

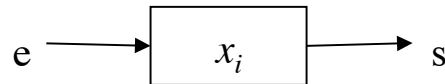
Cours 4 :

**Analyse
des
systèmes échantillonnés
(SLI)**

Analyse des systèmes linéaires invariants

1 Définitions

1 Système



x_i : variables d'état

Système : Entité établissant un relation de cause à effet entre un signal d'entrée e et un signal de sortie s

Deux manières pour décrire les relations entre e et s

Interne : On décrit l'état d'un système par n (ordre de système) variables internes x_i (appelée variable d'état) qui constituent le vecteurs d'état :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

La sortie du système s s'écrit : $s(t) = \underbrace{f(x(t), e(t), t)}_{\text{équation d'observation}} + \text{équation différentielle vectorielle du 1}^{\text{er}} \text{ ordre } \underbrace{\dot{x} = f(x, e, t)}_{\text{équation d'état}}$

Pour un système donné le vecteur d'état n'est pas unique.

Externe : C'est une approche des systèmes faisant intervenir les paramètres externes du systèmes (évidemment !), c'est-à-dire $e(t)$, $s(t)$ et l'état initial $x(0)$. La sortie du système s'écrit :

$$s(t) = f(e(t_0, t), x(t_0), t) \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad t_0 : \text{instant initial}$$

Donc la sortie dépend de la configuration du système à t_0 ($x(t_0)$) et de l'ensemble des valeurs prises par l'entrée depuis t_0 ($e(t_0, t)$), ce qui est le cas pour une intégration.

2 Position de repos et origine de temps de toutes les variables

Un système est au repos si sa sortie est dans un état permanent constant, donc **si ses dérivées sont nulles**.

La position de repos constitue généralement l'origine des temps de toutes les variables du système. Pour un système d'ordre n , la sortie et ses $(n-1)$ premières dérivées peuvent en générale constituer un jeu de variables d'état. Par suite, **en position de repos l'état d'un système est nul**

3 Réponse forcée et Réponse libre

Réponse forcée $s_f(t) = f(e \neq 0, x(0) = 0, t)$

Réponse libre : $s_l(t) = f(e = 0, x(0) \neq 0, t)$

← Système au repos

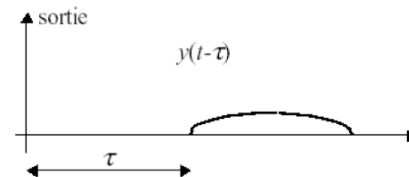
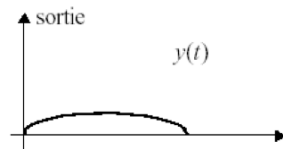
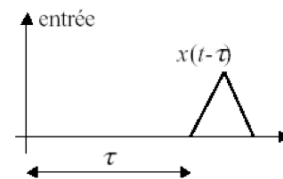
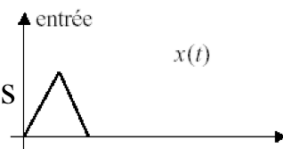
Pour un système linéaire invariant (SLI) il y a **séparabilité** :

Réponse = Réponse forcée + Réponse libre

$$\Leftrightarrow s(t) = s_f(t) + s_l(t)$$

4 Invariant

La sortie est indépendante du temps



5 Linéarité

si $s_1 = f(e_1, 0)$ et $s_2 = f(e_2, 0)$

si $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$\Rightarrow s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$

Il existe la même définition par rapport aux conditions initiales (CI)

Linéaire \Rightarrow vis à vis des entrées et des CI

Stabilité : Entrée bornée \Rightarrow Sortie Bornée

Un SLI est stable si pour un entrée bornée $|e(t)| \leq A < \infty$ et non nulle alors il lui correspond une sortie bornée $|s(t)| \leq B < \infty$

Conséquences sur la Réponse Impulsionnelle (RI)

$$s_f(t) = f(t) * e(t) = \int_0^{+\infty} f(t') \cdot e(t - t') dt'$$

$$|s_f(t)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t')| \cdot \underbrace{|e(t - t')|}_{\text{bornée par } A} dt'$$

$$\Leftrightarrow |s_f(t)| \leq A \int_0^{+\infty} |f(t')| dt'$$

donc on a $|s_f(t)| \leq A < \infty$ si la RI est absolument sommable

La TL^{-1} s'écrit :

$$f(t) = TL^{-1}[F(p)] = \sum_{\text{pôles de } F(p)} \underbrace{\text{résidus de } F(p)}_{r_i} e^{p_i t} = \sum_i r_i$$

r_i = combinaison linéaire de $e^{p_i t}$

$\Rightarrow f(t) = \sum_i$ combinaison linéaire de $e^{p_i t}$

$f(t)$ est absolument sommable si $Re[p_i] < 0$ car on est avec des signaux causals

Pôles imaginaire pur double

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$ alors $\pm j\omega$ est un pôle imaginaire pur double. La solution temporelle de la forme :

$$\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^2}(\sin \omega.t - \omega.t.\cos \omega.t)$$

Le système diverge.

Pôles réel simple

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{p}$. Le système ne retourne pas dans position d'équilibre, mais ne s'en écarte pas non plus car

$$\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1.U(t)$$

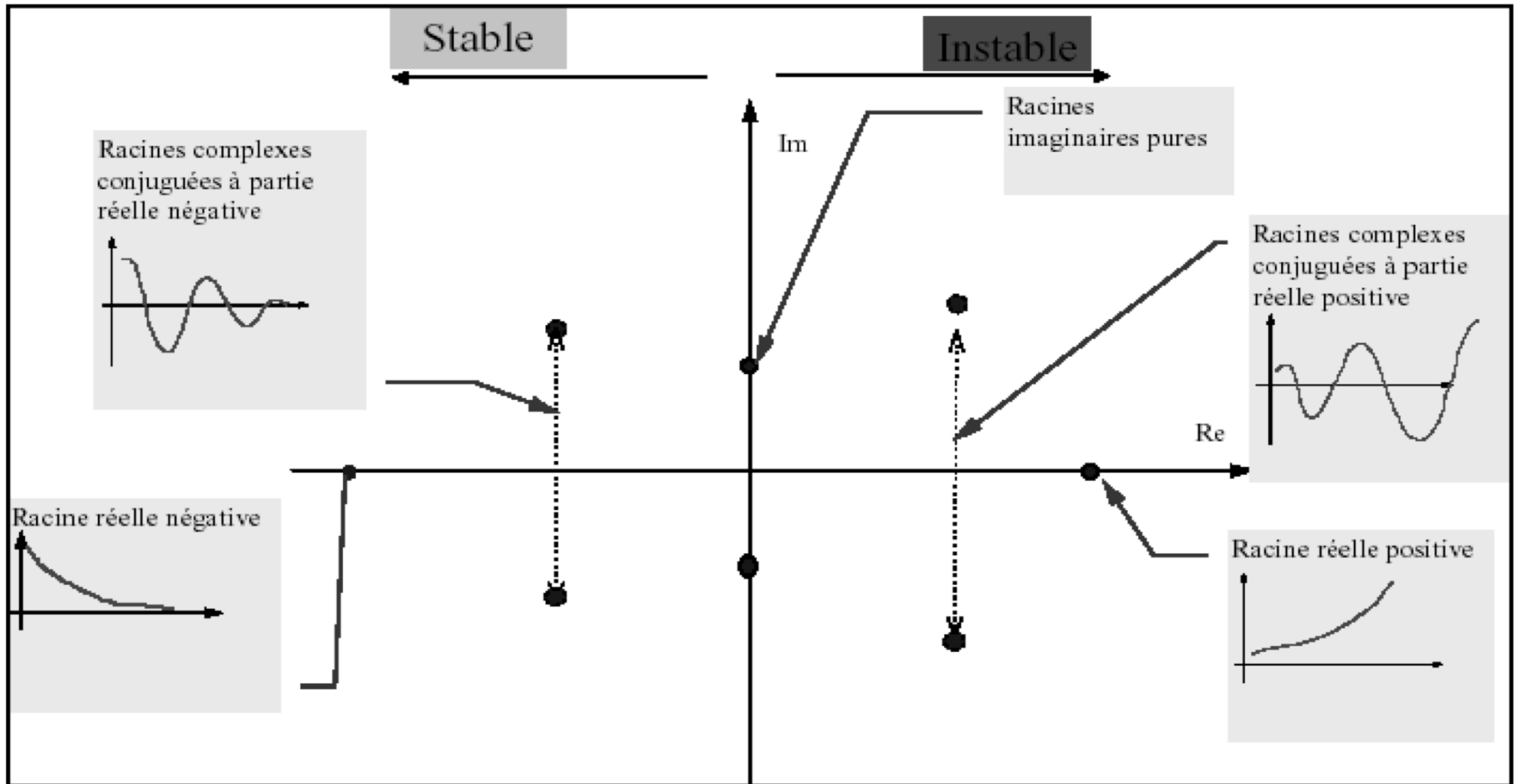
Pôles imaginaire pur simple

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{(p^2 + \omega^2)}$. La solution temporelle de la forme :

$$\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)}\right] = \frac{1}{\omega}\sin \omega.t$$

Le système est oscillant pur de pulsation ω . Il diverge pas mais oscille toujours. La sortie est donc bornée !. On dit que le système est **juste oscillant**.

En résumé:



Critères de stabilité

La stabilité d'un système passe par la détermination des pôles de sa fonction de transfert (F(p)).

La fonction de transfert peut s'écrire :

$$F(p) = \frac{A_m \cdot p^m + A_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + A_0}{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La stabilité de F passe par la résolution de l'équation suivante : $D(p) = B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0 = 0$

On peut démontrer qu'une condition nécessaire de stabilité est que tous les coefficients de $D(p)$ soient du même signe.

Cette condition devient suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre.

Critère de Routh-Hurwitz

Ce critère permet d'établir la stabilité d'un système encore à partir des coefficients de son dénominateur. Il permet aussi de déterminer si le système est juste oscillant et dans le cas d'un système instable, il donne le nombre de pôle à partie réelle positive.

On forme le tableau suivant :

| Degré | Coefficient | | | |
|-----------|---|---|-----------|-----|
| p^n | B_n | B_{n-2} | B_{n-4} | ... |
| p^{n-1} | B_{n-1} | B_{n-3} | B_{n-5} | ... |
| p^{n-2} | $\frac{B_{n-1} \cdot B_{n-2} - B_n B_{n-3}}{B_{n-1}}$ | $\frac{B_{n-1} \cdot B_{n-4} - B_n B_{n-5}}{B_{n-1}}$ | ... | |
| p^{n-3} | \vdots | \vdots | | |
| \vdots | | | | |

Colonne des pivots ←

Enoncé du critère :

- Si tous les éléments de la 1ère colonne (pivots) sont de même signe
 ⇒ **Stabilité et donc** $\text{Re}[p_i] < 0$
- S' il y a λ changement de signe, il y a λ pôle à partie réelle >0
 ⇒ Instabilité
- Une ligne de zéros indique la présence de racines imaginaires pures et le caractère **juste oscillant du système**

Influence de la position des pôles sur la rapidité et l'amortissement d'un système du deuxième ordre

$$F(p) = \frac{N(p)}{[p - (r + j\omega)][p - (r - j\omega)]} = \frac{N(p)}{p^2 - 2r + (r^2 + \omega^2)}$$

Un système de second ordre s'écrit :

$$\frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = r^2 + \omega^2$$

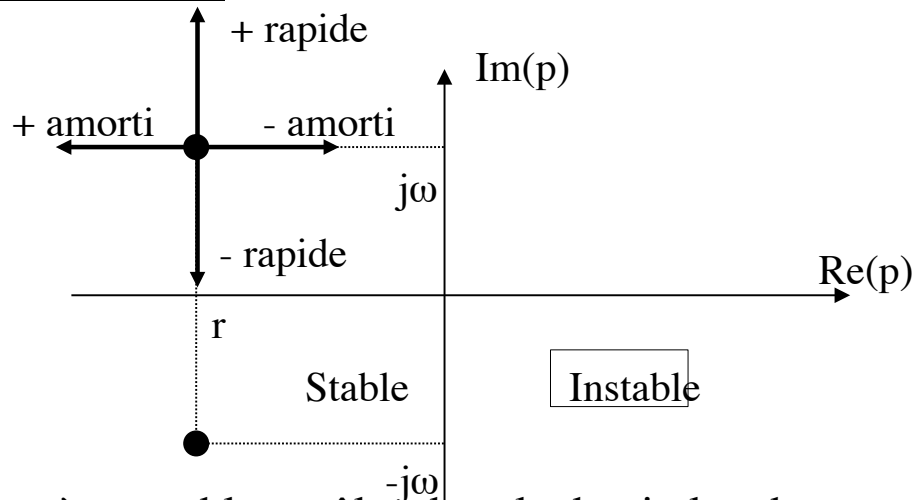
$$\Rightarrow m = -\frac{r}{\omega_0}$$

$$s_+(t) = 2Ce^{rt} \cos(\omega t + \varphi) = 2Ce^{-m\omega_0 t} \cos(\omega t + \varphi)$$

m : représente le facteur d'amortissement

ω_0 : représente la pulsation caractéristique

Domaine de P

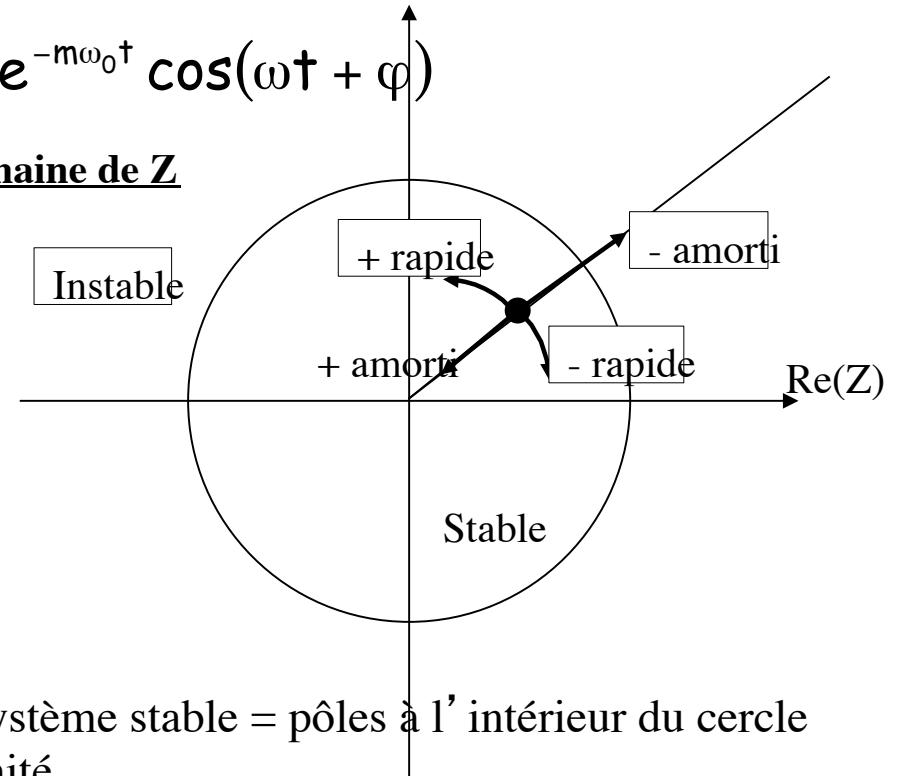


Système stable = pôles dans le demi plan de gauche de p

Le système est d'autant plus amorti que le pôle s'éloigne de l'axe $Im(p)$.

Le système est d'autant plus rapide que le pôle s'éloigne de l'axe $Re(p)$.

Domaine de Z



Système stable = pôles à l'intérieur du cercle unité

Le système est d'autant plus amorti que le pôle est près de l'origine O .

Le système est d'autant plus rapide que le pôle s'éloigne de l'axe $Re(Z)$

Stabilité

$F(Z)$ est la TL de la réponse impulsionnelle pour $Z=e^{pT}$, les pôles p_i de la transmittance doivent être à partie réelle <0 , donc les pôles de $F(Z)$, devront être tels que

$$Z_i = e^{p_i T} = e^{r_i T} e^{j\omega_i T} \quad |Z_i| < 1$$

Test de Stabilité

Un système numérique causal est stable, si les pôles de sa transmittance en Z sont tous en module inférieurs à 1

On peut utiliser le critère de Routh Hurwitz dans la mesure où l'on trouve un changement de variable qui fait correspondre au cercle unité en Z , un demi plan gauche en W , on utilise pour cela la transformée bilinéaire :

$$W = \frac{Z-1}{Z+1} \quad \text{ou encore} \quad Z = \frac{1+W}{1-W}$$

En conclusion, on transforme $F(Z)$ en $F(W)$ et on applique le critère de Routh-hurwitz au dénominateur de $F(W)$.

Etude des Systèmes linéaires Echantillonnés

- *Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion unité*

$$y(k) = L\left[\sum x(l)\delta(k-l)\right] = \sum x(l)L[\delta(k-l)]$$

Systemes linéaires invariants

- Définition

$$Lx(k)=y(k) \quad Lx(k-k_0)=y(k-k_0)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M a_m x(k-m)$$

Exemple (l'importance des conditions initiales)

$$y(k)=0 \quad \forall k < 0$$
$$x(k)=u(k)$$

$$y(0)=x(0)-ay(-1)=1$$
$$y(1)=x(1)-ay(0)=1-a$$
$$y(2)=1-ay(1)=1-a+a^2$$
$$y(k)=\frac{1-(-a)^{(k+1)}}{1+a}u(k)$$

Il existe deux grandes familles de système numériques :

➤ **Les RII** (réponse impulsionnelle infinie) ou système récursifs obtenus par transposition analogique → numérique

➤ Les RIF (réponse impulsionnelle finie) obtenus par filtrage passe-bas. Il n'y a pas d'équivalents analogique.

En automatique on utilisera que les systèmes RII

Systèmes RII ou systèmes récursifs

Transposition analogique → numérique de l'équation différentielle :

Transposons en numérique la dérivation :

$$\sum_{i=0}^n b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i e^{(i)}$$

$$s(t) \rightarrow s(kT) = s_k$$

$$\dot{s}(t) \rightarrow \frac{s(kT) - s((k-1)T)}{T} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{s}(t) \rightarrow \frac{\frac{s_k - s_{k-1}}{T} - \frac{s_{k-1} - s_{k-2}}{T}}{T} = \frac{s_k - 2s_{k-1} + s_{k-2}}{T^2}$$

⋮

$$s^{(i)}(t) \rightarrow \sum_{j=0}^i C_j s_{k-j}$$

α_i et β_i sont des constantes dépendantes de a_i et b_i

$$\sum_{i=0}^n b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^m a_i e^{(i)} \Rightarrow \sum_{i=0}^n \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i e_{k-i}$$

C' est une équation aux différences d'ordre n.

Tout système RII peut être modélisé par cette équation

Transmittance des systèmes RII

Prenons la transformée en Z des deux nombre en utilisant le théorème du retard : $\mathcal{TZ}[s_{k-i}] = Z^{-i} \cdot S(Z)$

$$\sum_{i=0}^n \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i e_{k-i} \xrightarrow{\mathcal{TZ}} \sum_{i=0}^n \beta_i Z^{-i} S(Z) = \sum_{i=0}^m \alpha_i Z^{-i} E(Z)$$

$$\Rightarrow F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n \beta_i Z^{-i}}$$

Rapport de Deux polynômes en Z

Pour trouver la RI il suffit de faire la \mathcal{TZ}^{-1} de $F(Z)$

Pour faire la mise en œuvre (au niveau du processeur) d'un tel système il suffit de transformer **l'équation aux différences** en **équation de récurrence** en isolant **l'échantillon de sortie le plus récent**

$$\sum_{i=0}^n \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i e_{k-i} \Leftrightarrow s_k = \frac{1}{\beta_0} \left[\sum_{i=0}^m \alpha_i e_{k-i} - \sum_{i=1}^n \beta_i s_{k-i} \right] \quad \text{Équation de récurrence}$$

A chaque instant kT on applique l'équation de récurrence.

Pour $k=0$ on applique les propriétés du signal d'entrée qui est causal ce qui signifie que e_{-1} à $e_{-m} = 0$.

Les n valeurs s_{-1} à s_{-n} représentent les conditions initiales. Si le système est initialement au repos, alors on prend s_{-1} à $s_{-n} = 0$.

Modèle Linéaire Discrets

Soit, l'équation linéaire, aux différences finies

$$\sum_{l=0}^{L-1} b_l y(n-l) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k x(n-k)$$

Est un modèle *ARMA* d'ordre (K,L)

Questions:

1. Quel l'ordre minimal (K,L) qui permette de représenter le système de façon convenable ?
2. Comment déterminer les $\{a_k\}$ et les $\{b_l\}$? Ces coefficients restent-ils invariants lorsque l'on considère différentes réalisations du signal ?

Application aux système linéaires invariants

- La transformée en z du signal de sortie est donnée par :

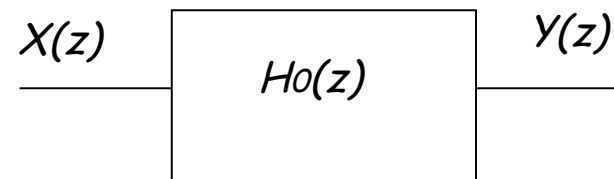
$$Y^+(z) = \underbrace{\frac{A(z)}{B(z)}}_{\text{Permanent}} X(z) - \underbrace{\frac{I(z)}{B(z)}}_{\text{Transitoire}}$$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k z^{-k} \quad I(z) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l [y(-l) + \dots + y(-1)z^{-(l-1)}]$$

$$B(z) = \sum_{l=0}^{K-1} b_l z^{-l}$$

Si on admet des conditions initiales toutes nulles

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$



L'expression de la Tz du signal de sortie, tenant compte de conditions initiales non-nulles

$$Y(z) = H_0(z)X(z) - I(z)/B(z)$$

Evaluation de la sortie d'un système ARMA

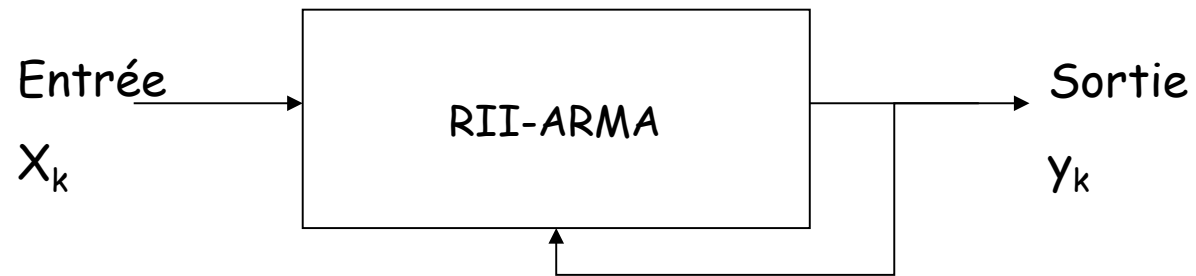
Un tel système est caractérisé par:

- ses K coefficients a_k et ses L coefficients b_l avec $b_0=1$
- la séquence d'entrée $\{x_n\}$
- la séquence de sortie $\{y_n\}$, y compris les conditions initiales, soit pour une séquence de N échantillons du signal de sortie:

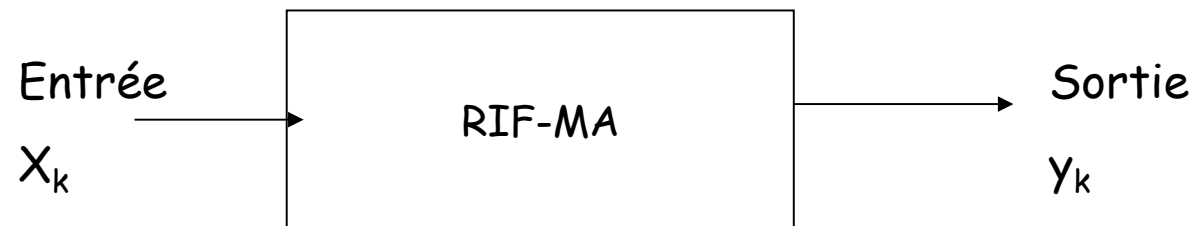
$$n \in [-(L-1), N-1]$$

Filtres

- Filtres récurrents



- Filtres non-récurrents



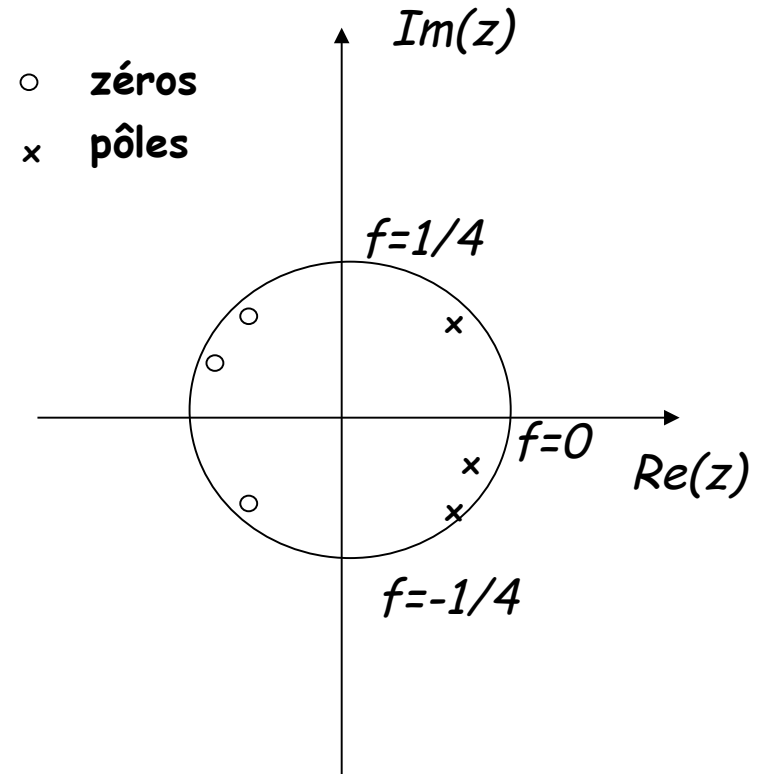
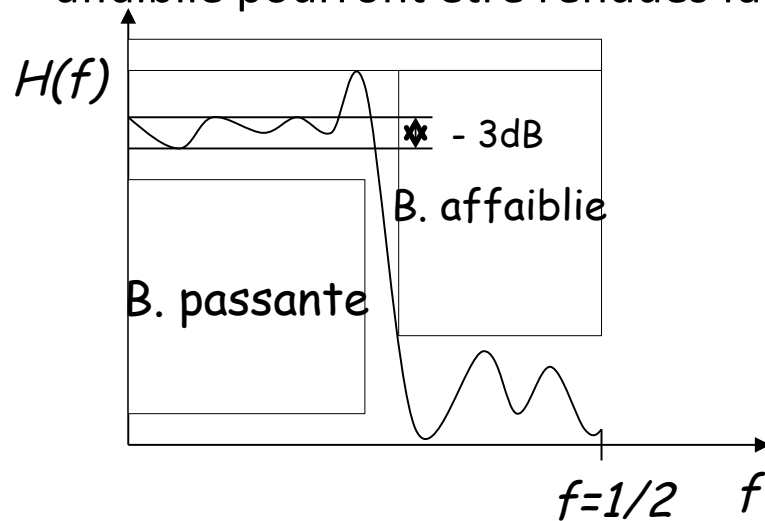
Stabilité des Modèles ARMA

- La CNS pour qu'un système linéaire, de réponse impulsionnelle $\{h(n)\}$ soit stable est que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \text{ sommabilité}$$

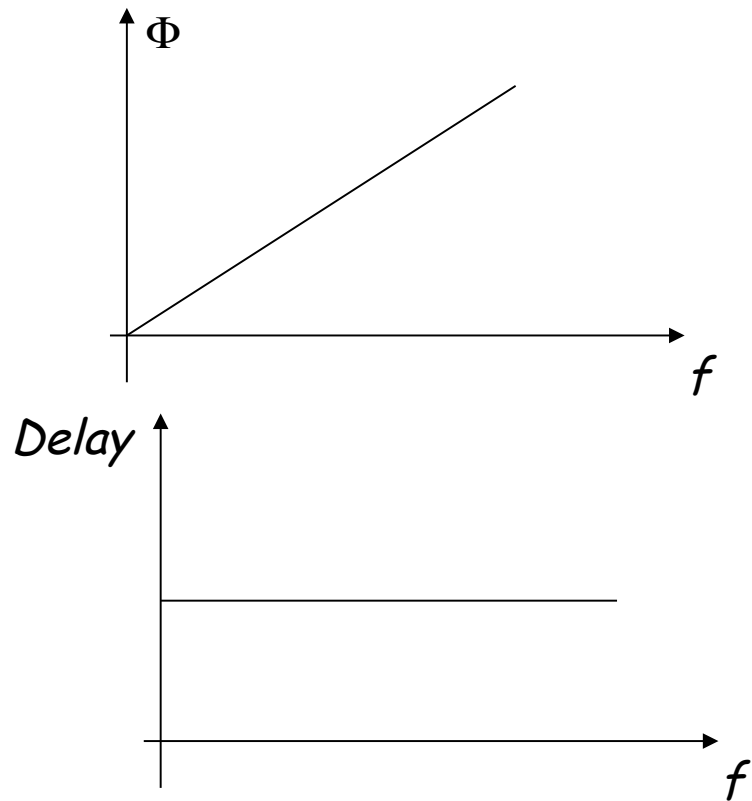
- La stabilité d'un système *AR* ou *ARMA* exige que les pôles de la fonction de transfert $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité du plan $\{z\}$

- La partie du plan complexes où se trouvent les zéros correspond à la bande affaiblie.
- Plus les zéros sont proches du cercle unité, plus l'atténuation est grande.
- Plus le nombre de zéros est grand, plus les ondulations dans la bande affaiblie pourront être rendues faibles.



La phase

Phase linéaire

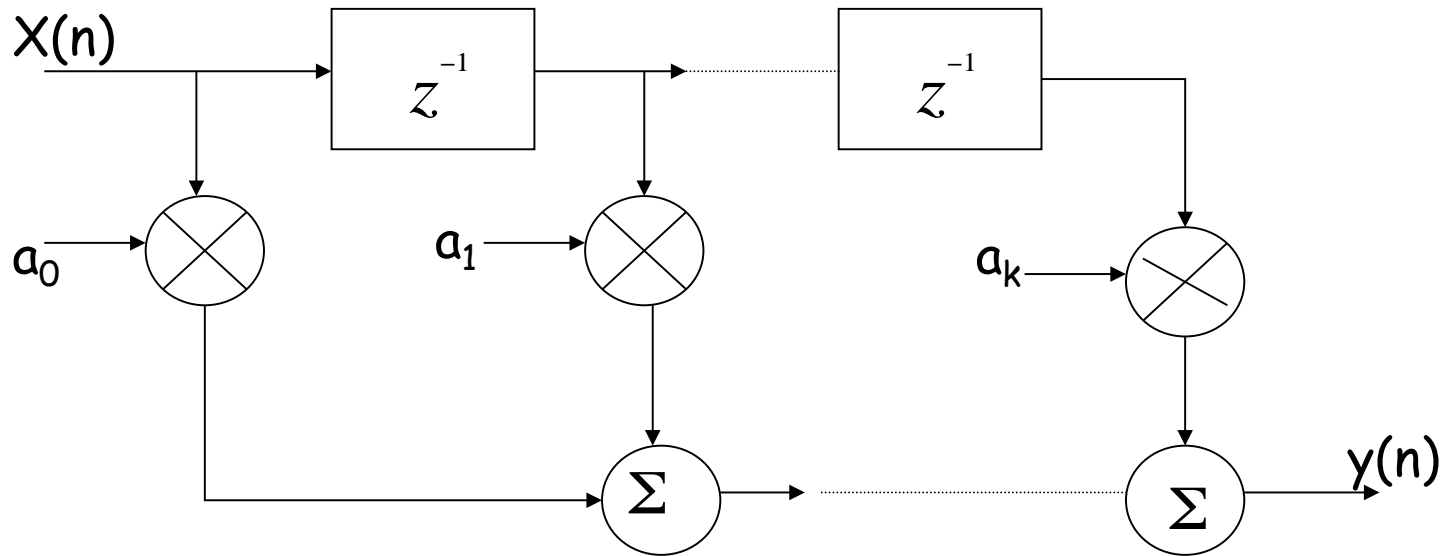


Représente le retard entre les différentes fréquences

ANALYSE DES FILTRES NON RECURSIFS OU RIF

RIF

- Il existe des méthodes de conception de filtre RIF simple à mettre en œuvre
- Phase linéaire, donc pas de dispersion
- Stabilité
- Cher en réalisation
- Le retard entre l'entrée et la sortie peut être relativement longue



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1}$$

Exemple

- Supposons que l'on veuille faire un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c ,

$$s_n = \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}e_{n-1}$$

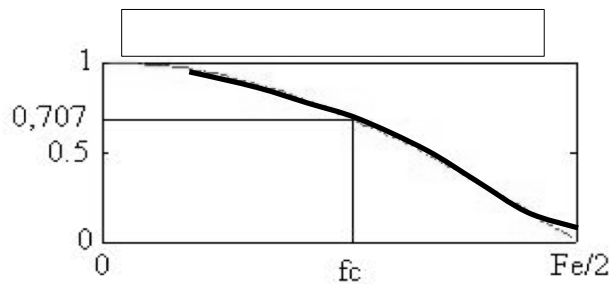
On peut prendre

- Réponse de ce filtre :

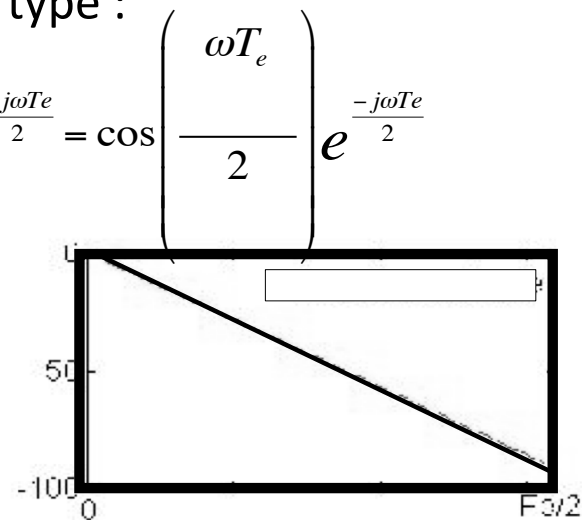
$$S(z) = \frac{1}{2}E(z) + \frac{1}{2}E(z)z^{-1} \qquad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$$

- On a donc une réponse fréquentielle du type :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e} = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\omega T_e}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_e}{2}})e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} = \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}$$

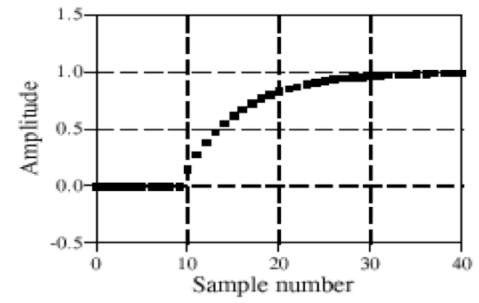
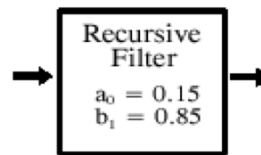
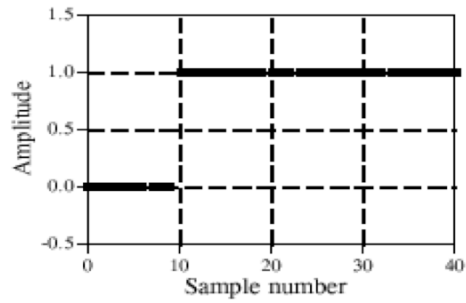


Réponse en amplitude

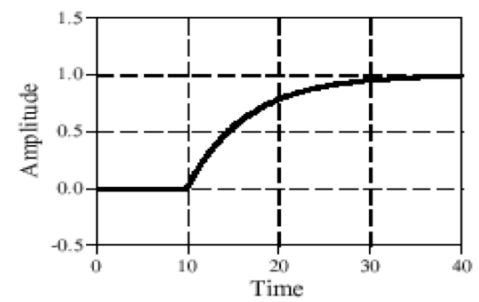
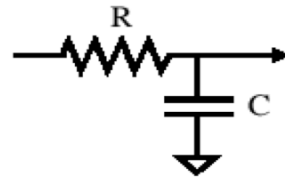
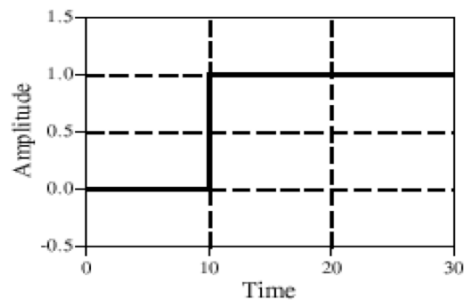


Réponse en phase

Digital Filter

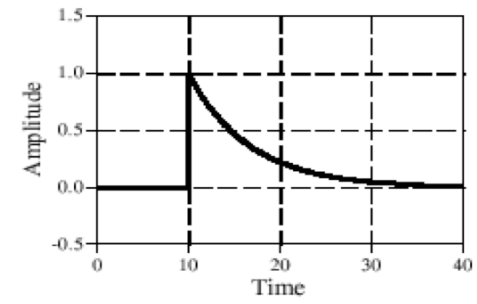
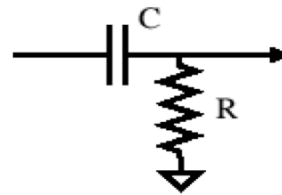
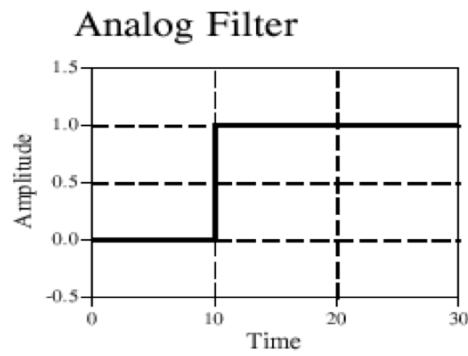
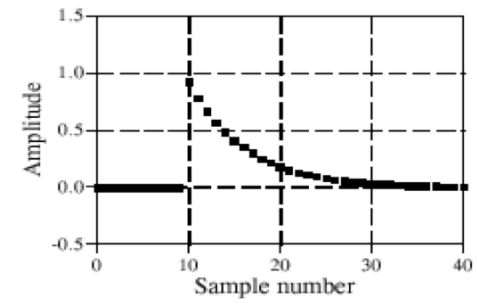
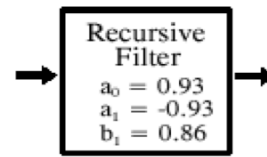
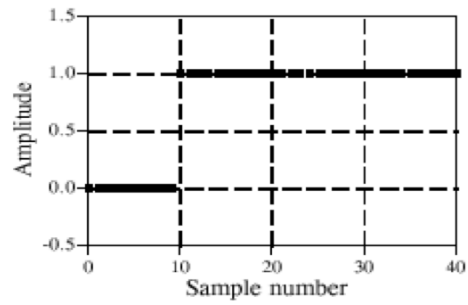


Analog Filter



L' équation de récurrence

- ***Ex: $y(n)=x(n)-x(n-1)$ dérivateur*** mais avec des résultats très moyens sauf pour les basses fréquence.



ANALYSE DES FILTRES RECURSIFS OU RII

Relation entre les Modèles à Temps Continu et à Temps Discret

Transformation de $H(p)$ en $H(z)$

- Transposer la fonction de transfert $H(p)$ de son homologue analogique du plan p dans le plan z par une règle reliant p à z

Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

$$Y(p) = pX(p) \Rightarrow H(p) = p$$

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} [X(z) - X(z)z^{-1}] = \frac{1-z^{-1}}{T_e} X(z)$$

$$p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

$$p \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

Connaissance précise de T_e

Equivalence à la réponse impulsionnelle

Réponse du système à un Dirac $S(p) = F(p)L(\delta(t)) = F(p)$

Echantillonnage de $s(t)$ qui est l'original de la fonction de transfert, calcule de la suite s_k

Sachant que la suite e_k est connue, on peut calculer les transformée en z

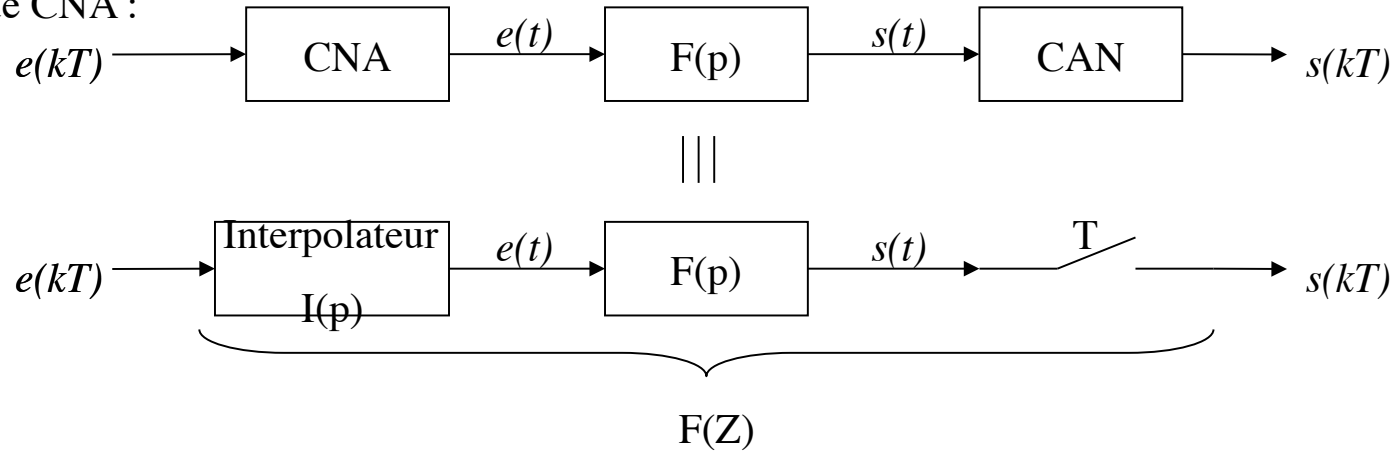
$$S(z) = \sum_{k=0} s_k z^{-k} \quad \text{et} \quad E(z) = 1 \quad \text{Et on déduit} \quad F(z) = \sum_{k=0} s_k z^{-k} \quad \text{Intérêt limité}$$

Approche Modale $p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$ Basée sur la concordance des pôles entre les deux fonctions

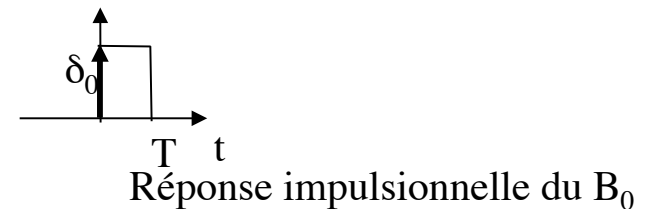
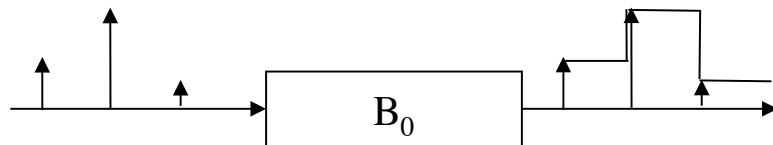
Inconvénient : traiter que des pôles des fonctions. Il est nécessaire d'ajuster leurs numérateurs

Calcul à partir de TZ(G(p)/p)

Soit un système analogique de transmittance $F(p)$ dont l'entrée est fournie par un convertisseur numérique analogique CNA :



Le signal $e(t)$ est un signal quantifié résultant d'une interpolation. L'interpolateur est, sauf cas exceptionnel, un bloqueur d'ordre zéro

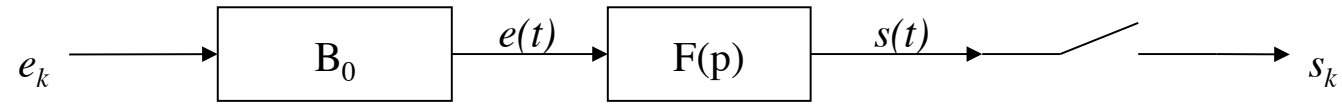


$$b_0(t) = h(t) - h(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

On peut aussi écrire : $B_0(p) = \frac{1 - Z^{-1}}{p}$

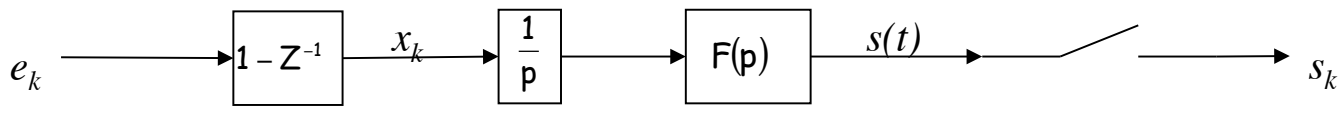
On constate que la transmittance d'un bloqueur est mixte en p et Z

Calcul de $F(Z)$ avec un B_0

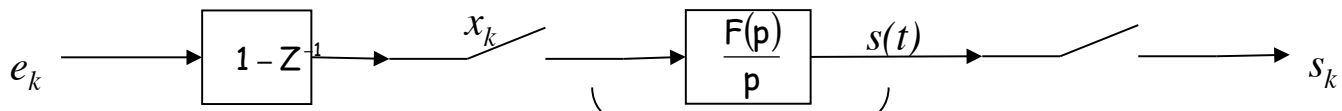


$$B_0(p) = \frac{1 - Z^{-1}}{p}$$

|||



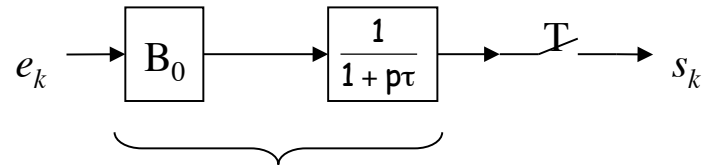
La variable intermédiaire $x(kT)$ est de nature échantillonnée



$$\mathcal{TZ} \left[\frac{F(p)}{p} \right]$$

$$F(Z) = (1 - Z^{-1}) \cdot \mathcal{TZ} \left[\frac{F(p)}{p} \right]$$

Exemple : 1^{er} ordre échantillonné:



$$F(Z) = (1 - Z^{-1}) \mathcal{TZ} \left[\frac{1}{p(1 + p\tau)} \right]$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \mathcal{TZ} \left[\frac{1}{p(1 + p\tau)} \right] &= \sum_{\text{pôles de } \frac{1}{p(1+p\tau)}} \text{résidus de } \frac{1}{p(1 + p\tau)} \frac{1}{(1 - Z^{-1} e^{pT})} \\ &= \left[\frac{1}{(1 + p\tau)} \frac{1}{(1 - Z^{-1} e^{pT})} \right]_{p=0} + \left[\frac{\frac{1}{\tau}}{p(1 - Z^{-1} e^{pT})} \right]_{p=-1/\tau} \\ &= \frac{1}{(1 - Z^{-1})} - \frac{1}{(1 - Z^{-1} e^{-\frac{T}{\tau}})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(Z) = (1 - Z^{-1}) \left[\frac{1}{(1 - Z^{-1})} - \frac{1}{(1 - Z^{-1} e^{-\frac{T}{\tau}})} \right] = \frac{Z - 1}{Z} \left[\frac{Z}{Z - 1} - \frac{Z}{(Z - e^{-\frac{T}{\tau}})} \right]$$

$$F(Z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{Z - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Cas d' un système ayant un retard pur Tr

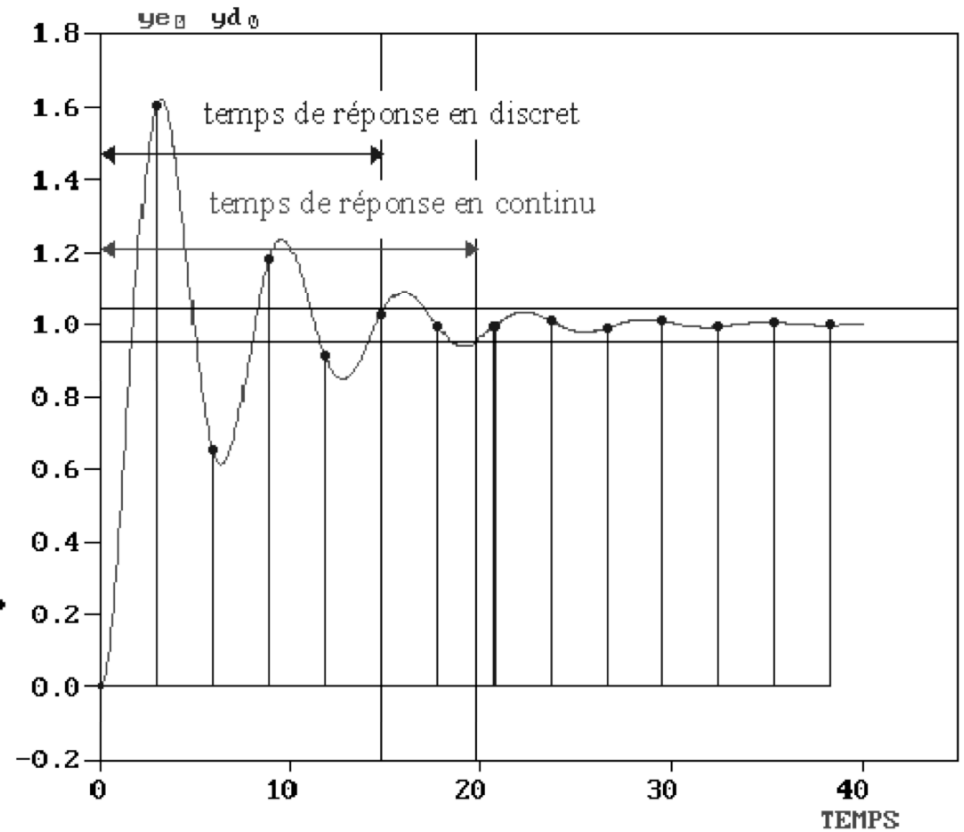
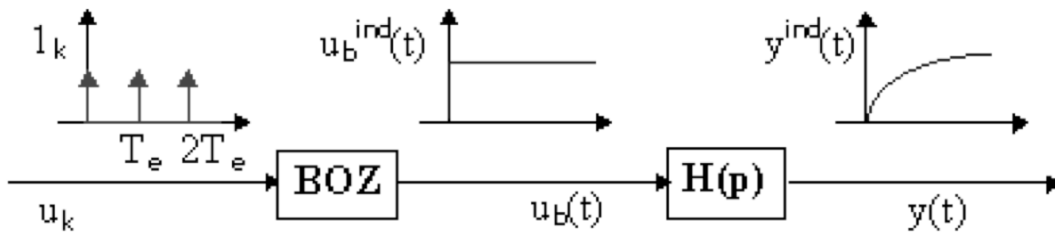
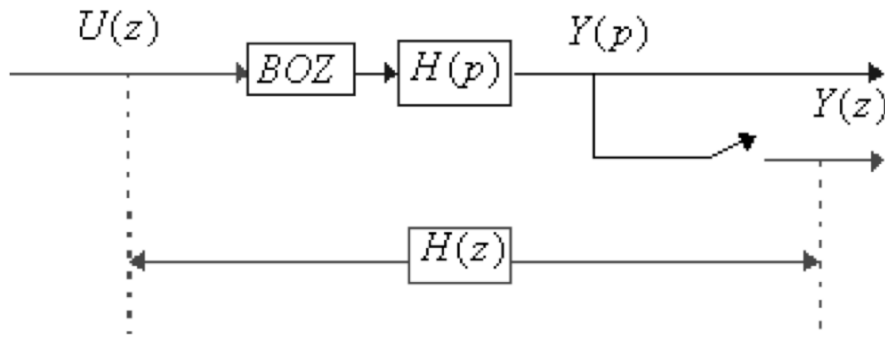
$$G(p) = G'(p)e^{-pTr}$$

On choisit T tel que $Tr = mT$ avec m entier.

Pour calculer la transmittance en Z il suffit donc de multiplier la transmittance en Z sans retard par Z^{-m} .

$$F(Z) = (1 - Z^{-1}) \cdot TZ \left[\frac{F(p)}{p} \right] \cdot Z^{-m}$$

Relation entre les temps de réponse d'un système continu avant et après l'échantillonnage de sa fonction de transfert par conservation de la réponse indicielle



Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire avec :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp} \quad \text{en utilisant}$$

$$F(Z) = (1 - Z^{-1}) \cdot T Z \left[\frac{F(p)}{p} \right]$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}$$

$$p_1 = K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Remarque : On n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en BF à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Remarque : Le système en temps continu $H(p)$ est toujours stable, le système échantillonné ne l'ai pas toujours.

$$|p_1| < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{T}}} \quad \text{Si le gain statique est fixé} \quad T_e < T \ln \frac{1 - K}{1 + K}$$

Choix de la fréquence d'échantillonnage

$$6 f_{pas} < f < 25 f_{pas}$$

Précision des asservissements échantillonnées

Erreur de position

$$\varepsilon_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en échelon unité}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale $\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{z-1}{z} \varepsilon(z) \right]$

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

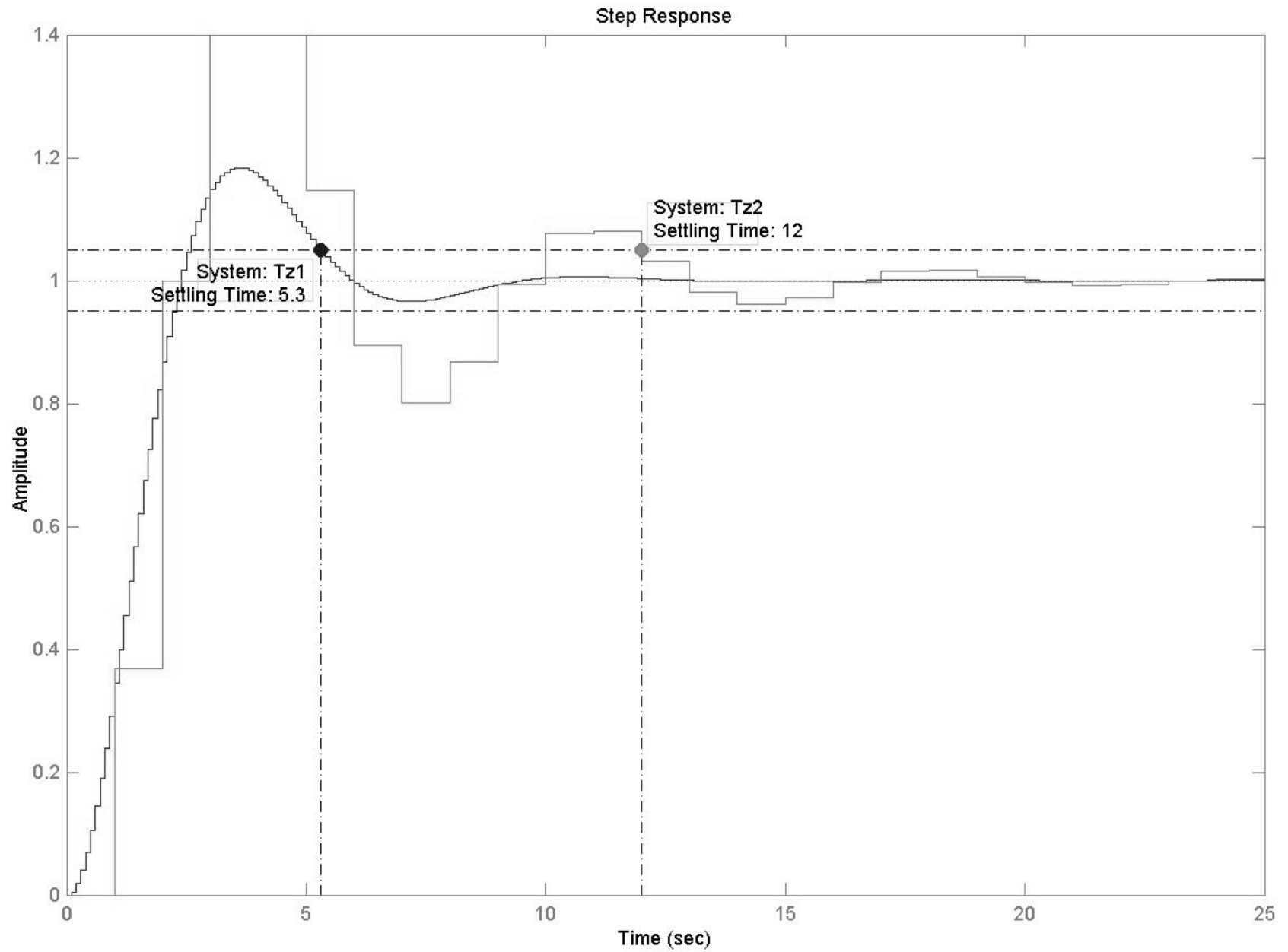
Comme l signal d'entrée est un échelon unité

$$E(z) = \left[\left(\frac{z}{z-1} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right]$$

Erreur de vitesse

$$\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en rampe}$$

$$E(z) = \left[\left(\frac{T_e z}{(z-1)^2} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)(1+G(z))} \right]$$



Performances Dynamiques des Systèmes Echantillonnées

Rapidité et limitation du dépassement

Assimiler le fonctionnement quelconque à celui d'un Système de 2^{ème} ordre

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{p_1 T_e})(1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e})(z - e^{p_2 T_e})}$$

$$G(z) = \frac{K \left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - e^{-2\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{\left(z^2 + 2z e^{-2\xi\omega_n T_e} - e^{-2\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e} \right)}$$

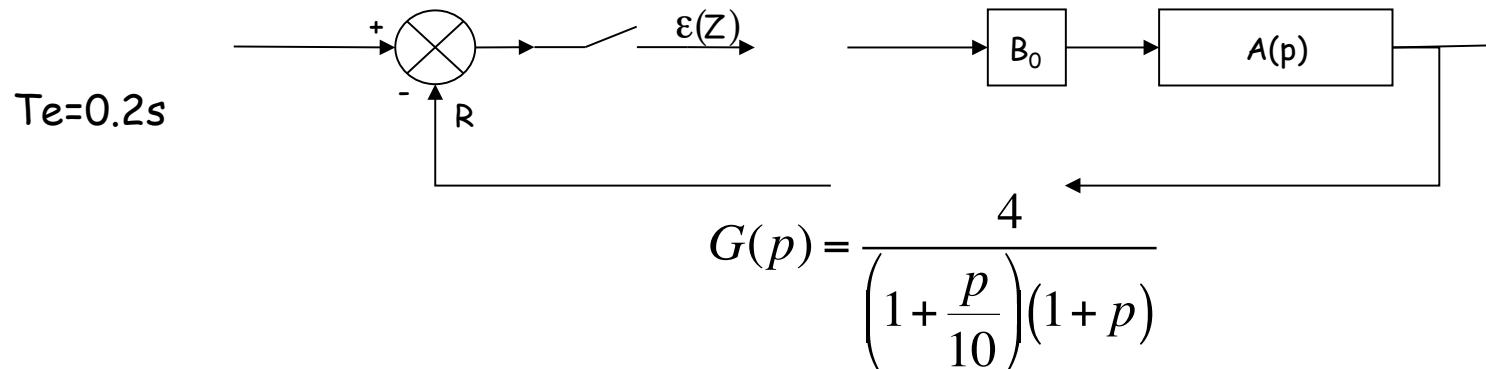
Prévision des Performances Dynamiques

Méthode la plus simple : Rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement
 En temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier le B_0

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}}$$

$$A(p) = \frac{4}{1 + p}$$

$$A(z) = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{z + e^{-T_e}}$$



Pulsation de coupure à 0dB et la marge de phase de ce système

$$|G(\omega)| = 1 \Rightarrow (1 + \omega^2) \left(1 + \frac{\omega^2}{100} \right) = 16 \Rightarrow \omega_0 = 3,6 \text{ rad/s}$$

Temps de montée en boucle fermée

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_0} \approx 0,8s$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_0) = \pi - \arctan \frac{\omega_0}{10} - \arctan \omega_0 = 85^\circ$$

Validation

$$A(z) = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{z + e^{-T_e}} \Rightarrow H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{0.72}{z - 0.1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.72}{z - 1} \Rightarrow s_k = 0.1s_{k-1} + 0.72e_{k-1} \quad \text{Représentation d'échantillons D=?}$$

Erreur de position

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + A(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e} + 4(1 - e^{-T_e})} = 0.2 = 20\%$$