Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre:

1.1 – Limites et continuité

Dans cette section:

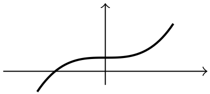
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappels sur les fonctions d'une variable

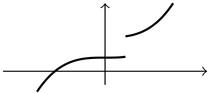
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

- la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;

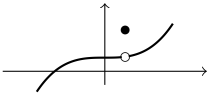
- f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



continue



$\lim\limits_{\textit{gauche}} \neq \lim\limits_{\textit{droite}}$



$\lim\limits_{\textit{gauche}} = \lim\limits_{\textit{droite}} \neq f(a)$

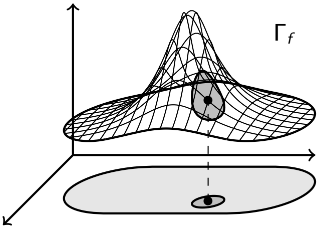
Limites des fonctions

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f.

• La **limite de f en un point** $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand $\vec{x}$ s'approche de $\vec{a}$ par tous les chemins possibles dans D_f.

On la note

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}).}$$



La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

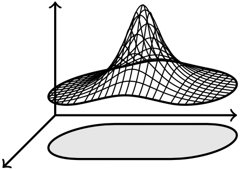
Fonctions continues

- La fonction f est **continue en** $\vec{a} \in D_f$ si

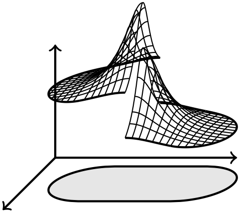
$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).}$$

- La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

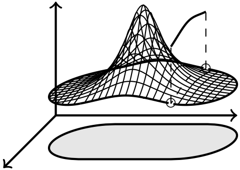
Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !



continue



non continue



non continue

Quelles fonctions sont-elles continues ?

Théorème – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues d'une variable sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

1.2 – Dérivées partielles

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

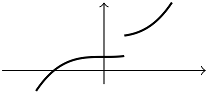
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

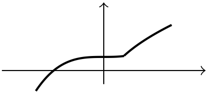
si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x.
La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

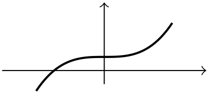
Le contraire est faux:



non continue



continue, non dérivable



dérivable

Dérivées partielles

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de** f **en** $\vec{x} \in D_f$ sont les limites

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n\big) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

définies sur l'ensemble de points $\vec{x}$ où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

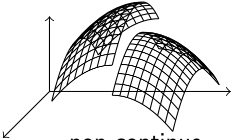
• La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

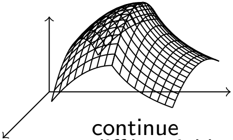
existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

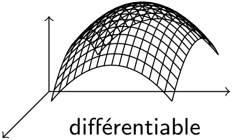
Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!



non continue



continue
non différentiable



différentiable

Exemples de fonctions différentiables

Exemples –

- Pour $\quad f(x,y) = xy^2 + 3x \quad$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour $\quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix} \quad$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

donc g est C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

- Pour $\quad h(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta \quad$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

donc h est C^1 sur $[0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi]$.

1.3 – Dérivées directionnelles

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction** $\vec{v}$ la fonction

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}}$$

Nota –

Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0),$$

où 1 est en $i$ème position,

c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f}$.

Exemples de dérivées directionnelles

Exemples – Cherchons la dérivée directionnelle des fonctions suivantes, dans la direction d'un vecteur générique $\vec{v}$.

- $f(x, y) = xy^2 + 3x$

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Alors, pour tout vecteur de direction $\vec{v} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut, au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = (y^2 + 3)\, u + 2xy\, v.$$

Exemples (suite)

- $g(x,y,z) = (xy^2 + 3x, yz^2)$

La fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle $\partial_{\vec{v}} g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vaut donc

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} g(x,y,z) &= \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} (y^2+3)\, u + 2xy\, v \\ z^2\, v + 2yz\, w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À noter que si on écrit $g = (g_1, g_2)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} g = (\partial_{\vec{v}} g_1, \partial_{\vec{v}} g_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Exemples (suite)

- $h(r, \varphi, \theta) = \varphi^2 + r \sin\theta$

La fonction $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

donc pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle de h est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut

$$\partial_{\vec{v}} h(r, \varphi, \theta) = \sin\theta\, u + 2\varphi\, v + r\cos\theta\, w.$$

Croissance et décroissance des fonctions réelles

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{x} \in D$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on a:*

- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0}$ *alors* *f est croissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*
- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0}$ *alors* *f est décroissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*

De plus:

- forte croissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée positive
- forte décroissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée négative

Nota – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – *La fonction* $f(x,y) = xy^2 + 3x$ *est-elle croissante ou décroissante au point* $(3,1)$*, dans les directions* $(1,1)$*,* $(1,2)$*,* $(1,-1)$ *et* $(1,-2)$ *?*

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (u,v)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \ (y^2+3)\,u + 2xy\,v$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = \ 4\,u + 6\,v$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,2)$
- $\partial_{(1,-1)} f(3,1) = -2 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)} f(3,1) = -8 \quad \Rightarrow f$ décroissante en dir. $(1,-2)$

Exercice

Énoncé (suite) – *Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?*

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

- $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)} f(3,1) = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$

Or $\quad \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{5}} \quad$ car $\quad (10\sqrt{5})^2 = 500 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Exercice

Directions décroissantes –

- $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

- $\|(1,-2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)} f(3,1) = -\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

On a $\quad -\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{5}} \quad$ car ceci se vérifie ssi $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{5}}$,

ce qui est vrai car $\quad (2\sqrt{5})^2 = 20 < (8\sqrt{2})^2 = 128.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f décroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

1.4 – Gradient

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interpretation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$.

• Le **gradient de** f **en un point** $\vec{x} \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit **nabla**.

• Le **gradient de** f est la fonction vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\boxed{\partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}$.

Exemples de gradient

Exemples –

- $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2 + z^2) \quad \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\ \cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x\ \cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de* <u>*deux variables*</u>*, différentiable sur* $D \subset \mathbb{R}^2$*. Pour tout* $\vec{x} \in D$ *on a alors:*

• *Le gradient* $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ *est orthogonal à la ligne de niveau* $L_a(f)$ *avec* $a = f(\vec{x})$*.*

• *Le gradient* $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ *indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe* Γ_f *en* $\vec{x}$*.*

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple – $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow$

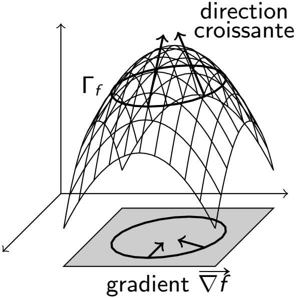
domaine $D_f = \overline{D}_O(1) =$ disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f) =$ cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$, où $a \in [0,1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1) =$ disque unitaire ouvert, et

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x,y) et est dirigé vers le centre du cercle.



1.5 – Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx, dy et dz
- Différentielle des coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \partial_\bullet f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, v_n \end{array}$$

est <u>linéaire dans la variable $\vec{v}$</u>.

Définition – Cette application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ s'appelle **différentielle de f au point** $\vec{x}$.

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n \;= \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).}$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boxed{df_x(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle}$$

• Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'une seule variable x, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{df_x(v) = \Big(f_1'(x)\, v \ , \ldots , \ f_m'(x)\, v \Big)}$$

Exemples de différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(v) = (2x - 5x^4)\, v$.

- $f(x, y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(u, v) = 2xy^3\, u + (3x^2y^2 - 7)\, v.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2, 1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$

$$df_{(1,1)}(u, v) = 2u - 4v$$

$$df_{(1,1)}(2, 1) = 0 \qquad \text{(quelle coincidence !)}$$

Exemples de différentielles (suite)

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$

$$df_{(x,y)}(u,v) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\,u + 2xy\,v \\ v \\ 2x\,u - 2y\,v \end{pmatrix}$$

- $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y,z)}(u,v,w) &= u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2\,u + 2xy\,v \\ z^3\,v + 3yz^2\,w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications linéaires élementaires

Remarque –

• Les n applications linéaires (pour $i = 1, ..., n$)

$$\boxed{dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{v} = (v_1, ..., v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i}$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

• Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_i:

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

• Il n'y a pas n applications linéaires

$$''dx_i'' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, ..., n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\boxed{\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & ! \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df.

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$\boxed{df_{\vec{x}} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; dx_n.}$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$\boxed{df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\; dx_n.}$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad df_x = (2x - 5x^4)\, dx.$

Par exemple: $df_1 = -3\, dx$.

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad df_{(x,y)} = 2xy^3\, dx + (3x^2y^2 - 7)\, dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2\, dx - 4\, dy$.

- $f(x,y,z) = x^2y^3z - 7yz^2 \quad \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\ dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\ dy + (x^2y^3 - 14yz)\ dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2\ dx - 4\ dy - 13\ dz$

Exercice

Énoncé – *Pour la fonction* $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$*:*

1) *Déterminer l'ensemble* D *où* f *est différentiable.*
2) *Déterminer la différentielle en tout point* $(x,y) \in D$*.*
3) *Calculer* $df_{(2,0)}$ *en les vecteurs* $\vec{\imath} = (1,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1)$, $\vec{v} = (1,1)$ *et* $\vec{u} = (3,-3)$*.*

Réponse –

1) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}\right\}$

portion du plan au-dessus de la parabole d'éq.

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercice (suite)

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dy \\ &= \frac{-2x}{1-x^2+5y}\ dx + \frac{5}{1-x^2+5y}\ dy \end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\ dx + \frac{5}{1-4}\ dy = \frac{4}{3}\ dx - \frac{5}{3}\ dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{\imath}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \frac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{\jmath}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -\frac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1,1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3,-3) = \frac{4}{3}\ 3 - \frac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercice : dx, dy, dz, $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Énoncé – *On note (x, y, z), (ρ, φ, z) et (r, φ, θ) les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice (suite)

Montrer que

$$i)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi \\ \\ dy = \sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi \\ \\ dz = dz \end{cases}$$

$$i')\ \begin{cases} d\rho = \cos\varphi\ dx + \sin\varphi\ dy \\ \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ \\ dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *cylindriques*

Exercice (suite)

$$ii)\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ \\ dy = \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ \\ dz = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{array}\right.$$

$$ii')\left\{\begin{array}{l} dr = \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ \\ r\sin\theta\ d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ \\ rd\theta = \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{array}\right.$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite)

$$(iii)\begin{cases} dr = \sin\theta \; d\rho + \cos\theta \; dz \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ r d\theta = \cos\theta \; d\rho - \sin\theta \; dz \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} d\rho = \sin\theta \; dr + \cos\theta \; d\theta \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ dz = r\cos\theta \; dr - r\sin\theta \; d\theta \end{cases}$$

Formules de passage *cylindriques* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite et fin)

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* → *cartésiennes* donne les formules i):

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\, dz \\
&= \cos\varphi\, d\rho - \rho \sin\varphi\, d\varphi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz \\
&= \sin\varphi\, d\rho + \cos\varphi\, d\varphi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\, dz \\
&= dz
\end{aligned}
$$

Les formules i') s'obtiennent en inversant le système i). On procède dela même façon our les autres formules.

1.6 – Jacobienne

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se représente come une matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$
\begin{aligned}
L(\vec{v}) &= A\ \vec{v} \quad \text{(produit matrice par vecteur)} \\[1em]
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\[1em]
&= \begin{pmatrix} a_{11}\ v_1 + \cdots + a_{1n}\ v_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ v_1 + \cdots + a_{mn}\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D.

• La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\ \vec{v}} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(f_1, ..., f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$\boxed{J_f(\vec{x}) \ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).}$$

• Si la matrice Jacobienne est carrée $(n = m)$, son détérminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Exemples de matrices jacobiennes

Exemples –

• Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y,$

on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

une matrice ligne.

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (2t, t^3 + 1),$

on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

une matrice colonne, c'est-à-dire un vecteur.

Exemples de matrices jacobiennes

- Si $\begin{array}{l} h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big) = (u^2 v, 3u), \end{array}$

on a

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u,v) = \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial v} = -3u^2$$

- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \sin z,$

on a

$$J_g(z) = \big(g'(z)\big) = \big(\cos z\big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, g(z) = g'(z) = \cos z \in \mathbb{R}$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $\quad h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

$$J_h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $\quad h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

$$J_h(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi, z) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Sphériques :** $h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h &= \cos\theta\Big(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\qquad - r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par*

$$f(x,y,z) = z \sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy)\ dx + xz \cos(xy)\ dy + \sin(xy)\ dz$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$df_{(x,y,z)}(u, v, w) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} w$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

1.7 – Resumé sur les dérivées

Dans cette section:

- Resumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Resumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u> diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles** = fonctions réelles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$

- **dérivées directionelles** = fonctions réelles

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient** = fonction vectorielle

$$\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n} \qquad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires

$$\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

- **Jacobienne** = fonction à valeur matrices ligne

$$\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est fonction <u>vectorielle</u> diff. sur D:

- **dérivées partielles**
  = fonctions vectorielles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$$

- **dérivées directionelles**
  = fonctions vectorielles

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

$$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'est pas défini

- **différentielle**
  = fonction à valeur
  applications linéaires

$$\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

mais les "dx_i" n'existent pas

- **Jacobienne**
  = fonction à valeur
  dans les matrices

$$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1.8 – Règle de la chaîne

Dans cette section:

- Dérivées de la somme et du produit de fonctions
- Dérivées de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivées de la somme de fonctions et du produit par scalaire

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :*

- $$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}} \qquad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n$$

Par conséquent $\overrightarrow{\nabla}(f+g) = \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g$ *(si $m=1$),*

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

- $$\boxed{\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}} \qquad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n \qquad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f$ *(si $m=1$),*

$$d(\lambda f) = \lambda\, df, \qquad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivées du produit de fonctions

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles différentiables, on a la* **règle de Leibniz***:*

- $\boxed{\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x_i}}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$

Par conséquent $\quad \vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big) g + f \big(\vec{\nabla} g\big),$

$$d(fg) = \big(df\big) g + f \big(dg\big),$$

$$J_{fg} = \big(J_f\big) g + f \big(J_g\big)$$

Exemple : règle de Leibniz

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2\ e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) = \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial y}\ dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) &= d\big(xy^2\big)\ e^{xy} + xy^2\ d\big(e^{xy}\big) \\ &= \big(y^2\ dx + 2xy\ dy\big)\ e^{xy} \\ &\qquad +xy^2\ \big(y\ e^{xy}\ dx + x\ e^{xy}\ dy\big) \\ &= \big(y^2 + xy^3\big)\ e^{xy}\ dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\ e^{xy}\ dy \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$g = (g_1, ..., g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \textit{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a la **règle de la chaîne** *:*

- $$\boxed{\frac{\partial \big(g \circ f\big)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})}$$

pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $j = 1, ..., p$,.

Par conséquent, on a aussi :

$d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_x$ *(composition d'applications linéaires)*

$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ *(produit de matrices)*

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 1 –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = z$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$

$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto g\big(f(x,y)\big)$

on a

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right.}$$

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = \tfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}$$

$$J_{g \circ f}(x,y) = \tfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y)$$

Exercice: cas usuel 1

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $F(x,y) = \ln f(x,y)$, *calculer* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Réponse – Si on pose $g(z) = \ln z$, on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{dg}{dz}(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{dg}{dz}(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - 2y}{f(x,y)}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 2 –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$

$f \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

$$d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f \circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

Exercice: cas usuel 2

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $G(u,v) = f(v, uv^2)$, *calculer* $\frac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial G}{\partial v}$.

Réponse – Si on pose $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, c. à d. $x = v$ et $y = uv^2$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= 2v\,uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2) \cdot v^2 \\
&= (1-2u)v^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&= 2v\,uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2) \cdot 2uv \\
&= 4uv^2(v-u)
\end{aligned}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 3 –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

$f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$

on a

$$\boxed{\frac{d\,\big(f \circ \gamma\big)(t)}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{y}(t)}$$

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f \circ \gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

Exercice: cas usuel 3

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $H(t) = f(t^2, 3t)$, *calculer* $\frac{d\, H(t)}{d\, t}$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$,

c. à d. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \end{cases}$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\, H(t)}{d\, t} &= \frac{d\,(f \circ \gamma)(t)}{d\, t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)\ \dot{y}(t) \\
&= 2t^2\, 3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\
&= 24t^4 - 18t
\end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x, y) = xy^2$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $g'(z) = \sqrt{z}$.
Calculer $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2)\,\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} \\ &= \sqrt{xy^2}\; y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2)\,\frac{\partial (xy^2)}{\partial y} \\ &= \sqrt{xy^2}\; (x^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

2) Soit $(x, y) = h(u, v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne*

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h.$ *Calculer* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v).$

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 0 + 2x(u,v)y(u,v)\, v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 1 + 2x(u,v)y(u,v)\, 2uv \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes. Puisque

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned}
J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\
&= \begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 & \quad y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2v^2\, x(u,v)y(u,v) & \quad y(u,v)^2 + 4uv\, x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t*. Calculer la dérivée en* t *de la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$*.*

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{y}(t) \\ &= y(t)^2 \;\; \dot{x}(t) + 2\, x(t) y(t)) \;\; \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – *Soient* (x, y, z) *les coordonnées cartesiennes des points de* $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) *les coordonnées cylindriques et* (r, φ, θ) *les coordonnées sphériques. On rappelle que*

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad et \quad \begin{cases} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{cases}$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ *et* $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ *satisfont aux formules suivantes :*

Exercice (suite)

$$(i)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial \rho} & = & \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & = & -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & = & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$(i')\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial x} & = & \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & = & \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & = & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

Exercice (suite)

$$(ii)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} &= \cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}\right.$$

$$(ii')\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}\right.$$

Exercice (suite)

$$
(iii) \left\{ \begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial r} & = & \sin\theta \ \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta \ \frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\frac{1}{r} \ \frac{\partial}{\partial \theta} & = & \cos\theta \ \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta \ \frac{\partial}{\partial z}
\end{array} \right.
$$

$$
(iii') \left\{ \begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial \rho} & = & \sin\theta \ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial}{\partial z} & = & \cos\theta \ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{array} \right.
$$

Exercice (suite)

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \\
&= \cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -r\sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

Exercice (suite)

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho \sin\varphi\ \ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

- On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').

- On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

1.9 – Hessienne

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre k de f** sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\boxed{\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.}$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y), on a:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$

• La fonction f est **de classe** C^k si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe** C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz

Théorème – *Si les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent et sont continue en un point* $\vec{x}$, *pour tout* $i, j = 1, ..., n$, *alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})} \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*)*
<u>*ayant le même nombre de dérivées en chaque* x_i</u>*,*
coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $f(x,y) = x^3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

L'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – *Soient $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le fonction $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ est solution de l'***équation des ondes**

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0} \qquad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\
&= F'(x-ct) + G'(x+ct) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\
&= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct)
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

d'où

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x}\\
&= F''(x-ct) + G''(x+ct),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\
&= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Matrice Hessienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{x}$.

• La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$\boxed{H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

• Son déterminant s'appelle le **Hessien** de f

$$\boxed{\mathrm{Hess}\, f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})}$$

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $\quad g(x,y,z) = x\sin y + y\sin z, \quad$ on a

$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y \,\Big(-y\cos y\sin z - 0\Big) \\ &= y\cos^2 y\sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Montrer que le Hessien de la fonction*

$$f(x,y) = \sin(x-y)$$

est nul en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

• Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x})}$$

• La fonction f est dite **harmonique** si

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = 0} \qquad \text{en tout point } \vec{x} \in D.$$

Interprétation géométrique du Laplacien

Proposition – *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Si*

- C *est un carré de taille* $h \times h$ *contenu dans* D*, et*
- $\mu(f, C)$ *est la valeur moyenne de* f *sur* C*,*

alors, pour tout point $(a, b) \in C$*, on a*

$$\boxed{\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\, \Delta f(a, b) + O(h^4)}$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\mu(f, C) = \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\iint_C f(x, y)\, dx\, dy.$

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – *Trouver les valeurs de* $c \in \mathbb{R}^*$ *pour lesquelles la fonction* $u(x,t) = x^2 - c^2 t^2$ *est harmonique.*

Réponse – On a

$$\overrightarrow{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.*

1) Déterminer le Laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice (suite)

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta F(x,y) &= \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\quad \Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse – En termes de f, l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

Exercice (suite)

- Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$(\mathrm{E}) \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\, f'(r) = r$$

- Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f.

- Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$(\mathrm{E2^*}) \qquad g_0'(r) + \frac{1}{r}\, g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

Exercice (suite)

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{(E2*)} \quad g_0(r) = \lambda \ e^{-\int \frac{1}{r} \ dr} = \lambda \ e^{-\ln r} = \lambda \ e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$\text{(E2)} \quad g_p'(r) + \frac{1}{r} \ g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $\quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $\quad g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$\text{(E1)} \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.10 – Taylor

Dans cette section:

- Dévéloppement de Taylor
- Approximation et erreur relative

Théorème de Taylor

Théorème de Taylor –
Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point $\vec{a}$ peut être approximée en tout point $\vec{x}$ proche de $\vec{a}$ par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appellé **polynôme de Taylor**, *avec coefficients dépendant seulement des dérivées de f en $\vec{a}$.*

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui contient a, alors pour tout $x \in I$ on a

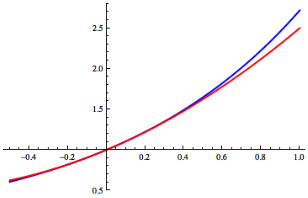
$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

Par exemple, voici le graphe de

$$f(x) = e^x \quad \text{(en bleu)}$$

et celui de son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$,

$P(x) = 1 + x + x^2/2$ (en rouge).



Formule de Taylor en deux variables

Théorème de Taylor – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un disque $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a,b).
Alors, pour tout $(x,y) \in D$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \\ &+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \\ &+ o\big(||(x-a,y-b)||^2\big) \end{aligned}}$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro plus vite de $h \to 0$.

Écritures alternatives:

$$\text{terme à l'ordre 1} \quad = df_{(a,b)}(x-a, y-b) = J_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$\text{terme à l'ordre 2} \quad = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple – Soit $\quad f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1} \quad$ et $\quad (a,b) = (0,0)$.

On calcule $\quad f(0,0) = 1, \quad$ puis

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\quad \dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big).$

Exercice

Énoncé – *La pression P d'un gaz parfait est fonction de la temperature T et du volume V selon la loi*

$$P(T, V) = nR\,\frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T, V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une **erreure relative**

$$\left|\frac{T - T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{V - V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0, T_0)$ de la pression?

Exercice (suite)

Réponse – On cherche une borne supérieur pour $\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right|$, où $P = P(T,V)$ et $P_0 = P(T_0,V_0)$.

Pour cela, on utilise le dévéloppement de Taylor de $P(T,V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0,V_0):

$$\begin{aligned} P-P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) \\ &= \tfrac{\partial P}{\partial T}(T_0,V_0)\ (T-T_0) + \tfrac{\partial P}{\partial V}(T_0,V_0)\ (V-V_0) \\ &= nR\,\tfrac{T-T_0}{V_0} - nR\,\tfrac{T_0(V-V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P-P_0}{P_0} \simeq nR\,\frac{T-T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{V-V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right| \leqslant \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%.$$

1.11 – Extrema locaux

Dans cette section:

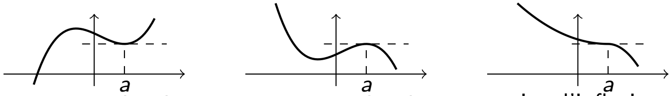
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols
- Points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).

- Que se passe-t-il si $\quad f'(a) = 0 \quad$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



minimum local — maximum local — point d'inflexion

Pour savoir lequel, on regarde la convexité (*minimum local*) ou la concavité (*maximum local*) donnée par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).

- Que se passe-t-il si $\quad f''(a) = 0 \quad$ (*point plat*) ?

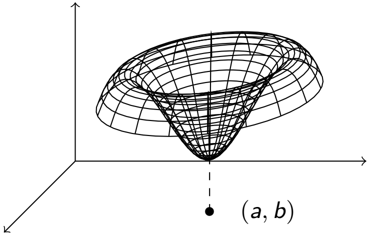
Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe).
Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

Minimum et maximum locaux

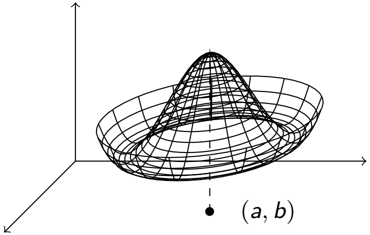
Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

• soit un **minimum local**: $\boxed{f(a, b) < f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b),

• soit un **maximum local**: $\boxed{f(a, b) > f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b).



minimum local



maximum local

Points critiques et critère pour extrema

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 en (a, b), le signe de ses dérivées en (a, b) permet de trouver les extrema locaux.

Définition – On dit que (a, b) est un **point critique** de f si

$$\boxed{\vec{\nabla} f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Proposition – *Si (a, b) est un point critique de f, le plan tangent au graphe de f au point $\big(a, b, f(a, b)\big)$ est horizontal.*

Théorème – *Soit (a, b) un point critique de f.*

Si $\boxed{\det H_f(a, b) > 0}$ *alors (a, b) est un extremum local:*

- *c'est un minimum local si* $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0}$
- *c'est un maximum local si* $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0}$

Exemple de minimum local

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

a exactement un minimum local en $(0,0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

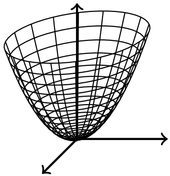
ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

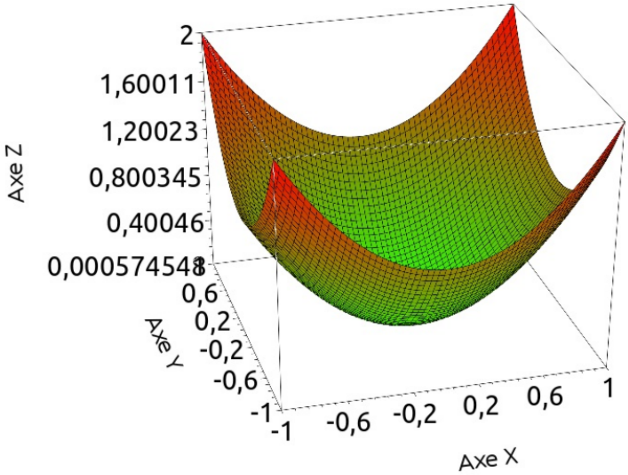
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \det H_f(0,0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{cases}$$

ainsi $(0,0)$ est un minimum local.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

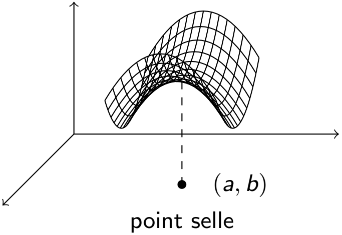


Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Points selle

En un point critique, la fonction f a un plan tangent horizontale. Si le point n'est pas un extremum local, quelle est la forme de f ?

Définition – Soit (a, b) un point critique de la fonction f.
Si en (a, b) la fonction f a un minimum dans une direction et un maximum dans une autre, le point (a, b) s'appelle **point col** ou **point selle**:



Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f.

Si $\boxed{\det H_f(a, b) < 0}$ alors (a, b) est un point selle.

Exemple de point selle

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

a exactement un point selle en $(0,0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

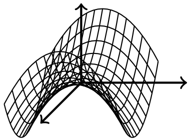
ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

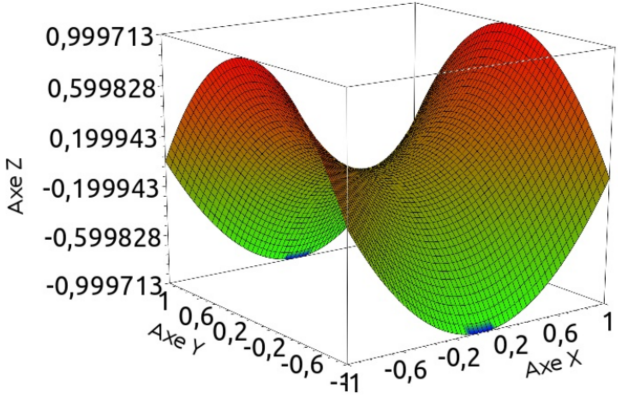
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0,0) = -4 < 0$$

ainsi $(0,0)$ est un point col.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

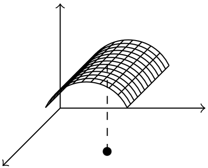
Points plats

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f. Par exclusion, on dit que (a, b) est un **point plat** si

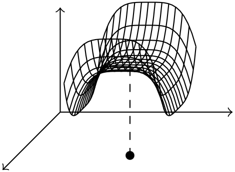
$$\boxed{\det H_f(a, b) = 0}$$

Un tel point se trouve au croisement de directions où f a

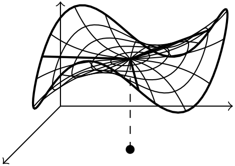
- soit au moins une direction plate (cylindre),
- soit un minimum et un maximum au même temps (selle),
- soit des inflexions (selle de singe).



point plat
de type cylindre



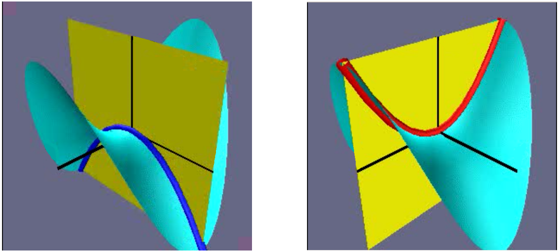
point plat
de type selle



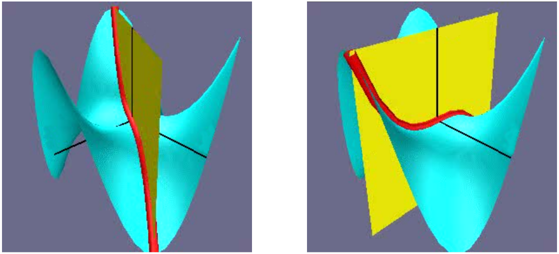
point plat
de type selle de singe

On distingue ces types avec les dérivées d'ordre supérieur à 2.

Points col et points plat



Un point col non plat ($z = x^2 - y^2$) ou plat ($z = x^4 - y^4$)



Un point plat à selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – *Déterminer les points critiques de la fonction*

$$f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$$

et, si possible, leur nature.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, f a

- un <u>cercle de points critiques</u> d'équation $x^2+y^2=2$
- et un <u>point critique isolé</u> de coordonnées $(0,0)$.

Exercice (suite)

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0,0)$, on a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

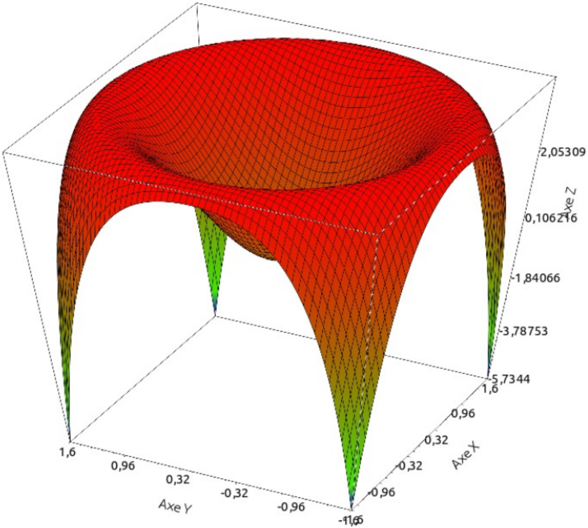
donc $(0,0)$ est un <u>minimum local</u>.

- Pour les points (x,y) tels que $x^2+y^2=2$, on a

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2+y^2=2$ sont <u>plats</u>.

Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$



Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$