Matrices et déterminants

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lorsqu'elles ont un sens, calculer les expressions $A+B$, AB, BA, ${}^tBA$, $B+AB$, $A+AB$.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} .$$

Trouver les expressions de A^n, B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Montrer que $A^2 = A + 2I$.

3) En déduire A^{-1}.

Exercice 4 Vrai ou faux ?

Soient A et B deux matrices carrées de dimension $n \times n$.

1) Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.

2) Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

3) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

4) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

5) $AB + BA = 0$ ssi $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

6) Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible.

Exercice 5

Soient les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les puissances successives de J.

2) Que peut-on dire de $I - J^4$? En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6
Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Pour chacun des systèmes linéaires suivants, répondre aux questions ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} -4x - 4y - z = -15 \\ -2x - y - z = -14 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2)\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ z - 14x + 6y = 1 \\ 5y + z - 11x = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3)\begin{cases} -2x - 2y - 3z = 2 \\ 4y + 3z = 5 \\ -1 - y - x = 1 \end{cases}$$

1) Mettre le système sous forme matricielle.
2) Appliquer la méthode de Gauss Jordan pour inverser la matrice du système.
3) Résoudre le système.

Exercice 8
1) Montrer que le produit de deux matrices diagonales de dimension $n \times n$ est une matrice diagonale.
2) Soit D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -21 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 36 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x - y - z, y, z) \end{array}.$$

On note $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Ecrire la matrice $A_0 := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $\mathcal{B}'_3 = (u_1, u_2, u_3)$ où

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1,0) \\ u_2 &= (1,0,1) \\ u_3 &= (1,0,0) \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{B}'_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Ecrire la matrice $A_1 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_3,\mathcal{B}_3}(f)$.
5) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'_3$. Calculer la matrice de $A_2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_3,\mathcal{B}'_3}(f)$.

Exercice 11
On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et on introduit sa base canonique : $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + (1-X)P' \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{1, 1-X, 1+X^2, 1-X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Calculer les matrices $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}_{can}}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}}(f)$.

Exercice 12

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 13

Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ de plusieurs façons :

1) En développant suivant la première ligne.
2) En développant suivant la première colonne.
3) En remarquant que la troisième ligne s'écrit $(0,1,1) + (1,0,0)$.
4) En faisant des opérations sur les lignes.

Exercice 14

Pour chaque des systèmes d'équations suivants, répondre aux questions ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcl} -6x+y+z & = & -5 \\ 3x+y-z & = & -8 \\ -x-2y+z & = & 16 \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+z & = & 3 \\ x-y+2z & = & 1 \\ 2y+z & = & 0 \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_3) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+4y+z & = & 2 \\ 3x-z & = & 3 \\ 2x+2y+z & = & 4 \end{array} \right.$$

1) A l'aide du calcul de déterminants, que peut-on dire sur le nombre de solutions du système ?
2) Résoudre ces systèmes.

Exercice 15

Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0\,.$$

Exercice 16

Soient a, b, c trois réels. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 17

Déterminer les réels t pour lesquels la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Exercice 18

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Exercice 19

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1) Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

2) Pour chacun des λ obtenus à la question 1, choisir un vecteur $v_\lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que

$$f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda \, .$$

3) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 20 Déterminant de Vandermonde

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On considère le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \, .$$

Montrer que

$$V = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} \, .$$

En déduire la valeur de V.