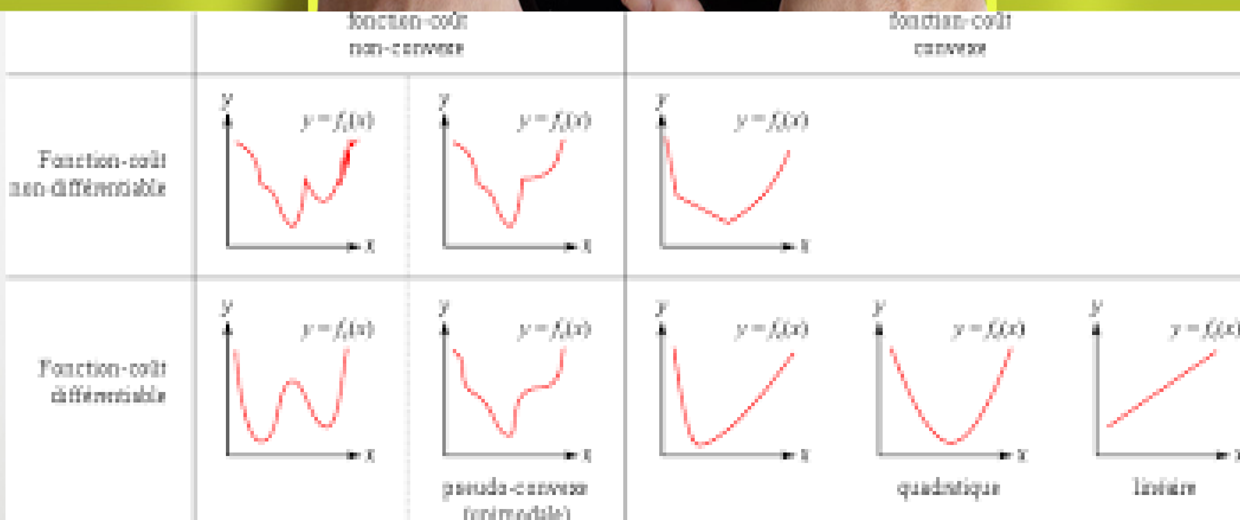
MATHÉMATIQUES pour l'OPTIMISATION



PLAN DU COURS

- La droite numérique
- Propriétés métriques de R^n
- Les fonctions numériques d'une variable réelle
- Les fonctions numériques de plusieurs variables réelles
- Convexité, concavité
- Optimisation : sans contraintes, avec contraintes

LA DROITE NUMÉRIQUE

- ## Notations

R est l’ensemble des nombres réels.

R^* est l’ensemble des réels non nuls.

R^+ est l’ensemble des réels positifs ou nuls.

- ## Intervalles de R

a et b deux réels, $a \leq b$

Intervalle **ouvert** : $]a, b[= \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

Intervalle **fermé** : $[a, b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$

LA DROITE NUMÉRIQUE

- Valeur absolue d'un réel x

  $|x| = x$ si $x \geq 0$

  $|x| = -x$ si $x < 0$

  Propriétés

  Pour tout réel x : $|x| \geq 0$

  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Pour tout réel x : $|x| = |-x|$

  Pour tous les réels x et y : $|x.y| = |x|.\ |y|$

  Pour tous les réels x et y : $|\ |x| - |y|\ | \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

LA DROITE NUMÉRIQUE

- Distance

$d : R \times R \rightarrow R^+$

$\quad (x , y) \rightarrow | x - y |$

$d(x,y) = | x - y |$

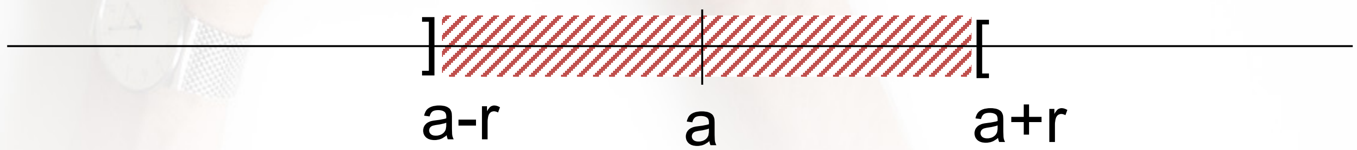
Propriétés

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $(\forall x \in R) \ (\forall y \in R) \ d(x , y) = d(y,x)$
- $(\forall x \in R) \ (\forall y \in R) \ (\forall z \in R) \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

LA DROITE NUMÉRIQUE

- Intervalle ouvert de centre a et de rayon r

$I(a,r) =]\, a - r, a + r\, [$



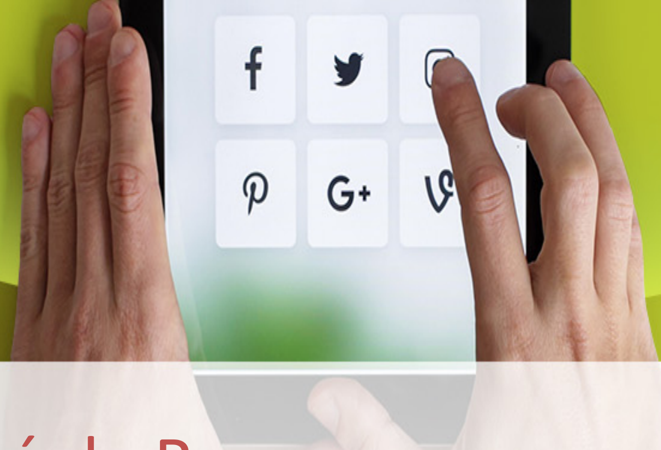
- Ouvert de R

$U \subset R$ est un **ouvert** si et seulement si :

$(\forall a \in U)\ (\exists r > 0)$ tel que $I(a,r) \subset U$

Exemple

$]-2, 7[$ est un ouvert.



LA DROITE NUMÉRIQUE

- Fermé de R

F ⊂ R est un **fermé** si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

Exemple

F = [3.6, 7.2] est un fermé de R.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

Notation

Un point de R^n est un vecteur caractérisé par ses coordonnées $(x_1,\ldots, x_n)$. On écrit : $x = (x_1,\ldots, x_n)$.

- Norme sur R^n

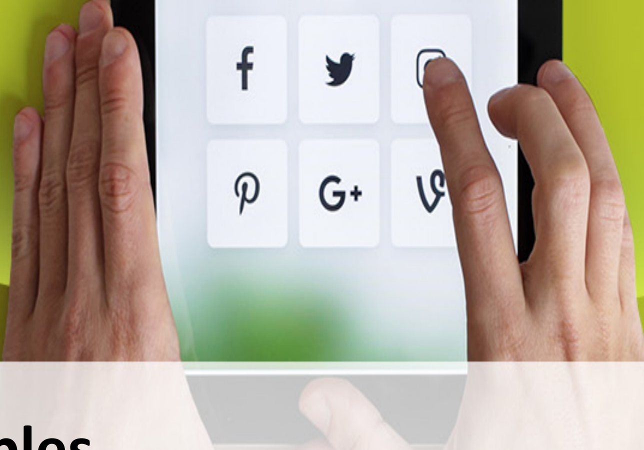
Une **norme** de R^n est une application $N : R^n \rightarrow R^+$ vérifiant :

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $(\forall x \in R^n)\ (\forall \lambda \in R)\ N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

- $(\forall x \in R^n)\ (\forall y \in R^n)\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n



Exemples

Pour $x = (x_1,\dots, x_n)$,

- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (norme euclidienne)
- $N_1(x) = \mathrm{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|)$
- $N_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

Remarque

La norme euclidienne dans R^n provient du produit scalaire de deux vecteurs x et y :

$x = (x_1,\dots, x_n)$, $y = (y_1,\dots, y_n)$

$$x \bullet y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$x \bullet x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\|x\| = \sqrt{x \bullet x}$$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

- Distances sur R^n

On peut associer à chaque norme N sur R^n une distance d :

$d : R^n \times R^n \rightarrow R^+$

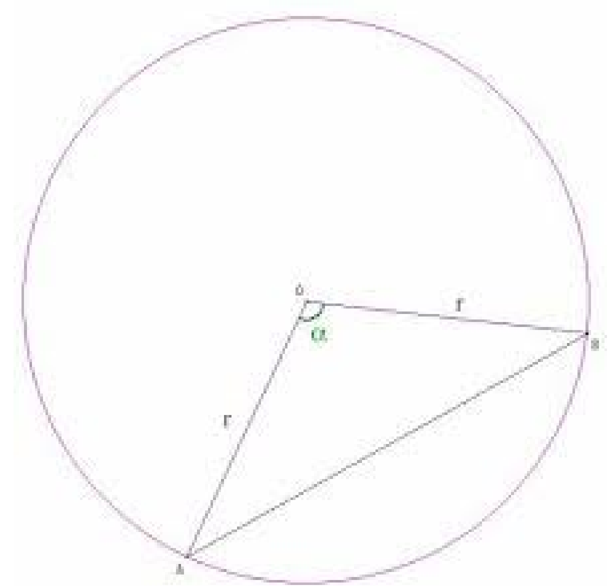
$(x, y) \rightarrow d(x,y)$

$d(x,y) = N(x - y)$

Exemple

distance euclidienne :

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$



PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

- Boules dans R^n

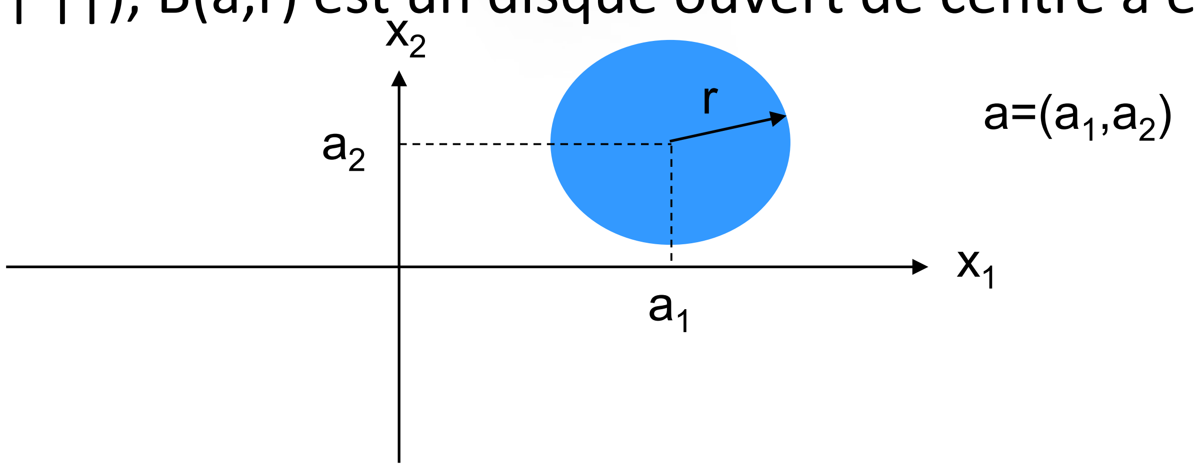
R^n muni de la norme euclidienne se note $(R^n, ||\ ||)$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r, notée B(a,r)

$B(a,r) = \{x \in R^n \ / \ ||x - a|| < r\}$

Exemple

Dans $(R^2, ||\ ||)$, B(a,r) est un disque ouvert de centre a et de rayon r.



PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

Boule fermée de centre a et de rayon r, notée $\bar{B}(a,r)$

$\bar{B}(a,r) = \{x \in R^n \,/\, ||x - a|| \leq r\}$

Remarque

Toutes les boules ne sont pas rondes !

Exemple

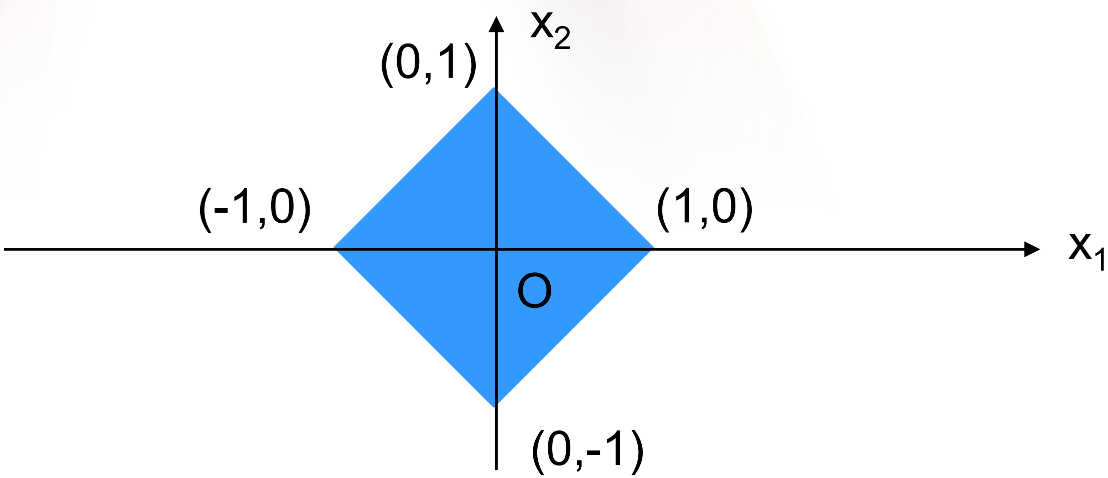
Dans (R^2,N_2), $B(O,1)$ est un carré de centre O.

$B(O,1) = \{(x_1,x_2) \in R^2 \,/\, |x_1| + |x_2| < 1\}$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

Boule $B(O,1)$ dans (R^2,N_2)

$$N_2(x) = |x_1| + |x_2|$$

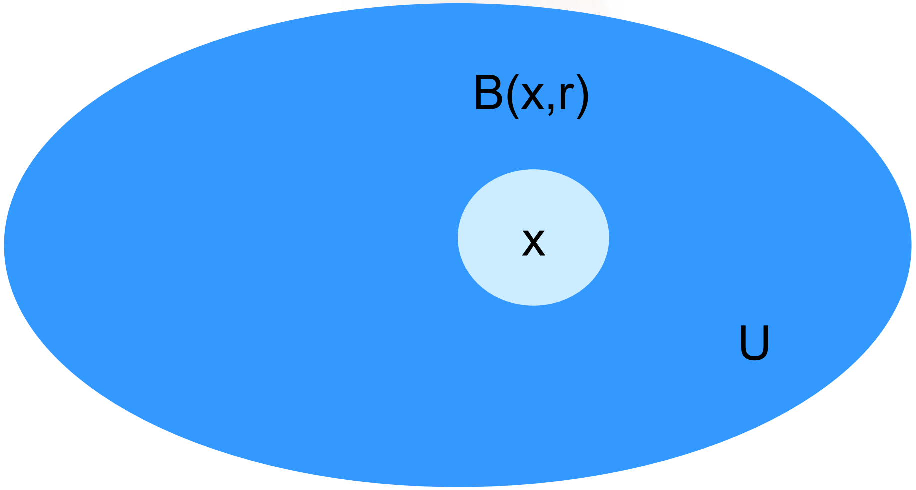


PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

- Ouverts dans R^n

$U \subset R^n$ est un **ouvert** si et seulement si :

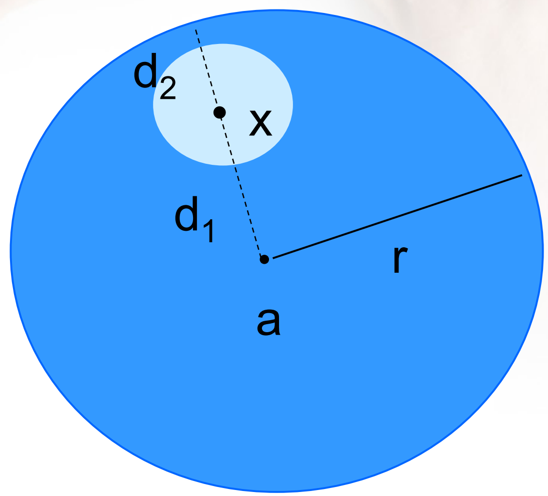
$(\forall x \in U)\ (\exists r>0)$ tel que $B(x,r) \subset U$



PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

Exemple

Une boule ouverte est un ouvert.



B(x,ρ) avec

$$\rho \leq \frac{\mathrm{Min}(d_1,d_2)}{2}$$

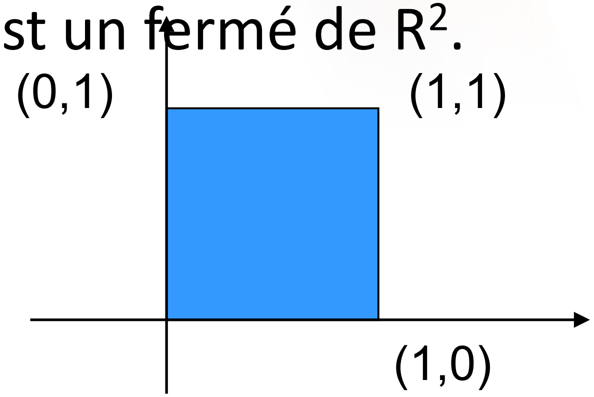
PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE R^n

- Fermés dans R^n

$F \subset R^n$ est un fermé si et seulement si le complémentaire de F dans R^n dans est un ouvert.

Exemple

$F = [0,1] \times [0,1]$ est un fermé de R^2.



FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- ## Définition d’une fonction numérique d’une variable

On appelle **fonction numérique** d’une variable réelle une application d’une partie $E \subset R$ à valeurs dans R.

On note

$f : E \to R$

$\quad x \to f(x)$

Remarque

Une fonction numérique n’est pas nécessairement définie pour tous les réels. Ainsi, la fonction

$x \to \sqrt{x}$ n’est définie que pour $x \in R^{+}$.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- ## Domaine de définition d’une fonction

L’ensemble des réels pour lesquels la fonction f est définie s’appelle le domaine de définition de la fonction f.

Les règles suivantes sont souvent utilisées pour déterminer l’ensemble de définition d’une fonction.

- On ne peut pas diviser par 0.

- On ne peut pas calculer la racine (et plus généralement, la puissance non entière) d’un nombre strictement négatif.

- On ne peut pas calculer le logarithme d’un nombre négatif.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- ## Notion de limite

La notion de limite repose sur la notion de *“**proximité**”.*

On dit que la fonction *f* tend vers *l* lorsque x tend vers a et l’on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$$

pour exprimer le fait que f(x) est aussi proche que l’on souhaite du réel l pourvu que x soit suffisamment proche du réel a.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Pour formaliser la notion de limite, on a recours à la notion de distance, c'est-à-dire dans R, à la valeur absolue de la différence entre deux nombres.

Définition 1

On dit que la fonction f a pour limite l lorsque x tend vers a si et seulement si :

pour tout $\varepsilon>0$, il existe $d>0$ tel que pour tout x vérifiant

$$0<|x-a|<d$$

on ait $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Définition 2

On dit que f (x) tend vers l quand x tend vers +∞ et on l'on note :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

lorsque f(x) est aussi proche que l'on veut du réel l si x est suffisamment grand, ce que l'on traduit mathématiquement par :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout x vérifiant

$x \geq M$ on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemples

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Quand la limite d’une fonction n’existe-t-elle pas dans R?

- Lorsque la limite est **infinie.**

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Lorsque les limites à gauche et à droite existent mais ne sont pas égales.

Exemple

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

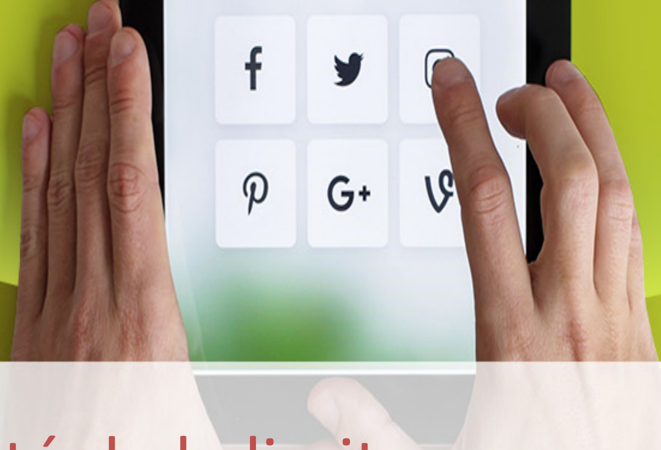
FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Lorsque les limites à gauche ou à droite n'existent pas

Exemple

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE



- Unicité de la limite

  Si une fonction f admet une limite l lorsque x tend vers a, alors cette limite est **unique**.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Opérations sur les limites

f et g sont deux fonctions telles que :

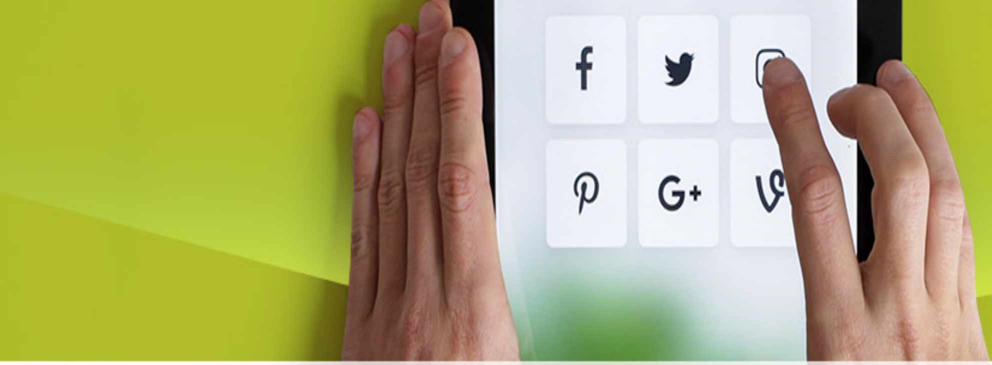
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad\qquad \lim_{x \to a} g(x) = h$$

alors

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + h$$

$$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = l \times h$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{h} \quad \text{si} \quad h \neq 0$$



FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Passage à la limite dans les inégalités

  \- f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in U$, un intervalle ouvert contenant a.
  Si $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent, alors : $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

  \- théorème des gendarmes
  Si pour tout $x \in U$ on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
  et $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \in R$

  alors $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x) = l$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Notion de continuité

Soit f une fonction numérique définie en a. On dit que f est **continue** en a si seulement si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$$

f est continue sur un intervalle ouvert U si elle est continue en tout point de U.

Intuitivement, une fonction est continue si et seulement si on peut la représenter graphiquement en un seul trait, sans avoir à lever le crayon de sa feuille.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Exemples de fonctions continues

- les fonctions affines
- les fonctions polynômes
- les fonctions sinus et cosinus

Exemple de fonction discontinue en un point

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0$$

$$f(0) = 1$$

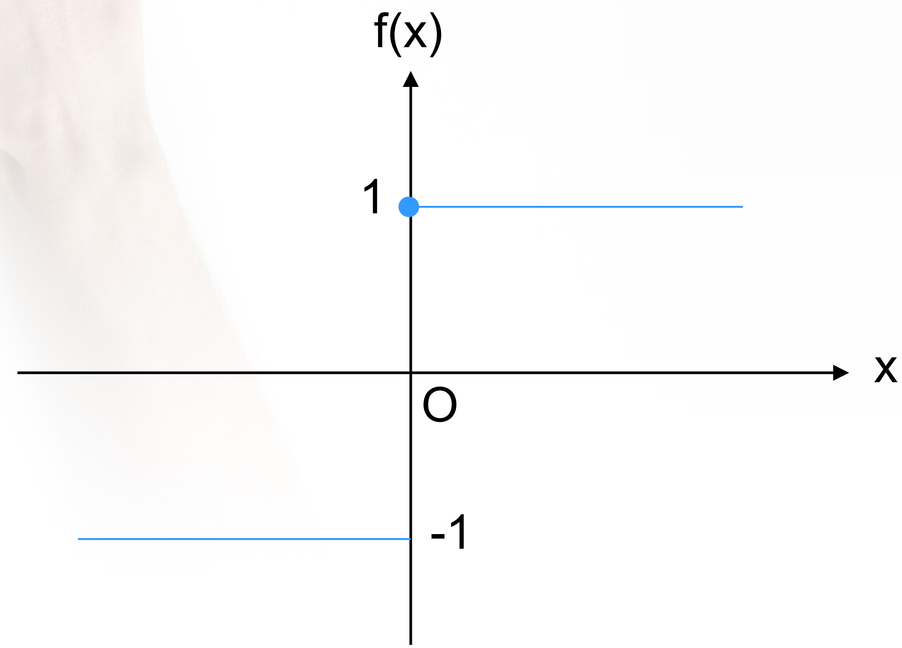
Si x≥0, alors f(x) = 1

Si x<0, alors f(x) = -1

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = 1 = \mathrm{f}(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = -1 \neq \mathrm{f}(0)$$



f n'est pas continue en 0.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Prolongement par continuité

Soit f une fonction continue sur un intervalle U sauf en a.

On suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe. Soit l cette limite.

Soit g définie par :

$g(x) = f(x)$ si $x \neq a$

$g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$

g est une fonction continue en a. C'est le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple

La fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ n’est pas définie en x = 1. Elle n’est donc pas continue en x = 1.

Cependant, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) = 4$.

On peut donc définir le prolongement par continuité de f en 1 :

$$g(x) = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

$$g(1) = 4$$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Racine de f

  Les solutions d’une équation de la forme $f(x) = 0$ sont appelées les racines de f.

- Point fixe de f

  Les solutions d’une équation de la forme $f(x) = x$ sont appelées des points fixes de f.

Remarque

Les racines de f sont les points fixes de g définie par

$f(x) \equiv g(x) - x$.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Théorème des valeurs intermédiaires

  Soit U un intervalle non vide de R et f une fonction numérique définie et continue sur U.

  Soient a et b dans U, $a \leq b$.

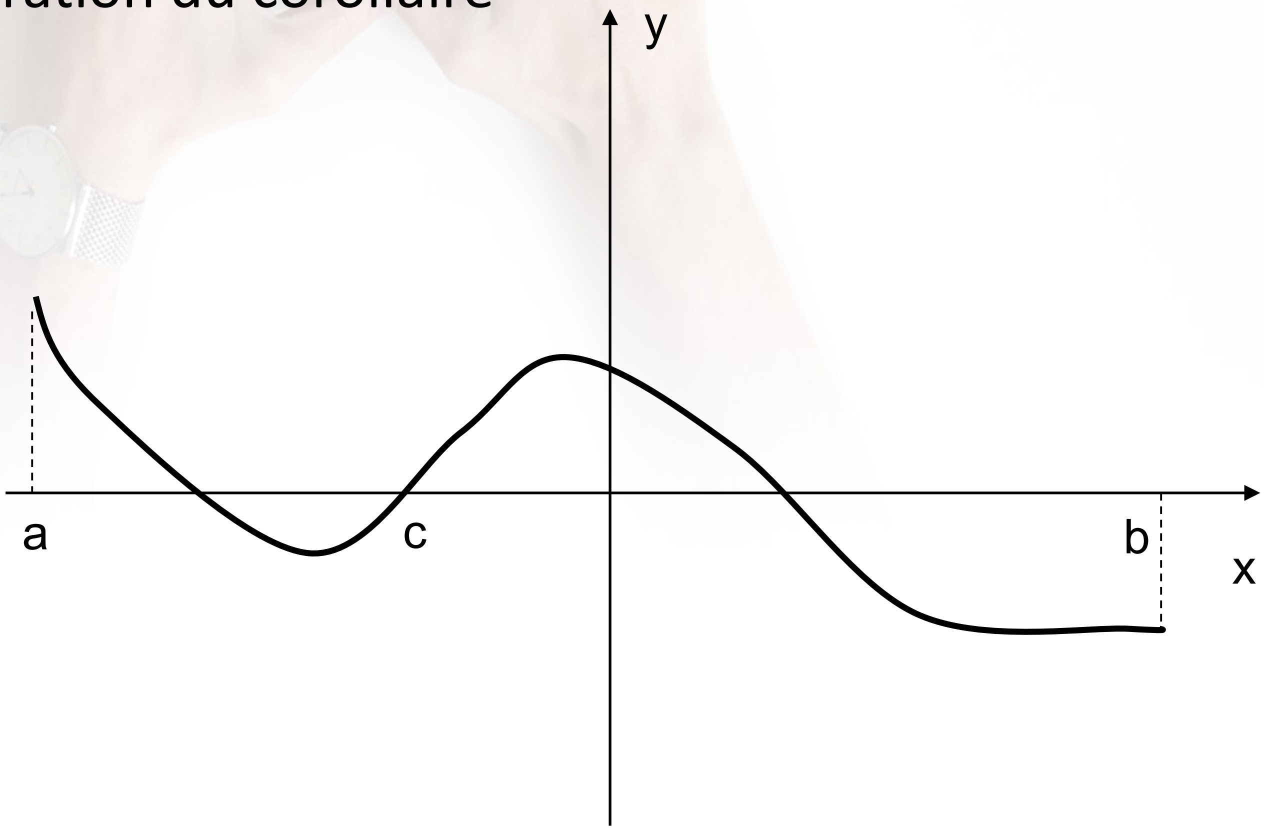
  Si $f(a) \leq f(b)$, alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe c dans U compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

  Corollaire

  Soit f une fonction numérique continue sur [a, b] vérifiant $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors la fonction f admet au moins une racine $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

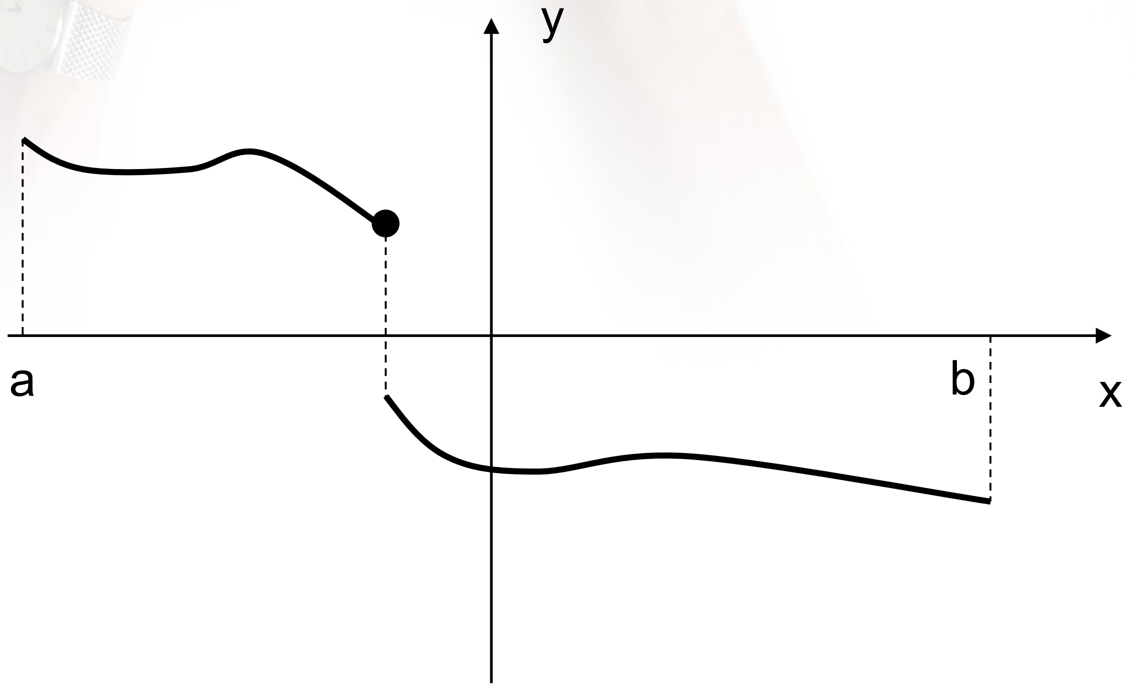
FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Illustration du corollaire



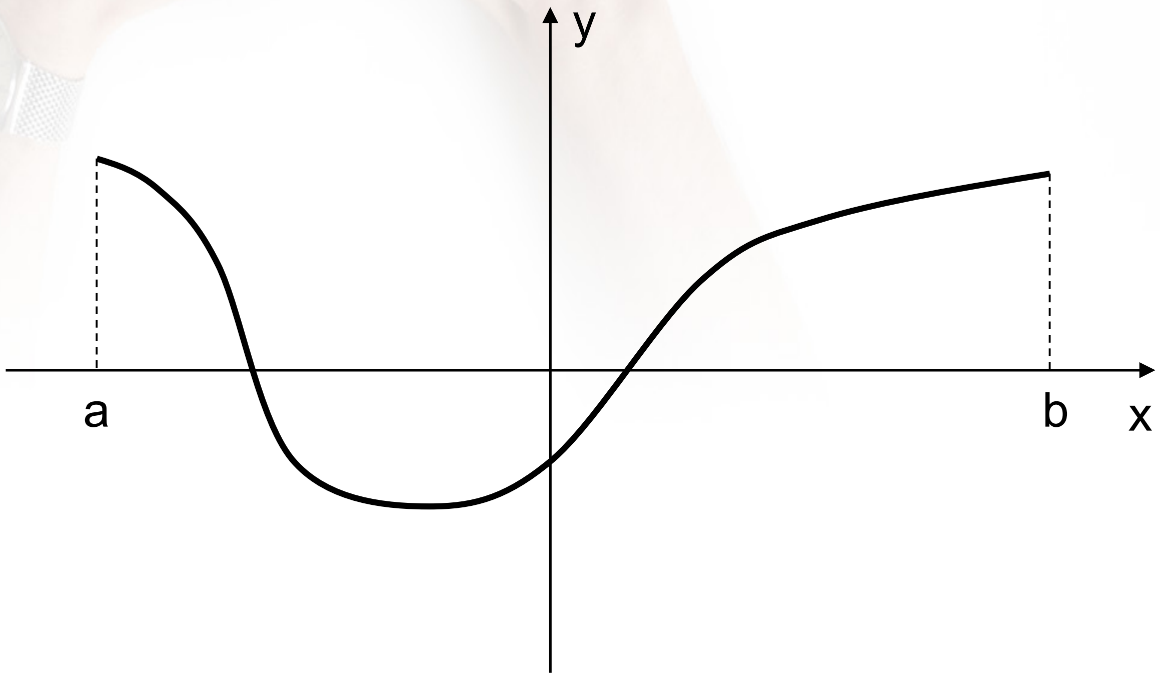
FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Si f n'est pas continue le théorème et le corollaire sont mis en défaut.



FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Exemple où une racine existe, bien que l’une des hypothèses du corollaire ne soit pas vérifiée.



FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Un théorème de point fixe

Si f est continue sur [a, b] et si $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \in [a, b]$, alors l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans R.

démonstration :

Posons $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(x) \in [a, b]$,

$a - x \leq f(x) - x \leq b - x$.

D'où $f(a) - a \geq a - a$, c'est-à-dire $f(a) \geq a$. De même on montre que $f(b) \leq b$.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

La fonction g vérifie donc :

$g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$

D'où $g(a).g(b) \leq 0$

Le corollaire affirme alors l'existence d'un réel c tel que l'on ait $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Dérivée d’une fonction numérique

La notion mathématique de dérivée est fondamentale en économie où elle correspond aux grandeurs dites “marginales”.

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert contenant U. f est dérivable en $a \in U$ si son taux de variation :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite quand x tend vers a.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

On appelle alors cette limite, lorsqu’elle existe, la **dérivée** de f en a et on la note :

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarques

- U doit être ouvert
- La limite précédente est aussi égale à

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Si on se limite à h>0, on obtient la dérivée à droite en a.

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- De la même façon, si h<0, on obtient la dérivée à gauche de a, notée $f'_g(a)$.
- f est dérivable si et seulement si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Définition

f est dérivable sur un ouvert U si et seulement si f est dérivable en chaque point de U.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Comment calculer une dérivée

- Pour le calcul de la **dérivée en un point** : revenir à la définition.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$

$f(0) = 0$

f est **continue** en 0 car : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

et le théorème des gendarmes entraîne alors :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

f est **dérivable** en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x}$$

Comme

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

il en résulte :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Pour le calcul de la **dérivée sur un intervalle ouvert** : utiliser les dérivées de fonctions connues et les règles de calcul des dérivées.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Exemple économique : coût de production

- Coût total

La fonction de coût exprime le coût total C(y) permettant à une entreprise de produire une quantité y de biens.

- Coût moyen

On définit alors le coût moyen par :

$$\mathrm{CM}(\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Y})}{\mathrm{Y}}$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Coût marginal

Le coût marginal $C_{marginal}$ de production est définit comme : le coût supplémentaire de production permettant la production d'une unité supplémentaire.

Une augmentation de la production de Δy, correspond à une augmentation du coût de $\Delta C = \Delta y \, . \, C_{marginal}$.

c'est à dire :

$$C_{marginal} \approx \frac{C(y+\Delta y) - C(y)}{\Delta y}$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Il s'agit en fait d'un Δy "infinitésimal", et la notion de coût marginal est représentée mathématiquement par la dérivée de la fonction de coût :

$$C_{marginal} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{C(y + \Delta y) - C(y)}{\Delta y} = C'(y)$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Quelques dérivées de fonctions usuelles

f	f'	f	f'
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$u(x)^{\alpha}$	$\alpha u(x)^{\alpha} u'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
e^x	e^x	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x()^2)}$		

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Le théorème des accroissements finis

Si f est continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe $c \in \,]a, b[$ tel que :

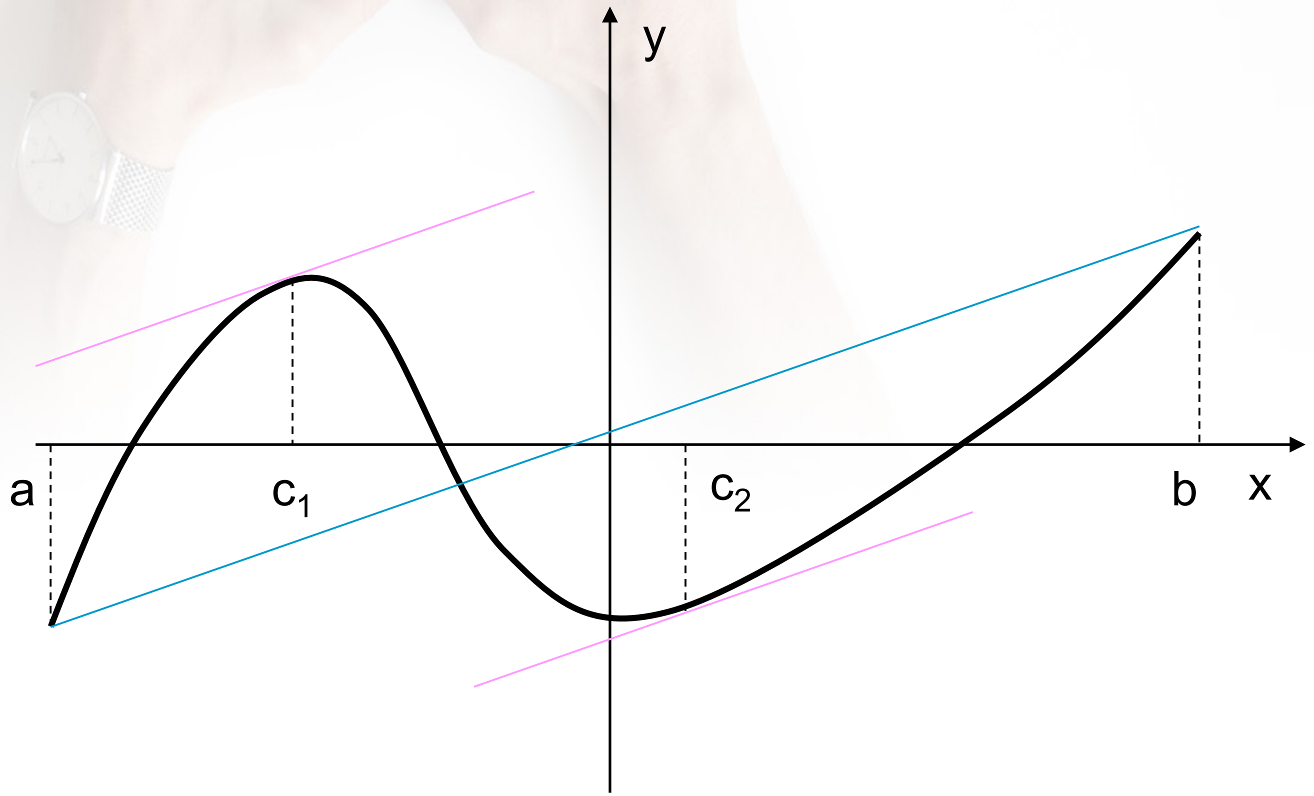
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Leftrightarrow \quad f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

Propriété importante

Une fonction f dérivable en un point a est continue en ce point.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- Illustration du théorème des accroissements finis



FONCTIONS D'UNE VARIABLE

- ## Fonctions de classe C^n

Soit f : D ($\subset$ R) → R une fonction possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur D. On dit alors que f est de classe C^n sur D.

Proposition

Soit f une fonction de classe C^1 sur [a,b], admettant une dérivée seconde sur]a, b[, il existe alors un réel c$\in$]a, b[tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Formule de Taylor Lagrange

Soit f : [a,b]→ R une fonction n fois dérivable sur [a,b] et dont la dérivée (n+1)$^{\text{ème}}$ existe sur]a,b[, alors il existe un réel c de]a,b[tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

Formule de Taylor Young

Soit I un intervalle réel ouvert et f : I→ R une fonction n fois dérivable en $x_0 \in I$.

Alors il existe une fonction ε : I→ R telle que :

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et pour tout h tel que $x_0+h\in I$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h)$$

Formule de Taylor Mac Laurin

Soit I un intervalle réel ouvert contenant le réel 0

et f : I→ R une fonction n fois dérivable en 0.

Alors il existe une fonction ε : I→ R telle que :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon\,(x) = 0$$

et pour tout x ∈I

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

On dit que l'on a effectué un **développement de Taylor** en x=0 à l'ordre n.

Exemples

- Effectuer un développement de Taylor de la fonction x→e^x, en x=0, à l'ordre 3.

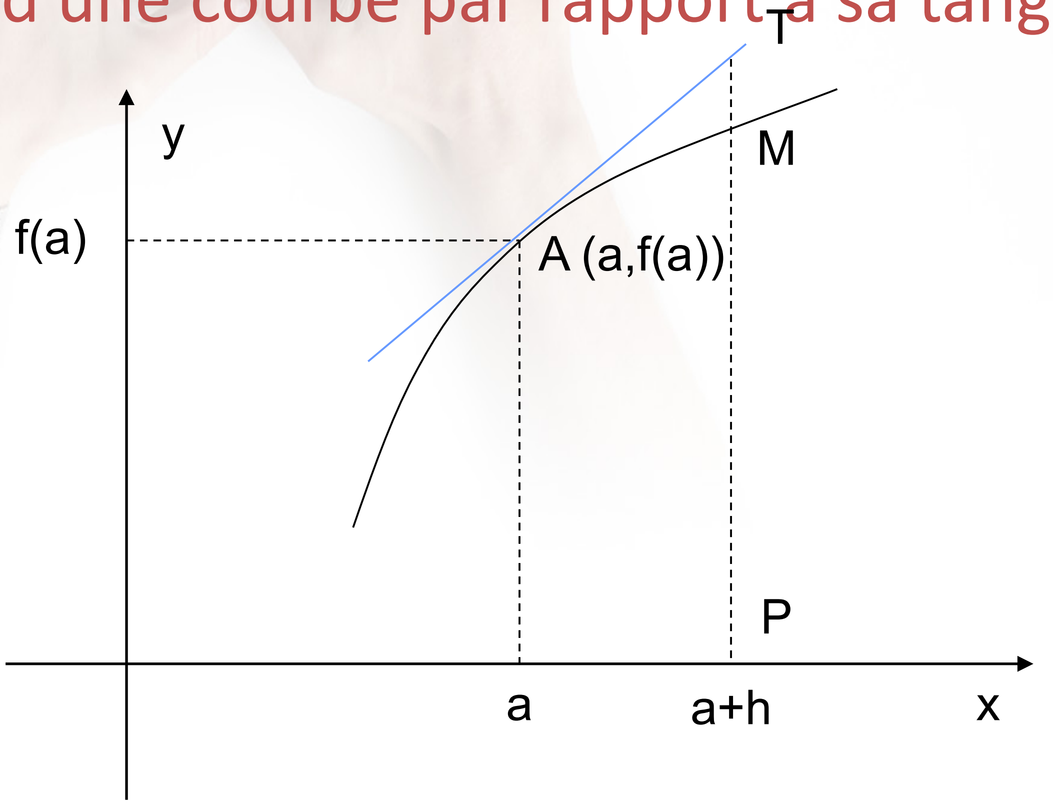
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

- Effectuer un développement de Taylor de la fonction x→ln(1+x), en x=0, à l'ordre 2.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

FONCTIONS D’UNE VARIABLE

- Position d’une courbe par rapport à sa tangente



On suppose la fonction f « suffisamment dérivable » pour pouvoir appliquer la formule de Taylor à l’ordre n.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Équation de la tangente en x=a

$$y - f(a) = f'(a) \times (x - a)$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente en a est déterminée par le signe de :

$$d(h) = \overline{HM} = \overline{PM} - \overline{PH} = f(a+h) - (f(a) + hf'(a))$$

A) On suppose $f'(a) \neq 0$ et l'existence d'un entier n tel que l'on ait : $f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$

et que $f^{(n)}$ soit continue en a.

Une application de la formule de Taylor montre que :

- si n est impair, il y a un point d'inflexion
- si n est pair, il n'y a pas de point d'inflexion.

B) On suppose $f'(a) = 0$ et l'existence d'un entier n tel que l'on ait :

et que $f^{(n)}$ soit continue en a.

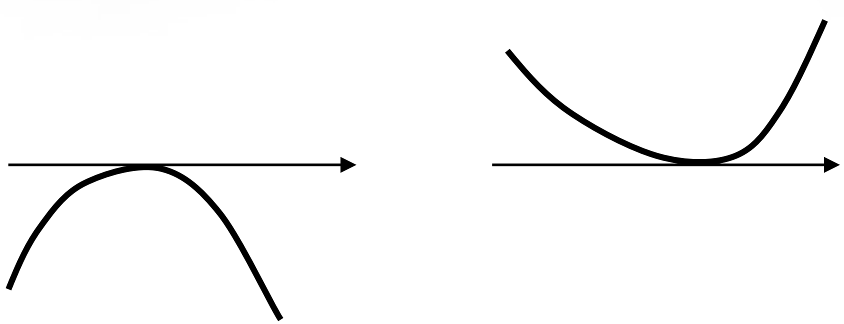
Une application de la formule de Taylor montre que :

$$f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

n pair

$f^{(n)}(a)<0$ maximum local

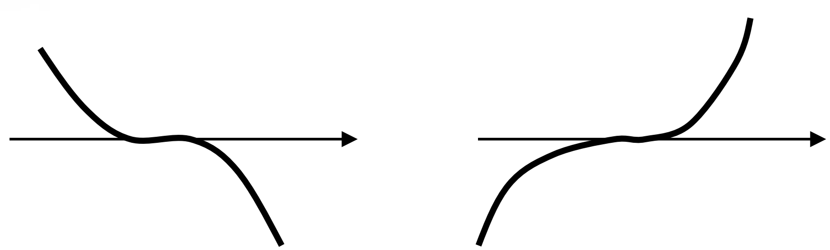
$f^{(n)}(a)>0$ minimum local



n impair

$f^{(n)}(a)<0$

$f^{(n)}(a)>0$



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Définition d'une fonction numérique de plusieurs variables

Une fonction **numérique** de n variables est une application d'une partie D de R^n à valeurs dans R.

On la note :

$f : D \rightarrow R$

$(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow f\,(x_1, \ldots, x_n)$

Le domaine de définition de f est l'ensemble des points

$(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $y = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ existe dans R. On le note D_f.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

Soit f définie par :

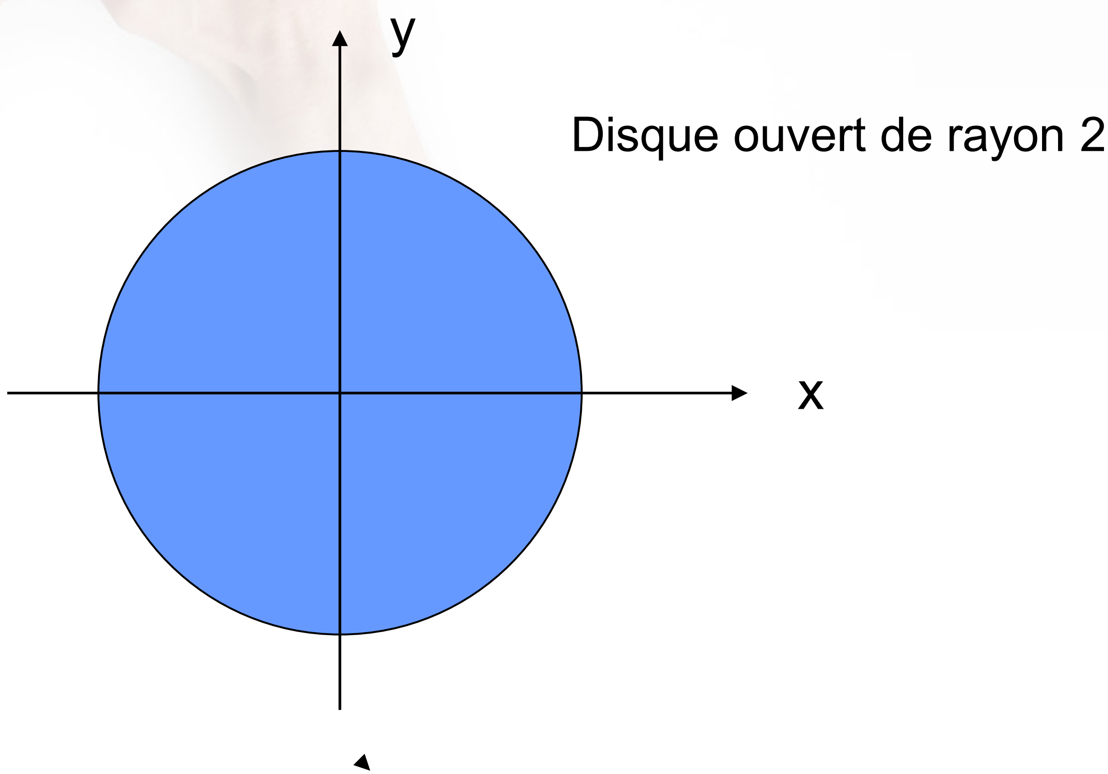
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow \{4 - x^2 - y^2 > 0\}$

$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow \{x^2 + y^2 < 4\}$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Représentation graphique du domaine de définition de f.



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Chemin

Un chemin c de R^n est une application d’un intervalle I de R à valeurs dans R^n :

$c : I \rightarrow R^n$

$t \rightarrow (c_1(t), \dots, c_n(t))$

Exemple

La position ((x(t), y(t), z(t)) d’un objet à un instant donné t dans l’espace définit un chemin de R^3 :

$t \rightarrow ((x(t), y(t), z(t))$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Limite d'une fonction

Soit f une fonction de n variables définie sur $D \subset R^n$. On dit que f(x) tend vers l quand $x \in R^n$ tend vers $a \in R^n$

si et seulement si :

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \alpha > 0)$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $||x-a|| < \alpha$ on ait $|f(x)-l| < \varepsilon$.

On écrit : $$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Si la fonction f possède une limite pour x tendant vers a, alors cette limite est **unique**.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Remarque

La limite d'une fonction $f : R^n \to R$ en un point a, lorsqu'elle existe, ne doit pas dépendre de la façon dont on tend vers a.

Exemple

Soit $f : R^2 \to R$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Le long de la droite d'équation y = tx, on a :

$$f(x,tx) = \frac{tx^2}{x^2 + t^2 x^2} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$f(x,tx) = \frac{t}{1 + t^2} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,tx) = \frac{t}{1 + t^2}$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

On en conclut que la limite de la fonction f lorsque $(x,y) \to (0,0)$ ne peut exister puisqu'elle dépend du chemin que l'on emprunte pour se rapprocher du point $(0,0)$.

Ce procédé peut être utilisé pour montrer que la limite d'une fonction en un point donné n'existe pas.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Continuité d'une fonction f en un point a

Une fonction de n variables définie sur $D \subset R^n$ est continue en $a \in D$ si et seulement si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque

Une fonction de plusieurs variables peut être continue par rapport à chacune des variables sans être continue au sens précédent (par rapport à l'ensemble des variables).

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- **Exemple**

  Soit $f : R^2 \to R$ définie par :

  $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

  $$f(0,0) = 0$$

  Les fonctions d'une variable définies par :

  $h{:}\,x \mapsto f(x,0)$ et $g{:}\,y \mapsto f(0,y)$ sont continues en 0.

  Mais cette fonction de deux variables f n'est pas continue en (0,0) car elle n'a pas de limite en (0,0).

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Dérivées partielles

Soit $f : R^2 \rightarrow R$, $a \in R^2$, $a = (a_1,a_2)$

Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$ existe,

On note ce nombre $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)$ et on dit que c'est la

dérivée partielle de f par rapport à x_1 en $a = (a_1,a_2)$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

De même si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1,a_2 + h) - f(a_1,a_2)}{h}$ existe, on note ce

nombre $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)$ et on dit que c'est la dérivée

partielle de f par rapport à x_2 en $a = (a_1,a_2)$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Plus généralement, soit f : $R^n \rightarrow R$ et $a = (a_1,\dots,a_n)$.

Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a_1,\dots,a_i + h,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{h}$ existe, on note ce nombre $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et on l'appelle la $i^{éme}$ dérivée partielle de f en a.

Remarque

C'est en fait la dérivée de la fonction numérique d'une variable : $x \rightarrow f(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ en $x=a_i$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

$$f(x,y) = 5x^3 - 2y^2 + x - 7y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 16$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y - 7 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -19$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice

Calculez les dérivées partielles, pour tout (x,y) de R^2, de l'application f :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Dérivées partielles en (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$

Comme f(h,0)=0, la limite de $\frac{f(h,0)}{h}$ existe et est égale à 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Par symétrie entre x et y on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Dérivées partielles en (x,y) ≠ (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Dérivées partielles successives

Soit f une fonction de n variables admettant une dérivée partielle par rapport à x_i pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n)$.

Lorsque la fonction $(x_1,\ldots,x_n) \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$

admet elle même une dérivée partielle par rapport à x_j, on appelle cette dernière une dérivée partielle seconde (ou d'ordre 2) et on la note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

$$f(x,y) = 5x^3 - 2y^2 + x - 7y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 30x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y - 7 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Théorème de Schwartz

Soit $f : R^n \to R$

Si les dérivées partielles secondes sont continues dans un ouvert contenant $a \in R^n$, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Le théorème de Schwartz s'applique par exemple pour les fonctions polynômes,les fractions rationnelles.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Remarque d'ordre pratique

Pour pouvoir appliquer facilement le théorème de Schwartz, il faut être capable de reconnaître si la fonction étudiée a des dérivées partielles secondes continues sinon son application nécessite le calcul explicite des dérivées partielles secondes.

Exemples de fonctions à dérivées partielles secondes continues : les fonctions polynômes de plusieurs variables, les fractions rationnelles (en un point n'annulant pas le dénominateur),…

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice

Calculer les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction :

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

En tout point différent de l'origine, le théorème de Schwartz est vérifié :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Fonctions de classe C^r

Soit $f : R^n \rightarrow R$.

f est dite de classe C^r si f possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r sur R^n.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Matrice hessienne

Soit $f : R^2 \rightarrow R$, $a \in R^2$, $a = (a_1,a_2)$. On suppose que f admet des dérivées partielles en a jusqu'à l'ordre deux.

La matrice hessienne de f, calculée en a, est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2) \end{pmatrix}$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

Calculer la matrice hessienne de f en a=(2,1).

$$f(x,y) = 5x^3 - 2y^3 + xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 + y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 30x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6y^2 + x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple (suite)

Matrice hessienne de f calculée en a=(2,1)

$$\mathrm{Hessf}(2,1) = \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Gradient d'une fonction $f : R^n \rightarrow R$

Le gradient d'une fonction $f : R^n \rightarrow R$ en $a \in R^n$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Courbes, surfaces de niveau

Soit f : D (partie de R^2) → R. Une courbe de niveau de f est le sous-ensemble de R^2 défini par f(x, y) = k où k est un nombre réel.

Notation: On note la courbe de niveau k par

$C_k = \{(x, y) \in R^2 ; f(x, y) = k\}$.

Soit f : D(partie de R^3) → R. Une surface de niveau de f est le sous-ensemble de R^3 défini par f(x, y,z) = k où k est un nombre réel.

Notation: On note la surface de niveau k par

$S_k = \{(x, y,z) \in R^3 ; f(x, y,z) = k\}$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemples

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Les courbes de niveau $k>0$ de f sont des cercles de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

Soit $f(x, y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Les surfaces de niveau $k>0$ de f sont des sphères de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Différentielle d'une fonction $f : R^n \rightarrow R$

La différentielle de f en $a = (a_1,\ldots,a_n)$, est l'application, notée $df(a) : R^n \rightarrow R$

$$(h_1,\ldots,h_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)\,(h)$$

Remarque

Si les dérivées partielles de f en a existent alors la différentielle de f en a existe.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

Calculer la différentielle de f définie par :

$$f(x,y) = 5x^3 - 2y^3 + xy$$

en $a = (1,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 17$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6y^2 + x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -23$$

$$df(1,2) : R^2 \to R$$

$$df(1,2)(h_1,h_2) = 17h_1 - 23h_2$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Lien entre la différentielle de f en a et le gradient de f en a :

La différentielle de f en a calculée en h est égal au produit scalaire du gradient de f en a avec le vecteur $\vec{h}$:

$$df(a)(h) = \overrightarrow{grad}f(a) \bullet \vec{h} \quad \text{pour tout } \vec{h} \in R^n$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Différentiabilité d'une fonction $f : R^n \rightarrow R$

f est différentiable en $a \in R^n$ s'il existe une fonction

$\varepsilon : R^n \rightarrow R$ tel que l'on ait :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarques

Cette relation signifie que f, au voisinage de a, c'est-à-dire en a+h, est approximativement égale à $f(a) + df(a)(h)$.

f peut posséder des dérivées partielles en a sans pour autant être différentiable en a.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Plan tangent

Soit $f : R^2 \to R$, l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=f(x,y)$ au point $M_0\,(x_0,y_0)$ s'écrit :

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\,(y - y_0)$$

Remarque

Intuitivement, une fonction de deux variables est différentiable en (x_0,y_0) si et seulement si son graphe est bien approché par son plan tangent.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Développement de Taylor d'une fonction

  $f : U$ (ouvert de R^2) $\rightarrow R$

  On suppose que f possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 sur un ouvert U (f est dite de classe C^2 sur U) contenant (x_0,y_0).

  Si $h=(h_1,h_2) \in R^2$ est tel que $(x_0+h_1,y_0+h_2) \in U$, alors on a :

$$f(x_0 + h_1,y_0 + h_2) = f(x_0,y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$+ \frac{{h_1}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{{h_2}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{(h_1,h_2)\rightarrow(0,0)} \varepsilon(h) = 0$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2, autour du point (0,0) pour la fonction définie par :

$$f(x,y) = 1 + x^2 - e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - e^{x+y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \text{-}1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \text{ - } e^{x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple (suite)

$$f(h_1,h_2) = -h_1 - h_2 + \frac{{h_1}^2}{2} - h_1 h_2 - \frac{{h_2}^2}{2} + ({h_1}^2 + {h_2}^2)\ \varepsilon(h_1,h_2)$$

avec $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Application à la recherche des extrema d'une fonction

Soit f : U(ouvert de R^n) → R une fonction différentiable sur U.

Si le maximum (respectivement le minimum) de f est atteint en un point a de U, alors df(a)=0, c'est-à-dire :

pour tout $1 \leq i \leq n$ $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Remarque

La réciproque est en général fausse.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Définition

Soit f : U (ouvert de R^n) → R une fonction différentiable sur U. $a \in R^n$ est un point critique de f si df(a)=0.

Conditions du 1er ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

Ce sont des conditions nécessaires d'optimalité. Elles permettent de trouver les points critiques de f.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exemple

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

Conditions du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0$$

Ce système a pour solution

$$x = -1/3,\ y = -4/3$$

Il y a donc un seul point critique $M(-1/3, -4/3)$.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

- Conditions du second ordre

Soit f : U (ouvert de R^2) → R, a$\in$ R^2, a = (a_1,a_2).

Supposons que a soit un point critique de f, alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = 0$$

Si h=$(h_1,h_2)\in R^2$ est tel que $(a_1+h_1,a_2+h_2) \in U$, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(a_1 + h_1,a_2 + h_2) = f(a_1,a_2) + \frac{1}{2}\left(Ah_1{}^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2{}^2\right) + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2) \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2) \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)$$

$$\text{et} \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Le signe de $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$ est donc celui de l'expression :

$$q(h_1, h_2) = A{h_1}^2 + 2Bh_1h_2 + C{h_2}^2$$

$$\text{Si}\, h_2 \neq 0\; q(h_1, h_2) = A{h_2}^2\left(\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2\frac{B}{A}\frac{h_1}{h_2} + \frac{C}{A}\right)$$

$$q(h_1, h_2) = A{h_2}^2\left(\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right)$$

$$q(h_1, h_2) = A{h_2}^2\left(\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}\right)$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Si $h_2 \neq 0$ et $AC-B^2>0$ $q(h_1,h_2)$ sera positif pour pour A>0 et négatif pour A<0.

Si $h_2=0$ et $h_1 \neq 0$ $q(h_1,h_2)=Ah_1{}^2$ sera positif pour A>0

et négatif pour A<0.

Si $AC-B^2<0$, on ne peut rien dire du signe de $q(h_1,h_2)$ (il dépend des valeurs de h_1 et h_2).

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Conditions du second ordre

Soit f : U (ouvert de R^2) → R de classe C^2 et $a \in R^2$.

La matrice hessienne de f en a existe et s'écrit :

$$\mathrm{Hess(f)(a)} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

1) Si A>0 et $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 > 0$, a est un minimum.

2) Si A<0 et $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 > 0$, a est un maximum.

3) Si $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 < 0$, a n'est ni un maximum ni un minimum, a est un point col (ou selle).

4) Si $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 = 0$, cette méthode ne permet pas de conclure. Il faut faire une étude directe.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Remarques

Les conditions du second ordre sont des conditions suffisantes d’optimalité.

Elles se généralisent pour n>2.

Elles concernent des extremums locaux.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

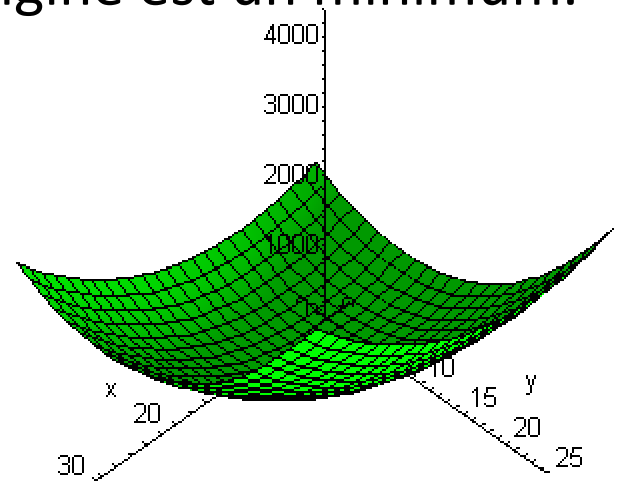
Exemple

Soit f : $R^2 \to R$ définie par :

$$f(x,y) = Ex^2 + Gy^2$$

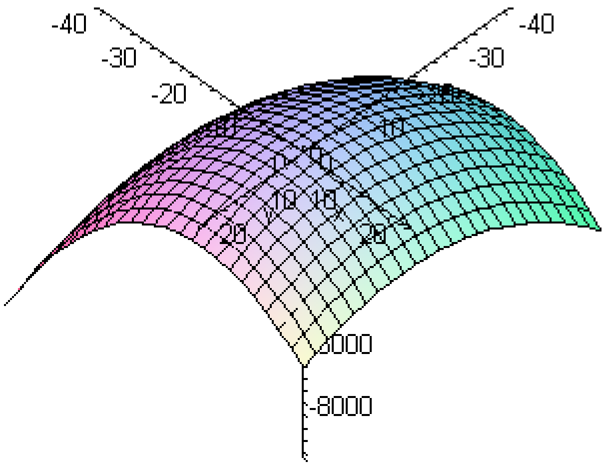
Le point (0,0) est un point critique de f.

Cas E>0, G>0 : l'origine est un minimum.



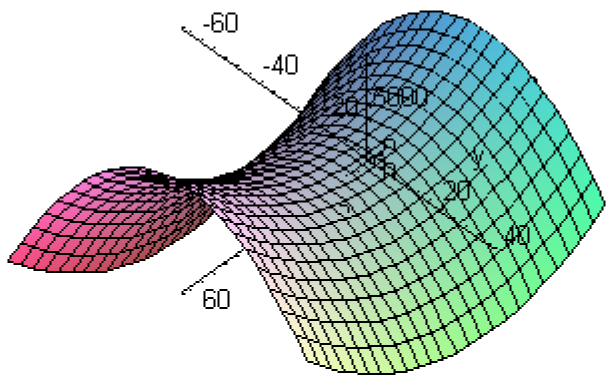
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Cas E<0, G<0 : l’origine est un maximum.



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Cas E>0, G<0 : il n’y a pas d’extremum, l’origine est un point col.



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice

Soit f : $R^2 \rightarrow R$ définie par : $f(x, y) = x^2 + y^4$

1) Rechercher les ponts critiques de f.

2) Étudier leur nature.

Solution

1) $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$

(0,0) est donc le seul pont critique.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice (suite)

2) Nature du point critique (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\mathrm{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AC - B^2 = 0$$

On ne peut conclure. On examine le signe de :

$$f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) = h_1^2 + h_2^4 \geq 0$$

(0,0) est donc un minimum.

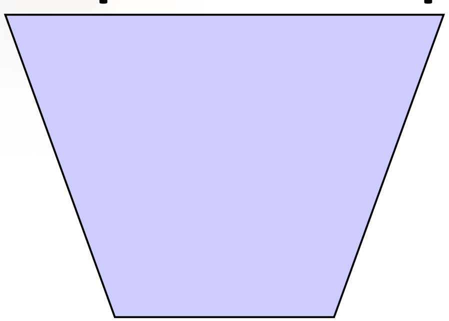
CONVEXITÉ

- Ensemble convexe

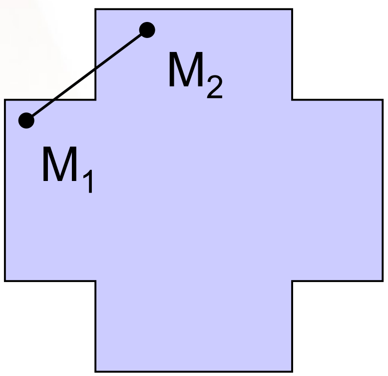
Une sous-ensemble A de R^n est convexe s'il contient tout segment joignant deux quelconques de ses points.

$\forall(M_1,M_2)\in A^2, \forall t\in [0, 1], tM_1+ (1 - t)M_2\in A$

Exemples dans le plan



Partie convexe



Partie non convexe

CONVEXITÉ

- Fonctions convexes, concaves

Soit f : A (partie convexe de R^n) $\rightarrow$ R.

f est convexe sur A si :

$\forall (M_1, M_2) \in A^2, \forall t \in [0, 1], f(tM_1 + (1 - t)M_2) \leq tf(M_1) + (1-t)f(M_2).$

f est strictement convexe sur A si :

$\forall (M_1, M_2) \in A^2, \forall t \in [0, 1], f(tM_1 + (1 - t)M_2) < tf(M_1) + (1-t)f(M_2).$

f est concave si $(-f)$ est convexe.

f est strictement concave si $(-f)$ est strictement convexe.

CONVEXITÉ

Remarques

- Une fonction f est convexe si et seulement si le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par f est situé au-dessus de cette surface.
- Une fonction f est concave si et seulement si le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par f est situé au-dessous de cette surface.
- Ne pas confondre ensemble convexe et fonction convexe.

CONVEXITÉ

- **Exemples**

  $x \rightarrow x^2$ est convexe sur R^2.

  $x \rightarrow \ln x$ est concave sur $\{x \in R \mid x > 0\}$.

  $x \rightarrow 1/x$ est convexe sur $\{x \in R \mid x > 0\}$.

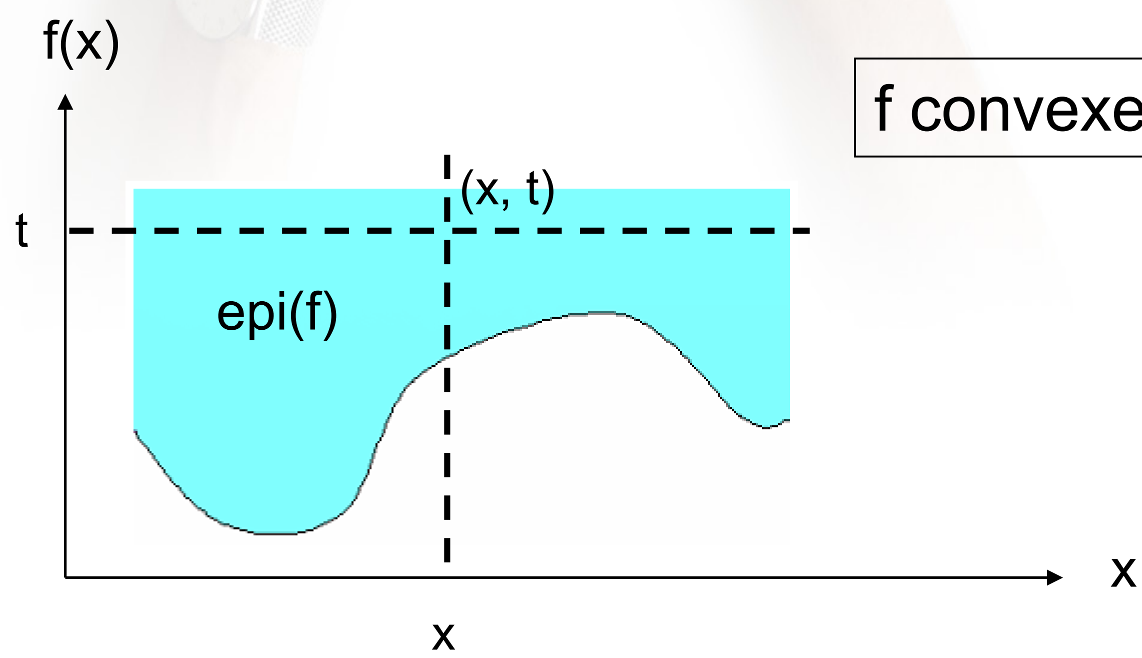
  $x \rightarrow x^\alpha$ est convexe sur $\mathbf{R}_+$ pour $\alpha \geq 1$ ou $\alpha \leq 0$; concave pour $0 \leq \alpha \leq 1$.

CONVEXITÉ

- Épigraphe de f

  epi(f) = {(x,t) | x ∈ Df, f(x) ≤ t}

  (Df : domaine de définition de f)



f convexe ⇔ epi f convexe

CONVEXITÉ

- Propriétés

1) Soit $f_1 : R^n \rightarrow R, \ldots, f_k : R^n \rightarrow R$, k fonctions convexes sur R^n, alors la somme est convexe sur R^n.

2) Si f est une fonction convexe sur R^n et $a>0$ alors a.f est une fonction convexe sur R^n.

3) Soit $f_1 : R \rightarrow R, \ldots, f_k : R \rightarrow R$, k fonctions convexes sur R, alors la fonction f définie par :

$$f(x_1,\ldots,x_k) = f_1(x_1) + \ldots + f_k(x_k)$$

est une fonction convexe sur R^k.

CONVEXITÉ

4) Si $f : R^n \rightarrow R$ est une fonction convexe sur R^n

et $g : R \rightarrow R$ une fonction croissante convexe sur R, alors $g \circ f$ est une fonction convexe sur R^n.

Exemples

Soit $f : R^3 \rightarrow R$ définie par : $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

f est convexe R^3 sur d’après la propriété 3.

Soit $h : R^3 \rightarrow R$ définie par : $h(x,y,z) = \exp(f(x,y,z))$.

h est convexe sur R^3 d’après la propriété 4, avec $g(u)=\exp(u)$.

CONVEXITÉ

- Fonctions dérivables convexes

Proposition 1 : soit f : I (intervalle de R) → R une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si f' est croissante (resp. décroissante).

Proposition 2 : une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si pour tout couple (a,x) de points de I :

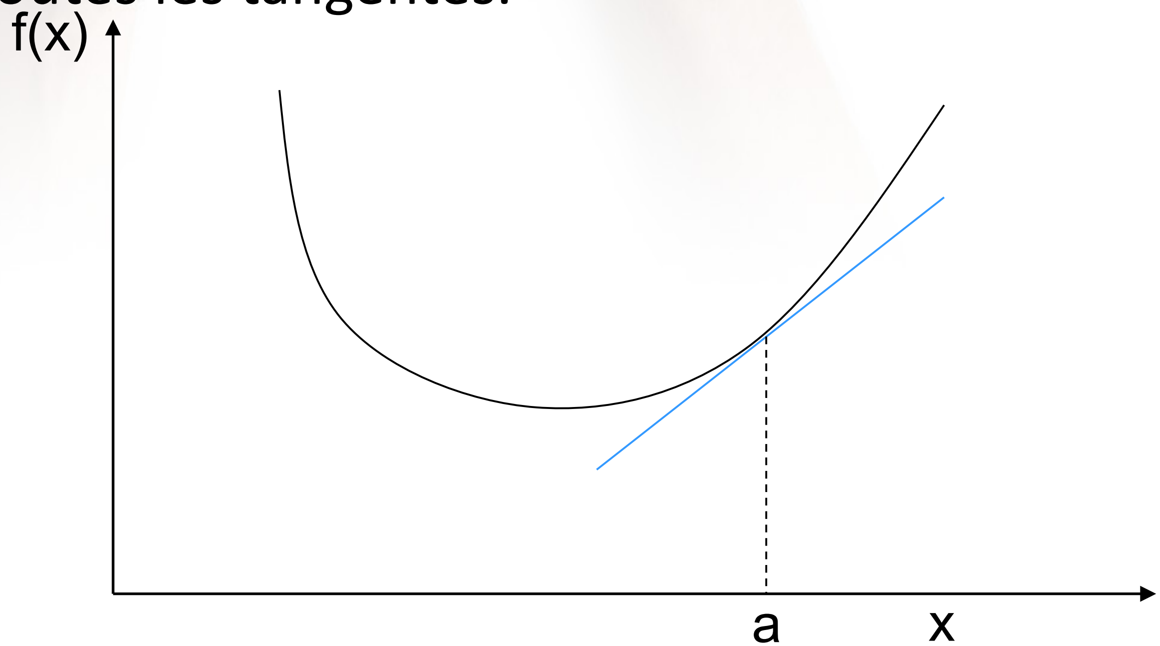
$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité est stricte pour tout x≠a.

CONVEXITÉ

Remarque

La proposition 2 signifie que pour une fonction dérivable, f est convexe si et seulement si le graphe de f est situé au dessus de toutes les tangentes.



CONVEXITÉ

Proposition 3

Soit f : I (intervalle de R) → R une fonction deux fois dérivable sur I, alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \geq 0$) sur I.

Exemples

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

f est convexe sur R.

$$g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

g est donc concave sur]0,∞[

CONVEXITÉ

Proposition 4

Soit f : I (intervalle de R) → R une fonction deux fois dérivable sur I. Si $f'' > 0$ sur I, alors f est strictement convexe sur I.

Remarque

La réciproque de la proposition 4 est fausse en général.

Ainsi, $x \to x^4$ est strictement convexe sur R et cependant la dérivée seconde de cette fonction n'est pas strictement positive en 0.

CONVEXITÉ CONCAVITÉ

- Fonctions f : $A \subset R^2 \rightarrow R$ de classe C^2 convexes

Proposition 1

Soit A une partie convexe de R^2 et f : $A \rightarrow R$ une fonction de classe C^2.

f est convexe sur A si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in A \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \geq 0$$

f est concave sur A si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in A \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \geq 0$$

CONVEXITÉ

Proposition 2

Soit A une partie convexe de R^2 et $f : A \rightarrow R$ une fonction de classe C^2. Si

$$\forall (x,y) \in A \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 > 0$$

alors f est strictement convexe sur A. Si

$$\forall (x,y) \in A \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 > 0$$

alors f est strictement concave sur A.

CONVEXITÉ

Exemple

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 10 > 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 40 > 0$$

f est une fonction strictement convexe sur R^2.

Remarque

La réciproque de la proposition 2 est fausse en général.

CONVEXITÉ

Remarque

Les propositions précédentes se généralisent en dimension n. La notion de déterminant d’ordre n est cependant nécessaire à leur formulation. La proposition suivante considère le cas n=3.

CONVEXITÉ

Proposition 3

Soit A une partie convexe de R^3 et f : A → R une fonction de classe C^2. f est convexe sur A si et seulement si :

pour tout (x,y,z)∈A :

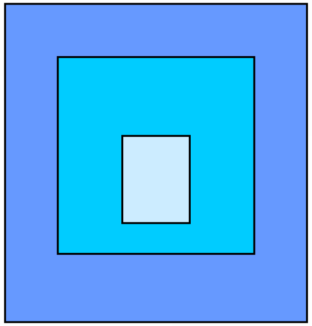
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{vmatrix} \geq 0$$

CONVEXITÉ

Exemple



$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2 + 3yz$$

$$\text{Hess}(f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 42 > 0$$

f est convexe sur R^3

CONVEXITÉ

- Extremums de fonctions convexes ou concaves

Théorème

Soit A une partie convexe (resp. concave) de R^n

et f : A → R une fonction de classe C^1 convexe (resp. concave) sur A. Alors tout point critique de f sur A est un minimum (resp. maximum) absolu.

Si f est strictement convexe (resp. concave), ce minimum (resp. maximum) absolu est unique.

Optimisation avec une contrainte

- Formulation lagrangienne

Soit le problème d'optimisation : $\max f(x_1,\ldots,x_n)$ sous la contrainte $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$

f est la fonction « objectif »

Lagrangien associé :

$$L(x_1,\ldots,x_n,\ \lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda g(x_1,\ldots,x_n)$$

Remarque

Le lagrangien permet de transformer le problème initial de maximisation sous contrainte en un problème de maximisation sans contrainte portant non plus sur la fonction objectif mais sur le lagrangien.

Optimisation avec une contrainte

- De quelles méthodes dispose-t-on pour étudier la nature des points critiques du lagrangien ?
  - Etudier la convexité (ou la concavité du Lagrangien)
    - Si L est convexe, un point critique est un minimum sous contrainte (ou minimum lié).
    - Si L est concave, un point critique est un maximum sous contrainte (ou maximum lié).
  - Etudier la matrice hessienne du lagrangien
  - Etudier directement le signe de f(x*+h)-f(x*), x* et x*+h satisfaisant l'équation de la contrainte :

    g(x*)=0 et g(x*+h)=0.

Optimisation avec une contrainte

- Etude de la convexité (ou de la concavité) du lagrangien
  - Si f est convexe (resp. concave) et la contrainte est linéaire alors le lagrangien est convexe (resp. concave).
  - Si f est convexe (resp. concave), la contrainte convexe (resp. concave) et le multiplicateur de Lagrange au point critique positif, alors le lagrangien est convexe (resp. concave).
  - Si f est convexe (resp. concave), la contrainte concave (resp. convexe) et le multiplicateur de Lagrange au point critique négatif, alors le lagrangien est convexe (resp. concave).

Optimisation avec une contrainte

- **Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte**

  Soit deux biens x et y de prix respectif 10 et 5.

  Coût des biens : $\mathrm{f(x,y)} = 10x + 5y$

  Soit h une fonction de production des deux biens x et y :

  $$\mathrm{h(x,y)} = 20\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 + \; 15\mathrm{y} - \mathrm{y}^2$$

  devant satisfaire :

  $$\mathrm{h(x,y)} = 55$$

  Lagrangien :

  $$\mathrm{L}(\mathrm{x,y},\lambda) = 10x + 5y + \lambda(20\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 + \; 15\mathrm{y} - \mathrm{y}^2 - 55)$$

Optimisation avec une contrainte

- **Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte**

  Conditions du premier ordre

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 10 + \lambda(20 - 2x) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 5 + \lambda(15 - 2y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20x - x^2 + 15y - y^2 - 55 = 0$$

Optimisation avec une contrainte

- **Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte**

  Recherche des points critiques

$$x = \frac{5+10\lambda}{\lambda} \qquad y = \frac{5+15\lambda}{2\lambda}$$

$$20\frac{5+10\lambda}{\lambda} - \left(\frac{5+10\lambda}{\lambda}\right)^2 + 15\frac{5+15\lambda}{2\lambda} - \left(\frac{5+15\lambda}{2\lambda}\right)^2 - 55 = 0$$

$$405\lambda^2 - 125 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{25}{81}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{9}$$

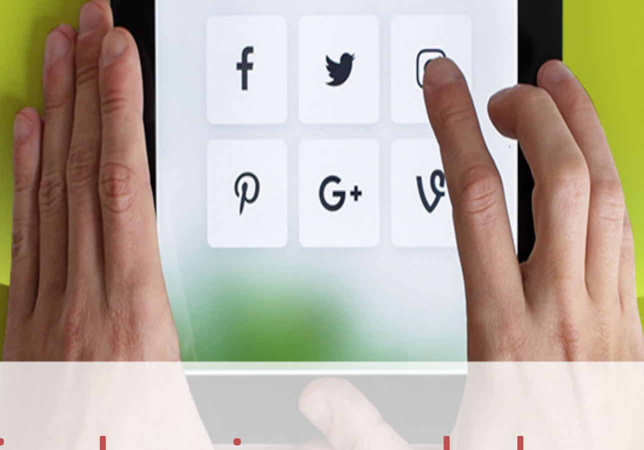
Optimisation avec une contrainte

- **Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte**

  On obtient deux points critiques du lagrangien :

  $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(1, 3, -\frac{5}{9}\right)$ $\quad\quad$ $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(19, 12, \frac{5}{9}\right)$

  Il reste à déterminer leur nature.



Optimisation avec une contrainte

- Matrice hessienne du lagrangien

$$\mathrm{Hess}L_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial x \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial y \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda \partial y} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}$$

Optimisation avec une contrainte

- Matrice hessienne du lagrangien

Pour le point critique

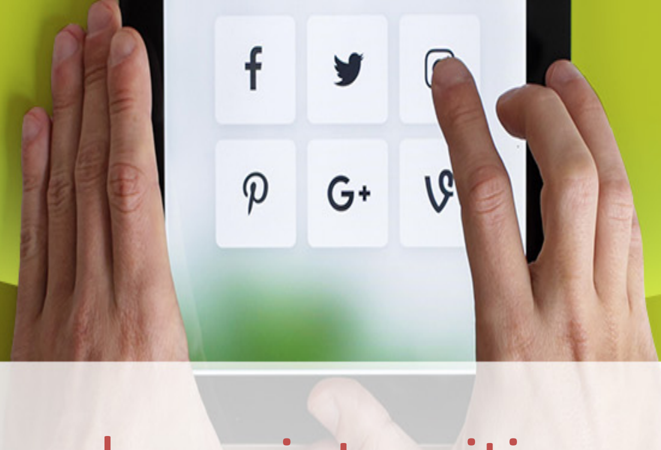
$$(x_1,y_1,\lambda_1) = \left(1,3,-\frac{5}{9}\right)$$

$$\mathrm{Hess}\,L_{(x_1,y_1,\lambda_1)} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & 0 & 18 \\ 0 & \frac{10}{9} & 9 \\ 18 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le point critique

$$(x_2,y_2,\lambda_2) = \left(19,12,\frac{5}{9}\right)$$

$$\mathrm{Hess}\,L_{(x_2,y_2,\lambda_2)} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & 0 & -18 \\ 0 & -\frac{10}{9} & -9 \\ -18 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$



Optimisation avec une contrainte

- Nature des points critiques

Pour étudier la nature des points critiques, nous allons appliquer la méthode dite du hessien bordé.

Optimisation avec une contrainte

- Matrice hessienne bordée du Lagrangien

$$H_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n{}^2} & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} & 0 \end{pmatrix}$$

Optimisation avec p contraintes

- **Conditions du premier ordre**

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\lambda)}{\partial \mathrm{x}_1} = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial \mathrm{g}_i(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\lambda)}{\partial \mathrm{x}_2} = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_2} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial \mathrm{g}_i(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\lambda)}{\partial \mathrm{x}_n} = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_n} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial \mathrm{g}_i(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_n} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\lambda)}{\partial \lambda_i} = \mathrm{g}_i(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n) = 0 \quad 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{p}$$

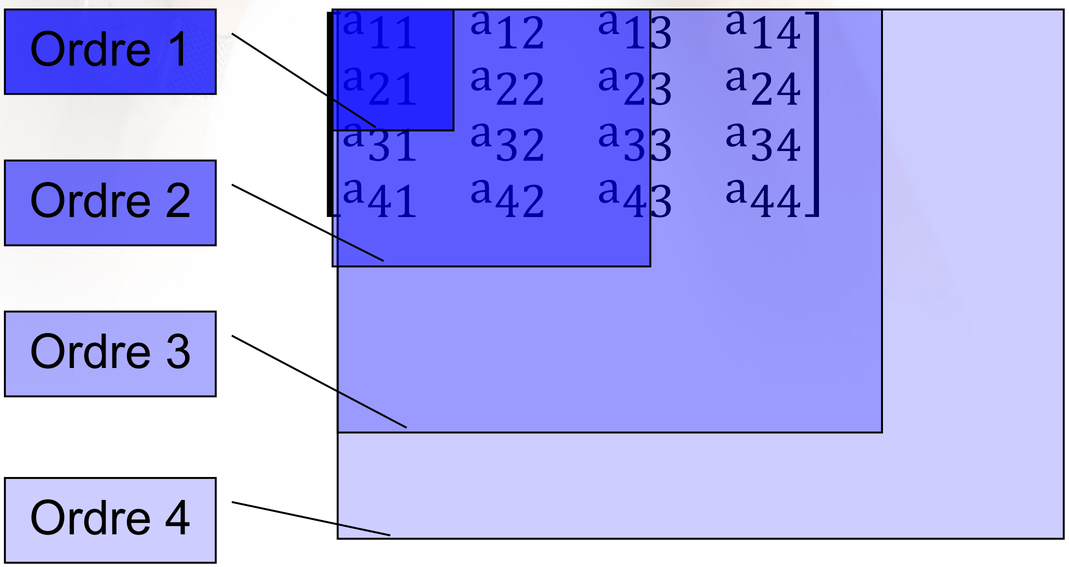
Optimisation avec p contraintes

- Matrice hessienne bordée du Lagrangien

$$H_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial {x_n}^2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Optimisation avec p contraintes

- Mineurs principaux diagonaux d’ordre k d’une matrice carrée



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Optimisation avec p contraintes

- Matrice hessienne du lagrangien calculée en (x^*,λ^*)

Cas de 3 variables et 1 contrainte

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}(x*,\lambda*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}(x*,\lambda*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}(x*,\lambda*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3{}^2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x*,\lambda*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x*,\lambda*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x*,\lambda*) & 0 \end{bmatrix}$$

Optimisation avec p contraintes

- Déterminants emboîtés $\Delta_i B$ $(p+1 \leq i \leq n)$

Cas de 3 variables et 1 contrainte

Mineur principal diagonal d'ordre 2

$$\Delta_2 B = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \text{une contrainte} \\ \left| \begin{array}{c} \frac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x*,\lambda*) \end{array} \right. & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x*,\lambda*) \end{array} & \left. \begin{array}{c} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x*,\lambda*) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x*,\lambda*) \\ 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Optimisation avec p contraintes

- Déterminants emboîtés $\Delta_i B$ $(p+1 \leq i \leq n)$

Cas de 3 variables et 1 contrainte

$$
\Delta_3 B = \begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \text{une contrainte} \\
\multicolumn{4}{c}{
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*,\lambda^*) \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*,\lambda^*) \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x^*,\lambda^*) \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*,\lambda^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x^*,\lambda^*) & 0
\end{vmatrix}}
\end{array}
$$

Mineur principal diagonal d'ordre 3

Optimisation avec p contraintes

- Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local

Théorème

Soit (x^*,λ^*) un point critique du Lagrangien ((x^*,λ^*) vérifie les CPO).

– Si les n-p déterminants $\Delta_i B$ ($p+1 \leq i \leq n$) sont de signe alterné, le premier ayant le signe de $(-1)^{p+1}$, alors x^* est un **maximum local** sous contrainte (ou **lié**) de f.

– Si les n-p déterminants $\Delta_i B$ ($p+1 \leq i \leq n$) ont le signe de $(-1)^p$, alors x^* est un **minimum local** sous contrainte (ou **lié**) de f.

Optimisation avec p contraintes

Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte (suite) $(x_1,y_1,\lambda_1)=(1,3,-5/9)$

Pour le point critique

$$\mathrm{Hess}L_{(x_1,y_1,\lambda_1)}=\begin{pmatrix}10/9 & 0 & 18\\ 0 & 10/9 & 9\\ 18 & 9 & 0\end{pmatrix}\qquad \Delta_2 B=\begin{vmatrix}10/9 & 0 & 18\\ 0 & 10/9 & 9\\ 18 & 9 & 0\end{vmatrix}=-450$$

$$(x_1,y_1,\lambda_1)=(1,3,-5/9)$$

Le point critique est un minimum local.

Optimisation avec p contraintes

Exemple 1 : optimiser le coût sous contrainte (suite)

$(x_2, y_2, \lambda_2) = (19, 12, 5/9)$

Pour le point critique

$$\mathrm{Hess}\,L_{(x_2, y_2, \lambda_2)} = \begin{pmatrix} -10/9 & 0 & -18 \\ 0 & -10/9 & -9 \\ -18 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 B = \begin{vmatrix} -10/9 & 0 & -18 \\ 0 & -10/9 & -9 \\ -18 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 450$$

$$(x_2, y_2, \lambda_2) = (19, 12, 5/9)$$

Le point critique est un maximum local.

Optimisation avec p contraintes

- **Exemple 2 :** optimiser :

$$f(x,y,z) = x^2 + y - 2xy - z + yz$$

sous les contraintes :

$$2x - y - 1 = 0$$

$$x + z - 3 = 0$$

Lagrangien :

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y - 2xy - z + yz + \lambda(2x - y - 1) + \mu(x + y + z - 3)$$

Optimisation avec p contraintes

- **Exemple 2 (suite)**

Conditions du premier ordre

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2y + 2\lambda + \mu = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2x + z - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 + y + \mu = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x - y - 1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x + z - 3 = 0$$

Système S

Optimisation avec p contraintes

- **Exemple 2 (suite)**

  Résolution du système S

  Principe : calculer x, y et z en fonction de λ et μ à l'aide des 3 premières équations. Puis remplacer dans les équations des contraintes x, y et z par les expressions obtenues. On résout alors le système obtenu par rapport à λ et μ. Il reste à calculer x, y et z pour les valeurs trouvées de λ et μ.

  On trouve :

$$(x* = 6/5, y* = 7/5, z* = 9/5, \lambda* = 2/5, \mu* = -2/5)$$

Optimisation avec p contraintes

- **Exemple 2 (suite)**

Matrice hessienne du Lagrangien :

$$H_B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il ya 3 variables et 2 contraintes, donc un seul déterminant à calculer $\Delta_3 B = \det(H_B) = -6 < 0$

$(x* = 6/5, y* = 7/5, z* = 9/5)$ est un maximum lié.