Application du logiciel Excel

Utilisation du Solver du logiciel Excel

Table de matiers

Lancement du logiciel

Ce composant du logiciel Excel permet à résoudre numériquement des problèmes mathématiques.

Pour lancer ce composant :

- dans le cas de la version Microsoft Office 2003 on choisie de la barre du menu principal du logiciel Excel le sous-menu Tools et d'ici l'option Solver. Si il n'y a pas la, il doit insérer en suivant les pas : on clique sur Add-ins et on choisie Solver et puis OK.

- dans le cas de la version Microsoft Office 2007 on enfonce Office Button, puis Excel Options, de la fenêtre qui sera affichée on choisie Add-Ins, on continu avec Go, Solver Add-in et OK. Dans le sous-menu Data sera affiche Solver.

Quelques exemples des problèmes qui peuvent être résolues en utilisant ce composant du logiciel Excel seront présentés dans ce chapitre.

Optimisations

Généralement, on appelle *programmation mathématique* la recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par contraintes sous forme d'égalités ou inégalités. Notons que le mot programmation n'a pas ici le sens usuel d'élaboration d'un programme pour ordinateur, il est utilise car un ensemble de valeurs des variables satisfaisant les contraintes d'un problème de programmation mathématique est parfois appelé un programme.

Nombreux sont les problèmes de décision qui se ramènent à un model de programmation mathématique.

Programmation linéaire

Soit un fonction $f : R^n \to R$, $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$, dont les variables sont soumises aux contraintes (restrictions) linéaires de la forme $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}$,$\boldsymbol{b} \in R^m$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in R^n$, et éventuellement des restrictions de signe, par exemple $\boldsymbol{x} \geq 0$, cette a dire $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Le problème de programmation linéaire revienne à résoudre la demande suivante :

Déterminer le vecteur $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ qui maximise (minimise) la fonction linéaire *f*, et qui vérifie les restrictions ci-dessus, ou :

$$\begin{cases} \max(\min) f(\boldsymbol{x}) = \max(\min) \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq (\geq) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

La fonction *f* est nommée *fonction objectif*, la matrice ***A*** est la *matrice des coefficients des restrictions*, le vecteur ***x*** est le *vecteur des inconnues*, le vecteur ***b*** est le *vecteur des termes libres* et le vecteur ***c*** est le *vecteur des coefficients de la fonction objectif.*

Remarque : la fonction objectif et les restrictions du problème sont des fonctions linéaires, d'où le nom du problème « problème de programmation linaire ».

Exemple. Un atelier d'une entreprise produit trois types de biens : P_1, P_2, P_3, en utilisant main d'œuvre (F) et ressources financières (A) limites comme dans le tableau :

Type de bien / Ressources	P_1	P_2	P_3	Disponible
F	2	3	2	15
A	1	2	3	12
Profit	1.5	4	3	

qui contiens également les consommations unitaire de chaque de bien, ainsi que les profits amènes de chaque unité de type de bien. A cause des conditions de stockage le total de la production ne peut pas dépassée 8 unités.

Déterminer le plan optimal de production tel que le total du profit soit maximal sous les conditions imposées !

Solution

Modélisation du problème

Variables de décision : soit x_i – nombre de biens de type P_i , $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$;

Fonction objectif : le profit total - $f(x_1, x_2, x_3) = 1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3$;

Restrictions du problème :

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$ - le nombre des heures utilisées pour le total de la production ne peut pas dépasser le total disponible ;

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12$ - la somme totale d'argent disponible ne peut pas soit dépassée ;

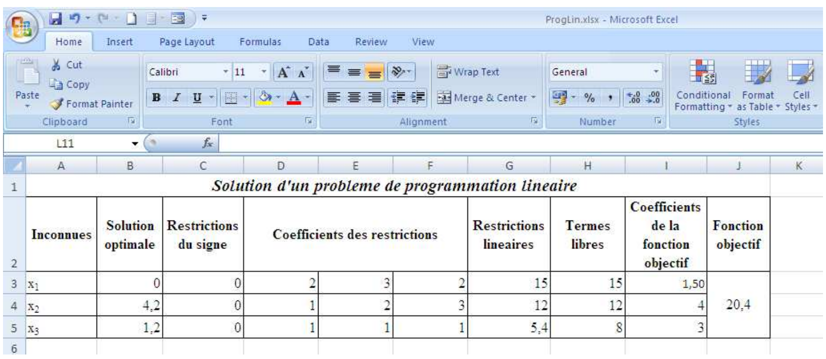
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ - la capacité de stockage ne peut pas soit dépassée.

On obtient le suivant *problème de programmation linéaire* :

$$\begin{cases} \max f(x) = \max\{1.5x_1 + 4x_2 + 3x_3\} \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ x \geq 0_i \ , \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Création de la feuille électronique pour résoudre le problème

Pour obtenir la feuille suivante il doit procéder comme dessous.

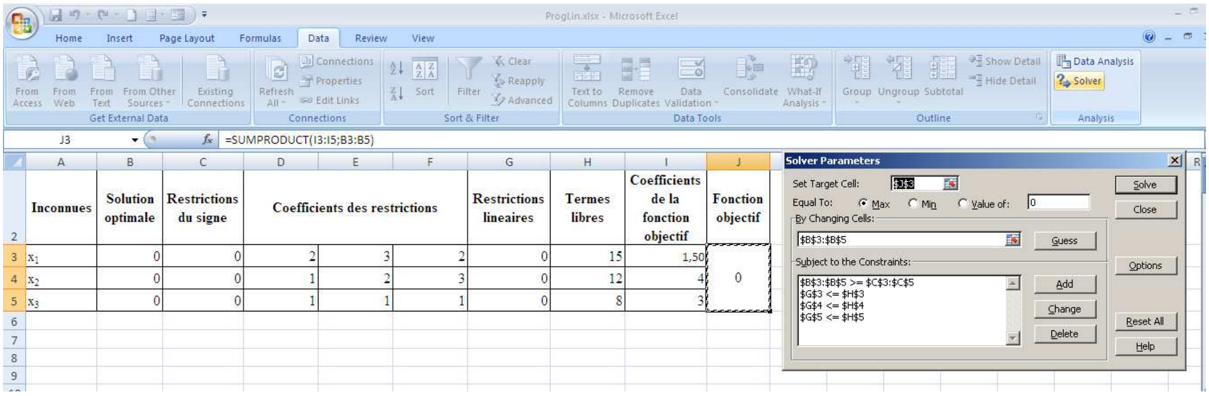


Solution d'un probleme de programmation lineaire

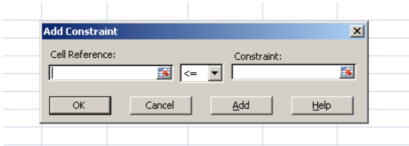
Inconnues	Solution optimale	Restrictions du signe	Coefficients des restrictions			Restrictions lineaires	Termes libres	Coefficients de la fonction objectif	Fonction objectif
x_1	0	0	2	3	2	15	15	1,50	
x_2	4,2	0	1	2	3	12	12	4	20,4
x_3	1,2	0	1	1	1	5,4	8	3	

Dans la cellule A1 on écrit Solution d'un problème de programmation linéaire et puis Enter. Les cellules A2 jusqu'à J2 contiennent les noms des colonnes (ces sont des commentaires !). Dans les cellules G3-G5 on écrit   =MMULT(D3:F3;B3:B5)   =MMULT(D4:F4;B3:B5)   =MMULT(D5:F5;B3:B5) respectivement. La cellule J3 contiens l'expression de la fonction objectif et pour ça on écrit =SUMPRODUCT(I3:I5;B3:B5)

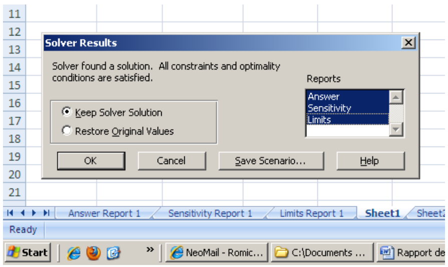
Avant à lacer le Solver on sélectionne la cellule J3 (cellule qui contiens la fonction objectif) et puis on choisi Solver du sous-menu Data. Une boite de dialogue est affiche :



Il doit préciser la cellule cible (fonction à optimiser) dans la zone **Set Target Cell**, le type du critère (max ou min) par les buttons **Max Min,** les cellules qui représentent les inconnues dans la zone **By Changing Cells** et puis les restrictions en zone **Subject to the Constraints** en appuyant le bouton **Add.** On affiche la boite de dialogue suivante



Dans la zone d'édition **Cell Reference** on met G3, le signe « inferieur ou égale » et dans la zone d'édition **Constraint** H3. En appuyant sur le bouton **Add** on a la possibilité de procéder de la même manière pour le reste des restrictions (G4, G5). Les restrictions de signe seront introduites comme ça : dans la zone d'édition **Cell Reference** on sélectionne les cellules B3 :B5, le signe sera « supérieur ou égale » à zéro (0) et pour terminer d'introduire les restrictions on presse le bouton OK. Pour résoudre le problème on presse le bouton **Solve** et on affichera la boite suivante



Pour visualiser les détails sur la solution on peut sélectionner tous les types de rapport offerts par Solver. Ces sont mentionner sur la barre d'état en bas de l'écran.

Exercice 1.

Une entreprise désire acquérir des fraiseuses manuelles (FM) et automatisées (FA) pour sa production. L'entreprise ne peut dépenser plus 200000 pour les machines et pas de 1000 par mois la maintenance. Les fraiseuses manuelles coutent 20000 par pièce et en moyenne 200 par mois la maintenance tandis que les fraiseuses automatisées coutent 40000 par pièce et en moyenne 150 par mois la maintenance. En sachant que chaque fraiseuse manuelle peut produire 15 unités et chaque fraiseuse automatique 25, trouver le nombre de chacune a acheter pour maximiser la capacité de production !

Modéliser le problème et le résoudre en utilisant le Solver de Excel !

Exercice 2.

A un département de production d'une entreprise de construction, où on travaille en flux continu, sont nécessaires pour la production de panneaux de coffrage quatre types de matières premières (panneau (P), planches de sapin (PS), les madriers (M) et des clous (C)) qui sont traitées à trois stands. Distribution de matières premières et les coûts du travail nécessaire à la transformation dans les stands est donnée dans le tableau ci-dessous.

Matiere prime / Stand	Consomes specifiques				Nécessaire
	P	PS	M	C	
S1	1	1	0	1	2

S2	1	2	1	0	4
S3	0	1	1	1	3
Dépenses	6	8	12	10	

Déterminer un plan de production tel que les dépenses soit minimes ! Modéliser le problème et le résoudre en utilisant le Solver de Excel !

Problème du transport

Un cas particulier du problème de programmation linéaire est donne du problème de transport. Supposons qu'il y a n dépôt ou se trouve un bien D_i , $i=\overline{1,n}$ dans les quantités a_i , $i=\overline{1,n}$ et m centre de consomme C_j , $j=\overline{1,m}$ qui demandent une quantité b_j , $j=\overline{1,m}$ de ce bien. Le coût unitaire de transport de dépôt D_i au centre de consomme C_j est $c_{i,j}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Déterminer un plan de transport tel que le coût total de transport est minimal en satisfaisant toutes les demandes !

Solution

Modélisation du problème

Variables de décision : soit $x_{i,j}$ – nombre de biens transportes du dépôt i au centre de consomme j ;

Fonction objectif : le coût total - $f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{i,j}x_{i,j}$, $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n,m}}(R)$;

Restrictions du problème :

$\sum_{j=1}^{m}x_{i,j}\le a_i$, $i=\overline{1,n}$ les nombre de biens qui part du dépôt D_i ne peut pas dépassé la capacité total du dépôt ;

$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \le b_j$, $j = \overline{1,m}$ les nombres de biens qui arrivent au centre de consomme C_j ne peut pas dépassé la demande total du centre ;

Remarque : d'habitude le disponible a la même valeur avec le nécessaire, c'est-a-dire $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, condition d'équilibre, et alors les inégalités ci-dessus deviennent égalisées !

$x_{i,j} \ge 0$ - condition de non-négativité.

On a obtenu le problème du transport :

$$\begin{cases} \min f(x) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j \ , \ j = \overline{1,m} \\ x_{i,j} \ , i = \overline{1,n} \ , \ j = \overline{1,m} \end{cases}$$

Exemple. Trois centrales à béton, S_i, i={1, 2, 3} recevaient du ciment par trois rampes de déchargement, R_j , j={1, 2, 3}. Quantités nécessaires par chaque station et les quantités offertes par chaque rampe de déchargement ainsi que les coûts de transport de la rampe R_j à chaque station S_i sont indiqués dans le tableau :

Station / Rampe	Couts de transport ($c_{i,j}$)			Disponible a_i (tone)
	S_1	S_2	S_3	
R_1	7	2	5	17
R_2	3	6	3	21
R_3	4	5	6	21
Necessaire b_j (tone)	19	28	14	

En utilisant le Solver de Excel, déterminer un plan de transport tel que le coût total de transport est minimal en satisfaisant toutes les demandes !

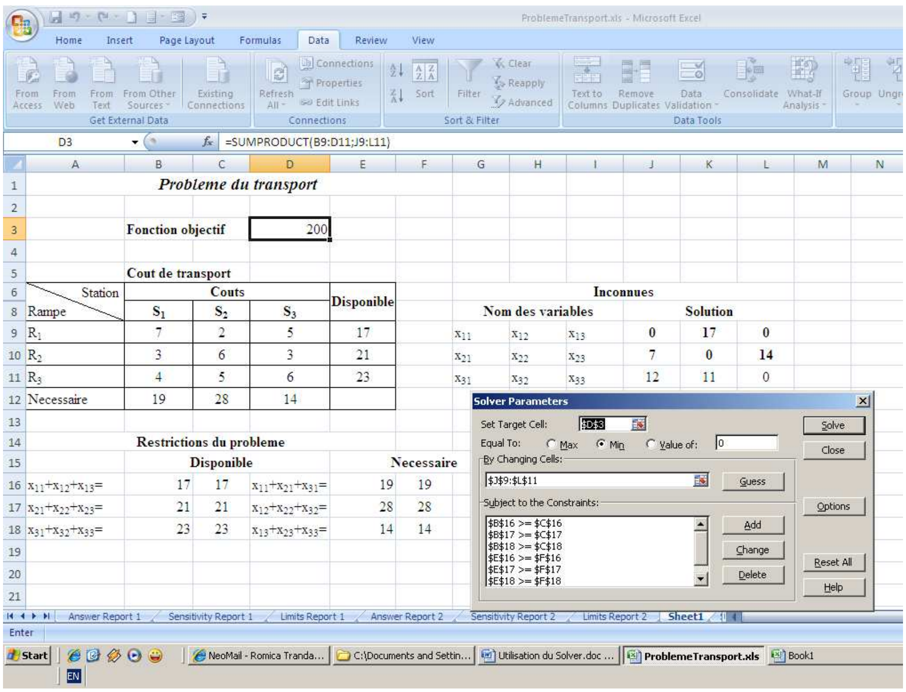
Solution

Il doit résoudre le problème

$$\begin{cases} \min f(x) = \min\{7x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 6x_{22} + 3x_{32} + 4x_{31} + 5x_{23} + 6x_{33}\} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 17 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 21 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 23 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 19 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 28 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 14 \\ x_{ij} \geq 0 \, , \, i = \overline{1{,}3} \, , \;\; j = \overline{1{,}3} \end{cases}$$

Création de la feuille électronique qui résoudre le problème du transport

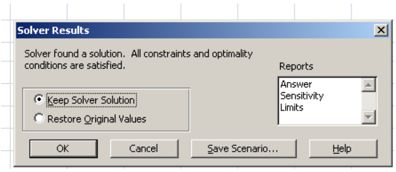
Pour créer la feuille électronique



qui résoudre le problème, il doit suivi les pas :

- dans la cellule A1 on écrit le nom du problème
- la cellule D3 contiens la fonction objectif =SUMPRODUCT(B9:D11;J9:L11)
- les cellules B3 :E12 continent les données du problème comme dans le tableau ci-dessus
- les cellules J9 :L11 vont contenir les variables de décision – les inconnues du problème
- les restrictions seront précisées par les cellules B16 :B18 et E16 :E18 comme on montre dans les colonnes gauches respectivement (exemple : la cellule B16 contiens =SUMPRODUCT(B9:D11;J9:L11) et ainsi de suite.
- Pour résoudre le problème en utilisant cette feuille électronique on sélectionne la cellule D3 et puis du sous-menu **Data** on lance le Solver. Il doit préciser le type d'optimisation (le bouton **Min**), les cellules contenant les inconnues et puis les restrictions, comme dans l'image ci-dessus. En appuyant le bouton **Solve** s'affichera la boite

-



et on peut sélectionner tous les rapports proposés pour avoir beaucoup des informations sur la solution du problème. Dans les cellules J8 :L12 sera affichée la solution du problème.

Exercice. Un produit à acheminer depuis 3 dépôts vers 4 clients de façon a minimiser les couts de distribution

Client / Dépôt	Coûts unitaires de transport				Offre
	C1	C2	C3	C4	
D1	10	8	5	9	500

D2	7	5	5	3	300
D3	11	10	8	7	400
Demande	200	400	300	100	

En utilisant le Solver de Excel, déterminer un plan de transport tel que le coût total de transport est minimal en satisfaisant toutes les demandes !

Problème de programmation quadratique

Si dans le problème de programmation linéaire on change la fonction objectif a une fonction quadratique et les restrictions restent linéaires on obtient le problème de programmation quadratique. Un problème de programmation quadratique est un problème qui peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{cases} \min(\max) f(\boldsymbol{x}) \\ \text{ou} \quad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ g_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i \le 0 \quad j = \overline{1,n} \\ \boldsymbol{x} \in R^n \end{cases}$$

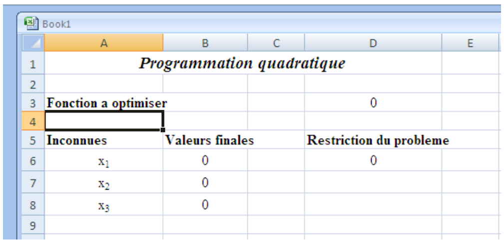
On remarque que la fonction objective contient des termes de degré deux, d'où le nom de programmation quadratique.

Exemple : Déterminer les points qui donnent le minimum de la fonction

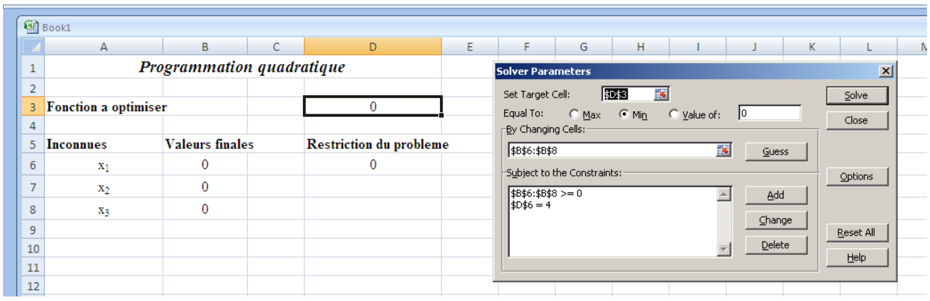
$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 + x_3$, sous les restrictions $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 \\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0 \end{cases}$.

Création de la feuille électronique pour résoudre le problème

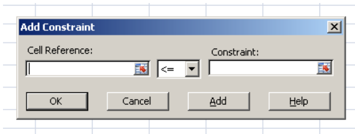
Pour créer la feuille suivante



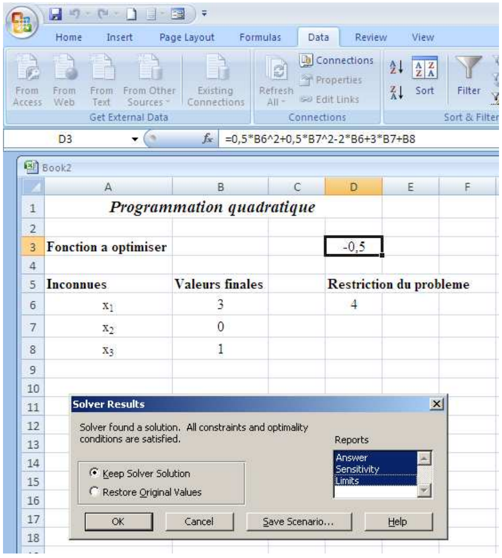
dans la cellule D3 on écrit =0,5*B6^2+0,5*B7^2-2*B6+3*B7+B8, ce qui représente la fonction à optimiser, dans la cellule D6 on écrit =B6-2*B7+B8, ce qui donne la restriction du problème. On select la cellule D3 et du sous-menu Data est choisi Solve. Dans la boite de dialogue affiché



on presse le bouton **Min**, dans la zone By Changing Cells on select les cellules B6:B8, on move le pointer du curseur dans la zone Subject to constraints et on presse le bouton **Add**. Toute suite s'affiche la boite



Et dans la zone Cell Reference on ecrit D6, puis le signe = et la valeur 4 dans la zone Constraint. On presse le bouton **Add** et dans la zone Cell Reference on écrit B6 :B9, puis le signe $\geq$ et la valeur 0 dans la zone Constraint. On presse le bouton **Ok**. Sur la boite Solver Parametrs on presse le bouton **Solve** et on peut sélectionner tous les rapports pour avoir plusieurs informations sur la solution.



On obtient $\min f(x_1, x_2, x_3) = -0.5$, dans le point (3, 0, 1).

Extremums liés

Si dans le problème précédent on renonce à la condition de linéarité même pour les restrictions on obtient un problème d'extremum lié. La forme générale du tel problème est la suivante :

$$\begin{cases} \min(\max) f(\boldsymbol{x}) \\ g_1(\boldsymbol{x}) \leq (\geq) 0 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \leq (\geq) 0 \\ \boldsymbol{x} \in R^n \end{cases}$$

où: $\boldsymbol{x}$ est le vecteur des inconnues et $g_1, \ldots, g_k$ sont des restrictions qui doivent être vérifiées de $\boldsymbol{x}$.

Exemple. Déterminer les points sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$, situés a la distance minimale ou maximale du plan $3x + 4y + 12z = 288$, en utilisant le logiciel Excel.

Solution. La fonction objective sera la distance entre un point et un plan:

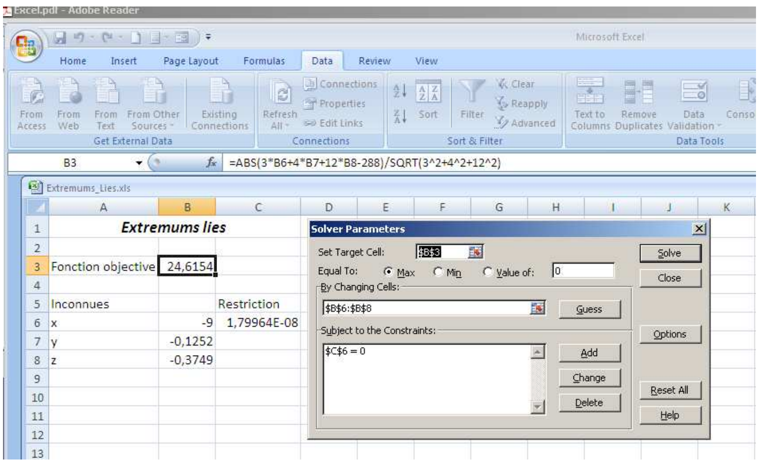
$f(x,y,z)=\dfrac{|3x+4y+12z-288|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}$ et la restriction et donnée par la condition que le point est sur l'ellipsoïde $g(x,y,z)\equiv\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2-1=0$.

Le problème d'extremums lies à résoudre devient

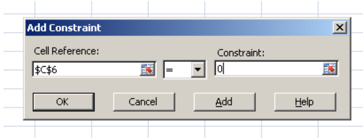
$$\begin{cases}\min(\max)f(x,y,z)=\min(\max)\dfrac{|3x+4y+12z-288|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}\\ g(x,y,z)\equiv\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2-1=0\\ (x,y,z)\in R^3\end{cases}$$

Création de la feuille électronique à résoudre le problème

Dans la cellule A1 on écrit le nom du problème. La cellule B3 contiens =ABS(3*B6+4*B7+12*B8-288)/SQRT(3^2+4^2+12^2) l'expression qui donne la fonction objective. Les inconnues seront déposées dans les cellules B6 :B8. Dans la cellule C6, l'expression =ABS(3*B6+4*B7+12*B8-288)/SQRT(3^2+4^2+12^2) représente la restriction du problème. Avant de l'appel du Solver on sélectionne la cellule B3 et puis du sous-menu Data on appelle Solver et la boite de dialogue suivante est affichée:



Il doit préciser le type d'optimum (les bouton **Max** ou **Min**), puis les cellules B3 :B8 représentant les inconnues dans la zone By Changing Cells et la restriction sera ajouter dans la zone Subject to the Constraints en appuyant le bouton **Add** et on remplie les zones de la boite affichée comme dans la figure suivante :



Pour terminer on appuie les boutons **Add** et puis **Solve**. On peut sélectionner les rapports qui donnent des informations complètes sur la solution (Answer, Sensitivity, Limits).

Résolutions des systèmes d'équations non linéaires

Pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \quad\vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\,, \quad k = \overline{1,m}$$

en utilisant le Solver du logiciel Excel, on construit une fonction comme somme du carrés des équations du système $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} g_k^2(x)$ dont le minimum sera déterminé, sous les restrictions données par des équations du système. Le problème devient

$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) = \min\left(\sum_{k=1}^{m} g_k^2(x)\right) \\ g_k(x) = 0 \\ k = \overline{1,m} \end{cases}$$

Exemple. En utilisant le Solver du logiciel Excel, déterminer la solution du système

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0\,. \\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

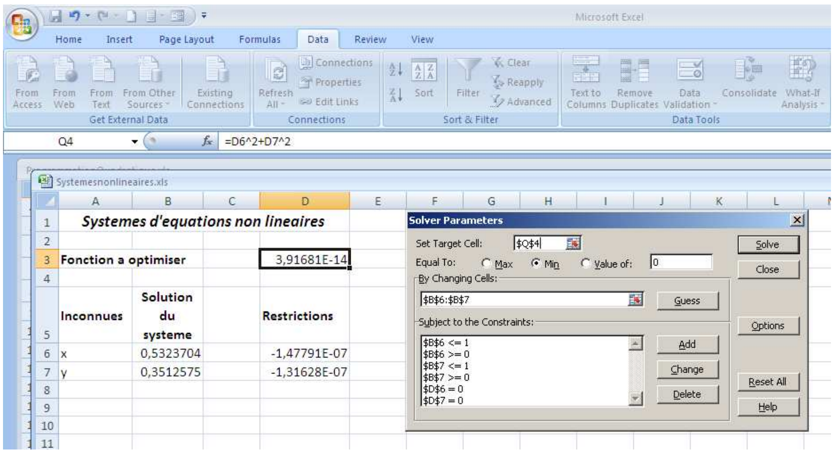
Solution. Il doit amener le problème ci-dessus à un problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min\left(\left(x^3+y^3-6x+3\right)^2+\left(x^3-y^3-6y+2\right)^2\right) \\ x^3+y^3-6x+3=0 \\ x^3-y^3-6y+2=0 \\ 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$$

Création de la feuille électronique à résoudre le problème

Les inconnues seront déposées dans les cellules B^6:B7, et les restrictions dans les cellules D6 =B6^3+B7^3-6*B6+3 et D7 =B6^3-B7^3-6*B7+2, respectivement.

Dans la cellule D3 on écrit =D6^2+D7^2, en représentant la fonction a optimiser. On sélectionne la cellule D3 et âpres la sélectionne du Solver (le sous menu Data) la boite



sera affichée. Il doit choisi le type d'optimisation (on presse le bouton **Min**), établit les cellules contenant les inconnues (B6 :B7) et ajouter les restrictions dans la zone d'édition Subject to the Constraits. Dans ce cas, les restrictions sont données par les deux équations du système et le fait que la solution doit être située dans le premier quadrant.

Remarque. On peut renoncer aux restrictions données par des équations du système, mais en les utilisant on obtienne une meilleure approximation !