MATRICES

ÉLÉMENTS DE CALCULS MATRICIELS

Une matrice ?

Une matrice est un tableau de nombres (entiers, réels ou complexes) à m lignes et n colonnes. Exemple avec m=2, n=3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

En générale, on utilise des lettres majuscules pour désigner une matrice.
Soit A une matrice (m, n), on appelle a_{ij} les m x n coordonnées de A telles que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \left(a_{ij}\right) \quad 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n;$$

Remarque: si n=1, on a l'écriture algébrique d'un vecteur à m composantes. On peut donc considérer une matrice comme un ensemble de n vecteurs à m composantes.

Matrice carrée.

Si n=m la matrice est dite carrée sinon elle est dite rectangulaire

Exemple de matrices carrées particulières (avec n=4):

Matrice unité (ou identité): $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale: $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$

Matrice sphérique si $d_{11} = d_{22} = d_{33} = d_{44}$;

Matrice triangulaire supérieure:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{31} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix};$$

Matrice triangulaire inférieure:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

Matrice carrée (suite).

a_{ii} représentent les termes diagonaux

a_{ij} $(i \neq j)$ représentent les termes nondiagonaux

Si $a_{ij} = a_{ji}$ la matrice est symétrique

Si $a_{ij} = -a_{ji}$ la matrice est antisymétrique ($\Rightarrow$ termes diagonaux nuls)

Matrice symétrique: Matrice antisymétrique:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Addition, soustraction

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = A - B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

Multiplication par un scalaire

$$C = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$A{=}{-}A^T$

Transposition

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée A et symétrique si elle est égale à sa transposée $A=A^T$
Une matrice carrée A et antisymétrique si elle est opposée à sa transposée

Opérations

Rappels (??) Symbole de sommation.

Notation : • Σ est la lettre majuscule *sigma* de l'alphabet grec, qui correspond à S, la première lettre du mot « somme ».

• L'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i$ signifie « effectuer la somme des a_i en laissant i prendre les valeurs entières de 1 jusqu'à n ».

• La notation Σ est couramment utilisée en mathématique pour abréger l'écriture d'une somme de termes.

Opérations sur les

Exemples : **a)** Compléter : $3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=\sum$..............

b) Compléter : $2+4+6+8+\ldots+98+100=\sum$..............

c) Développer : $\sum_{i=4}^{9}(2i+1)$......................

d) La somme des éléments de la deuxième colonne d'une matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ s'écrit ....

e) alors que la somme des éléments de la troisième ligne s'écrit

....

Opérations sur les matrices (suite)

Multiplication de deux matrices

Le produit de deux matrices peut être défini à partir du produit scalaire entre deux vecteurs exprimés sous forme algébrique:

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix};\ V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix};\quad \vec{U}\cdot\vec{V}=U^T V=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_mv_m=\sum_{i=1}^{m}u_iv_i$$

Opérations sur les matrices (suite)

Multiplication de deux matrices (suite)

Le produit de la matrice A (mxn) avec la matrice B(nxp) donne une matrice C(mxp) telle que chaque élément c_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B

$$C = A \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p)$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel n’est possible que si le nombre de colonnes de A est identique au nombre de lignes de B

Opérations sur les matrices (suite)

Multiplication de deux matrices (suite)

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; C = A \cdot B;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$$

Etapes de calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 \ ; \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 23 \ ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 \ ; \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9$$

Matrice inverse d'une matrice carrée

On dit qu'une matrice carrée A admet pour matrice inverse la matrice carrée A^{-1} ssi:

$$A.A^{-1} = A^{-1}A = I$$

On dit que A est inversible ou régulière. Si A^{-1} n'existe on dit que A est singulière.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$$

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant d'une matrice carrée A, que l'on note det(A), est un scalaire qui sert d'intermédiaire au calcul de A^{-1}

Pour une matrice (2,2), det(A) est définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pour une matrice (3,3), det(A) est définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \text{Calcul par rapport à la première colonne:}$$

$$\det(A) = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{23} \end{pmatrix} \right)$$

(produit mixte entre 3 vecteurs)

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

D'après la propriété du produit mixte invariable par permutation circulaire et changeant de signe dans le cas d'une simple permutation entre deux vecteurs, on obtient:

Calcul par rapport à la deuxième colonne

$$\det(A) = -\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{23} \end{pmatrix} \right)$$

Calcul par rapport à la troisième colonne

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right)$$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

Autre méthode pour une matrice (3,3): la méthode de Sarrus

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \boxed{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

Exemple

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 28 = -16; \quad \text{(développement 1er colonne)}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = -2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -16; \quad \text{(développement 2ième colonne)}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = 7\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 12 = -16; \quad \text{(développement 3ième colonne)}$$

Méthode de Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3x4x1)+(2x0x1) +(7x0x\text{-}2)\text{-}(2x0x1)\text{-}(3x0x\text{-}2)\text{-}(7x4x1)=12\text{-}28= \text{-}16;$$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

Pour une matrice (4,4), det(A) est définie par (en utilisant la première colonne):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix};$$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

On peut ainsi de suite calculer des déterminants pour des matrices carrées d'ordre supérieur mais cela devient fastidieux … en général on procède autrement en triangularisant la matrice par la méthode numérique de Gauss que l'on utilise pour la résolution de systèmes linéaires.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn};$$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

On peut aussi utiliser les règles opératoires suivantes afin de faire apparaître le plus de 0 possibles avant de se lancer dans les calculs:

- **si on permute 2 lignes ou de colonnes, le déterminant change de signe;**

- **si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul;**

- **si on multiplie tous les termes d'une même colonne ou d' une même ligne par un réel k, le déterminant est multiplié par k;**

- **on peut ajouter à une colonne (ou à une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant ;**

- **en conséquence si une colonne ou une ligne est nulle, le déterminant est nul.**

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

Exemple (1er méthode)

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 7\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 2 & 0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \det(A)=3\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6+16=10\ ;\ \begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=28-7=21;$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-8+24=16$$

$\det(A)=30-21-16=-7$

Déterminant d'une matrice carrée (suite)

Exemple (2ième méthode)

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3&2&-1&7\\0&2&0&1\\-1&4&2&-2\\1&3&2&0\end{vmatrix}\Leftrightarrow\det(A)=\begin{vmatrix}3&2&-1&7\\0&2&0&1\\0&7&4&-2\\1&3&2&0\end{vmatrix}\ (L3'=L3+L4);$$

$$\Leftrightarrow\det(A)=\begin{vmatrix}3&0&-1&6\\0&2&0&1\\0&7&4&-2\\1&3&2&0\end{vmatrix}\ (L1'=L1-L2);$$

$$\Leftrightarrow\det(A)=3\begin{vmatrix}2&0&1\\7&4&-2\\3&2&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&-1&6\\2&0&1\\7&4&-2\end{vmatrix}=3\left(2\begin{vmatrix}4&-2\\2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7&4\\3&2\end{vmatrix}\right)-\left(\begin{vmatrix}2&1\\7&-2\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}2&0\\7&4\end{vmatrix}\right)$$

$$=3(8+2)-(-11+48)=-7$$

Résolution d'un système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires est un système de la forme:

$$A.X = B$$

Dans lequel A est une matrice (m,n), X une matrice uni-colonne (n,1) et B une matrice uni-colonne (m,1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

- Si la matrice A est telle que m > n , alors il y a plus d' équations que d'inconnues . A priori il n' y a pas de solution sauf si les (m-n) équations supplémentaires sont des combinaison linéaires de n premières équations.

- Si la matrice A est telle que m < n , alors il y a plus d'inconnues que d'équations. Le système admet à priori une infinité de solution, on choisit de calculer m inconnues en fonction des n-m inconnues restantes

- Si la matrice est carrée (m=n) alors le système admet une solution unique à condition que det(A) ≠ 0 . La solution est déterminée par:

$$X = A^{-1}B$$

avec A^{-1} qui représente la matrice inverse de A $\qquad A.A^{-1} = A^{-1}A = I$

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

Calcul de la matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{Cof}\right)^{T}$$

Cof représente la comatrice de A dont chaque coefficient représente un des cofacteurs de la matrice A

$$\mathrm{Cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

Exemple: Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ dont on a déjà calculé le déterminant (=-16)

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

On vérifie bien: $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$

$$= -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -16 & -4 & 8 \\ -28 & 0 & 12 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & -16 & -28 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

De ce qui précède on en déduit la résolution du système suivant:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 1 \\ 4y = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 & 1 & 1,75 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & -0,5 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0,25 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Résolution d’un système d’équations linéaires (suite)

Dans la pratique, on ne résout pas un système d’équations à partir de l’inverse de la matrice (trop fastidieux au-delà de 4 équations à 4 inconnues).

On préfère transformer le système en triangularisant la matrice de manière systématique par la méthode de Gauss (méthode des pivots).

Ensuite on résout par une remontée triangulaire

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{L1 premiere ligne} \\ \text{L2 deuxieme ligne} \\ \text{L3 troisieme ligne} \end{matrix}$$

premiere transformation

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{4}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{L1 premiere ligne} \\ \text{L2 deuxieme ligne} \\ \text{L3}^* = \text{L3} - \frac{1}{3}\text{L1 troisieme ligne } (\text{pivot}=\frac{1}{3}) \end{matrix}$$

premiere transformation

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{L1 premiere ligne} \\ \text{L2 deuxieme ligne} \\ \text{L3}^{**} = \text{L3}^* + \frac{8}{4 \times 3}\text{L2 troisieme ligne } (\text{pivot}=\frac{2}{3}) \end{matrix}$$

Résolution d'un système d'équations linéaires (suite)

Résolution par remontée triangulaire

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{2}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ y = 0,25 \\ x = \dfrac{1}{3}\left(1 - 2 \times 0,25 - 7 \times 0,5\right) = -1 \end{cases}$$

Résolution sous Excel (méthode de Gauss)

Méthode de Gauss

Triangularisation							
		Matrice			Second membre		
	3,0	2,0	-1,0	7,0	**1,0**	L1	
	0,0	2,0	0,0	1,0	**1,0**	L2	
	-1,0	4,0	2,0	-1,0	**1,0**	L3	
	1,0	3,0	2,0	0,0	**1,0**	L4	
Etape 1							
	3,0	2,0	-1,0	7,0	1,0	Ligne de référence	
	0,0	**2,0**	**0,0**	**1,0**	**1,0**	pivot1=0/3	L2*=L2-pivot1xL1
	0,0	**4,7**	**1,7**	**1,3**	**1,3**	pivot2=-1/3	L3*=L3-pivot2xL1
	0,0	**2,3**	**2,3**	**-2,3**	**0,7**	pivot3=1/3	L2=L2*-pivot3xL1
Etape 2							
	3,0	2,0	-1,0	7,0	**1,0**		
	0,0	2,0	0,0	1,0	**1,0**	Ligne de référence	
	0,0	**0,0**	**1,7**	**-1,0**	**-1,0**	pivot1=4,7/2	L3**=L3*-pivot1xL2*
	0,0	**0,0**	**2,3**	**-3,5**	**-0,5**	pivot2=2,3/2	L4**=L4*-pivot2xL2*
Etape 3							
	3,0	2,0	-1,0	7,0	**1,0**		
	0,0	2,0	0,0	1,0	**1,0**		
	0,0	0,0	1,7	-1,0	**-1,0**	Ligne de référence	
	0,0	0,0	**0,0**	**-2,1**	**0,9**	pivot1=2,3/1,7	L4***=L4**-pivot1xL3**

Résolution sous Excel (méthode de Gauss)

La résolution s'effectue par remontée triangulaire et on trouve

p	0,57142857
q	0,71428571
r	-0,85714286
s	-0,42857143

On a résolu le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss Jordan consiste à effectuer un double travail de triangularisation pour arriver au final à une matrice diagonale normalisée (termes diagonaux égaux à 1

Première triangularisation (déjà faite) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

Deuxième triangularisation :

Etape 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-\frac{7}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Méthode de Gauss-Jordan

Etape 2

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{2} - 2 \times \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Calcul de l’inverse par Gauss-Jordan (méthode des pivots)

La méthode du pivot sert également à trouver l’inverse de toute matrice carrée A d’ordre n. Dans ce cas, on augmente la matrice A de la matrice identité d’ordre n et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid C)$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice C qui est l’inverse de la matrice A. Observons ceci sur un exemple :

Exemple : Trouver l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow -L_3$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2-2L_1 \\ L_3 \to L_3-3L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1+L_2 \\ \\ L_3 \to L_3-5L_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to -1/20L_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1-4L_3 \\ L_2 \to L_2-6L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & -4/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/2 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right)$$

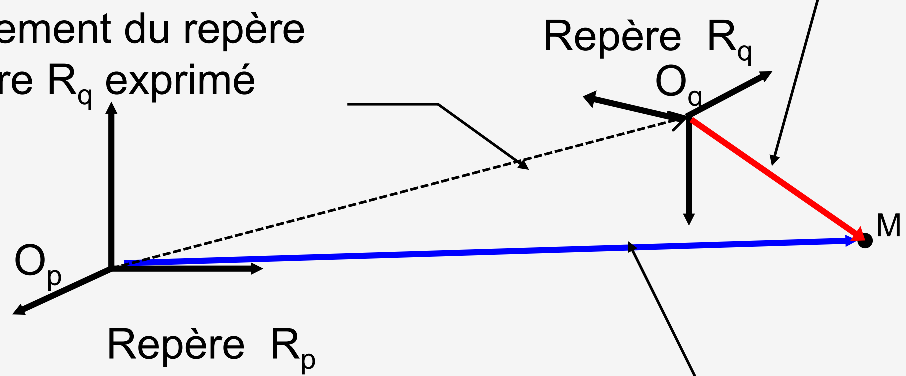
Matrice de passage

$$\overrightarrow{O_pO_q} = D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_p$$

$$\overrightarrow{O_qM} = X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_q$$

Vecteur position du Point M par rapport au référentiel R_q exprimé dans la base q

Vecteur déplacement du repère R_p vers le repère R_q exprimé dans la base q



$$\overrightarrow{O_pM} = Y$$

Vecteur position du Point M par rapport au référentiel R_p

Que vaut Y ? Connaissant D et X

Matrice de passage (suite)

$$\overrightarrow{O_pM} = \overrightarrow{O_pO_q} + \overrightarrow{O_qM} \Leftrightarrow Y = D + X$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_p + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_q$$

On ne peut pas additionner 2 vecteurs de manière algébrique si ils ne sont pas exprimés dans la même base. Il faut donc effectuer un changement de base.

On pose: $\vec{i}_q = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}_i ; \vec{j}_q = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}_p ; \vec{k}_q = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{33} \\ p_{33} \end{pmatrix}_p$

$$\overrightarrow{O_qM} = x\vec{i}_q + y\vec{j}_q + z\vec{k}_q \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}_p x + \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}_p y + \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}_p z$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrice de passage(suite)

Finalement on a:

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z \\ b + p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z \\ c + p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z \end{pmatrix}$$

On pose $\quad {}^{\mathrm{P}}[\mathrm{P}]_q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$

la matrice de passage (ou changement de base) de R_p vers R_q

Matrice de passage(suite)

On remarque:

$$\left({}^{p}[\mathrm{P}]_{q}\right)^{T}\cdot{}^{p}[\mathrm{P}]_{q}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \vec{i}_q.\vec{i}_q & \vec{i}_q.\vec{j}_q & \vec{i}_q.\vec{k}_q \\ \vec{j}_q.\vec{i}_q & \vec{j}_q\vec{j}_q & \vec{j}_q.\vec{k}_q \\ \vec{k}_q.\vec{i}_q & \vec{k}_q.\vec{j}_q & \vec{k}_q.\vec{k}_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

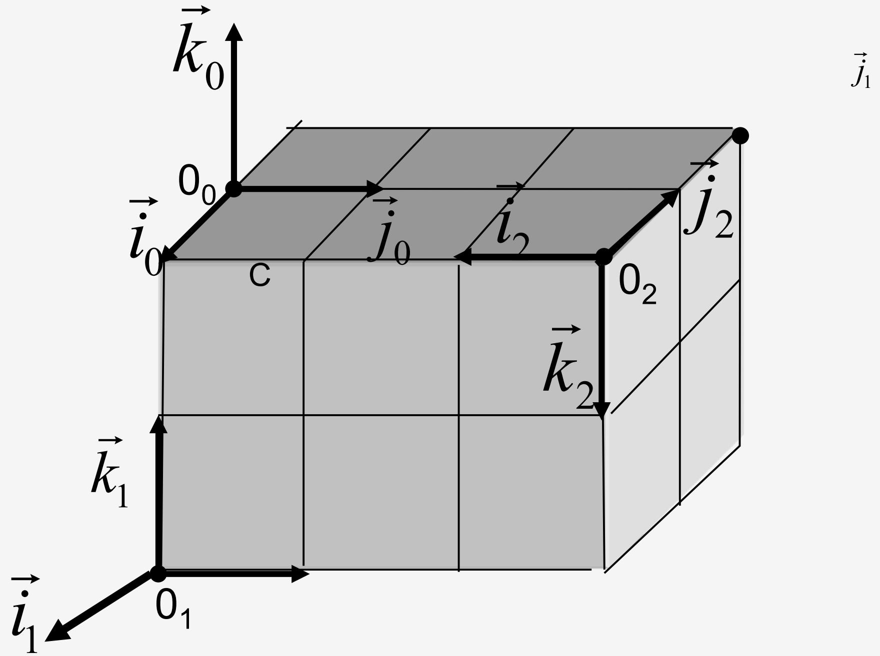
ce qui implique que:

$$\left({}^{p}[\mathrm{P}]_{q}\right)^{T}=\left({}^{p}[\mathrm{P}]_{q}\right)^{-1}$$

et par définition la matrice inverse définie l'opération inverse: $\left({}^{p}[\mathrm{P}]_{q}\right)^{-1}={}^{q}[\mathrm{P}]_{p}$

Les matrices de passage sont des matrices dites orthogonales ou de rotation comme toutes les matrices vérifiant $A^{-1}=A^{T}$

Exercice d'application



$^0[P]_2 \, , \, ^2[P]_1 \, , \, ^0[P]_1$

1°) Déterminer les matrices de passages

2°) Vérifier que l'on a bien $\quad ^0[P]_1 = {}^0[P]_2 \, . \, ^2[P]_1$