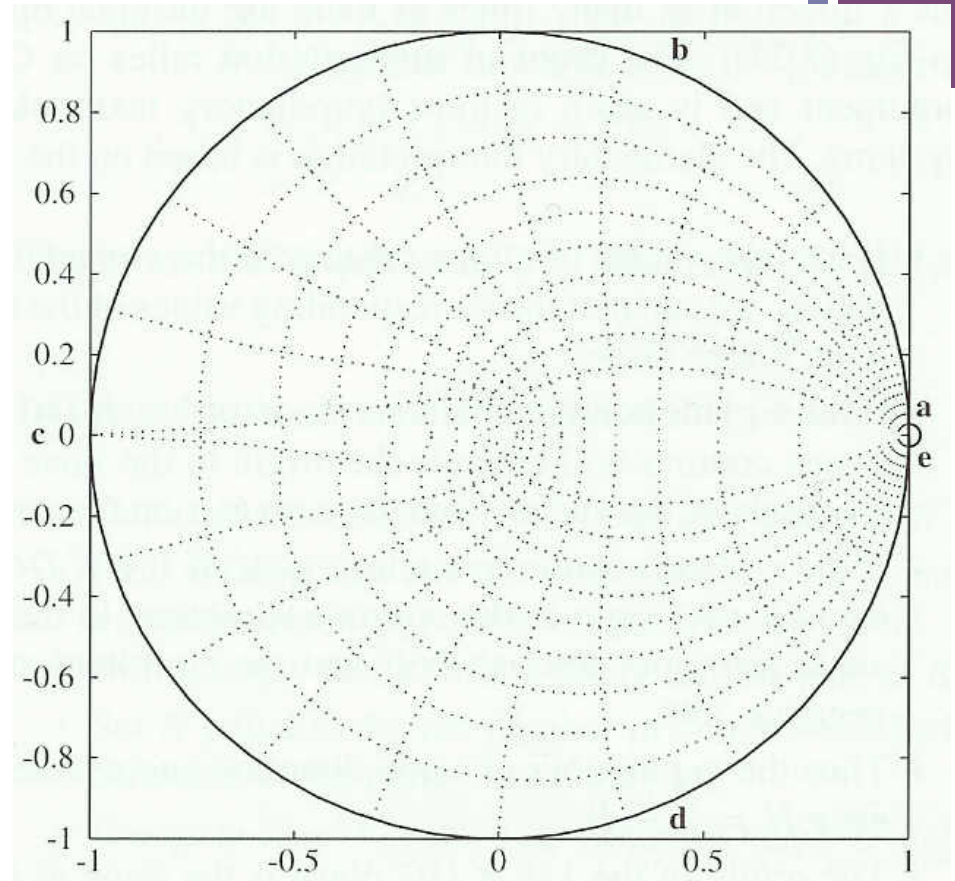
- Z = nombre de pole instable de la BF. Pour la stabilité on veut avoir $Z=0$. (pas connu)

- P = nombre de pôles instables de la B.O. *KDG* (connu).

- N = le nombre total d'encerclements de -1 par l'évaluation de *KDG* (N négatif).

+ Critère de Stabilité de Nyquist

- Systèmes Echantillonnés
 - Le même approche, presque...
 - La région instable est à l'extérieur du cercle unitaire
 - Facile d'évaluer en utilisant la région stable.



+ Critère de Stabilité de Nyquist

■ Echantillonné

- E.C: $0 = 1 + KD(z)G(z)$
- Nombre de pôles = n
- Nombre de zéros stables de $1 + KD(z)G(z)$ est $n - Z$
- Nombre de pôles stable de $1 + KD(z)G(z)$ est $n - P$

■ Critère (discret)

- $Z = (n - Z) - (n - P)$ ou $Z = P - N$

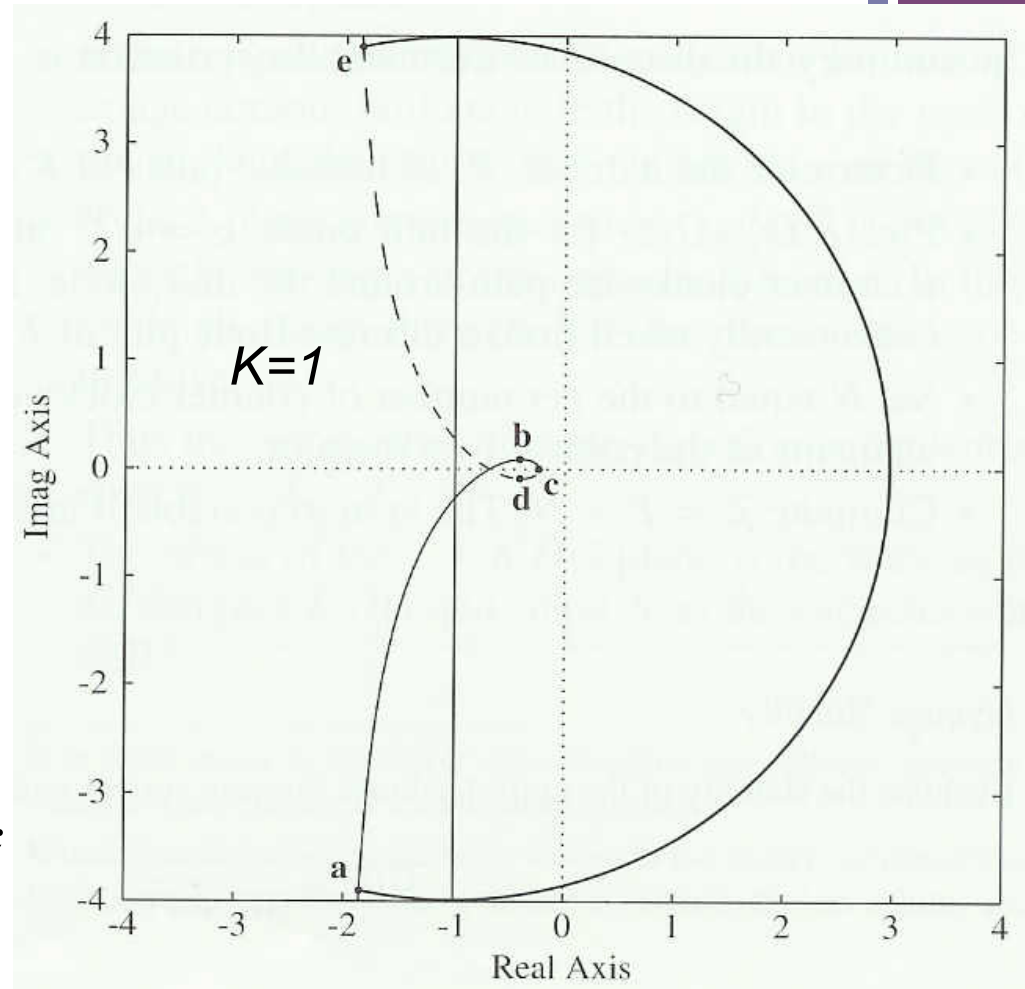
+ Stabilité Nyquist avec Matlab

Evaluation de la stabilité d'un système échantillonné à retour unitaire ayant une fonction de transfert $G(p)$ du procédé et la période d'échantillonnage $T=2$ et un ZOH. On utilise un correcteur proportionnel $KD(z) = K$.

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Solution (matlab)

```
sysC = tf([1], [1 1 0]);
sysD = c2d(sysC, 2);
nyquist(sysD);
```



Le système est B.O. Stable et il n'y a pas d'encerclement de -1
 \Rightarrow le système est en BF stable pour $K=1$