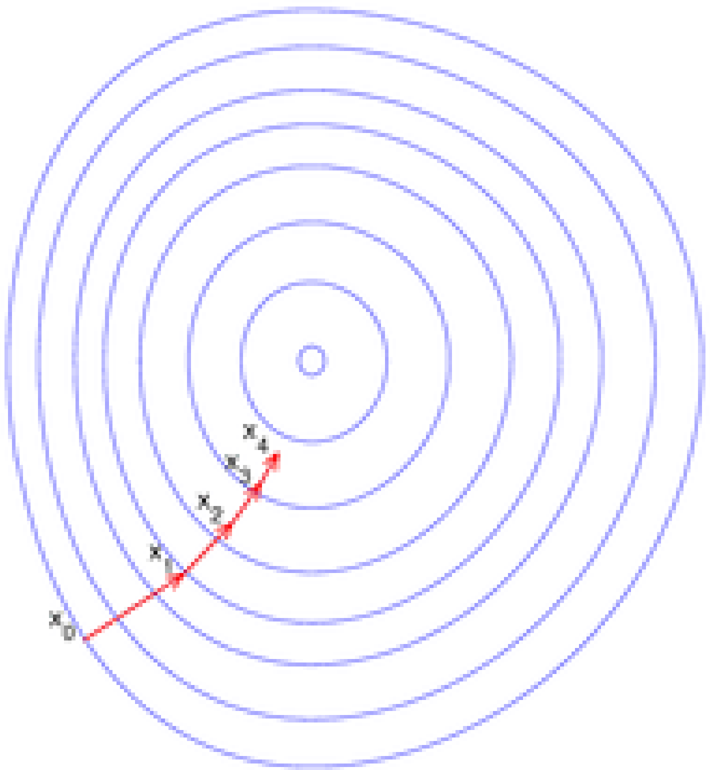


Algorithmes de minimisation

De nombreux problèmes nécessitent de minimiser une fonction :

-Minimiser la distance (XHI2) entre des points de mesures et une courbe

-Trouver l’ état d’équilibre d’un système mécanique (Minimiser E_{pot})

-Trouver l’état d’équilibre d’un gaz, d’un mélange (Maximiser Entropie)

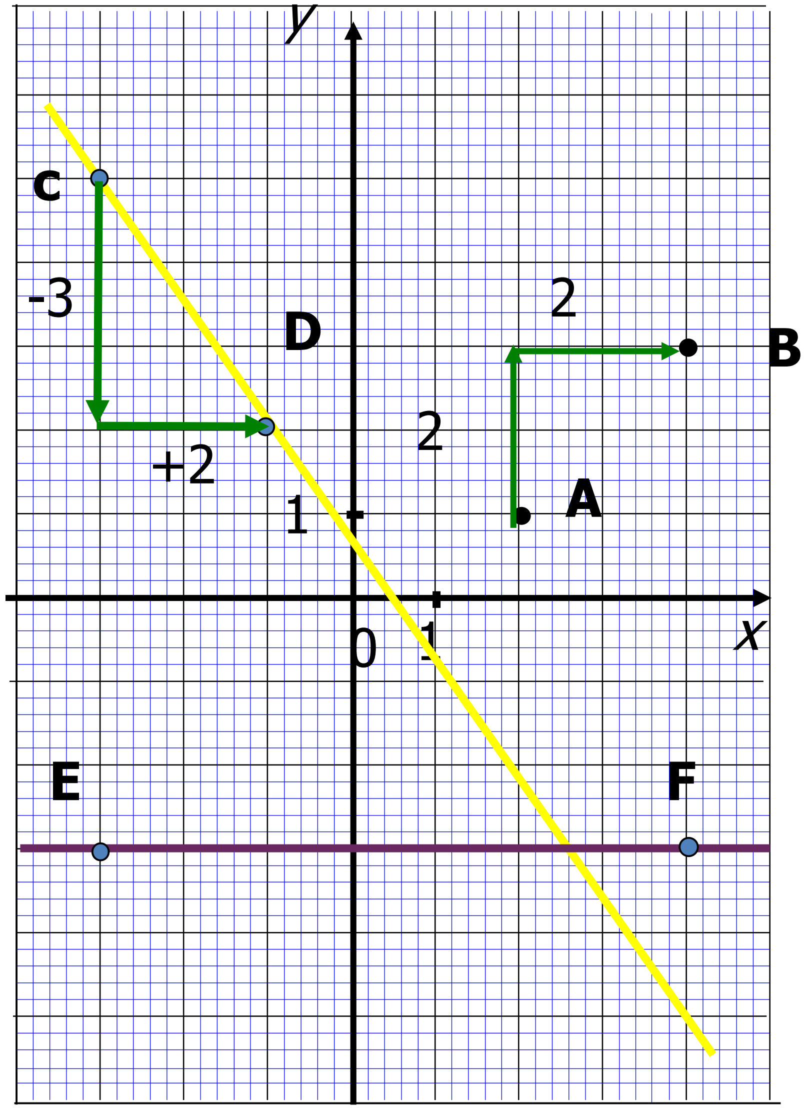
-Tous problèmes d’optimisation (minimiser le coût , certaine fonctions etc…)

Tous ces problèmes entrent dans une grande catégorie : L’optimisation

Remarque : Maximiser F(x) = Minimiser –F(x)
Donc minimiser et maximiser sont en fait le même problème !

Optimisation non linéaire sans contraintes

Coefficient directeur d'une droite



a) Tracez la droite (AB) passant par les points A(2;1) et B(4; 3)

b) Déterminez le coefficient directeur de la droite (AB)

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{2}{2} = 1$$

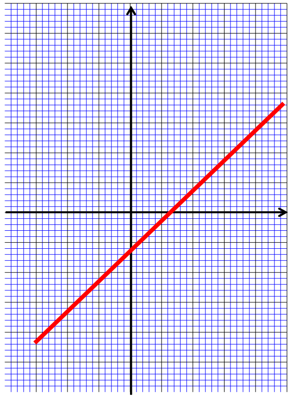
d) Déterminez le coefficient directeur de la droite (CD)

$$a = \frac{-3}{+2} = -1{,}5$$

e) Déterminez le coefficient directeur de la droite (EF)

a = 0

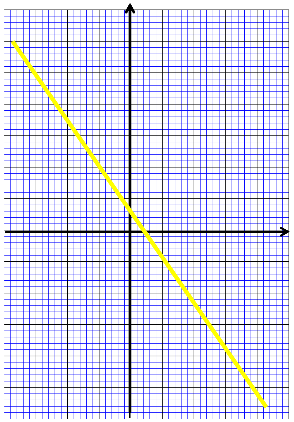
SENS DE VARIATION



Droite (AB)

a = 1

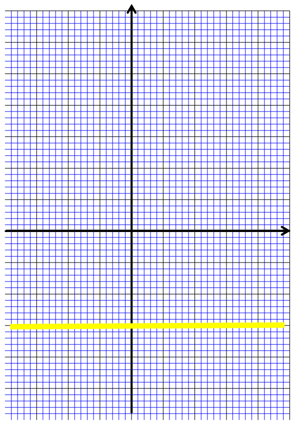
x	-4	+5
Signe de a	+	
Sens de variation		



Droite (CD)

a = -1,5

x	-4	+5
Signe de a	-	
Sens de variation		



Droite (EF)

a=0

x	-4	+5
Signe de a	**0**	
Sens de variation		

Interprétation:

Le sens de variation d'une droite dépend du signe de son coefficient directeur.

Si a > 0:

La droite est croissante

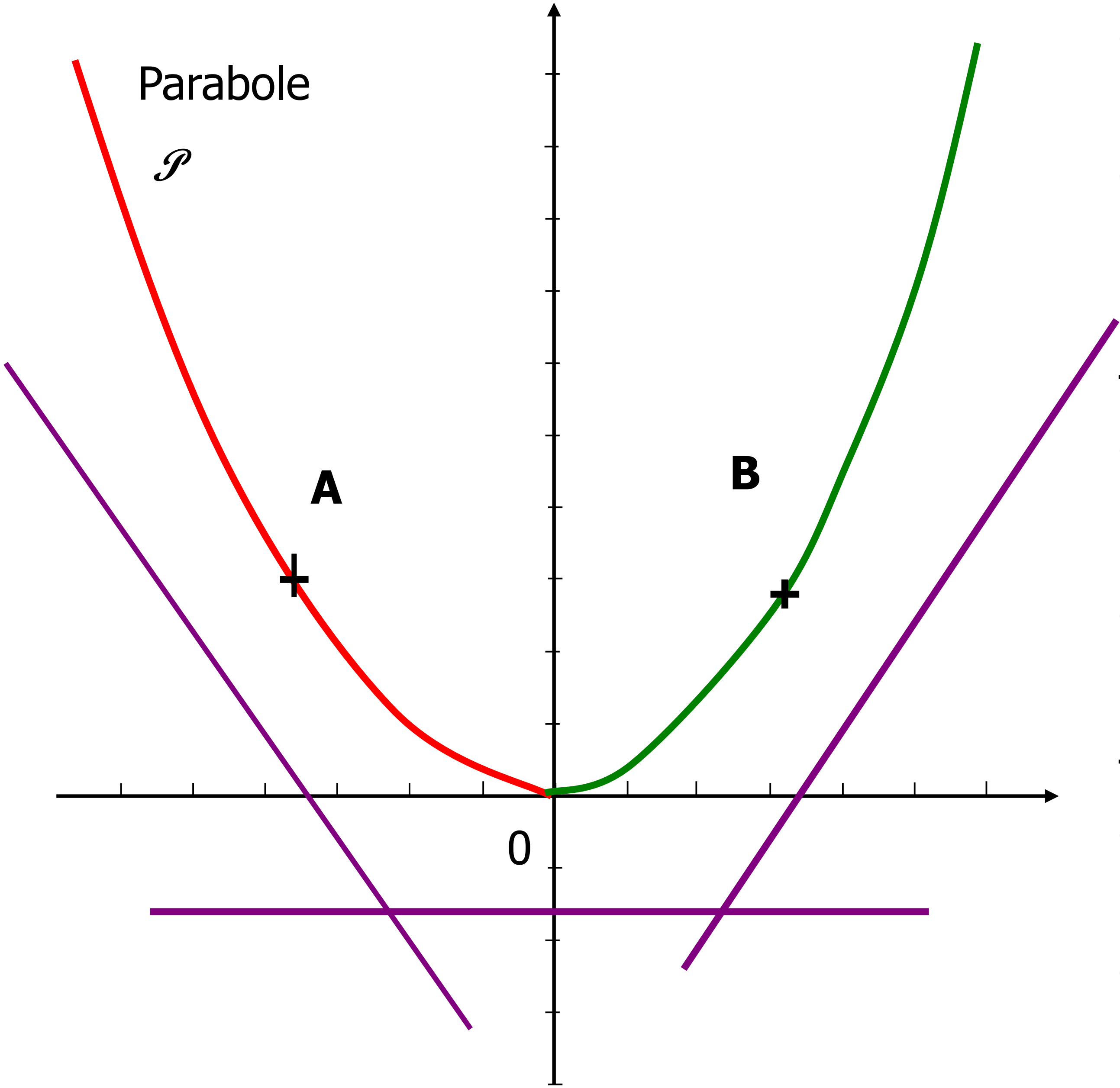
Si a < 0:

La droite est décroissante

Si a = 0 :

La droite est constante

TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE



Tracez la tangente $\mathbf{D_1}$ à la courbe en **A**.

Déterminez le signe du coefficient directeur de la tangente $\mathbf{D_1}$:

a<0

Tracez la tangente $\mathbf{D_2}$ à la courbe en **B**.

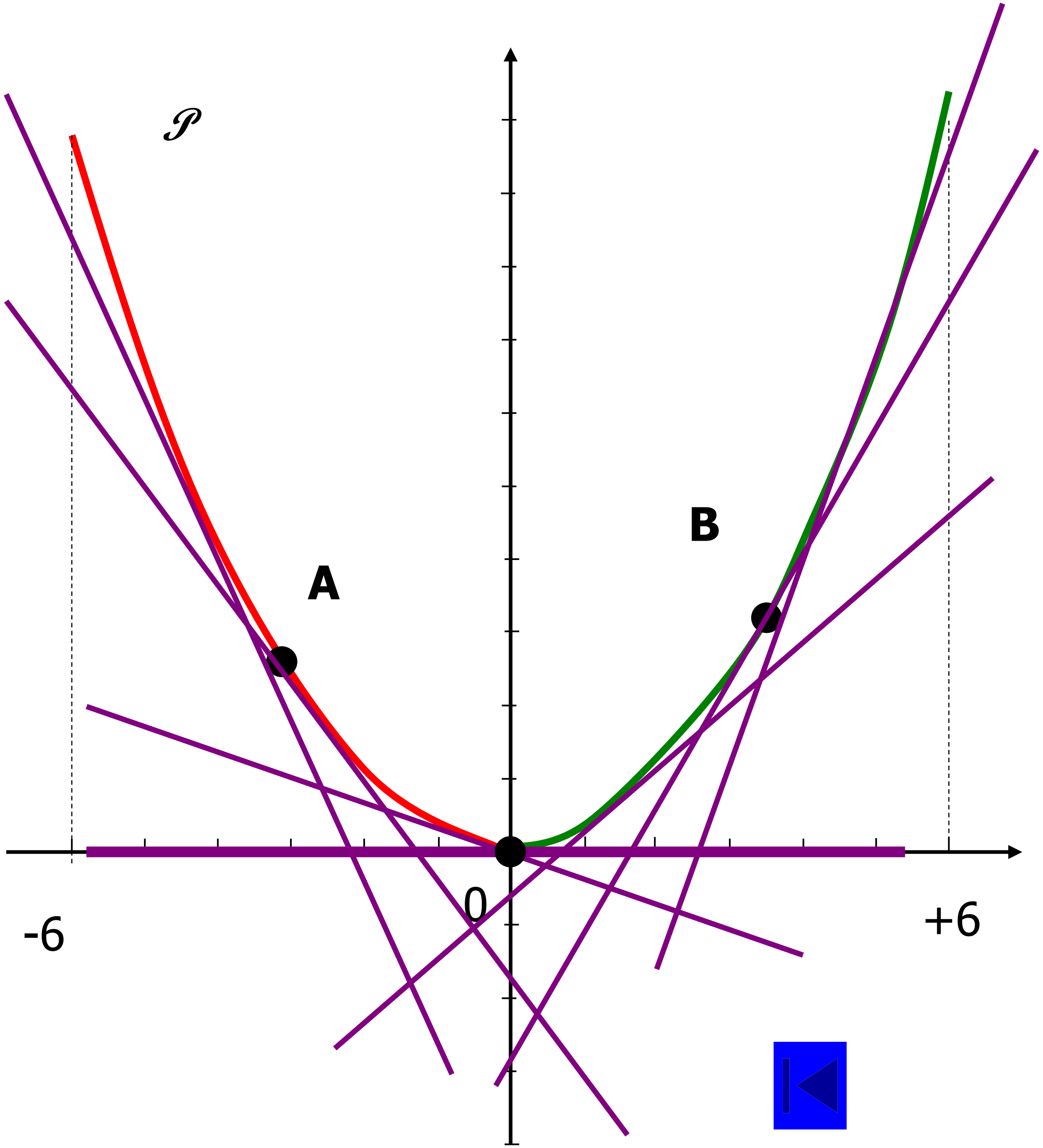
Déterminez le signe du coefficient directeur de la tangente $\mathbf{D_2}$:

a>0

Tracez la tangente $\mathbf{D_3}$ à la courbe en 0

Déterminez le signe du coefficient directeur de la tangente $\mathbf{D_3}$

a = 0



Sur l'intervalle I=[-6;0[, que peut-on dire du coefficient directeur ***a*** des tangentes à la courbe 𝒫?

Sur I=[-6;0[***a est toujours <0***

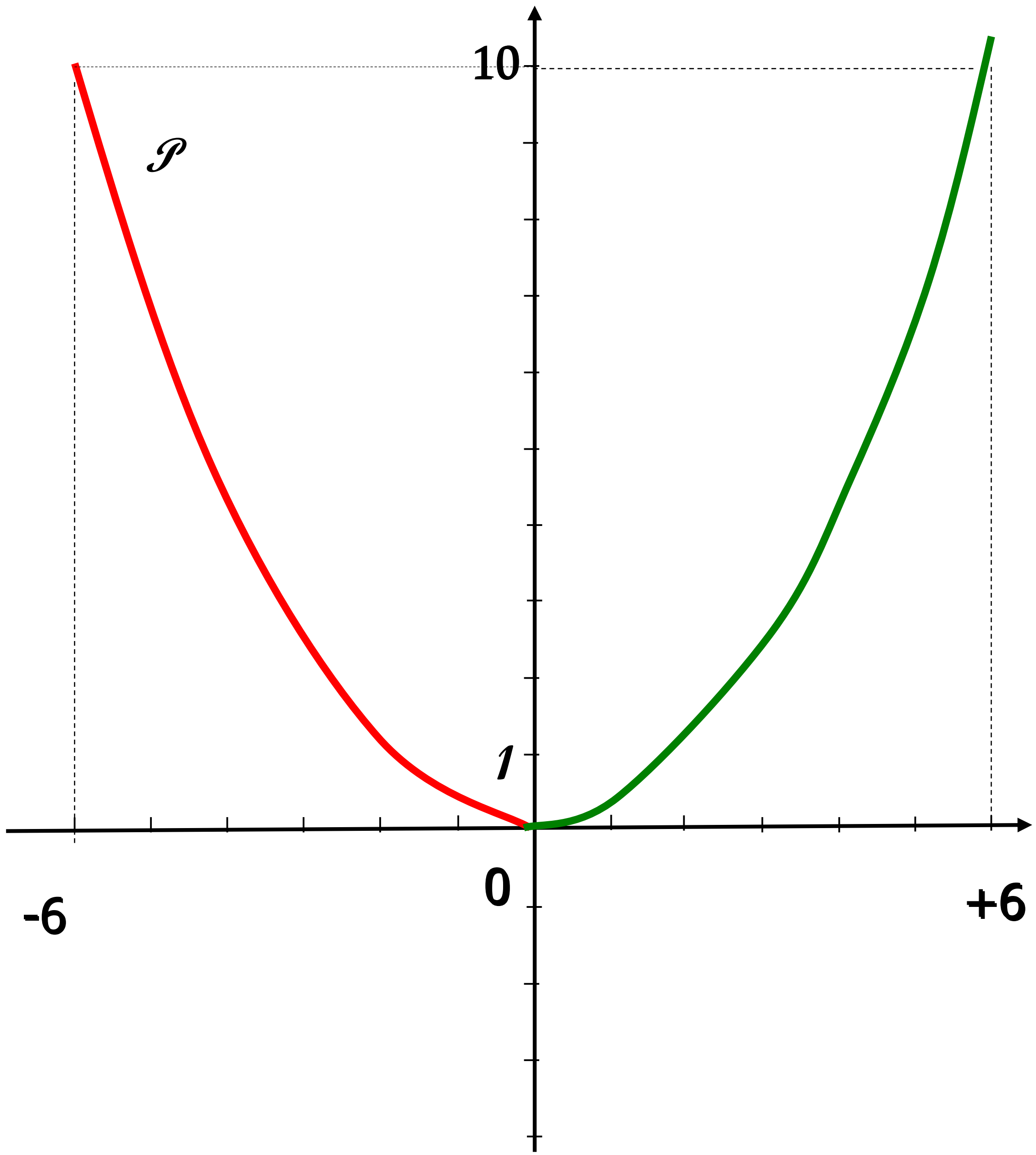
Sur l'intervalle I=]0;6], que peut-on dire du coefficient directeur ***a*** des tangentes à la courbe 𝒫 ?

Sur I =]0;6] ***a est toujours > 0***

Pour ***x = 0*** ,que peut-on dire du coefficient directeur ***a*** de la tangente à la courbe 𝒫 ?

Pour x = 0, ***a = 0***

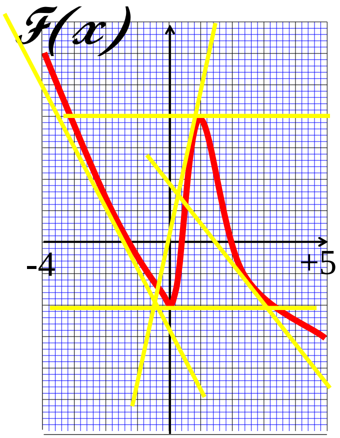
SENS DE VARIATION



Complétez le tableau de variation de la fonction *f(x) représentée par la* parabole 𝒫 ?

x	
Signe du coefficient directeur des tangentes à la courbe 𝒫	- 0 +
f(x)	↘ ↗

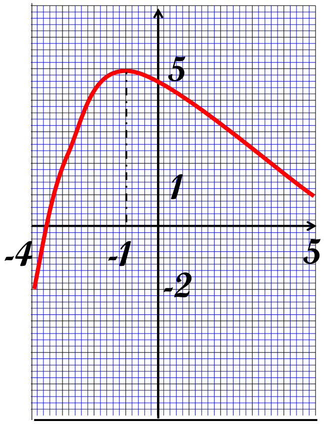
INVESTIGATION (Complétez)



x	-4		0		1		5
Signe de a		-	0	+	0	-	
$f(x)$	6	↘	-2	↗	4	↘	-3

1) On savait déjà faire!

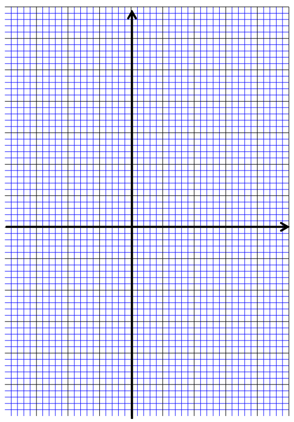
On donne la courbe représentative d'une fonction *f*, puis on en déduit le tableau de variation



x	-4		-1		+5
Signe de a		+	0	-	
$f(x)$	-2	↗	5	↘	1

2) On sait faire maintenant!

On connaît le tableau de variation, on en déduit la courbe représentative de la fonction ***f*.**



x	-4	5
Signe de a		
$f(x)$		

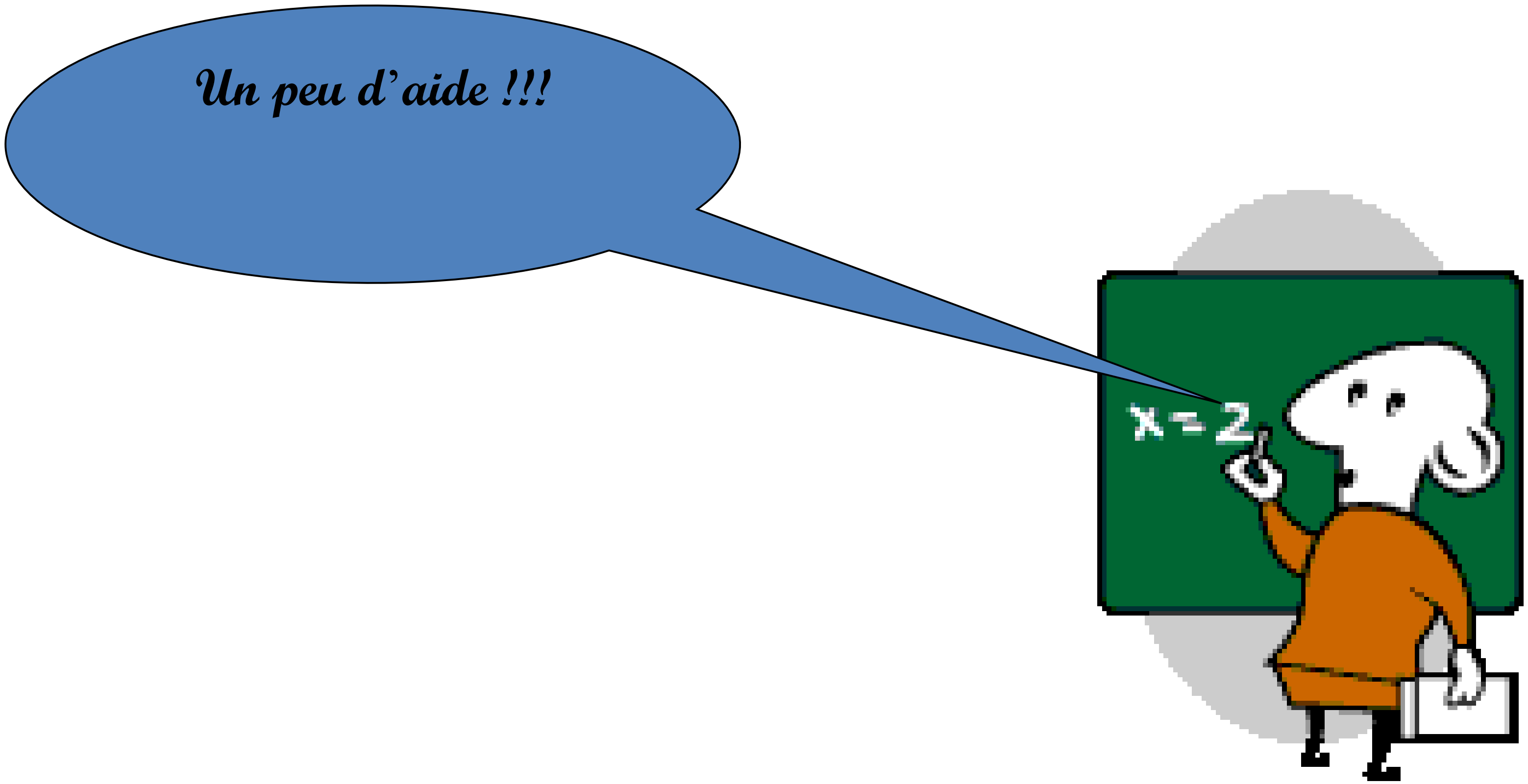
3) On ne sait pas encore faire!

On donne une fonction, par exemple ***f(x) = x² , et on veut tracer sa courbe représentative***

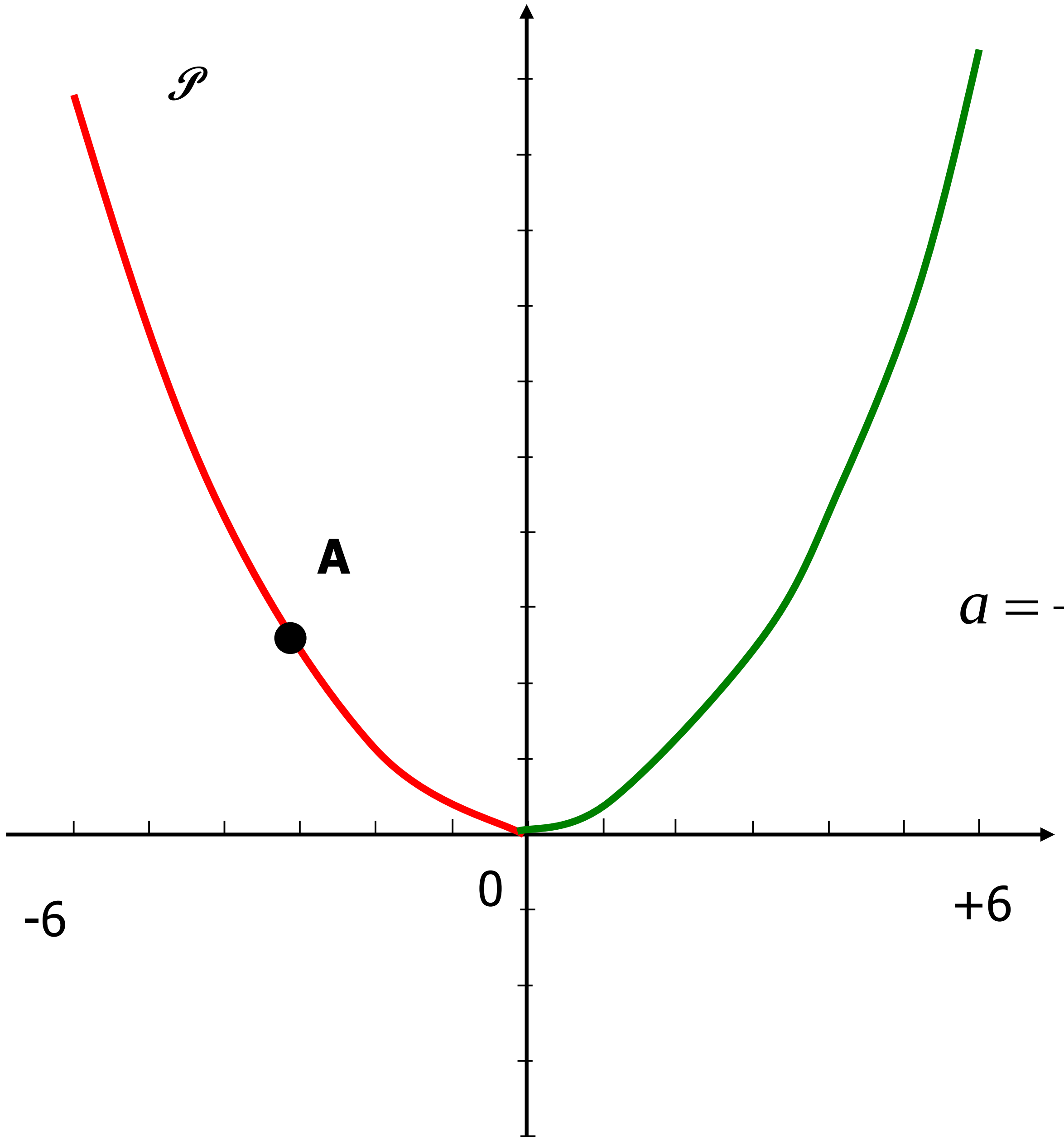
INVESTIGATION

Il est en effet plus facile de tracer une courbe à partir d’un tableau de variation qui détermine sur quel intervalle la fonction est décroissante, constante ou croissante.

Mais comment déterminer le signe du coefficient directeur sur un intervalle donné???



INVESTIGATION



Ce que l'on sait:

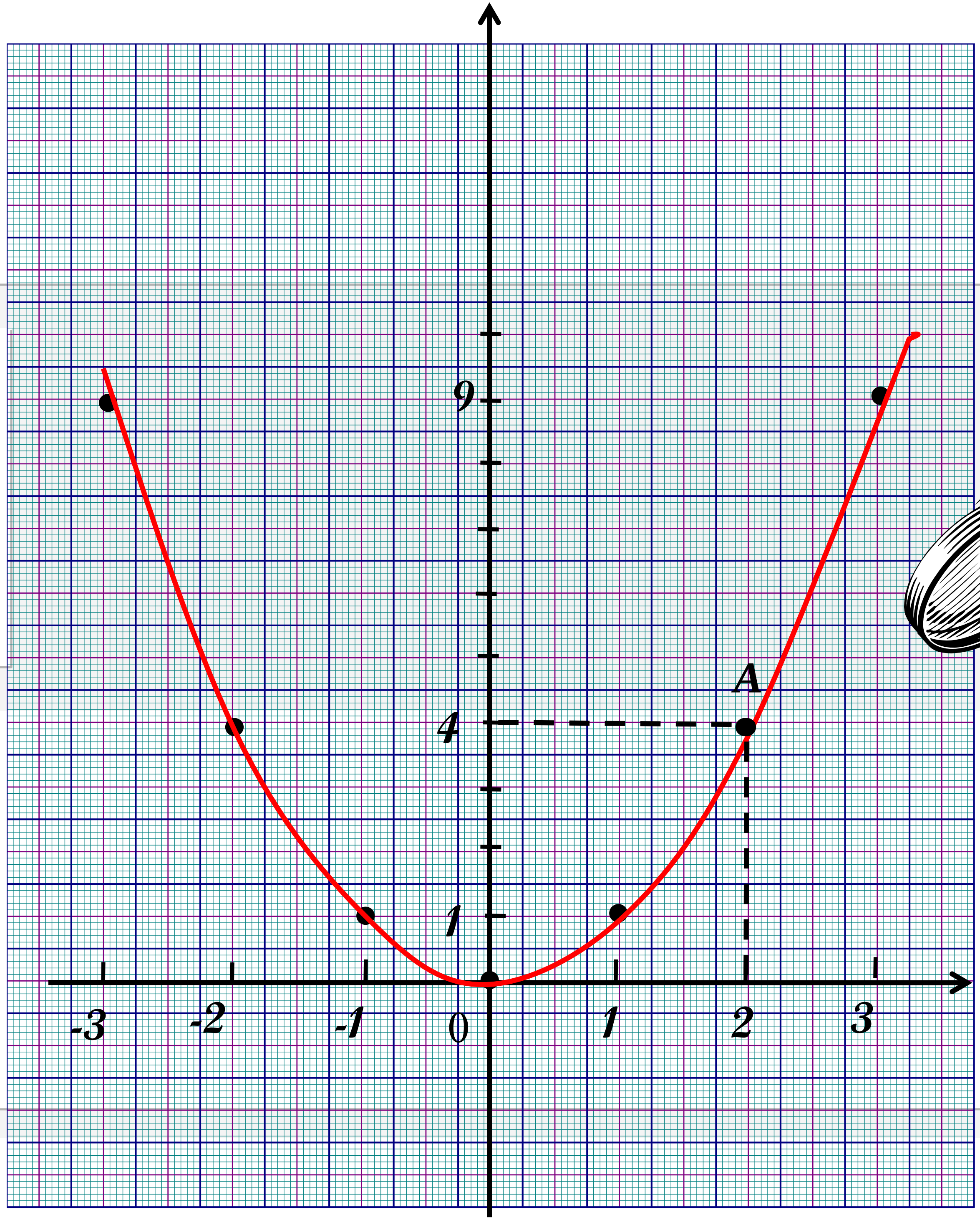
☞ Une tangente est une droite

☞ Pour tracer une droite 2 points suffisent

☞ Il est facile de calculer le coefficient directeur d'une droite :

$$a = \frac{f(x_A) - f(x_{A'})}{x_A - x_{A'}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

1



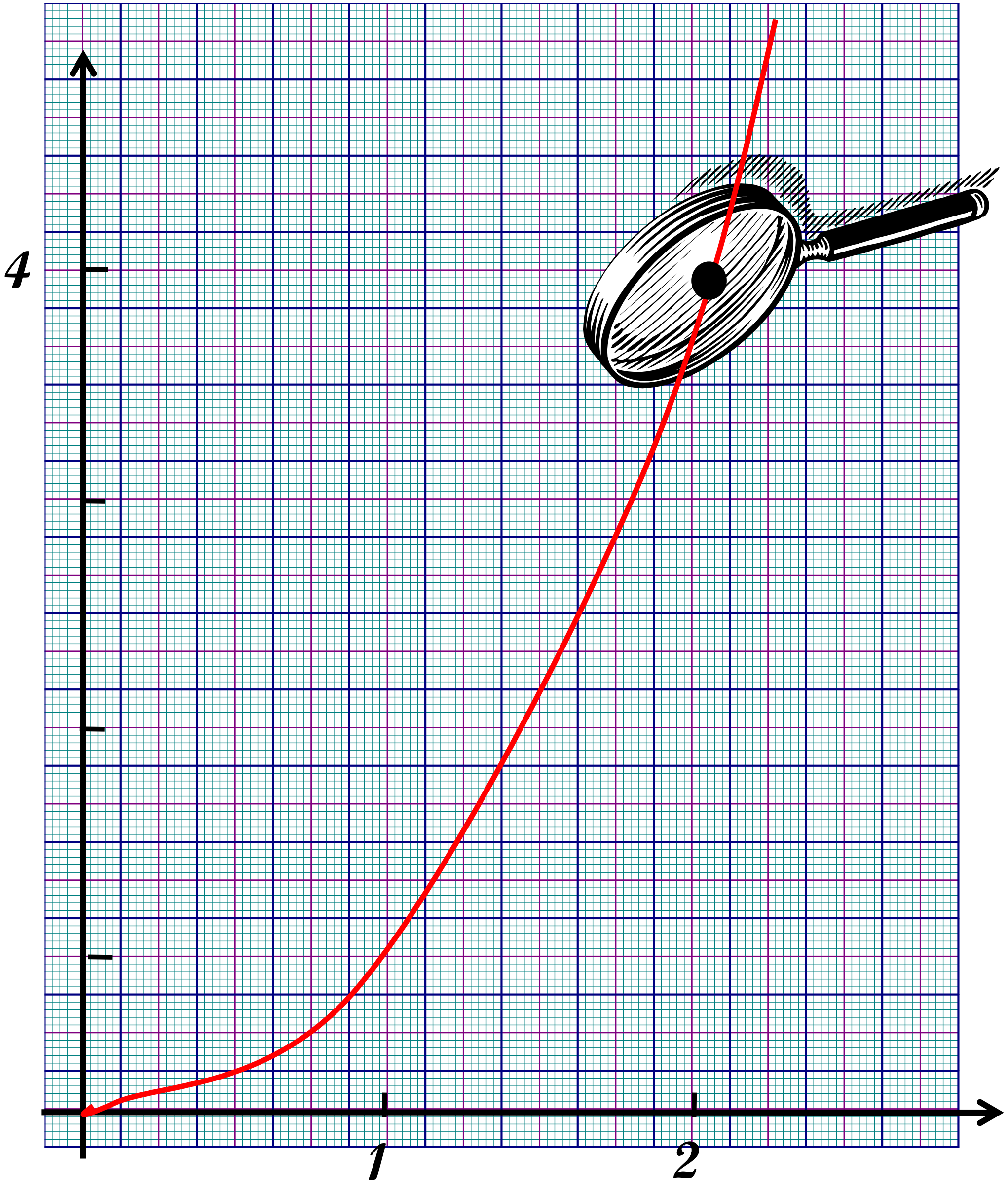
Tracer la tangente (de manière précise) à la parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction $f(x) = x^2$ au point ***A*** de coordonnées (2;4)

f(x)=x²

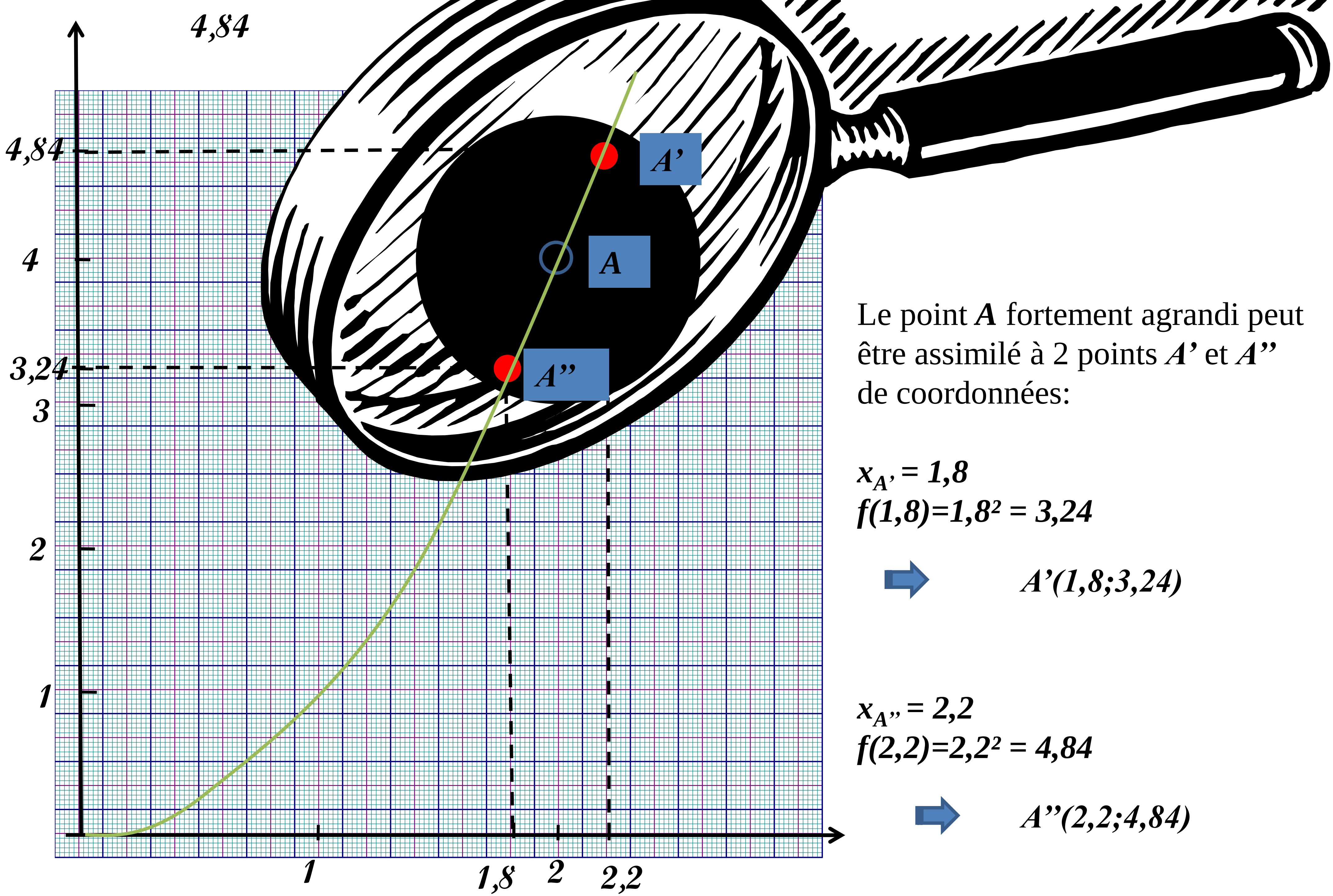
Donc si $x=2$

$f(2)= 2^2=4$

A(2;4)



Prenons une loupe et agrandissons le point ***A*** de coordonnées (2;4)



Le point ***A*** fortement agrandi peut être assimilé à 2 points ***A'*** et ***A''*** de coordonnées:

$x_{A'} = 1,8$

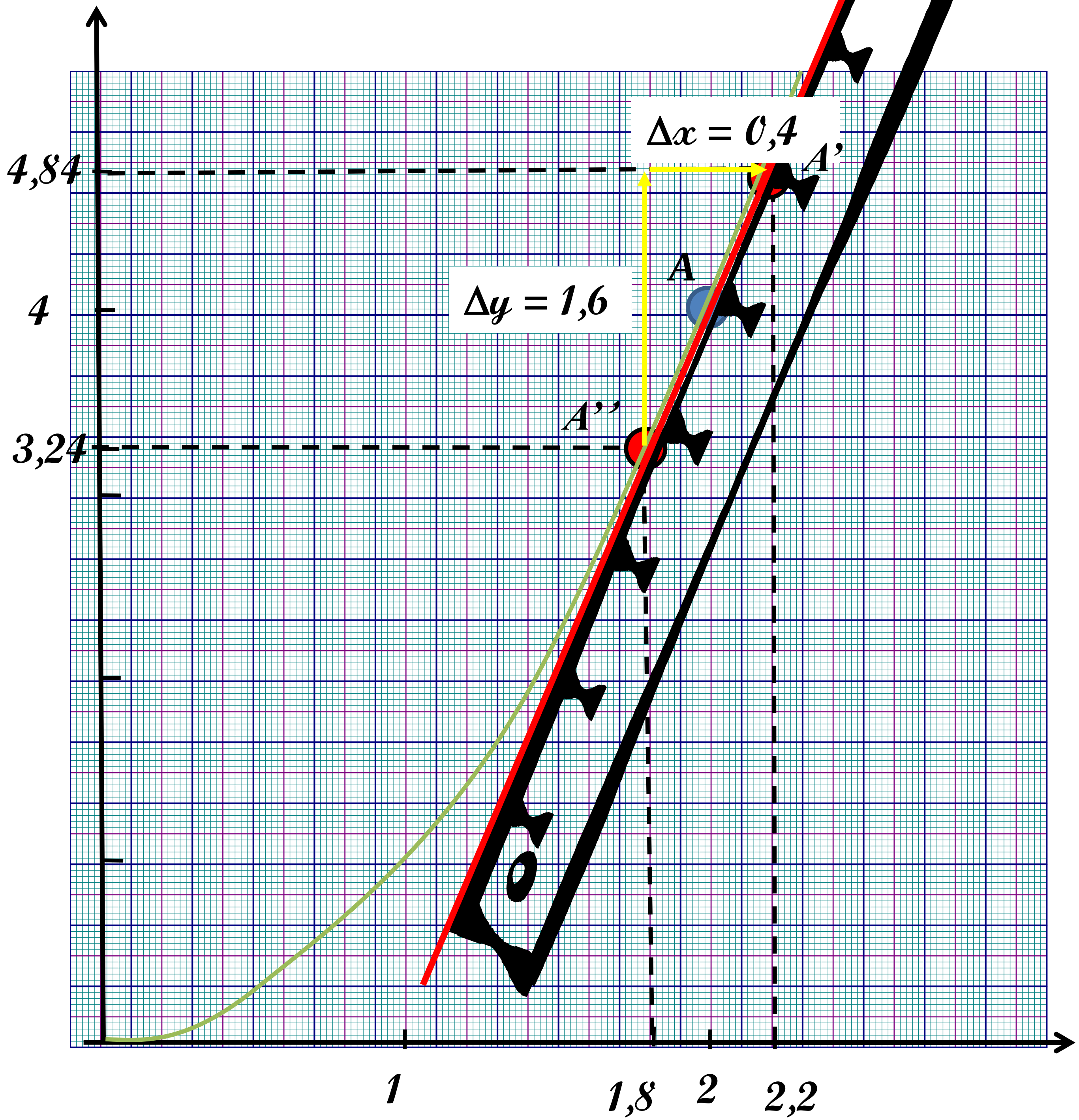
$f(1,8)=1,8^2 = 3,24$

A'(1,8;3,24)

$x_{A''} = 2,2$

$f(2,2)=2,2^2 = 4,84$

A''(2,2;4,84)



Calcul du coefficient directeur de la tangente en x=2

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$$

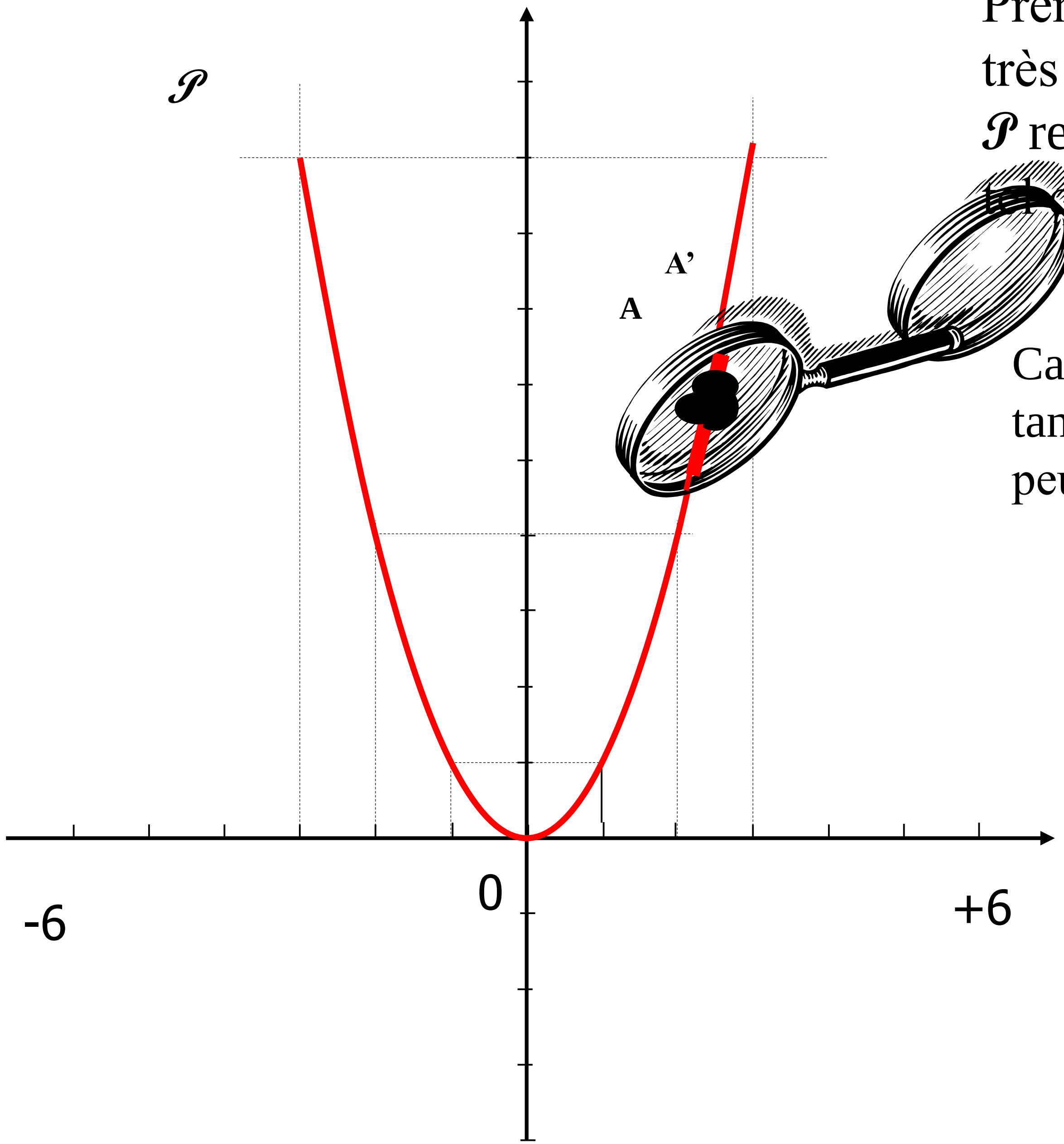
Le coefficient directeur de la tangente à la Parabole représentative de la fonction $f(x)= x^2$ au point d'abscisse $x = 2$ est $\boldsymbol{a} = 4$

Ce nombre est aussi appelé **nombre dérivé** en x =2 noté ***f'(2)= 4.***

La fonction qui permet de trouver en tout point de la courbe le coefficient directeur de la tangente (donc le nombre dérivé) est appelée fonction dérivée notée ***f'***

De la même manière que précédemment , trouvez la fonction dérivée ***f'*** de la fonction ***f(x) = x²***

FONCTION DERIVEE:



Prenons 2 points quelconques A et A’ très proches l’un de l’autre de la parabole 𝒫 représentative de la fonction $f(x) = x^2$ tel que A(x;y) et A’(x’;y’).

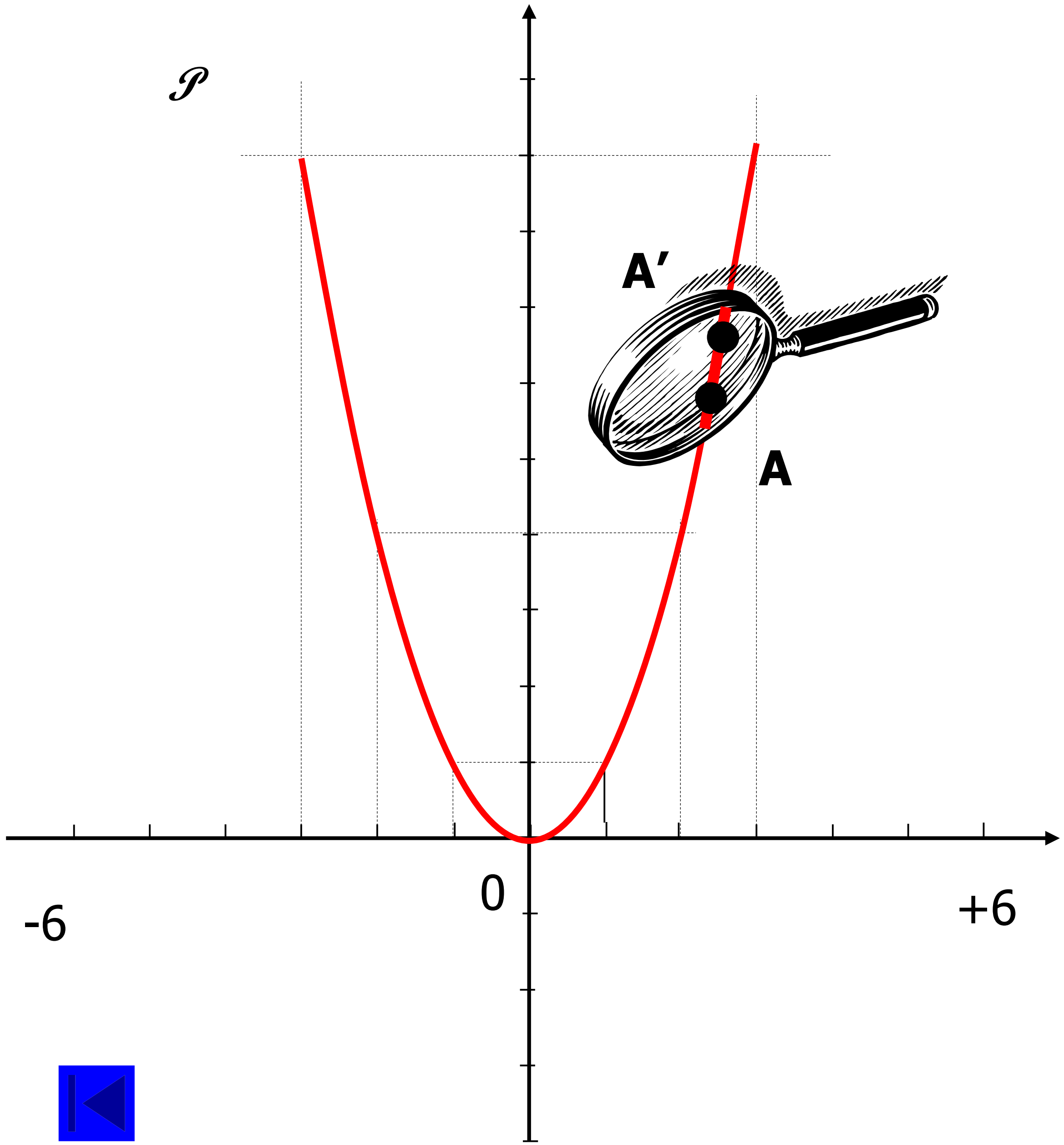
Calculez le coefficient directeur de la tangente en A qui après agrandissement peut être comparé aux 2 points A et A’

$$a = \frac{f(x_A) - f(x_{A'})}{x_A - x_{A'}} = \frac{x_A^2 - x_{A'}^2}{x_A - x_{A'}}$$

$$a = \frac{\cancel{(x_A - x_{A'})}(x_A + x_{A'})}{\cancel{x_A - x_{A'}}}$$

$$a = x_A + x_{A'}$$

FONCTION DERIVEE



$$a = x_A + x_{A'}$$

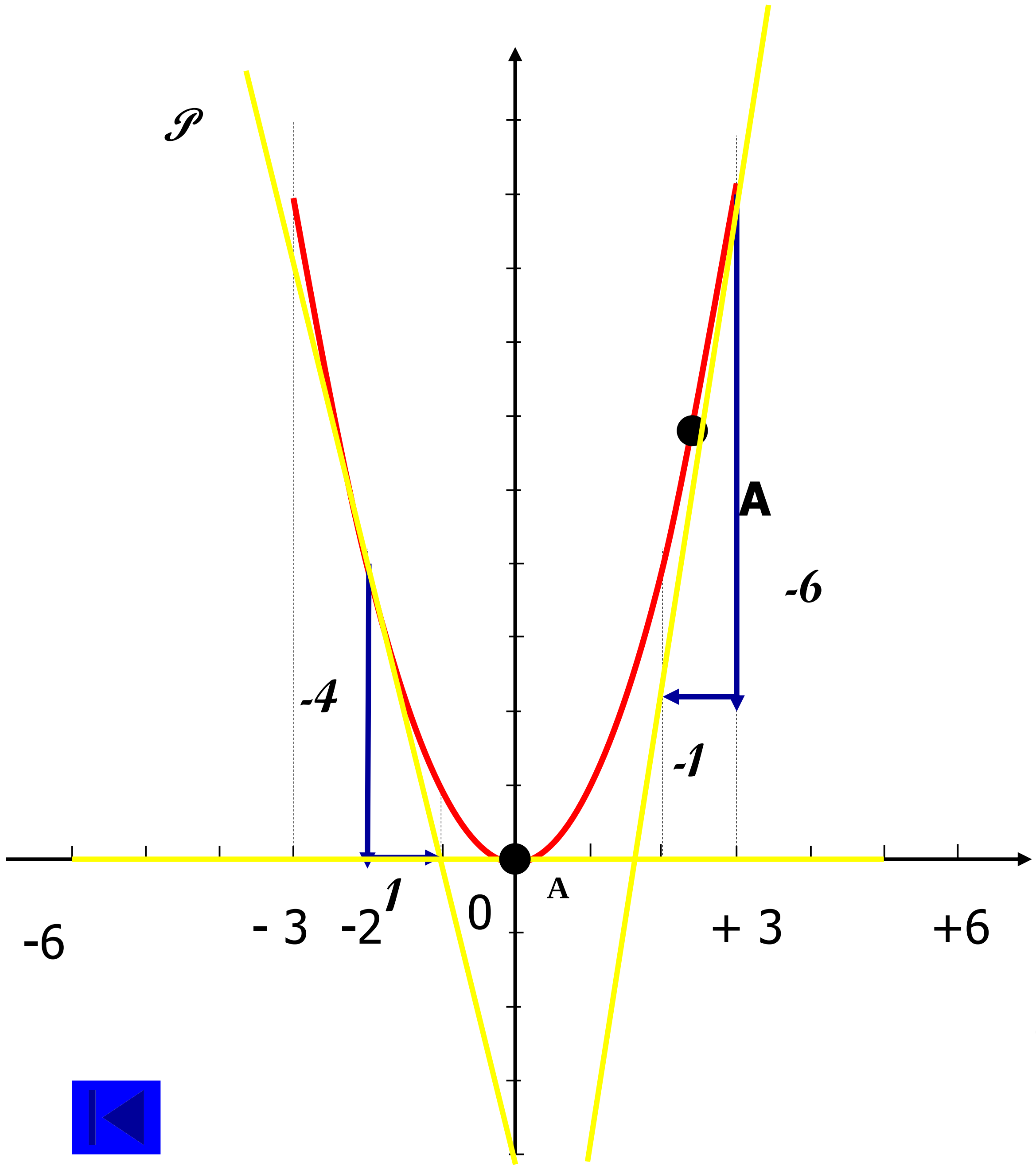
Les points A et A' étant très proches l'un de l'autre peuvent être assimilés a un seul et même point

Soit:

$$a = x_A + x_A = 2\,x_A$$

Cette expression qui permet de calculer le coefficient directeur en tout point de la courbe $\mathscr{P}$ représentative de la fonction *f(x) = x² est appelée fonction dérivée f' notée f'(x) = 2x*

NOMBRE DERIVEE



On vient de définir la fonction dérivée de *f: on la note f'*

$$f'(x) = 2x$$

Calculez le coefficient directeur de la tangente à la courbe 𝒫 au point **A** d'abscisse x=3

a = *f'(3)= 2 × 3 = 6*

Ce nombre est aussi appelé nombre dérivé

Calculez le nombre dérivé, *f'(-2)* puis tracez la tangente à la courbe 𝒫 au point A d'abscisse x=-2

$$f'(-2) = 2\times -2 = -4$$

Vérifiez que la tangente à 𝒫 en x = 0 est constante·

$$f'(x) = 2\times 0 = 0$$

FONCTION DERIVEE ET SENS DE VARIATION

Comment exploiter la fonction dérivée *f'* pour connaître le sens de variation de la fonction *f* sur I=[-3;+3] ???

f(x)= x^2 alors f'(x) = 2x

Le sens de variation dépend du signe de f'(x).

ETUDE DU SIGNE DE f'

☞ ***f'(x) = 0 soit 2x = 0 pour x = 0***

☞ ***f'(x) < 0 soit 2x < 0 pour x < 0***

☞ ***f'(x) > 0 soit 2x > 0 pour x > 0***

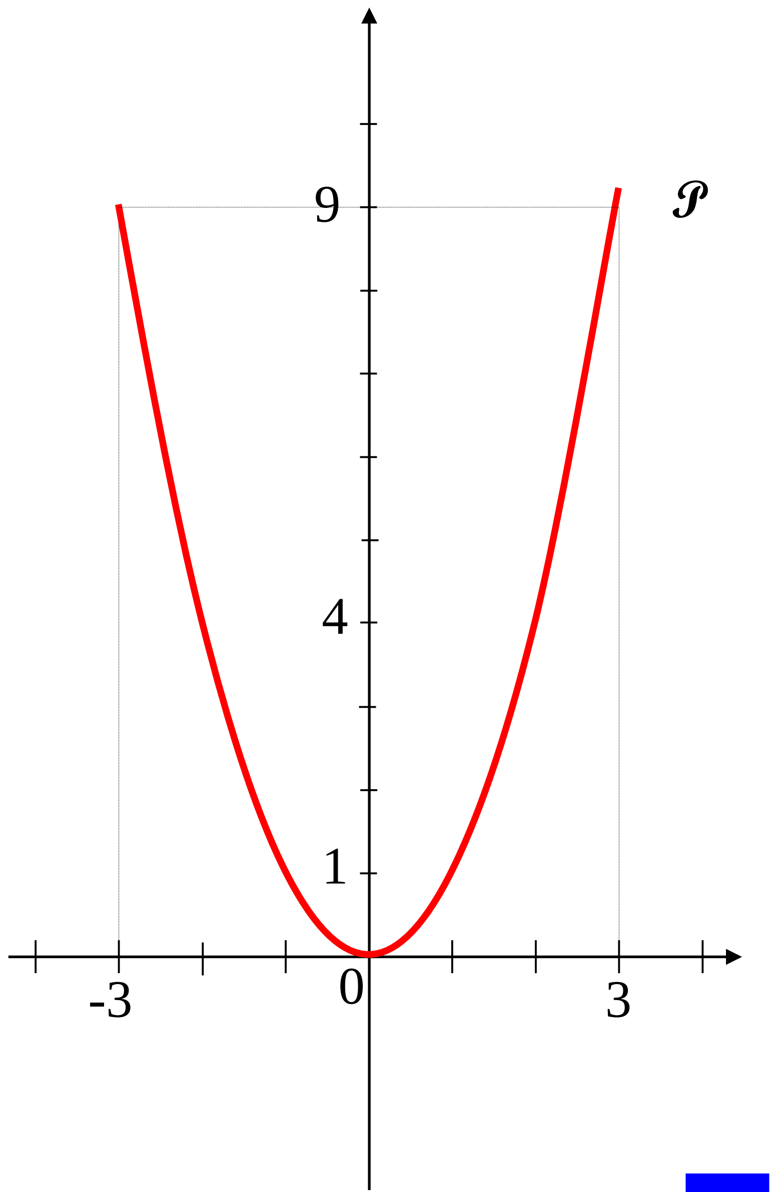
Tableau de variation

x	-3		0		+3
Signe de f'(x)		-	0	+	
f(x)	↘			↗	

f(-3)= 9

f(0)= 0

f(3)= 9



FONCTIONS DERIVEES

Le tableau qui suit donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles

f(x)	f'(x)
a (constante)	*0*
x	*1*
x^n	nx^{n-1}
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$ (x≠0)	$\frac{-1}{x^2}$
ax^n	anx^{n-1}
ax	a
$\frac{a}{x}$ (x≠0)	$\frac{-a}{x^2}$

Exemples

f(x)	f'(x)
3	O
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
$2x^2$	$4x$
$3x^2$	$6x$
$4x^3$	$12x^2$
$3x$	3
$\frac{2}{x}$	$\frac{-2}{x^2}$
$\frac{-3}{x}$	$\frac{3}{x^2}$

Conditions d’optimalité

Fonctions à une variable

- min f(x), $x \in$ ir

Définitions :

- x* est un maximum local de f s'il existe a > 0 tel que $f(x^*) \geq f(x)$ pour tout $x \in]x^*-a,x^*+a[$
- x* est un minimum local de f s'il existe a > 0 tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in]x^*-a,x^*+a[$
- L'intervalle $]x^*-a,x^*+a[$ est appelé un voisinage de x*

Fonctions à une variable

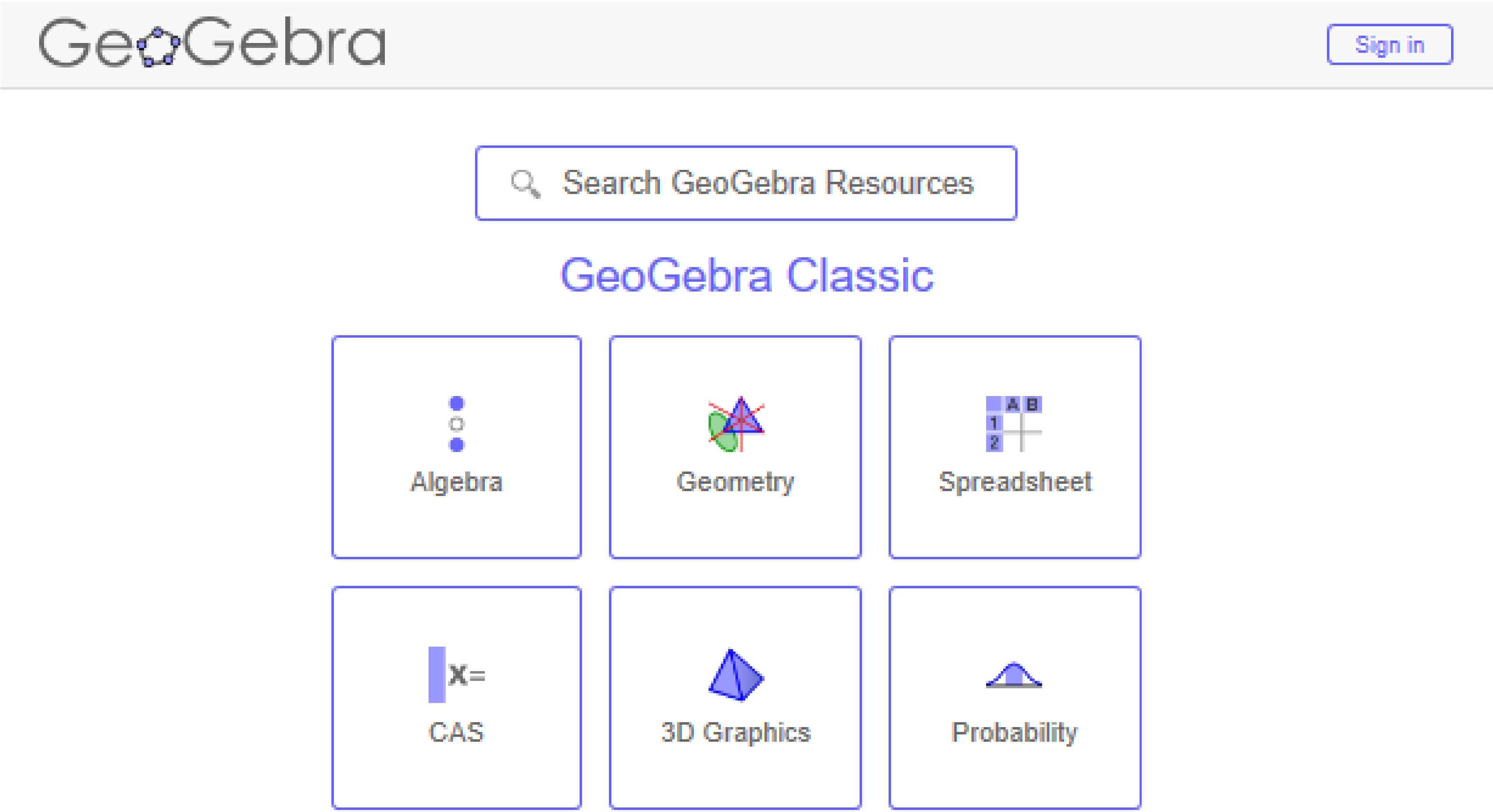
Définitions :

- **x^* est un maximum local strict de f s'il existe $a > 0$ tel que $f(x^*) > f(x)$ pour tout $x \in]x^*-a,x^*+a[$**
- **x^* est un minimum local strict de f s'il existe $a > 0$ tel que $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in]x^*-a,x^*+a[$**

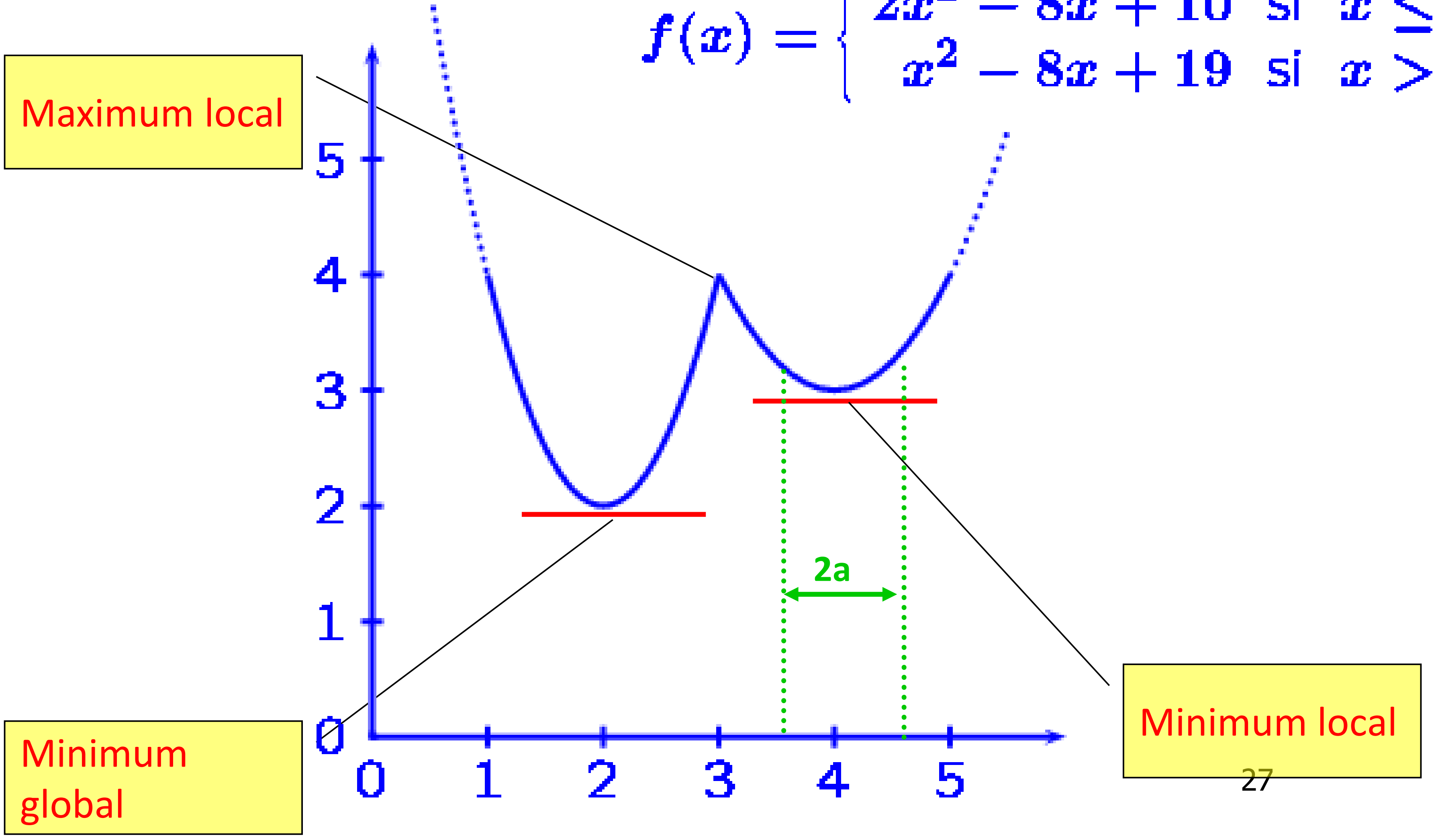
Fonctions à une variable

Définitions :

- **x^* est un maximum global de f si $f(x^*) \geq f(x)$ pour tout $x \in$ ir**
- **x^* est un minimum global de f si $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in$ ir**
- **Un extremum est un minimum ou un maximum.**


GeoGebra
Sign in
Search GeoGebra Resources
GeoGebra Classic
Algebra
Geometry
Spreadsheet
CAS
3D Graphics
Probability

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 10 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 19 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



Fonctions à une variable

Définition :

•Un point x où la tangente est horizontale, c'est-à-dire tel que f'(x)=0, est appelé un point critique ou point stationnaire.

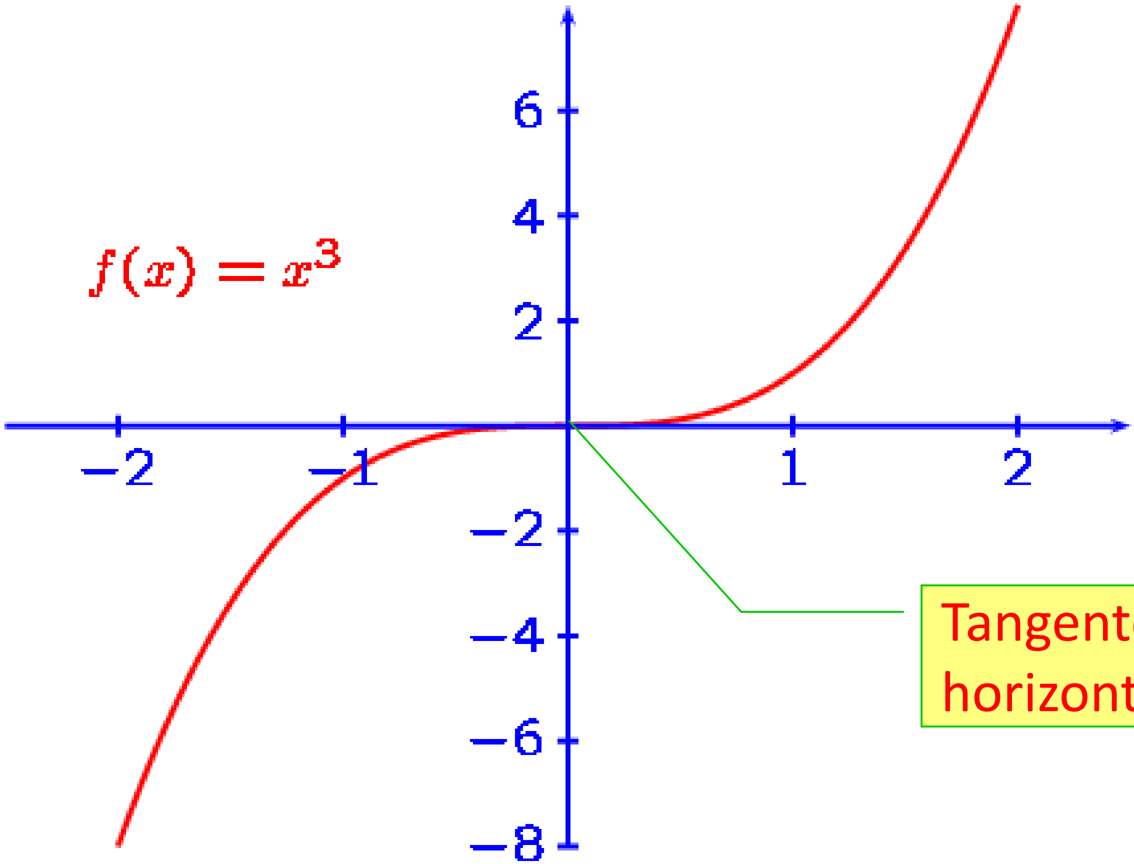
Théorème de Fermat :

•Si une fonction continue f possède un extremum local en x*, et si f'(x*) existe, alors
 f '(x*) = 0.

Fonctions à une variable

- La condition $f'(x^*) = 0$ est une condition nécessaire d'optimalité pour une fonction différentiable.
- Attention : ce n'est pas une condition suffisante.
- Rappel: Si P $\Rightarrow$ Q, alors P est suffisante et Q est nécessaire.
- x^* optimal $\Rightarrow f'(x^*) = 0$

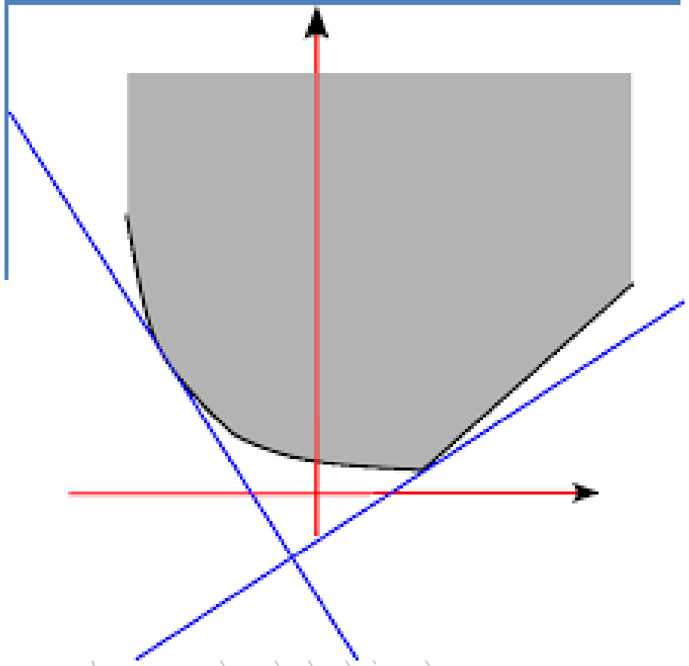
Fonctions à une variable



Tangente horizontale

mais pas un maximum, ni un minimum…

Fonctions à une variable



Test de premier ordre :

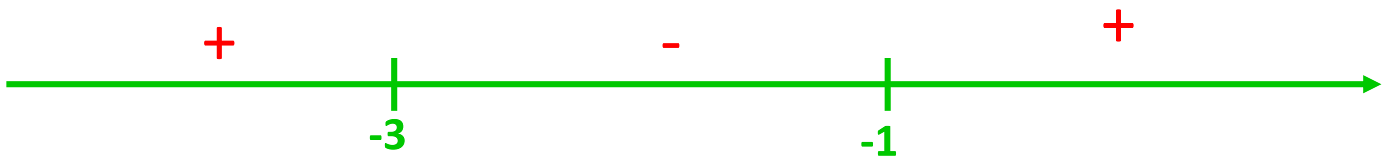
- **Soit une fonction différentiable f, et x* un point critique. S'il existe a > 0 tel que**
  - $f'(x) > 0$ si $x^*-a < x < x^*$
  - $f'(x) < 0$ si $x^* < x < x^*+a$
- **Alors x* est un maximum local de f.**
- **Soit une fonction différentiable f, et x* un point critique. S'il existe a > 0 tel que**
  - $f'(x) < 0$ si $x^*-a < x < x^*$
  - $f'(x) > 0$ si $x^* < x < x^*+a$
- **Alors x* est un minimum local de f.**

Soit $f(x) = x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 8$

$f\,'(x) = 3\,x^2 + 12\,x + 9 = 3(x+3)(x+1)$

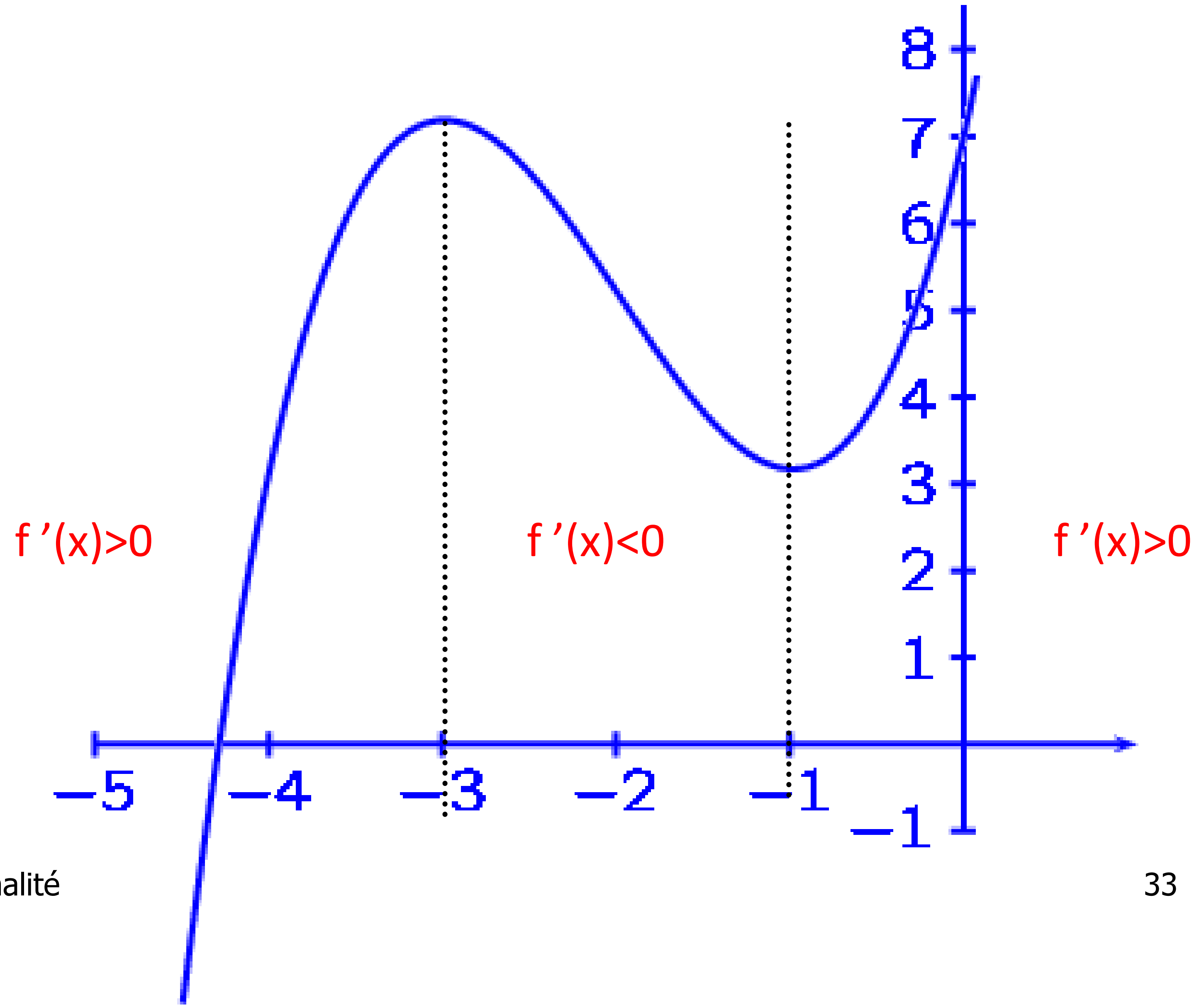
Points critiques : $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$

Signes de $f\,'(x)$:



- **x_1 maximum local**
- **x_2 minimum local**

Fonctions à une variable



Fonctions à une variable

Test de premier ordre :

- **Condition suffisante d'optimalité d'un point critique.**
- **Inconvénient : il faut de l'information sur f à d'autres points que le point critique.**

Fonctions à une variable

Test de second ordre :

•Si la fonction f possède une dérivée seconde continue dans un voisinage d'un point critique x*, alors

$f''(x^*) < 0$ est une condition suffisante pour que x* soit un maximum local, et

$f''(x^*) > 0$ est une condition suffisante pour que x* soit un minimum local.

Fonctions à une variable

- **Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$**

  $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1)$

- **Points critiques : $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$**

  $f''(x) = 6x + 12$

  $f''(-3) = -6 < 0 \Rightarrow x_1$ maximum local

  $f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow x_2$ minimum local