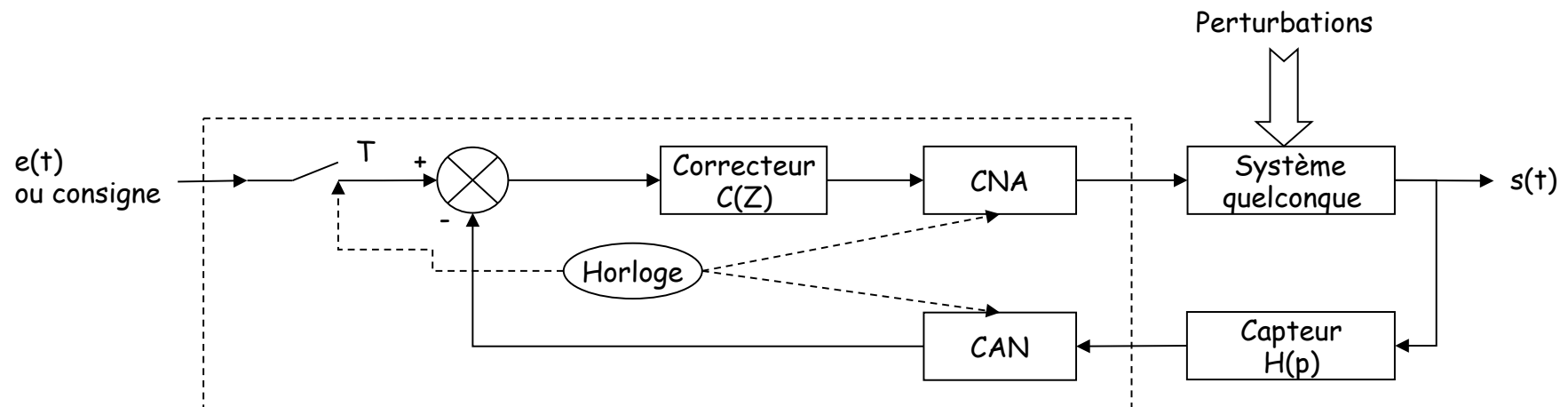


Commande numérique des SLI par retour de sortie

Commande numérique des SLI par retour de sortie (Systèmes asservis échantillonnés SAE)

En commande numérique c' est le calculateur qui assure les fonctions de comparaison et de correction. Les avantages de ce type d'asservissement sont multiples :

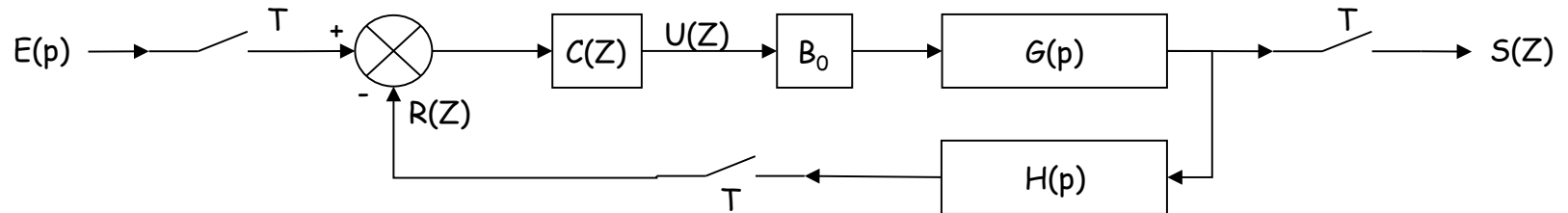
- Souplesse de correction = on peut modifier la correction sans modification au niveau "hardware"
- Possibilité de commande adaptative si les caractéristiques du systèmes changent (cas des systèmes non stationnaires)
- Possibilité d'identification sans ouverture de boucle par changement de la consigne
- La consigne peut elle même être générée par le calculateur



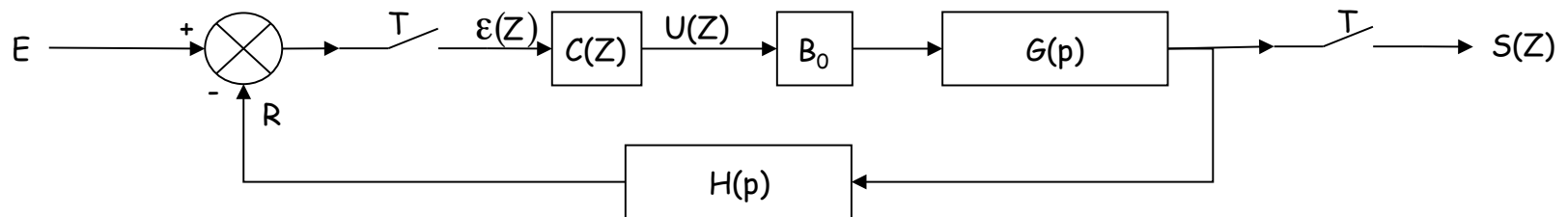
L'horloge interne définit la période d'échantillonnage ($T \ll \text{cte de temps du système}$)

V-1 Analyse des systèmes asservis échantillonnés

1 Schéma fonctionnel et transmittance associés à un SAE



Ce schéma peut aussi se ramener au schéma suivant dit à échantillonnage d'erreur.



a Fonction de transfert en BO (FTBO)

$$T(Z) = \frac{R(Z)}{\varepsilon(Z)} = C(Z) \overbrace{B_0 G H}^{T_{nc}(Z)} \quad \text{avec} \quad \overbrace{B_0 G H}^{T_{nc}(Z)} = (1 - Z^{-1}) T Z \left[\frac{GH}{p} \right]$$

b Fonction de transfert en BF (FTBF)

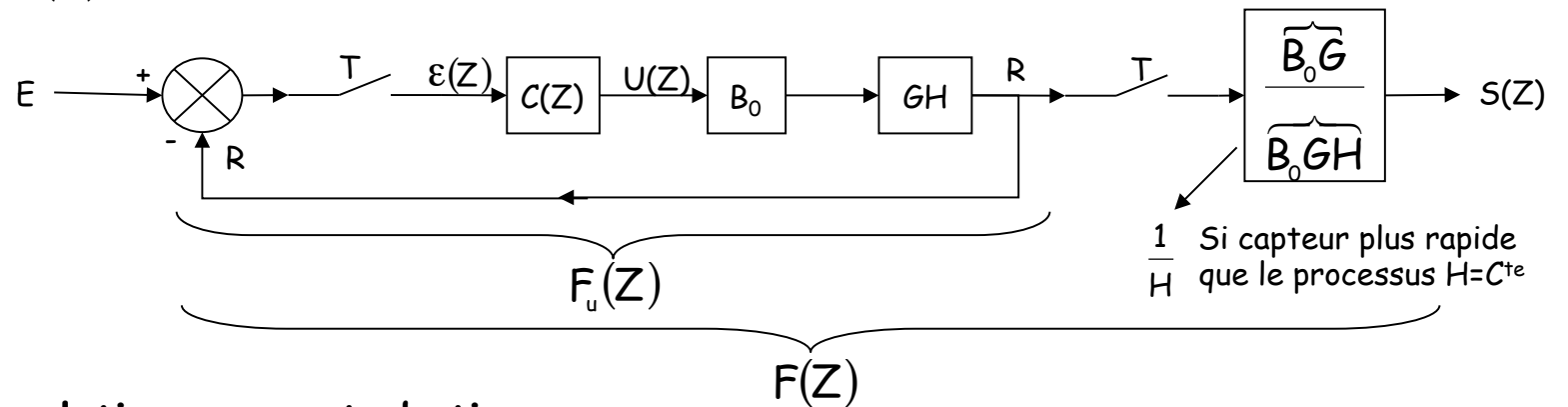
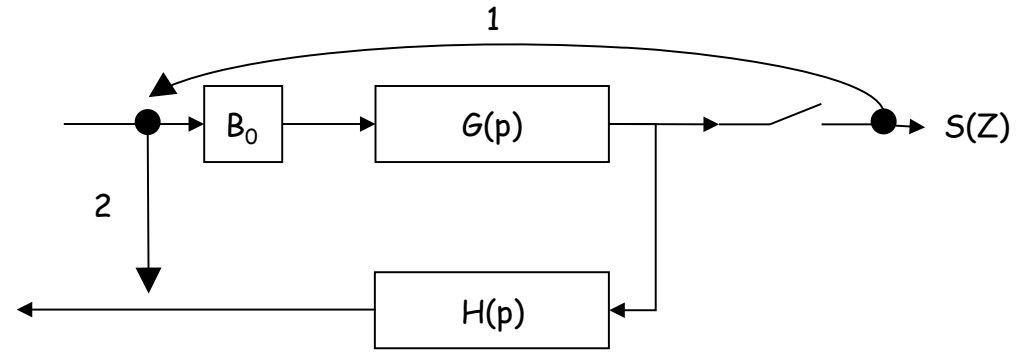
$$F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{C(Z) \overbrace{B_0 G}^{F_u(Z)}}{1 + C(Z) \overbrace{B_0 G H}^{T_{nc}(Z)}}$$

Pour faire apparaître $F_u(Z)$ (retour unitaire), on ramène $S(Z)$ avant le bloqueur, puis après H (pour ne pas couper une chaîne en p)

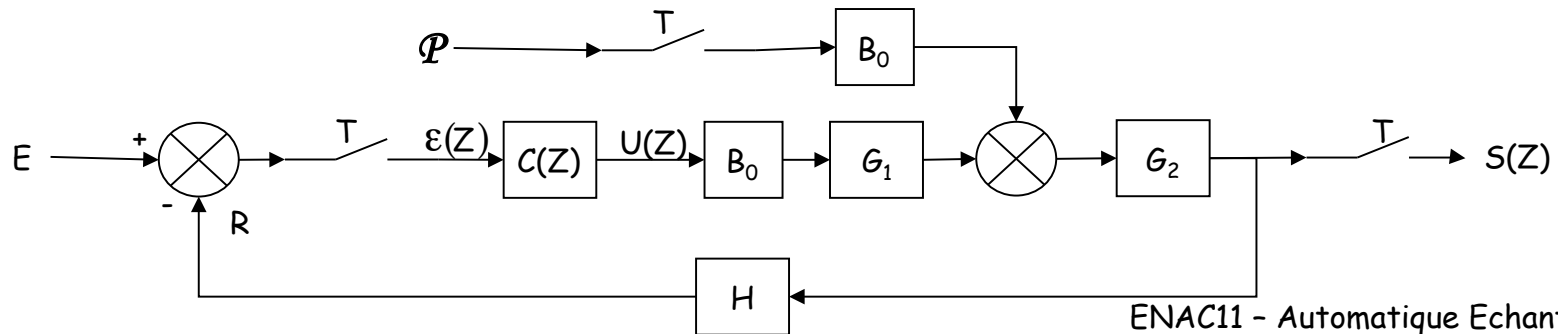
$$\Rightarrow F(Z) = \frac{C(Z) \overbrace{B_0 G H(Z)} \quad \overbrace{B_0 G}}{1 + C(Z) \overbrace{B_0 G H(Z)} \quad \overbrace{B_0 G H}}$$

$$F_u(Z) = \frac{R(Z)}{E(Z)} \quad \frac{S(Z)}{R(Z)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{H}$$

$$\Rightarrow F_u(Z) = \frac{R(Z)}{E(Z)} = \frac{T(Z)}{1 + T(Z)}$$



c Transmittance relative aux perturbations



La perturbation intervient analogiquement et n'est pas exploitable, elle sera approximée par une version discrétisée par un bloqueur d'ordre 0 (B_0).

On démontre que :

$$\Rightarrow \left[\frac{S(Z)}{P(Z)} \right]_{E=0} = \frac{\overbrace{B_0 G_2} + \overbrace{B_0 G_2} C(Z) \overbrace{B_0 G_1 G_2} H(Z) - C(Z) \overbrace{B_0 G_1 G_2} (Z) \overbrace{B_0 G_2} H(Z)}{1 + C(Z) \overbrace{B_0 G_1 G_2} H(Z)}$$

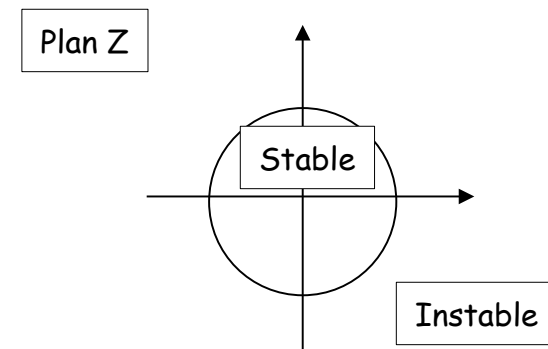
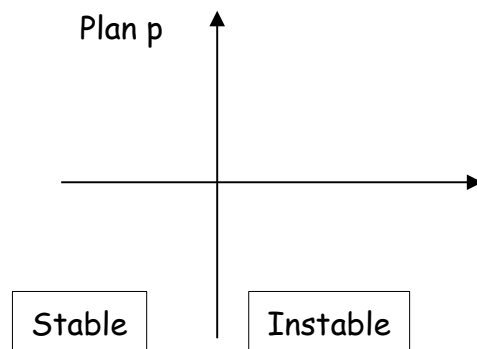
Si le capteur est rapide : $H=Cte$

$$\Rightarrow \left[\frac{S(Z)}{P(Z)} \right]_{E=0} = \frac{\overbrace{B_0 G_2}}{1 + C(Z) \overbrace{B_0 G_1 G_2} (Z) H}$$

Stabilité et précision des SAE

Il n'existe pas de représentation graphique pour les transmittances en Z donc pas d'équivalent du critère de Nyquist pour les SAE.

Dans le plan p , un système est stable si les pôles de sa transmittance sont à partie réelle négatives. On peut transposer cette propriété au plan Z , les pôles de la transmittance en Z doivent-êtré tel que $|Z_p| < 1$



Cependant il est toujours possible d'utiliser la transformation bilinéaire $W = \frac{Z-1}{Z+1}$ ($Z = \frac{1+W}{1-W}$) qui fait passer de l'intérieur du cercle unité en Z au 1/2 plan gauche en W , pour obtenir la FTBO et appliquer le critère de Black, ou la FTBF et appliquer le critère de Routh-Hurwitz.

Exemple d'application :

$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$$\text{avec } D(Z) = Z^2 + (0,37K - 1,37)Z + 0,37 + 0,26K$$

$$D(W) = (2,74 - 0,11K)W^2 + (1,26 - 0,52K)W + 0,63K$$

W^2	$2,74 - 0,11K$	$0,63K$
W^1	$1,26 - 0,52K$	0
W^0	$0,63K$	

$$\Rightarrow K < \frac{2,74}{0,11} = 24,9$$

$$\Rightarrow K < \frac{1,26}{0,52} = 2,42$$

$$\Rightarrow K > 0$$

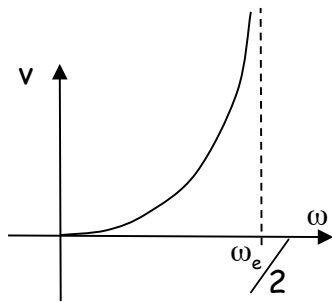
Système stable si $0 < K < 2,42$

a Représentation graphique en W

$$W = \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT} + 1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right) / 2j}{\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right) / 2} j = j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Analyse harmonique $p \rightarrow j\omega$
 Par analogie $W = jv$ } $v = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
v est une pulsation fictive

v joue le rôle d'une pulsation appelée pulsation fictive et est telle que : $v = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$



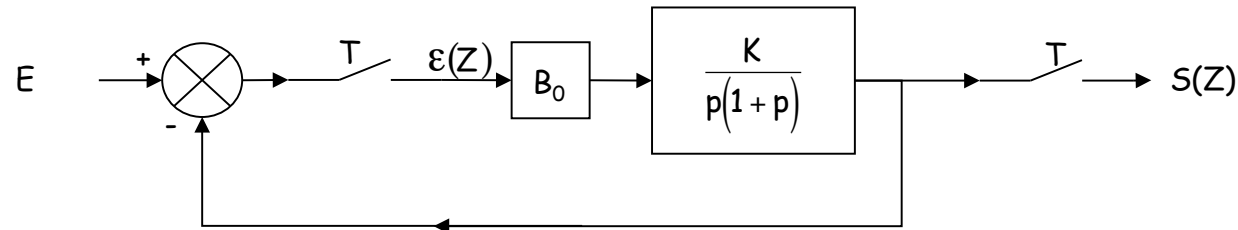
avec $\omega \in \left[0, \frac{\omega_e}{2}\right]$ } $v \in [0, \infty]$ } pour $\omega = \frac{\omega_e}{2} \Rightarrow Z = e^{j\omega T} \Big|_{\omega=\omega_e/2} = e^{j\pi} = -1$
 $\Rightarrow \frac{\omega T}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Conséquence: quand $v \rightarrow \infty \Leftrightarrow Z \rightarrow -1 \Rightarrow T(Z) \rightarrow T(-1)$ qui est réel positif ou négatif

Toutes les représentations graphiques de Bode en W de la FTBO se terminent par une horizontale pour les gains et pour la phase.

Exemple:

Etudier la stabilité en fonction de K du système échantillonné suivant :



$$\begin{aligned}
 \text{FTBO : } T(Z) &= K(1 - Z^{-1}) \mathcal{TZ} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right] \quad \mathcal{TZ} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right] = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ (p=0)^2 \\ p=-1}} \text{résidus} \left[\frac{1}{p^2(1+p)(1 - Z^{-1}e^{pT})} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{p^2(1 - Z^{-1}e^{pT})} \right]_{p=-1} + \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(1+p)(1 - Z^{-1}e^{pT})} \right) \right]_{p=0} \\
 &= \frac{Z}{Z - e^{pT}} - \frac{Z(Z - T - 1)}{(Z - 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(Z) &= K(1 - Z^{-1}) \left[\frac{Z}{Z - e^{pT}} - \frac{Z(Z - T - 1)}{(Z - 1)^2} \right] \\
 &= K \left[\frac{Z - 1}{Z - e^{pT}} - \frac{Z - (T + 1)}{Z - 1} \right]
 \end{aligned}$$

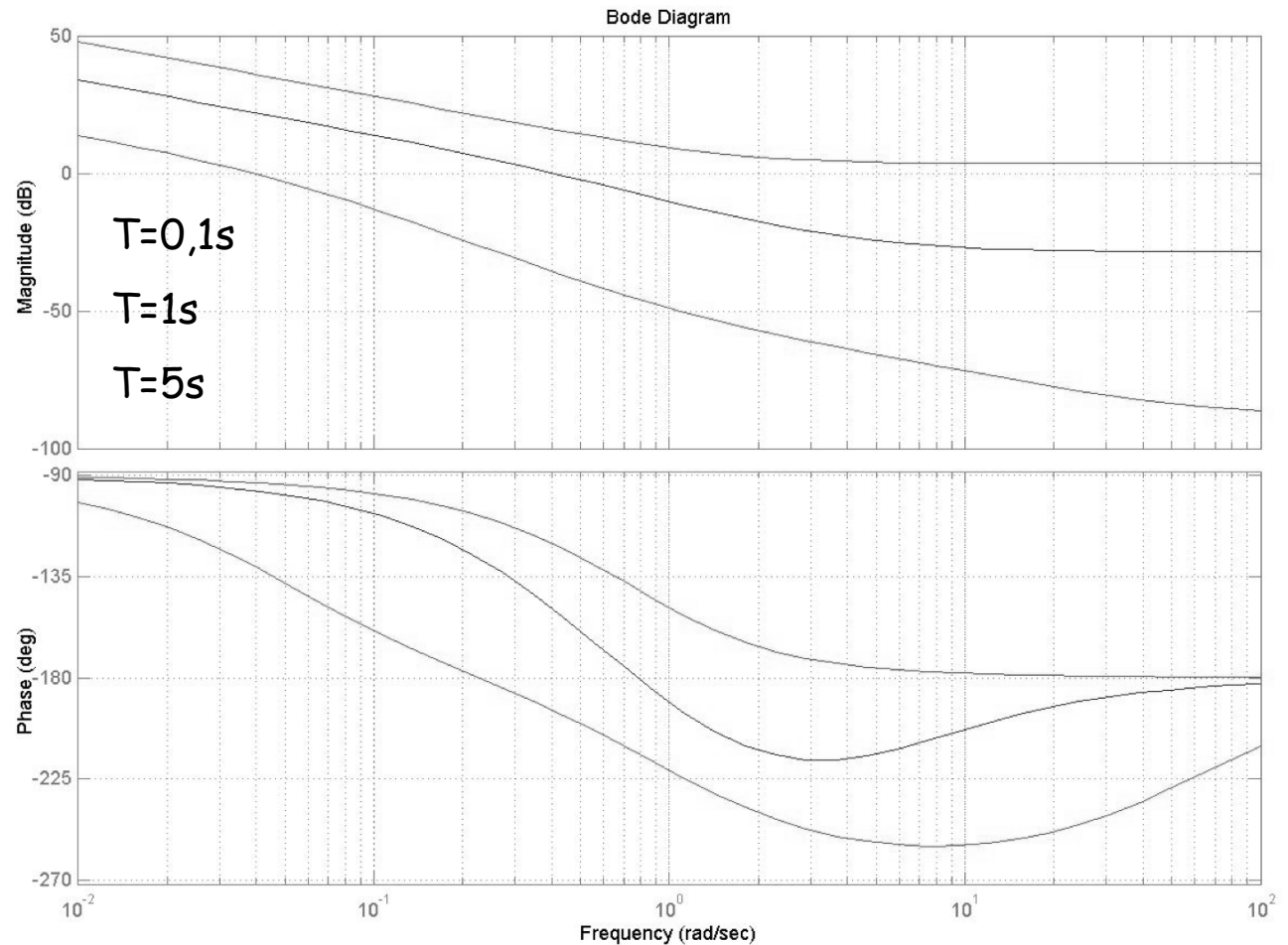
Faisons le changement de variable de la transformation bilinéaire : $Z = \frac{1+W}{1-W}$

$$T(W) = \frac{KT}{2} \frac{(1-W) \left(1 + W \frac{T-2+(2+T)e^{-T}}{T(1-e^{-T})} \right)}{W \left(1 + W \frac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}} \right)}$$

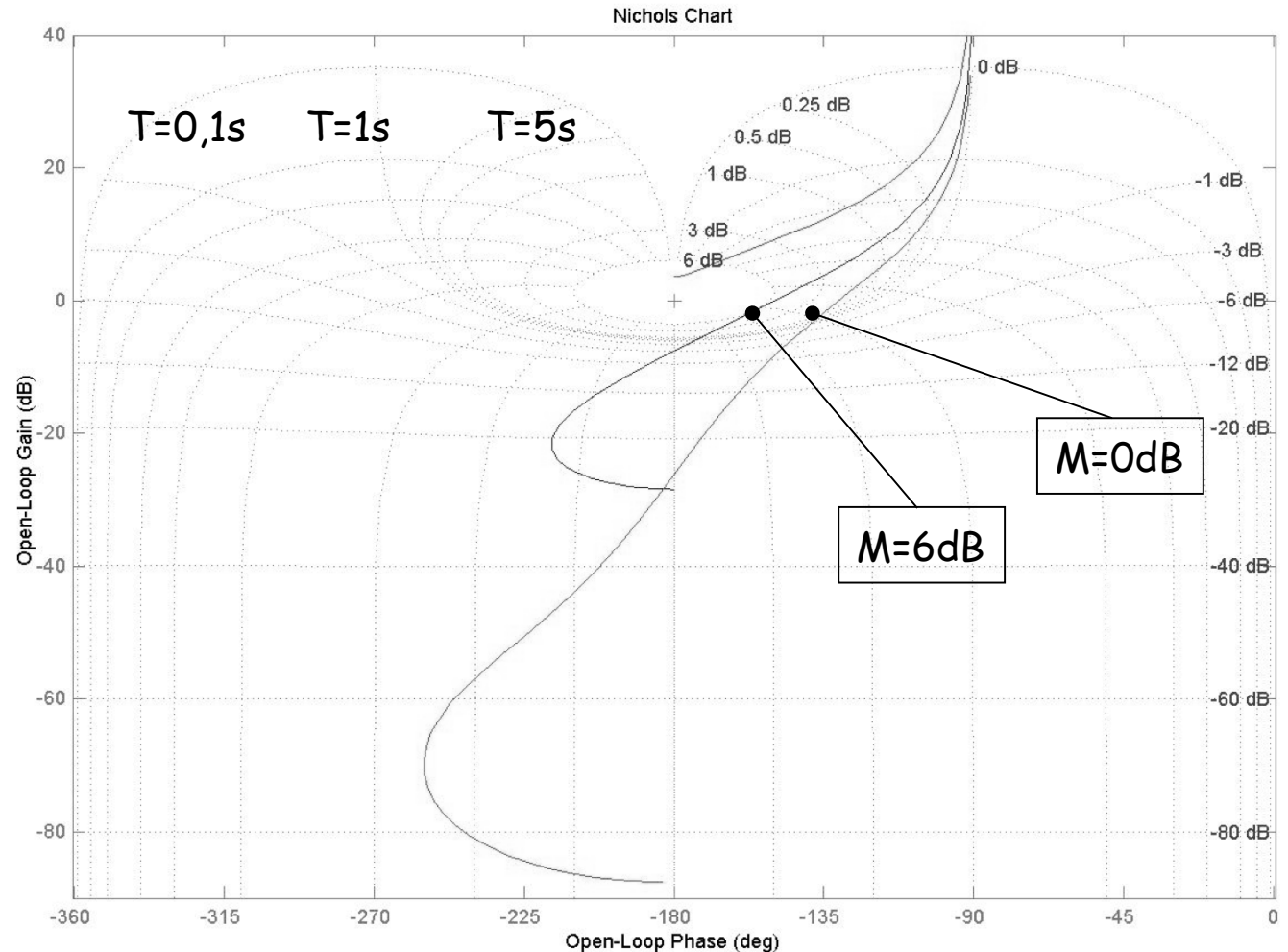
← Système instable en BO (1 pôle à l'origine)

$$T(W) = \frac{KT}{2} \frac{(1-W) \left(1 + \frac{W}{W_1} \right)}{W \left(1 + \frac{W}{W_2} \right)}$$

Analyse harmonique : $W = jv$



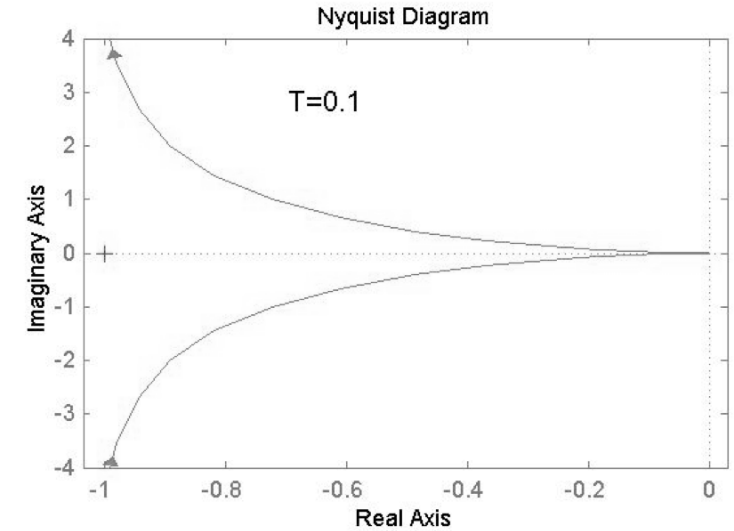
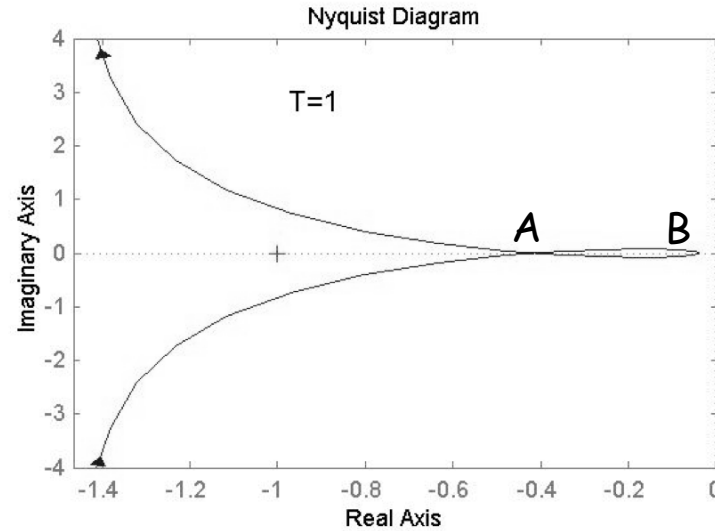
Il est préférable de travailler à une fréquence d'échantillonnage grande



Quelques remarques

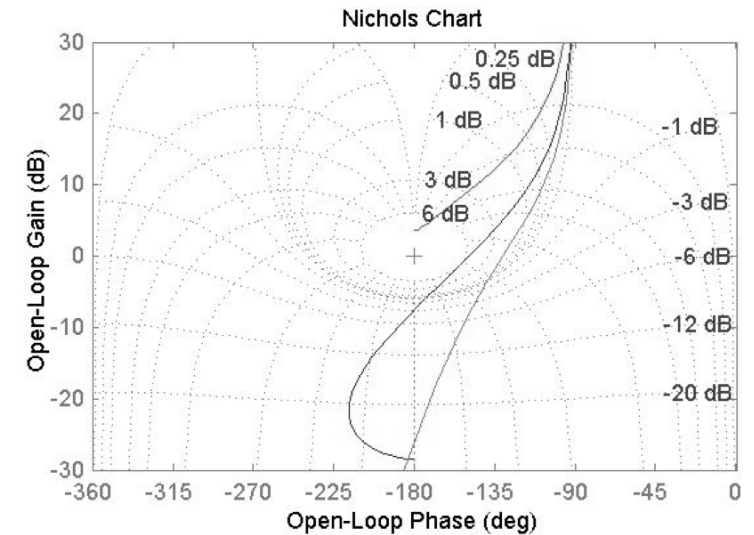
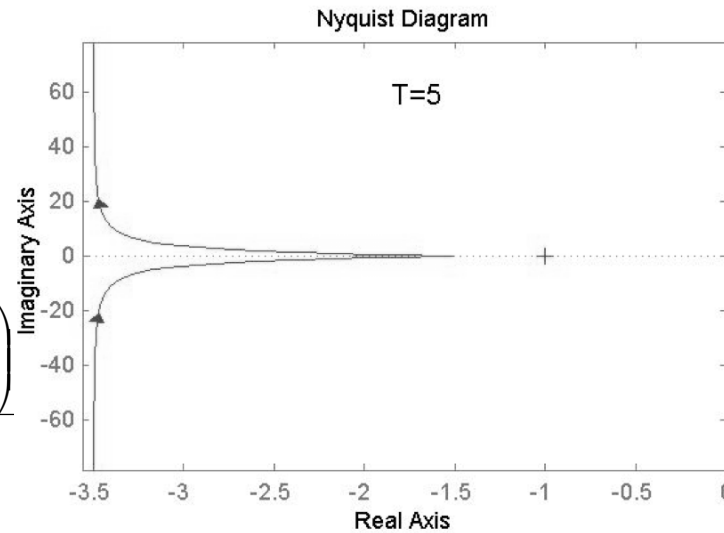
- ✓ La précision dynamique est d'autant meilleure que T petite
- ✓ Pour $T=5$, le système est instable en BF
- ✓ Pour $T=0,1$ la précision dynamique est correcte
- ✓ Pour $T=1$, il y a lieu de multiplier la TBO par un facteur $K < 1$ pour diminuer le gain de résonance, ceci au détriment de la BP.

Système stable en BF
si on entoure pas le
point critique -1
puisque pas de pole à
partie réelle positive
pour $T(W)$



Calcul des abscisses
de A et B

$$T(W) = \frac{KT}{2} \frac{(1-W)\left(1 + \frac{W}{W_1}\right)}{W\left(1 + \frac{W}{W_2}\right)}$$



$$\text{Im}[T(jv)] = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\left| \frac{W_1 W_2}{W_1 - W_2 - 1} \right|}$$

A : $v=0,78$

B : $v \rightarrow \infty$

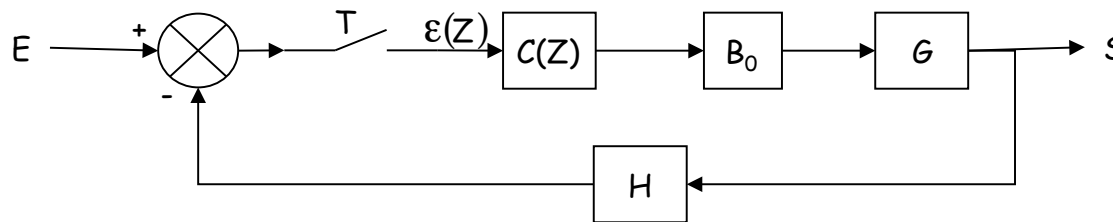
Il suffit ensuite de déterminer les valeurs limites de K pour que le critère de Nyquist soit vérifié en calculant $\text{Re}[T(jv)]$.

Précision statique

Elle est définie exactement de la même façon que pour le cas continu. On étudiera donc que les erreurs stationnaires vis à vis de l'entrée principale (consigne).

Cependant pour annuler les effets permanents d'une perturbation en $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, il faut introduire des pôles $Z=1$ d'ordre n et l'erreur stationnaire constante (la suivante) sera d'autant plus petite que le gain en amont (G) de la perturbation est élevé (cf asservissement continu).

a Erreur stationnaire ε_{0n} vis à vis de l'entrée principale



$$\varepsilon(Z) = \frac{E(Z)}{1 + T(Z)}$$

$$T(Z) = C(Z) \overbrace{B_0 G H}(Z)$$

$$\text{avec comme entrée: } \frac{(kT)^{(n-1)}}{(n-1)!} u(kT)$$

On applique le théorème de la valeur finale : $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) \varepsilon(Z)$

$$\varepsilon_{01} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{Z}{Z-1} \leftarrow \text{Consigne = échelon ou constante}$$

$$\varepsilon_{01} = \begin{cases} \frac{1}{1+T(1)} & \text{si pas de pôle } Z=1 \\ 0 & \text{si pôle } Z=1 \end{cases}$$

Echelon : $u(kT)$	\xrightarrow{TZ}	$\frac{Z}{Z-1}$
Rampe : $kTu(kT)$	\xrightarrow{TZ}	$\frac{TZ}{(Z-1)^2}$
Parabole : $\frac{1}{2}(kT)^2 u(kT)$	\xrightarrow{TZ}	$\frac{T^2 Z(Z+1)}{2(Z-1)^3}$

$$\varepsilon_{02} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{TZ}{(Z-1)^2} \leftarrow \text{Consigne = rampe}$$

$$\varepsilon_{02} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{T}{(Z-1)T(Z)} \begin{cases} \infty & \text{si pas de pôle } Z=1 \\ \left[\frac{T}{(Z-1)T(Z)} \right]_{Z=1} & \text{si un pôle } Z=1 \\ 0 & \text{si 2 pôles } Z=1 \text{ ou plus} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{03} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{T^2 Z(Z+1)}{2(Z-1)^3} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)} \begin{cases} \infty & \text{si moins de 2 pôles } Z=1 \\ \left[\frac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)} \right]_{Z=1} & \text{si 2 pôles } Z=1 \\ 0 & \text{si 3 pôles } Z=1 \text{ ou plus} \end{cases}$$

↑
Consigne = parabole

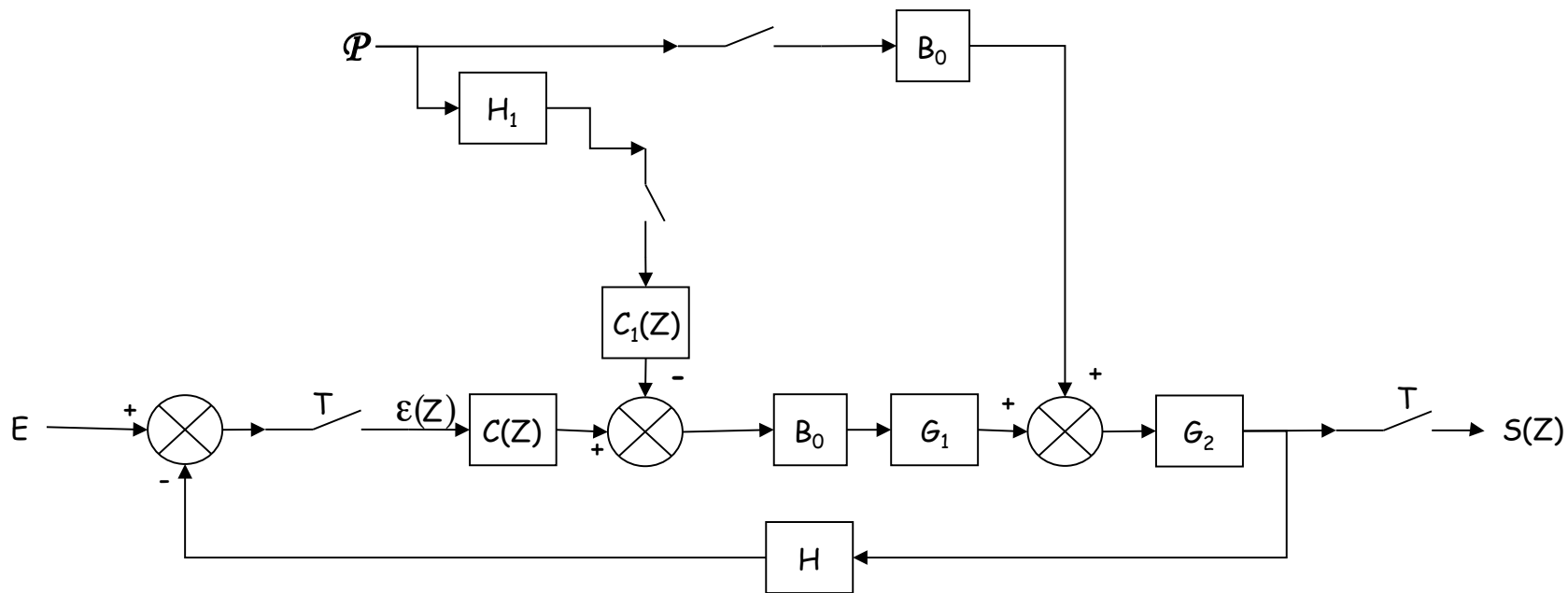
En résumé

α	ε_{0n}	ε_{01}	ε_{02}	ε_{03}
0		$\frac{1}{1 + T(1)}$	∞	∞
1		0	$\left[\frac{T}{(Z-1)T(Z)} \right]_{Z=1}$	∞
2		0	0	$\left[\frac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)} \right]_{Z=1}$

V-2 Commande des systèmes asservis échantillonnés

1 Traitements des perturbations mesurables

Pour annuler formellement l'effet des perturbations mesurables ($P(t)$), on l'utilise l'approximation étagée (B_0) de $P(t)$



On prendra $C_1(Z)$ de tel façon que : $\overbrace{B_0 G_2} = H_1 C_1(Z) \overbrace{B_0 G_1 G_2}$

$$\Rightarrow C_1(Z) = \frac{\overbrace{B_0 G_2}(Z)}{H_1 \overbrace{B_0 G_1 G_2}(Z)}$$

H_1 est supposé rapide

Critères de régulation

- Une régulation doit :
 - être **précise** : $\varepsilon(t) = \text{consigne} - \text{mesure}$ $\varepsilon(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$
 - suffisamment **stable** :
 - M_ϕ et M_G (diagrammes de Bode et Nyquist)
 - la plus **rapide** possible, sous contrainte des deux critères précédents :
 - t_r , temps de réponse, minimum (réponse indicielle)
 - B , bande passante, maximum (diagramme de Bode)

Le dilemme stabilité-rapidité

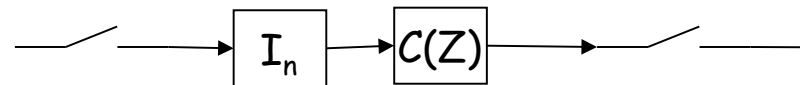
- Le réglage du gain est déterminant dans la synthèse d'un correcteur et résulte d'un compromis :
 - K_c faible : système stable mais « mou », erreurs de position (si pas d'intégration) et de traînage (si une intégration) importantes
 - K_c élevé : système plus réactif, erreurs plus faibles mais risque d'instabilité

2 Méthodes fréquentielles

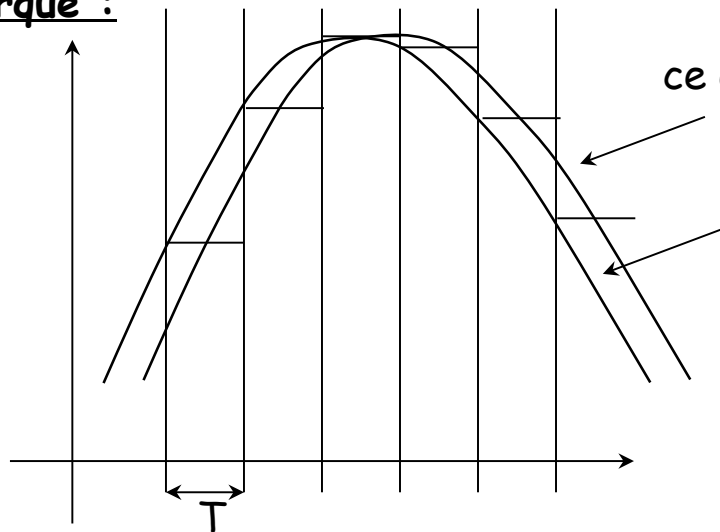
a Synthèse de $C(p)$ dans le domaine analogique puis transposition analogique numérique (Interpolateur)

Une des méthodes consiste à déterminer le correcteur dans le domaine analogique et de transposer dans le domaine numérique par différentes techniques :

- Transformation bilinéaire $p = \frac{2Z-1}{TZ+1}$
- En utilisant un interpolateur d'ordre n (vu précédemment)



Remarque :



ce que voit le système courbe
= $u(t)$ retardé de $T/2$

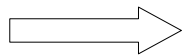
commande $u(t)$

Si T n'est pas négligeable devant les temps caractéristiques du système, prévoir avant la synthèse en analogique un retard $T/2$

b Utilisation de TW $Z = \frac{1+W}{1-W}$

On part de la FTBO en W non-corrigée (T_{nc}) pour régler les correcteurs gabarisés :

Attention: les représentations graphiques en W se terminent par des horizontales, les correcteurs utilisables sont:



➤ PI $C(W) = k \left(1 + \frac{1}{W\tau} \right)$

➤ Avance de phase $C(W) = k \frac{1+aW\tau}{1+W\tau}$ avec $a > 1$

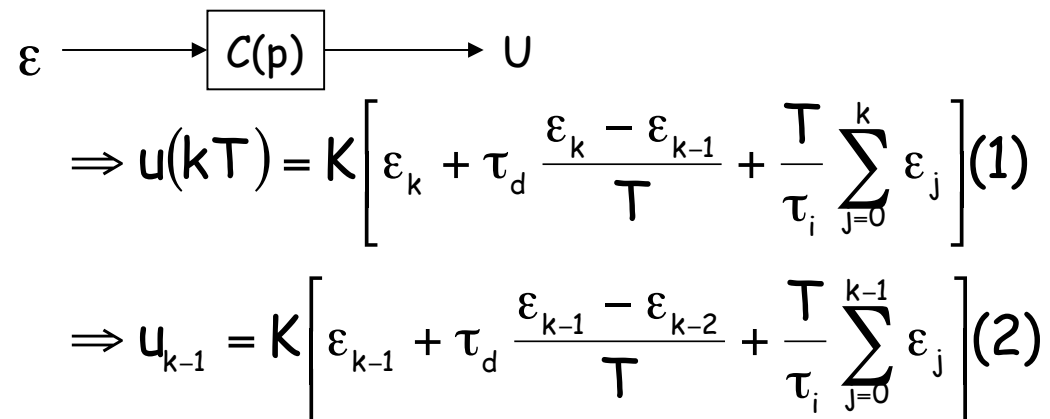
Le correcteur $C(W)$ est déterminé de la même façon que pour les SA continus, il suffit de faire le changement inverse $W = \frac{Z-1}{Z+1}$ pour obtenir $C(Z)$.

c PID Numérique

Ils sont obtenus par transposition de PID continu.

$$C(p) = K \left(1 + \tau_d p + \frac{1}{\tau_i p} \right) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$$

$$\Rightarrow u(t) = K \left[\varepsilon(t) + \tau_d \varepsilon'(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right]$$



$$(1) - (2) \Leftrightarrow u_k - u_{k-1} = K \left[\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} + \tau_d \frac{\varepsilon_k - 2\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2}}{T} + \frac{T}{\tau_i} \varepsilon_k \right]$$

On applique la TZ :

$$(1 - Z^{-1})U(Z) = K\varepsilon(Z) \left[(1 - Z^{-1}) + \frac{\tau_d}{T} (1 - 2Z^{-1} + Z^{-2}) + \frac{T}{\tau_i} \right]$$

$$C(Z) = \frac{U(Z)}{\varepsilon(Z)} = K \left[1 + \frac{\tau_d}{T} (1 - Z^{-1}) + \frac{T}{\tau_i} \frac{1}{(1 - Z^{-1})} \right]$$

Posons : $K_p = K$

$$K_d = \frac{K\tau_d}{T}$$

$$K_i = \frac{KT}{\tau_i}$$

$$\boxed{PID(Z) = K_p + K_d(1 - Z^{-1}) + K_i \frac{1}{(1 - Z^{-1})}}$$

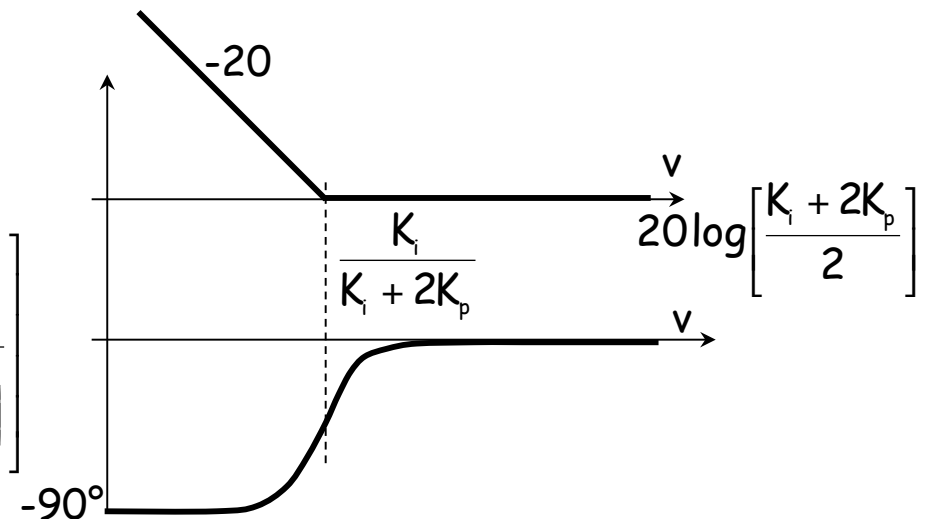
$$PI(Z) = K_p + K_i \frac{1}{(1 - Z^{-1})}$$

$$PD(Z) = K_p + K_d(1 - Z^{-1})$$

Forme des correcteurs dans le domaine W

Correcteur PI

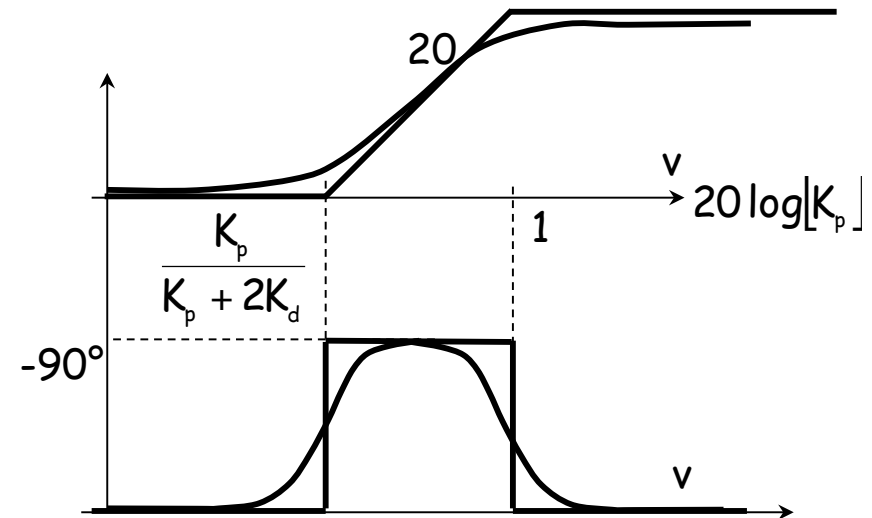
$$PI(Z) = K_p + K_i \frac{1}{(1 - Z^{-1})} \Leftrightarrow C(W) = \frac{K_i + 2K_p}{2} \left[1 + \frac{1}{W \left(\frac{K_i + 2K_p}{K_i} \right)} \right]$$



Correcteur PD

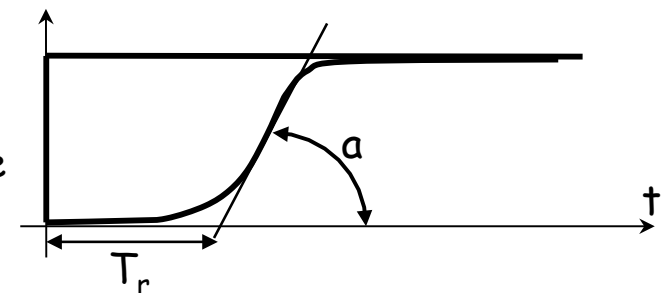
$$PD(Z) = K_p + K_d(1 - Z^{-1}) \Leftrightarrow C(W) = K_p \frac{1 + W \frac{K_p + 2K_d}{K_p}}{1 + W}$$

C' est un correcteur à avance de phase



Détermination des coefficients du correcteur

- Il peut se faire soit à partir de $T_{BO}(W)$ comme on le fait pour les SA. On détermine toutes les caractéristiques (stabilité, précisions statique et dynamique) à partir des diagrammes de Bode et de Black Nichols.
 - En utilisant la méthode de Ziegler/ Nichols/ Takahasi
- En boucle ouverte, on détermine a et T_r sur la réponse indicielle (attention la réponse à l'échelon doit-être apériodique).
 - En boucle fermée, on se place à la limite de stabilité (limite de pompage) pour déterminer K_o et T_o (position Juste Oscillante).



Méthode de Ziegler/ Nichols/ Takahasi

Correcteur	Paramètres régulateur	
	essai indiciel (BO) a, T_r	Limite de pompage (BF) K_0, T_0
P	$K_p = \frac{1}{a(T + T_r)}$	$K_p = 0.5K_0$
PI	$K_p = \frac{0.9}{a(T_r + 0.5T)} - 0.5K_i$ $K_i = \frac{0.27T}{a(T_r + 0.5T)^2}$	$K_p = 0.45K_0 - 0.5K_i$ $K_i = 0.54K_0 \frac{T}{T_0}$
PID	$K_p = \frac{1.2}{a(T_r + T)} - 0.5K_i, \quad K_i = \frac{0.6T}{a(T_r + 0.5T)^2}$ $K_d = \frac{0.5 \text{ ou } 0.6}{aT} \text{ si } \frac{T_r}{T} \text{ entier}$	$K_p = 0.6K_0 - 0.5K_i, \quad K_i = 1.2K_0 \frac{T}{T_0}$ $K_d = \frac{3}{40} K_0 \frac{T}{T_0}$

Implementation MATLAB

- Soit le système avec la fonction de transfert

$$T=2/[(p+2)*(0.18*p^2+0.6*p+1)]$$

avec $T_r=0.38$; $a=1$;

```
t=0:0.01:10;
num=2;
p1=[1 2];
p2=[0.18 0.6 1];
den=conv(p1,p2);
y0=step(num,den,t);
```

1

L=Tr

R=a

!P

L=0.38;

R=1;

Kp=1/(R*L);

nump=Kp;

denp=1;

[numsp densp]=series(numsp,denp,num,den);

[numpclose,denpclose]=cloop(numsp,denpclose,-1);

yp=step(numpclose,denpclose,t);

2

!PID

Kpid=1.2/(R*L);

numpid=[0.5*L*Kpid Kpid Kpid/(2*L)];

denpid=[0 1 0];

[numspid denspid]=series(numpid,denpid,num,den);

[numpidclose,denpidclose]=cloop(numspid,denpidclose,-1);

ypid=step(numpidclose,denpidclose,t);

4

!PI

Kpi=0.9/(R*L);

numpi=[Kpi (Kpi*0.3)/L];

denpi=[1 0];

[numspi denspi]=series(numspi,denpi,num,den);

[numpiclose,denpiclose]=cloop(numspi,denpiclose,-1);

ypi=step(numpiclose,denpiclose,t);

3

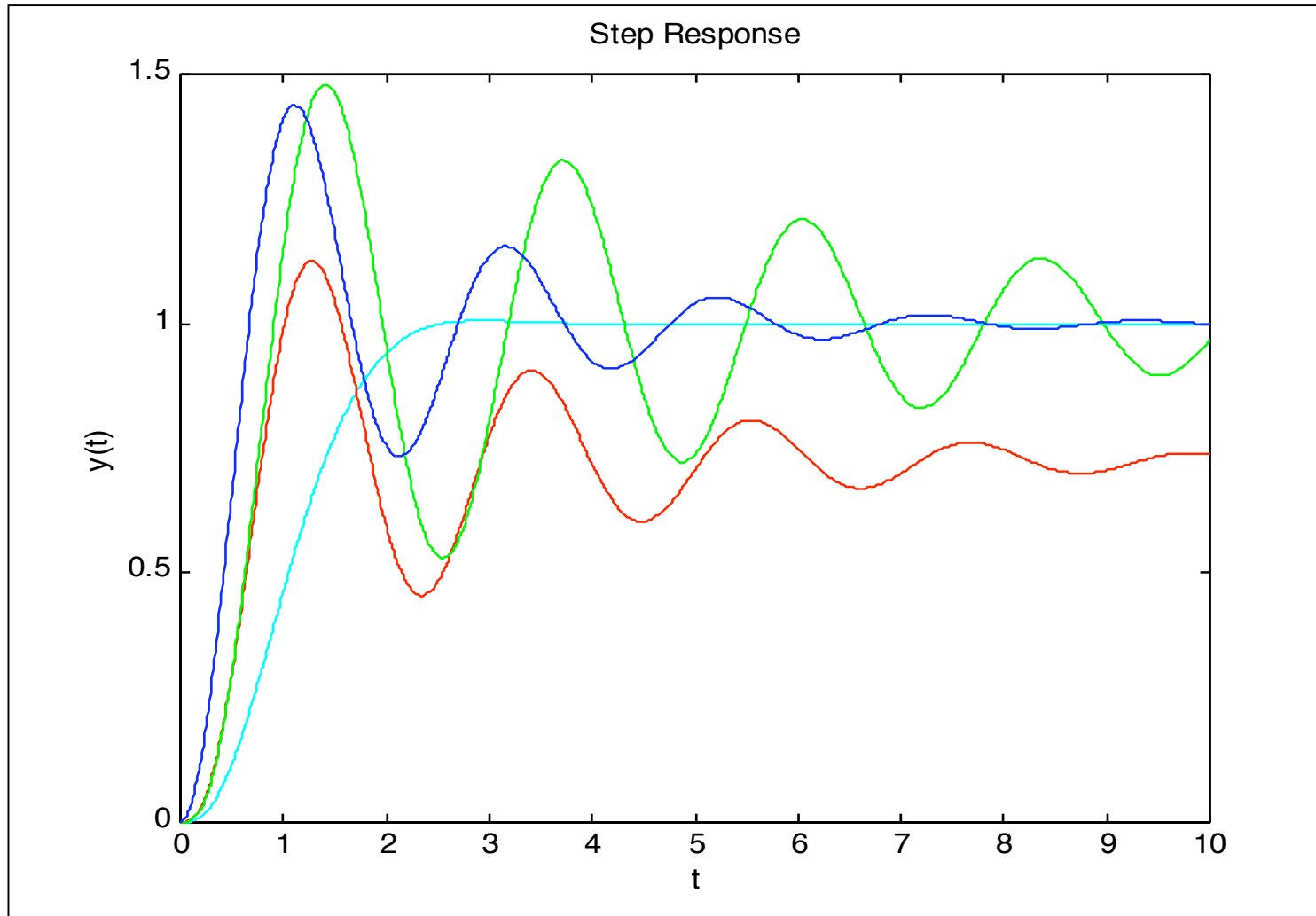
plot(t,y0,'c',t,yp,'r',t,ypi,'g',t,ypid,'b');

xlabel('t');

ylabel('y(t)');

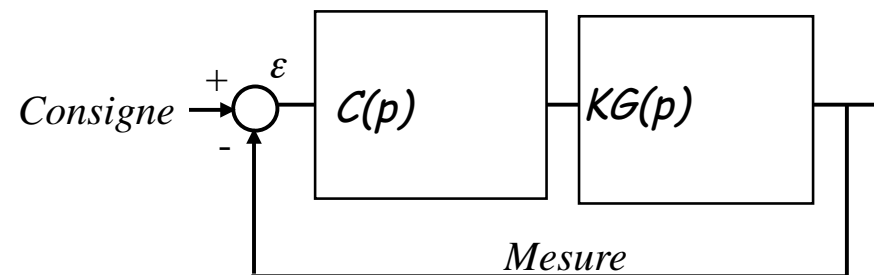
title('Step Response');

5



1.3. Les actions de base

Action proportionnelle

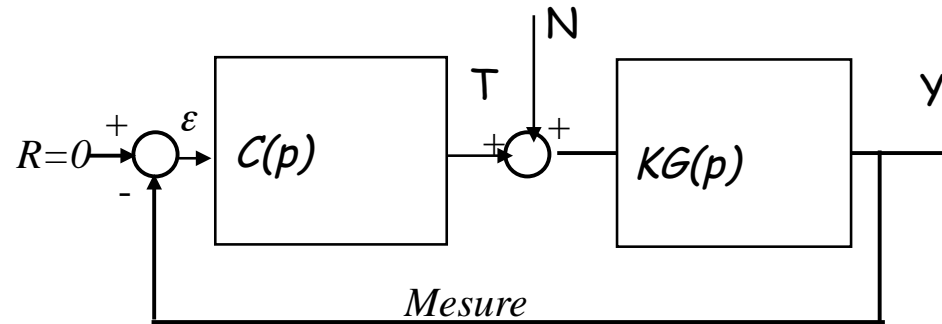


- On réagit proportionnellement à l'erreur
- Action toujours présente

$$C(p) = K_c$$

$$KG(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}$$

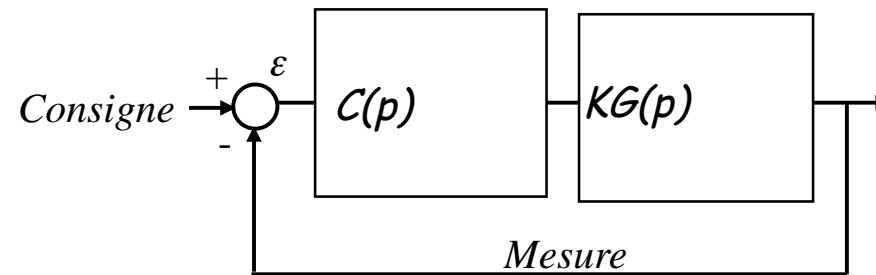
Action Proportionnelle Intégrale



$$C(p) = K_c + \frac{1}{T_i p} = \frac{K_c(1 + T_i p)}{T_i p}$$

$$KG(p) = \frac{1}{p(Jp + f)}$$

Action proportionnelle et dérivée



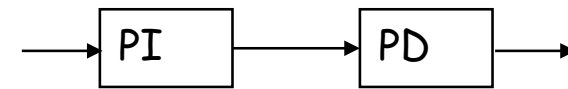
$$C(p) = K_c$$

$$C(p) = K_c(1 + T_d p)$$

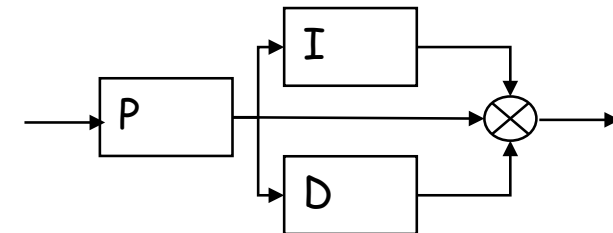
$$KG(p) = \frac{1}{p(Jp + f)}, \quad f = 0$$

Différentes structures d'un PID

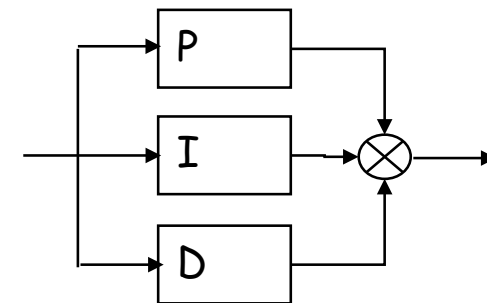
- Série : $C(p) = K_c \frac{(1+T_i p)}{T_i p} (1+T_d p)$



- Mixte : $C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$



- Parallèle : $C(p) = K_c + \frac{1}{T_i p} + T_d p$



Correction par compensation directe des pôles

Principe

- Les correcteurs PD, PID et à avance/retard de phase introduisent un ou deux zéros dans la chaîne directe
- Si on positionne le zéro à une valeur identique à un pôle réel, le zéro compense le pôle et la FT résultante est plus simple et plus rapide
- Permet de supprimer un (ou deux) pôle(s) lent

Exemples

- 1^{er} ordre : $KG(p) = \frac{K}{(1+Tp)}$

⇒ correcteur PI : $C(p) = \frac{K_c(1+T_i p)}{T_i p}$ avec $T_i = T$

⇒ $KG(p) = \frac{K K_c}{T_i} \frac{1}{p} \Rightarrow$ FT en BF : $\frac{1}{1 + p T_i / K K_c}$ 1^{er} ordre précis

- 2^{ème} ordre apériodique $KG(p) = \frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$ avec $T_2 > T_1$

⇒ correcteur PID : $C(p) = \frac{K_c(1+T_i p)(T + T_d p)}{T_i p}$ avec $T_i = T_2, T_d = T_1$

⇒ $KG(p) = \frac{K K_c}{T_i} \frac{1}{p} \Rightarrow$ FT en BF : $\frac{1}{1 + p T_i / K K_c}$ 1^{er} ordre précis