Programmation Linéaire

Introduction

Recherche opérationnelle

$\Leftrightarrow$

résolution de problèmes d'**optimisation**

Introduction

Recherche opérationnelle

$\Leftrightarrow$

résolution de problèmes d'**optimisation**

$\Leftrightarrow$

aide à la décision

Origine

En 1940, au cours de la seconde guerre mondiale, le gouvernement anglais charge Patrick Blackett de diriger une équipe de *recherche* pour résoudre certains problèmes tels que

- l'implantation optimale de radars de surveillance,
- la gestion des convois d'approvisionnement.

Le terme *opérationnelle* vient du fait que le travail du groupe était lié à des *opérations* militaires.

Origine

En 1940, au cours de la seconde guerre mondiale, le gouvernement anglais charge Patrick Blackett de diriger une équipe de *recherche* pour résoudre certains problèmes tels que

- l'implantation optimale de radars de surveillance,
- la gestion des convois d'approvisionnement.

Le terme *opérationnelle* vient du fait que le travail du groupe était lié à des *opérations* militaires.

Après la guerre, ces techniques se sont considérablement développées du fait de

- la multiplication des domaines d'application,
- l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs.

La RO est généralement est liée à plusieurs domaines :

Mathématiques appliquées, Informatique, Économie

La RO est généralement est liée à plusieurs domaines :

Mathématiques appliquées, Informatique, Économie

Les applications sont nombreuses :

- les chaînes logistiques, la planification,
- la gestion de production, l'ordonnancement, la gestion des stocks,
- les problèmes d'ingénierie, les réseaux de télécommunication,
- etc...

Sommaire

Formulation du problème

Programmation Linéaire (PL) = optimisation d'une fonction linaire de variables devant satisfaire un ensemble de contraintes linéaires de type inégalités et/ou égalités.

$$
\begin{array}{rcl}
opt \quad z = & f(x) & \\
& & \\
& g(x) & \leq \quad d \\
& h(x) & = \quad b \\
& x_i & \geq \quad 0
\end{array}
$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les variables de décision.

Formulation du problème

Programmation Linéaire (PL) = optimisation d'une fonction linaire de variables devant satisfaire un ensemble de contraintes linéaires de type inégalités et/ou égalités.

$$
\begin{array}{ccccc}
opt & z = & f(x) & & \\
 & & g(x) & \leq & d \\
 & & h(x) & = & b \\
 & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les variables de décision.

Les composantes d'une problème de PL sont :

- les variables : ce sont les valeurs à trouver, la solution du problème $[x]$,
- les contraintes : donne l'espace des solutions admissibles $[g(\cdot),\ d,\ h(\cdot),\ b]$,
- qu'est-ce qu'on veut optimiser ? $[f(\cdot)]$.

Problèmes d'optimisation linéaire sous contraintes :

fonction économique $\left\{ \quad opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \right.$

contraintes
$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n & \leq & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n & \leq & d_m \end{array} \right.$$

non-négativité $\left\{ \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \right.$

(ici, nous écrivons seulement des contraintes inégalités)

Exemple 1

Une entreprise fabrique 2 produits, A et B, à partir de 3 matières différentes, M_1, M_2 et M_3 :

- pour fabriquer A, il faut 1 tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2,
- pour fabriquer B, il faut 1 tonne de M_1, 1 tonne de M_2 et 1 tonne de M_3.

La vente de 1 tonne de A rapporte 150€ tandis que la vente de 1 tonne de B rapporte 100€.

L'entreprise possède un stock de :

- 300 tonnes de M_1,
- 400 tonnes de M_2,
- 250 tonnes de M_3.

Exemple 1

Une entreprise fabrique 2 produits, A et B, à partir de 3 matières différentes, M_1, M_2 et M_3 :

- pour fabriquer A, il faut 1 tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2,
- pour fabriquer B, il faut 1 tonne de M_1, 1 tonne de M_2 et 1 tonne de M_3.

La vente de 1 tonne de A rapporte 150€ tandis que la vente de 1 tonne de B rapporte 100€.

L'entreprise possède un stock de :

- 300 tonnes de M_1,
- 400 tonnes de M_2,
- 250 tonnes de M_3.

★ Question : combien faut-il fabriquer de produits A et B pour avoir le maximum de bénéfice ?

Analysons le problème :

variables :

$x_1 \quad \rightarrow \quad$ nombre de produits A

$x_2 \quad \rightarrow \quad$ nombre de produits B

le profit est donné par les ventes : $z = 150x_1 + 100x_2$

les contraintes sont liées au stock des matières

Analysons le problème :

variables :

$x_1 \rightarrow$ nombre de produits A

$x_2 \rightarrow$ nombre de produits B

le profit est donné par les ventes : $z = 150x_1 + 100x_2$

les contraintes sont liées au stock des matières

formulation du problème de PL :

$$\max \quad z = 150x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 300 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 250 \\ \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Exemple 2

Considérons 3 magasins, A, B et C, ayant commandé 200 containers chacun.

- 250 containers sont disponibles au dépôt D_1,
- 450 containers sont disponibles au dépôt D_2.

Les coûts de transport par containers sont :

magasin	A	B	C
dépôt D_1	3.4	2.2	2.9
dépôt D_2	3.4	2.4	2.5

Exemple 2

Considérons 3 magasins, A, B et C, ayant commandé 200 containers chacun.

- 250 containers sont disponibles au dépôt D_1,
- 450 containers sont disponibles au dépôt D_2.

Les coûts de transport par containers sont :

magasin	A	B	C
dépôt D_1	3.4	2.2	2.9
dépôt D_2	3.4	2.4	2.5

★ objectif : minimiser le coût total de transport des containers des dépôts vers les magasins.

Analysons le problème :

variables :

x_{1A}	$\rightarrow$	nombre de containers depuis le dépôt D_1 vers le magasin A
x_{2A}	$\rightarrow$	nombre de containers depuis le dépôt D_2 vers le magasin A

(idem pour B et C : x_{1B}, x_{2B}, x_{1C}, x_{2C})

le coût total de transport est donné par :

$$z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

les contraintes sont liées à la disponibilité des dépôts et à la demande des magasins

Analysons le problème :

variables :

$x_{1A} \quad \rightarrow \quad$ nombre de containers depuis le dépôt D_1 vers le magasin A
$x_{2A} \quad \rightarrow \quad$ nombre de containers depuis le dépôt D_2 vers le magasin A

(idem pour B et C : x_{1B}, x_{2B}, x_{1C}, x_{2C})

le coût total de transport est donné par :

$$z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

les contraintes sont liées à la disponibilité des dépôts et à la demande des magasins

formulation du problème de PL :

$$\min \quad z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

$$\begin{aligned}
x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} &\leq 250 \\
x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} &\leq 450 \\
x_{1A} + x_{2A} &= 200 \\
x_{1B} + x_{2B} &= 200 \\
x_{1C} + x_{2C} &= 200 \\
\\
x_i &\geq 0 \qquad i = 1A, 2A, 1B, 2B, 1C, 2C.
\end{aligned}$$

Méthode et interprétation graphique

La méthode graphique pour résoudre un problème de PL est faisable seulement pour des problèmes à 2, voire 3, variables.

Dans le cas d'un problème à 2 variables, les contraintes peuvent être tracées dans le plan à 2 dimensions (x_1, x_2).

On peut alors visualiser l'espace des solutions admissibles. Il faut alors ensuite déterminer le point du plan, de coordonnées (x_1^*, x_2^*), optimisant la fonction économique.

Méthode et interprétation graphique

La méthode graphique pour résoudre un problème de PL est faisable seulement pour des problèmes à 2, voire 3, variables.

Dans le cas d'un problème à 2 variables, les contraintes peuvent être tracées dans le plan à 2 dimensions (x_1, x_2).

On peut alors visualiser l'espace des solutions admissibles. Il faut alors ensuite déterminer le point du plan, de coordonnées (x_1^*, x_2^*), optimisant la fonction économique.

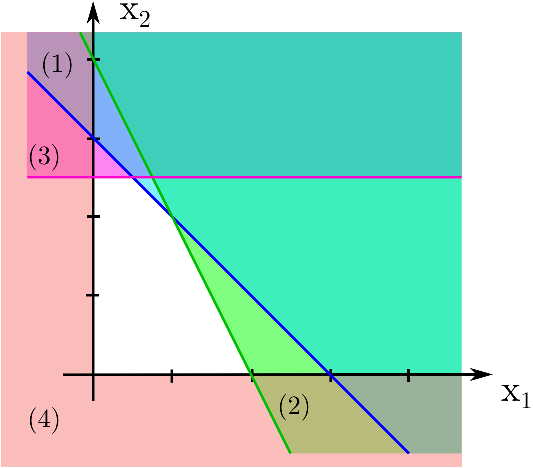
Reprenons le problème de l'exemple 1 :

$$\max \quad z = 150x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 300 & (1)\\ 2x_1 + x_2 &\leq 400 & (2)\\ x_2 &\leq 250 & (3)\\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1,2 & (4) \end{aligned}$$

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 5 contraintes.

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 5 contraintes.



⇒ Nous pouvons visualiser l'espace des solutions admissibles.

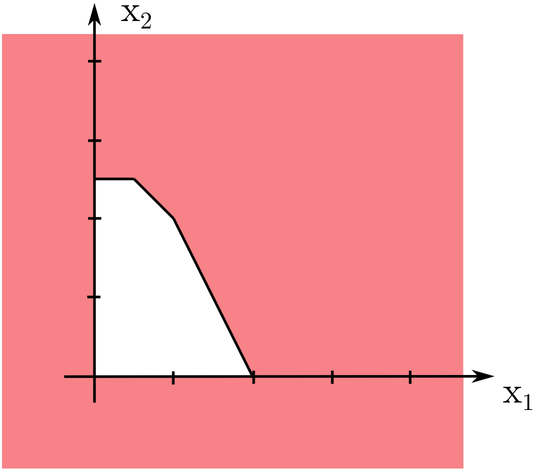
⇒ Quel point choisir ?

fonction objectif : $z = 150x_1 + 100x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{z}{100}$

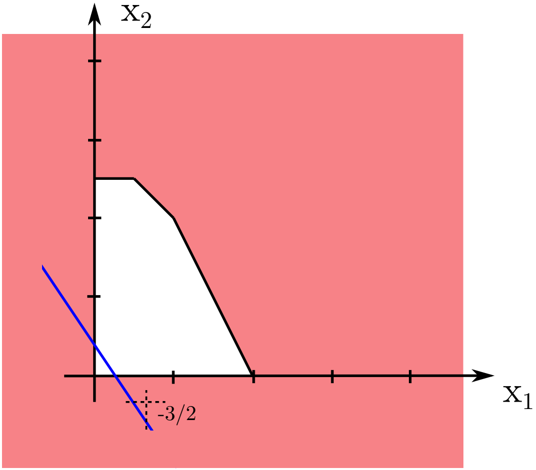
fonction objectif : $z = 150x_1 + 100x_2$

soit : $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{100}$



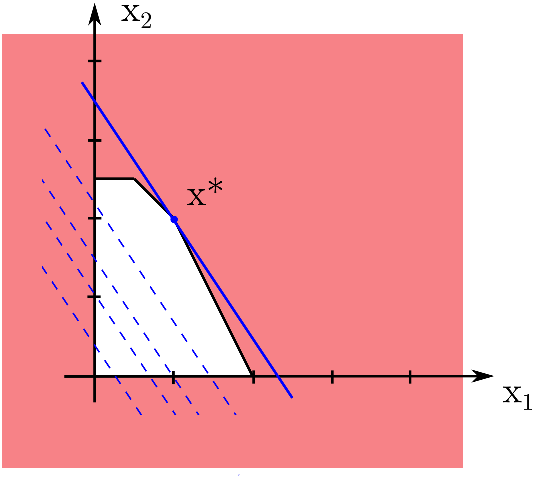
fonction objectif : $z = 150x_1 + 100x_2$

soit : $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{100}$



fonction objectif : $z = 150x_1 + 100x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{z}{100}$



x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la *solution optimale*.

- La solution est à l'intersection des contraintes (1) et (2) : $(x_1^*, x_2^*) = (100, 200)$
- La valeur du bénéfice est donc : $z = 35000$€.

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la *solution optimale*.

- La solution est à l'intersection des contraintes (1) et (2) : $(x_1^*, x_2^*) = (100, 200)$
- La valeur du bénéfice est donc : $z = 35000$€.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits A et $B \rightarrow x_1 = x_2 = 130$

$\Rightarrow z = 32500$€ perte de 7%

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la *solution optimale*.

- La solution est à l'intersection des contraintes (1) et (2) : $(x_1^*, x_2^*) = (100, 200)$
- La valeur du bénéfice est donc : $z = 35000$€.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits A et $B \rightarrow x_1 = x_2 = 130$

$$\Rightarrow z = 32500\text{€} \qquad \text{perte de } 7\%$$

- maximum de produits $A \rightarrow x_1 = 200$ et $x_2 = 0$

$$\Rightarrow z = 30000\text{€} \qquad \text{perte de } 14\%$$

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la *solution optimale*.

- La solution est à l'intersection des contraintes (1) et (2) : $(x_1^*, x_2^*) = (100, 200)$
- La valeur du bénéfice est donc : $z = 35000$€.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits A et $B \rightarrow x_1 = x_2 = 130$

  $\Rightarrow z = 32500$€ perte de 7%

- maximum de produits $A \rightarrow x_1 = 200$ et $x_2 = 0$

  $\Rightarrow z = 30000$€ perte de 14%

- maximum de produits $B \rightarrow x_1 = 0$ et $x_2 = 250$

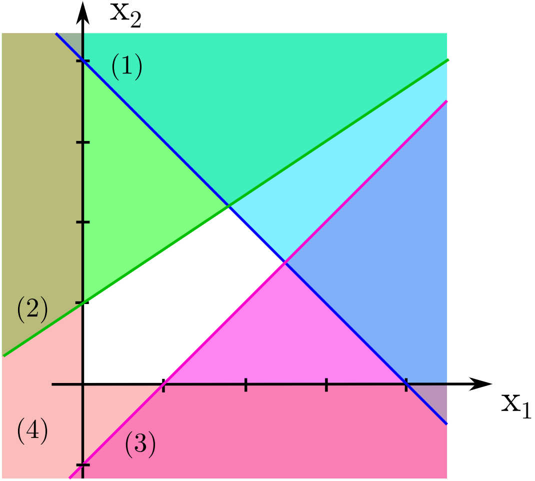
  $\Rightarrow z = 25000$€ perte de 29%

Exemple 3 :

$$\max \quad z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 && (1) \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 && (2) \\ x_1 - x_2 &\leq 2 && (3) \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 && (4) \end{aligned}$$

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 5 contraintes.

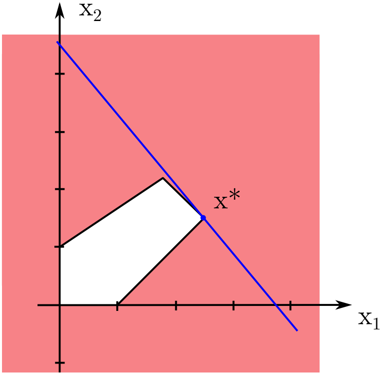


fonction objectif : $z = 6x_1 + 5x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{6}{5}x_1 + \dfrac{z}{5}$

fonction objectif : $z = 6x_1 + 5x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{6}{5}x_1 + \dfrac{z}{5}$



- La solution est à l'intersection des contraintes (1) et (3) : $(x_1^*, x_2^*) = (5, 3)$
- La valeur optimale est donc : $z = 9$.

Algorithme du simplexe

Problème de programmation linéaire :

fonction économique
$$\left\{ \quad opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \right.$$

contraintes
$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n & \leq & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n & \leq & d_m \end{array} \right.$$

non-négativité
$$\left\{ \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \right.$$

Algorithme du simplexe

Problème de programmation linéaire :

fonction économique $\left\{ \quad opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \right.$

contraintes
$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n & \leq & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n & \leq & d_m \end{array} \right.$$

non-négativité $\left\{ \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \right.$

Pour résoudre ce problème quelque soit la dimension et de façon systématique, il existe l'*algorithme du simplexe*. Un simplexe est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ possédant $(n+1)$ sommets.

Forme standard du problème de PL

Les inégalités sont transformées en égalités avec l'introduction de variables d'écart

$$t_{j1}x_1 + \ldots + t_{jn}x_n \leq d_j \qquad \Leftrightarrow \qquad t_{j1}x_1 + \ldots + t_{jn}x_n + x_j^e = d_j \qquad x_j^e \geq 0$$

Forme standard du problème de PL

Les inégalités sont transformées en égalités avec l'introduction de variables d'écart

$$t_{j1}x_1 + \ldots + t_{jn}x_n \leq d_j \qquad \Leftrightarrow \qquad t_{j1}x_1 + \ldots + t_{jn}x_n + x_j^e = d_j \qquad x_j^e \geq 0$$

fonction économique $\left\{ \quad opt \quad z \;=\; c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \right.$

contraintes
$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n + x_1^e & = & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n + x_2^e & = & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n + x_m^e & = & d_m \end{array} \right.$$

non-négativité
$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, n \\ x_j^e & \geq & 0 & j = 1, \ldots, m \end{array} \right.$$

Notons n le nombre de variables total : variables initiales x_i + variables d'écart x_j^e.
Nous pouvons réécrire le problème sous la forme :

$$opt \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Notons n le nombre de variables total : variables initiales x_i + variables d'écart x_j^e.
Nous pouvons réécrire le problème sous la forme :

$$opt \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

reprenons l'exemple 1

$$\max \quad z = 150x_1 + 100x_2$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 300 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 400 \\ x_2 + x_5 & = & 250 \end{array}$$

$$x_i \quad \geq \quad 0 \qquad i = 1, \ldots, 5$$

$\Leftrightarrow$

$$\max \quad z = [150 \ 100 \ 0 \ 0 \ 0]x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 250 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Dans la suite nous considérerons la formulation du problème suivant :

$$\min \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

x $(n \times 1)$, c $(1 \times n)$, T $(m \times n)$ et d $(m \times 1)$. Nous supposerons que le système des contraintes est non-redondant et que $m < n$.

Dans la suite nous considérerons la formulation du problème suivant :

$$\min \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

x $(n \times 1)$, c $(1 \times n)$, T $(m \times n)$ et d $(m \times 1)$. Nous supposerons que le système des contraintes est non-redondant et que $m < n$.

Nous appellerons une base B une sous-matrice de T de dimension $(m \times m)$ dont les m colonnes sont linéairement indépendantes. Le rang de la matrice B est donc égal à m.

Dans la suite nous considérerons la formulation du problème suivant :

$$\min \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

x $(n \times 1)$, c $(1 \times n)$, T $(m \times n)$ et d $(m \times 1)$. Nous supposerons que le système des contraintes est non-redondant et que $m < n$.

Nous appellerons une base B une sous-matrice de T de dimension $(m \times m)$ dont les m colonnes sont linéairement indépendantes. Le rang de la matrice B est donc égal à m.

Dans ce cas, le problème peut s'écrire (avec éventuellement une réorganisation des indices)

$$\min \quad z = c_B x_B + c_R x_R$$

$$\begin{array}{rcl} Bx_B + Rx_R & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

- x_B $(m \times 1)$ sont les *variables de base*, $x_B = (x_i, \quad i \in I)$
- x_R $(n - m \times 1)$ sont les *variables hors base*, $x_R = (x_j, \quad j \in J)$

La solution du système $Tx = d$ en posant $x_R = 0$ est appelée la *solution de base* associée à la base B. Cette solution est

$$x_B = B^{-1}d$$
$$x_R = 0$$

Cette solution satisfait les contraintes, et si $x_B \geq 0$, la solution est admissible. La valeur objectif est alors :

$$z = c_B B^{-1} d$$

La solution du système $Tx = d$ en posant $x_R = 0$ est appelée la *solution de base* associée à la base B. Cette solution est

$$x_B = B^{-1}d$$
$$x_R = 0$$

Cette solution satisfait les contraintes, et si $x_B \geq 0$, la solution est admissible. La valeur objectif est alors :

$$z = c_B B^{-1} d$$

Interprétation graphique : on montre qu'une solution de base admissible correspond à un sommet du polyèdre.

La solution du système $Tx = d$ en posant $x_R = 0$ est appelée la *solution de base* associée à la base B. Cette solution est

$$x_B = B^{-1}d$$
$$x_R = 0$$

Cette solution satisfait les contraintes, et si $x_B \geq 0$, la solution est admissible. La valeur objectif est alors :

$$z = c_B B^{-1} d$$

Interprétation graphique : on montre qu'une solution de base admissible correspond à un sommet du polyèdre.

L'algorithme du simplexe est une procédure itérative qui "navigue" de sommet en sommet tout en cherchant à réduire la valeur objectif z. A chaque itération, il change de base B (admissible) de façon "intelligente" jusqu'à atteindre la valeur optimal $z_{\min}$.

Utilisation d'un solveur

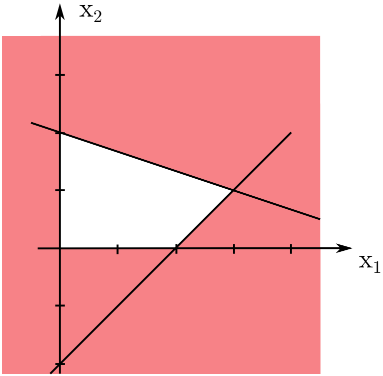
$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Utilisation d'un solveur

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

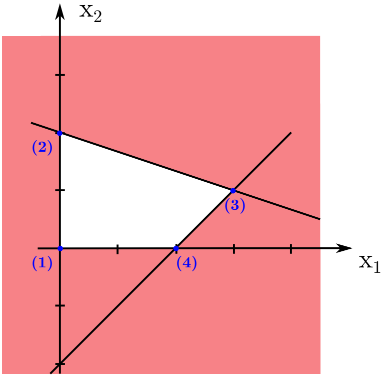
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$



Utilisation d'un solveur

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$



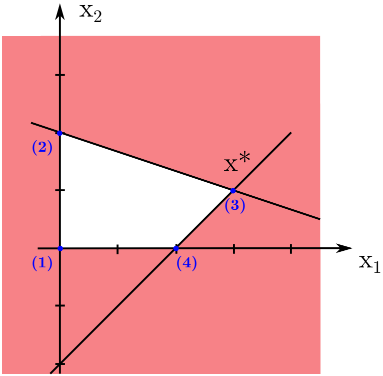
valeur sur chaque sommet :

- $(1) \rightarrow z = 0$
- $(2) \rightarrow z = 4$
- $(3) \rightarrow z = 8$
- $(4) \rightarrow z = 4$

Utilisation d'un solveur

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

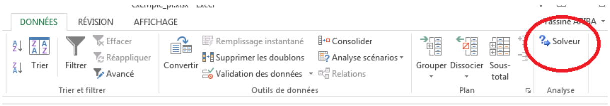


valeur sur chaque sommet :

- (1) $\rightarrow z = 0$
- (2) $\rightarrow z = 4$
- (3) $\rightarrow z = 8 \rightarrow$ optimal
- (4) $\rightarrow z = 4$

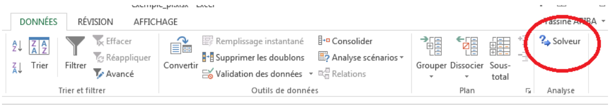
Solution : $x_1 = 6$ et $x_2 = 2$.

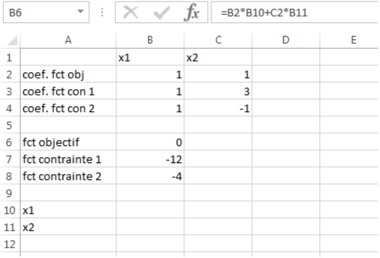
Solveur d'Excel



Le solver est intégré à Excel mais doit être simplement activé.

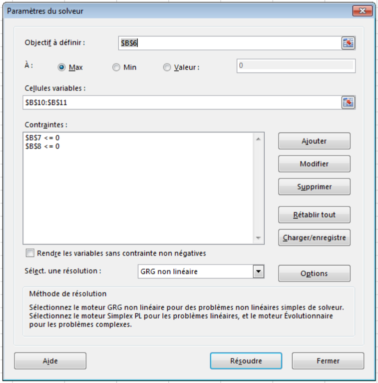
Solveur d'Excel

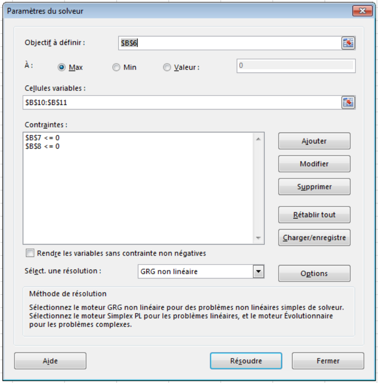




	A	B	C	D	E
1		x1	x2		
2	coef. fct obj	1	1		
3	coef. fct con 1	1	3		
4	coef. fct con 2	1	-1		
5					
6	fct objectif	0			
7	fct contrainte 1	-12			
8	fct contrainte 2	-4			
9					
10	x1				
11	x2				
12					

Le solver est intégré à Excel mais doit être simplement activé.


Paramètres du solveur
Objectif à définir :
$B$6
À :
Max
Min
Valeur :
0
Cellules variables :
$B$10:$B$11
Contraintes :
$B$7 <= 0
$B$8 <= 0
Ajouter
Modifier
Supprimer
Rétablir tout
Charger/enregistre
Rendre les variables sans contrainte non négatives
Sélect. une résolution :
GRG non linéaire
Options
Méthode de résolution
Sélectionnez le moteur GRG non linéaire pour des problèmes non linéaires simples de solveur. Sélectionnez le moteur Simplex PL pour les problèmes linéaires, et le moteur Évolutionnaire pour les problèmes complexes.
Aide
Résoudre
Fermer



	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	coef. fct obj	1	1			
3	coef. fct con 1	1	3			
4	coef. fct con 2	1	-1			
5						
6	fct objectif	8				
7	fct contrainte 1	0				
8	fct contrainte 2	0				
9						
10	x1	6				
11	x2	2				
12						

Solveur de Scilab

La fonction `karmarkar()` permet de résoudre le problème :

$$\min \quad c^T x$$

$$\begin{array}{rcl} A_e x & = & b_e \\ A_i x & \leq & b_i \end{array}$$

D'autres solveurs sont disponibles à partir de modules d'extension du logiciel.

Solveur de Scilab

La fonction `karmarkar()` permet de résoudre le problème :

$$\min \quad c^T x$$

$$\begin{array}{rcl} A_e x & = & b_e \\ A_i x & \leq & b_i \end{array}$$

Syntaxe :

```
xopt = karmarkar(Ae, be, c, [], [], [], [], [], Ai, bi)
```

D'autres solveurs sont disponibles à partir de modules d'extension du logiciel.

Dans le cas de notre exemple :

$$\min \quad [-1 - 1]\, x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas de notre exemple :

$$\min \quad [-1 - 1]\, x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dans Scilab :

```
--> c = [-1 -1]';
--> Ai = [1 3 ; 1 -1];
--> bi = [12 ; 4];
-->
--> [xopt,fopt] = karmarkar([], [], c, [], [], [], [], [], Ai, bi)

fopt =
    - 7.9999347
xopt =
      5.9999347
      2.
```

Détail de l'algorithme

Considérons la forme standard du problème de PL :

$$\min \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

x $(n \times 1)$, c $(1 \times n)$, T $(m \times n)$ et d $(m \times 1)$. Nous supposerons que le système des contraintes est non-redondant et que $m < n$.

Reformulation à partir d'une base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$\min \quad z = c_B x_B + c_R x_R$$

$$\begin{array}{rcl} Bx_B + Rx_R & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

- x_B $(m \times 1)$ sont les *variables de base*, $x_B = (x_i, \quad i \in I)$
- x_R $(n - m \times 1)$ sont les *variables hors base*, $x_R = (x_j, \quad j \in J)$

Forme équivalente du problème :

$$\min \quad z = c_B B^{-1} d - \Big(c_B B^{-1} R - c_R \Big) x_R$$

$$\begin{array}{rcl} x_B + B^{-1} R x_R & = & B^{-1} d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Soit :

Forme équivalente du problème :

$$\min \quad z = c_B B^{-1} d - \Big(c_B B^{-1} R - c_R \Big) x_R$$

$$\begin{array}{rcl} x_B + B^{-1} R x_R & = & B^{-1} d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Soit :

$$\min \quad z \; = a_{00} - \alpha_0 x_R$$

$$\begin{array}{rcl} x_B + A x_R & = & a_0 \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Forme équivalente du problème :

$$\min \quad z = c_B B^{-1} d - \left(c_B B^{-1} R - c_R\right) x_R$$

$$\begin{array}{rcl} x_B + B^{-1} R x_R & = & B^{-1} d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Soit :

$$\begin{array}{lrcl} \min & z & = & a_{00} - \alpha_0 x_R \\ & x_B + A x_R & = & a_0 \\ & x & \geq & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \min \quad z = a_{00} - [a_{01} \ \dots \ a_{0(n-m)}] x_R \\ x_B + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m(n-m)} \end{bmatrix} x_R = \begin{bmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Supposons qu'il existe une solution de base initiale admissible :

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}d \qquad && \geq 0 \\ x_R &= 0 && \end{aligned}$$

conduisant à une valeur objectif $z = c_B B^{-1} d$.

Supposons qu'il existe une solution de base initiale admissible :

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}d \qquad \geq 0 \\ x_R &= 0 \end{aligned}$$

conduisant à une valeur objectif $z = c_B B^{-1} d$.

Nous définissons le *tableau simplexe* associé à une base B à partir des coefficient de la forme équivalente

$$\begin{array}{c|c|c|} & & x_j, \quad j \in J \quad \text{(variables hors base)} \\ \hline z & a_{00} & a_{01} \; \ldots \; a_{0(n-m)} \\ \hline & a_{10} & \\ x_i, \quad i \in I \ \text{(variables de base)} & \vdots & a_{ij} \\ & a_{m0} & \\ \hline \end{array}$$

- I est l'ensemble des var. de base, x_i avec $i = 1, \ldots, m$ (dimension de x_B)
- J est l'ensemble des var. hors base, x_j avec $j = 1, \ldots, n-m$ (dimension de x_R)

Le tableau fournit une lecture simple des valeurs courantes :

- a_{00} est la valeur courante de la fonction économique,
- a_{i0} est la valeur courante des variables de base, x_i avec $i \in I$.

Le tableau fournit une lecture simple des valeurs courantes :

- a_{00} est la valeur courante de la fonction économique,
- a_{i0} est la valeur courante des variables de base, x_i avec $i \in I$.

3 cas peuvent se présenter :

- absence de solution optimale finie,
- amélioration d'une solution de base admissible,
- obtention d'une solution de base optimale (arrêt de l'algo).

Cas de l'absence de solution optimale finie :

Soit une solution de base admissible, s'il existe $k \in J$ tel que

$$a_{0k} > 0,$$
$$a_{ik} \leq 0, \quad \forall i \in I,$$

la fonction économique z peut être aussi petite que l'on veut. Il n'y a donc pas de solution optimale finie.

Cas de l'absence de solution optimale finie :

Soit une solution de base admissible, s'il existe $k \in J$ tel que

$$\begin{aligned} a_{0k} &> 0, \\ a_{ik} &\leq 0, \quad \forall i \in I, \end{aligned}$$

la fonction économique z peut être aussi petite que l'on veut. Il n'y a donc pas de solution optimale finie.

$$\begin{array}{c|c|ccccccc|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & & & & k & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-9}
z & a_{00} & \times & \ldots & \times & > 0 & \times & \ldots & \times \\
\cline{2-9}
 & & \times & \ldots & \times & \leq 0 & \times & \ldots & \times \\
x_i, \quad i \in I & \geq 0 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\text{(variables de base)} & & \times & \ldots & \times & \leq 0 & \times & \ldots & \times \\
\cline{2-9}
\end{array}$$

Cas d'amélioration d'une solution de base admissible :

Soit une solution de base admissible et supposons que $\forall k \in J$ tel que $a_{0k} > 0$, il existe au moins un indice $i \in I$ pour lequel $a_{ik} > 0$. Définissons l'indice l tel que

$$\frac{a_{l0}}{a_{lk}} = \min_{i \mid a_{ik} > 0} \left(\frac{a_{i0}}{a_{ik}} \right).$$

Si on remplace le vecteur de base associé à la variable x_l par le vecteur hors base associé à la variable x_k, on obtient une nouvelle base admissible avec une meilleure solution.

Cas d'amélioration d'une solution de base admissible :

Soit une solution de base admissible et supposons que $\forall k \in J$ tel que $a_{0k} > 0$, il existe au moins un indice $i \in I$ pour lequel $a_{ik} > 0$. Définissons l'indice l tel que

$$\frac{a_{l0}}{a_{lk}} = \min_{i | a_{ik} > 0} \left(\frac{a_{i0}}{a_{ik}} \right).$$

Si on remplace le vecteur de base associé à la variable x_l par le vecteur hors base associé à la variable x_k, on obtient une nouvelle base admissible avec une meilleure solution.

$$\begin{array}{cc|c|ccccccc|}
 & & & & & & k & & & \\
\cline{3-10}
 & & a_{00} & \times & \ldots & \times & > 0 & \times & \ldots & \times \\
\cline{3-10}
 & & & & & & \vdots & & & \\
 & \leftarrow & & & & & > 0 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & \\
\text{calcul de } \frac{a_{i0}}{a_{ik}} & \leftarrow & \geq 0 & & & & > 0 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & \\
 & \leftarrow & & & & & > 0 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & \\
\cline{3-10}
\end{array}$$

Cas de l'obtention d'une solution optimale : (arrêt de l'algo)

Soit une solution de base admissible. Cette solution est optimale si $\forall j \in J$ on a $a_{0j} \leq 0$.

Cas de l'obtention d'une solution optimale : (arrêt de l'algo)

Soit une solution de base admissible. Cette solution est optimale si $\forall j \in J$ on a $a_{0j} \leq 0$.

a_{00}	≤ 0
≥ 0	