Du signal analogique au signal numérique

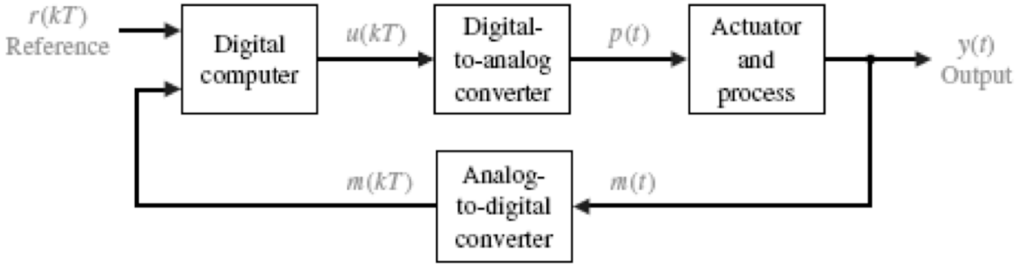
La Genèse du Signal Numérique

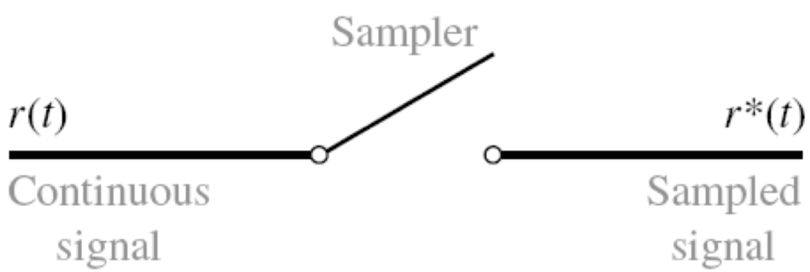
- ***De l'information cachée dans la représentation choisie***

    - Échantillonnage
    - Compression
    - Décomposition dans un espace orthogonal

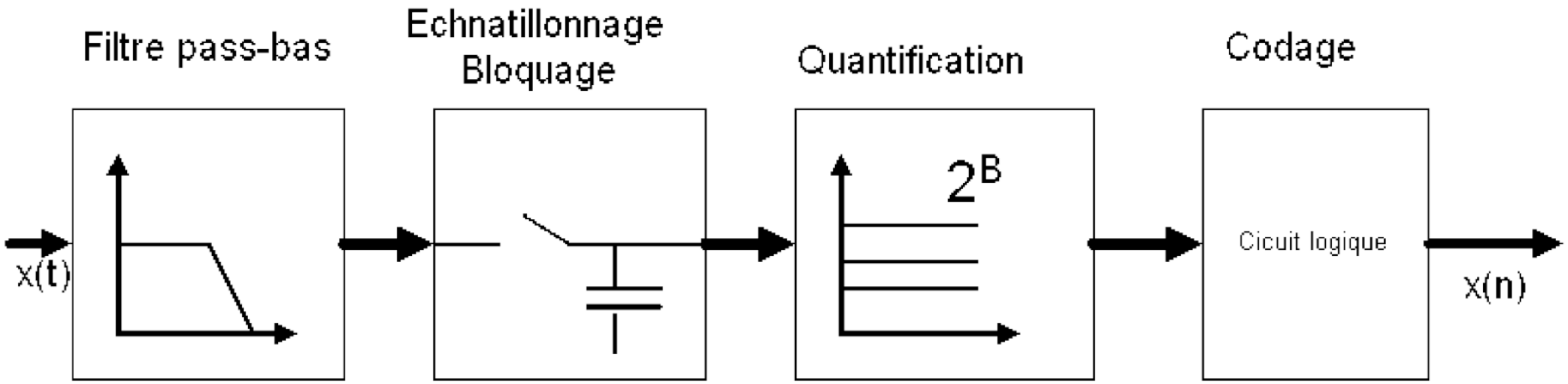
Les avances en moyen informatique (puissance de calcul) ont rendu possible le expression et traitement de signaux en forme numérique. Mais pour numériser, il faut d'abord échantillonner. Nous allons voir que la passage analogique – numérique implique nécessairement une perte d'information. Cette perte peut être minimiser par l'application des outils adaptés.

Systèmes Automatiques Echantillonnés



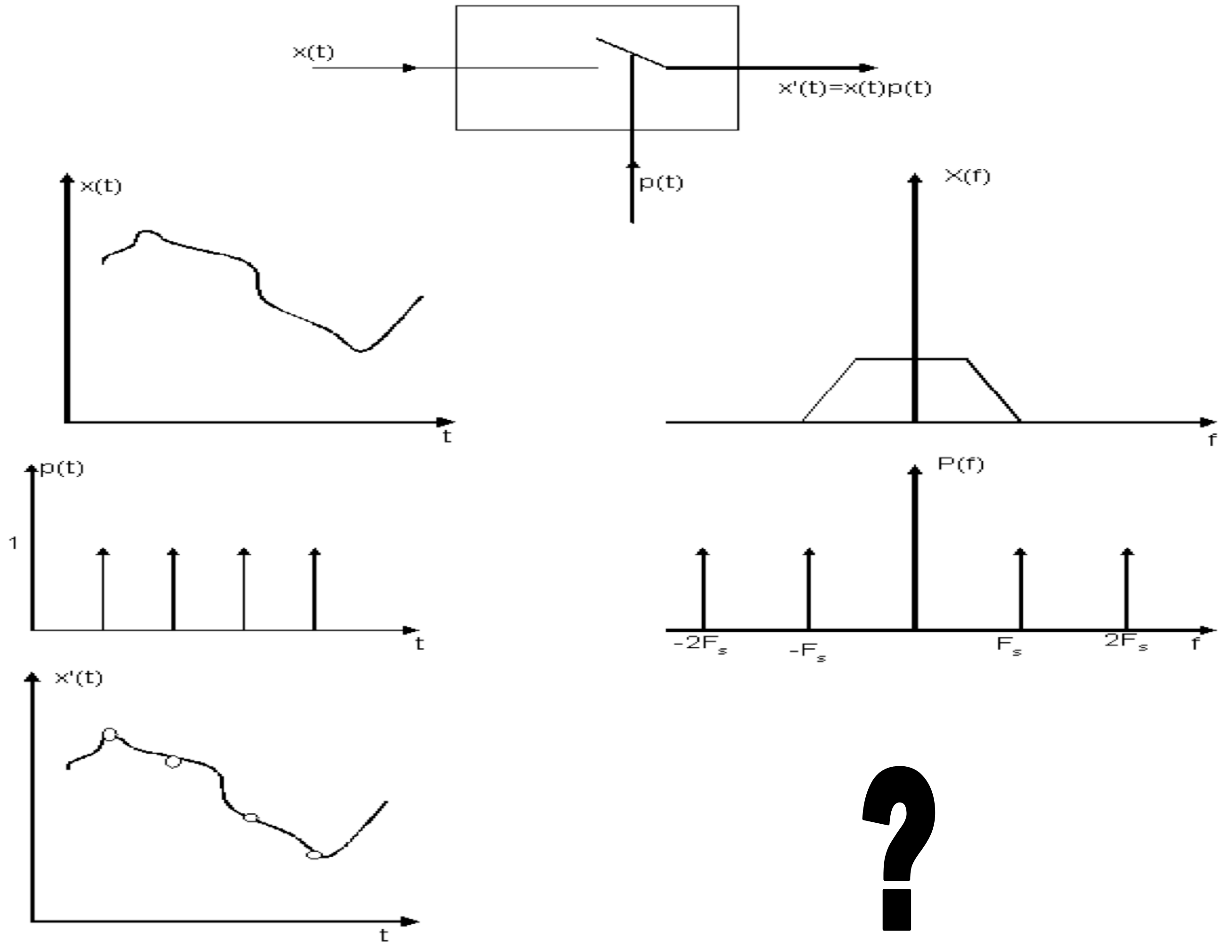


Échantillonnage

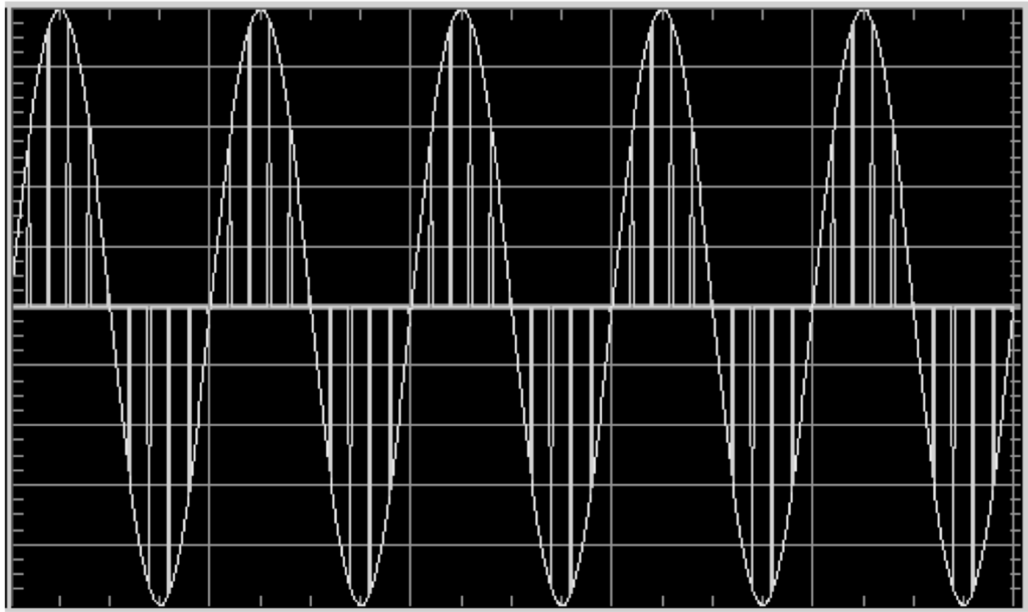


- Signal Analogique
- Signal discret en temps
- Signal numérique

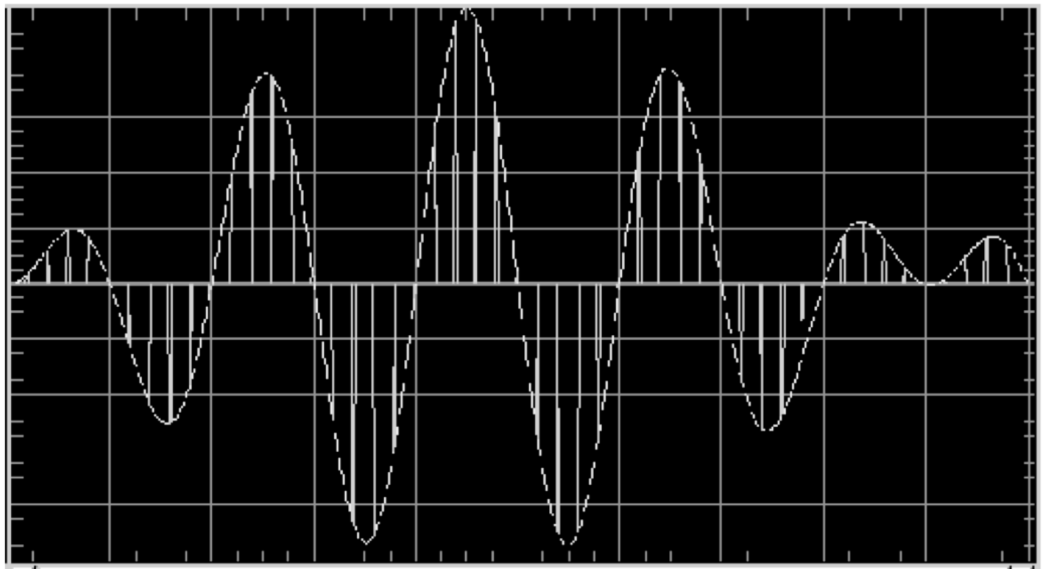
Modèle mathématique de l'échantillonnage



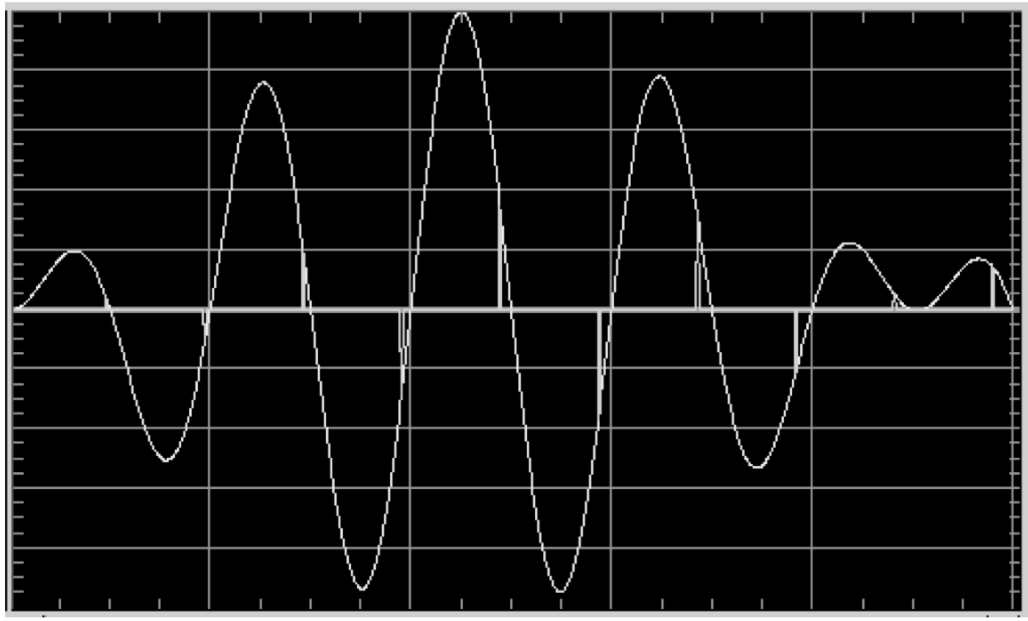
Signal Analogique



Signal échantillonnage

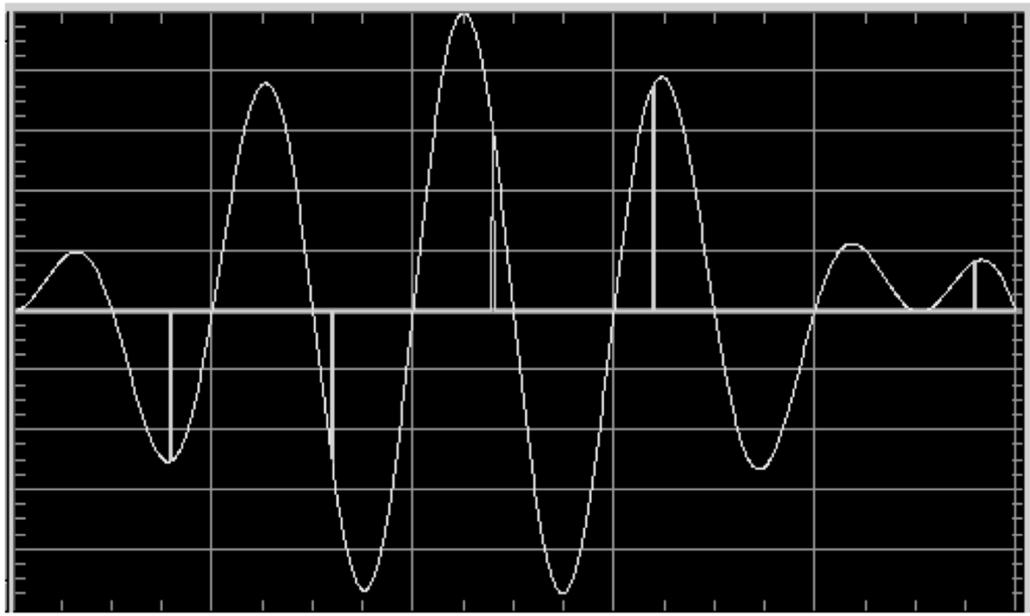


A la limite du théorème de l'échantillonnage

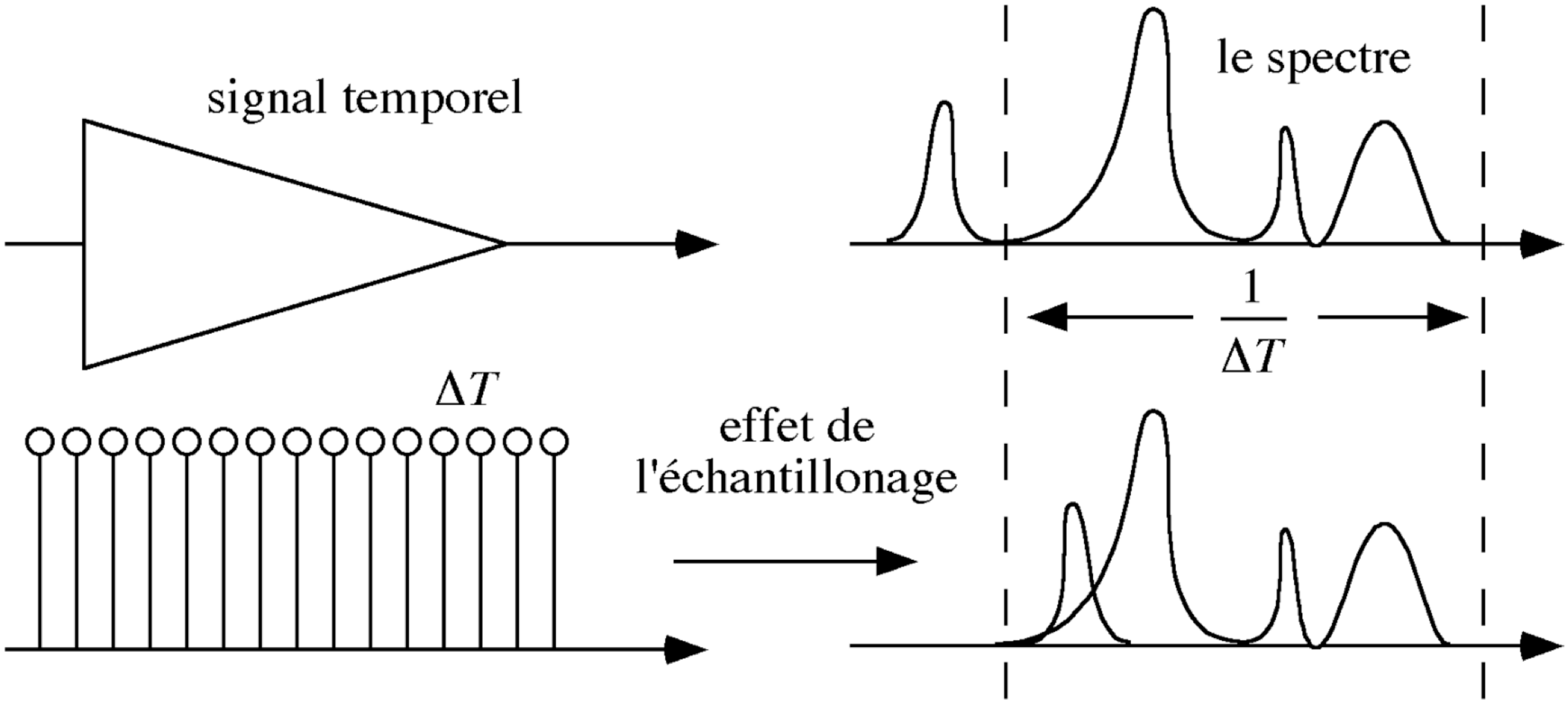


On peut, intuitivement, remarquer sur l'illustration précédente, que relier les échantillons à l'aide d'une ligne courbe, aussi bien choisie soit-elle, n'a que peu de chances de reproduire le signal original, bien que le théorème de l'échantillonnage soit, formellement, respecté.

Sous-échantillonnage



Si l'on tente de relier les échantillons par une courbe, on ne va pas être en mesure de reconstituer le signal original, mais un autre, peu semblable au précédent. Ceci est la conséquence de la violation du théorème de l'échantillonnage.


signal temporel
le spectre
$\frac{1}{\Delta T}$
ΔT
effet de
l'échantillonage

Échantillonnage

- L'échantillonnage idéal prélève des échantillons à la cadence T_e de façon instantanée.

$$x_e = \sum_{n \in Z} x_a(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Spectre du signal échantillonné

$$x_e(t) = x_1(t)\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)$$

$$\Updownarrow$$

$$X_e(f) = TF[x_a(t)] \; * \; TF[\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)]$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\delta}(\omega) = \int \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = 1$$

$$c(t) = \sum \delta(t-nT) \rightarrow \hat{c}(\omega) = \sum e^{-jnT\omega}$$

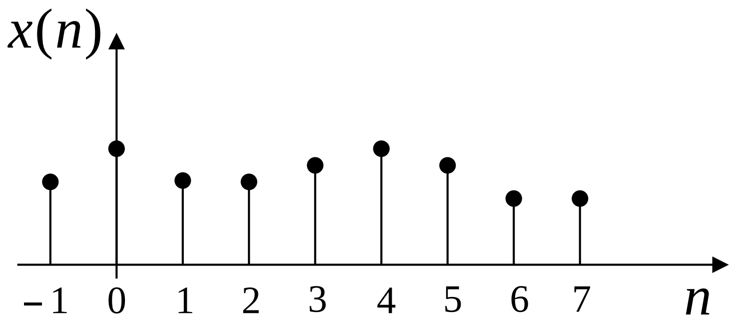
$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$

$$X_e(f) = f_e X_a(f) \; * \; TF[\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)] = f_e \sum_{n\in Z} X_a(f-nf_e)$$

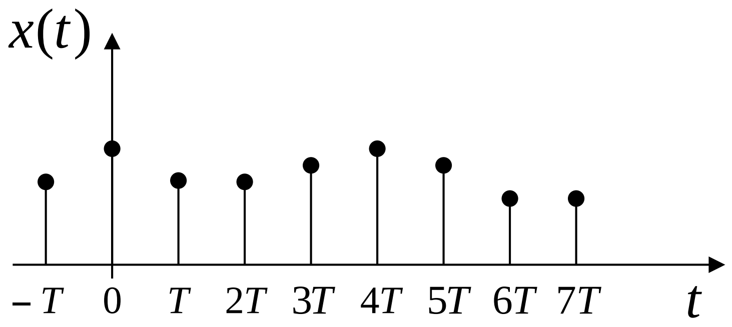
En utilisant la formule de Poisson

Échelle temps

Séquence

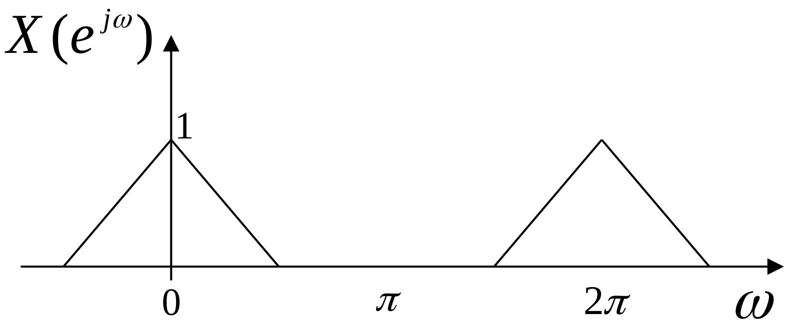


Temps physique

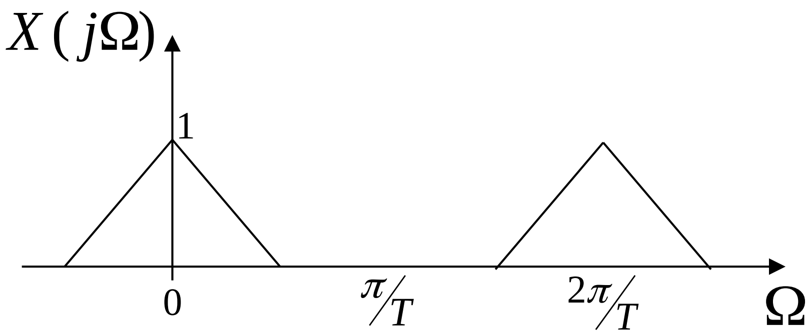


Échelle fréquence

Fréquence physique



Fréquence normalisée



✓ Échantillonnage et périodisation

- Échantillonnage idéal...

$$x_e(t) = x(t)\,\delta_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[kT]\delta(t-kT)$$

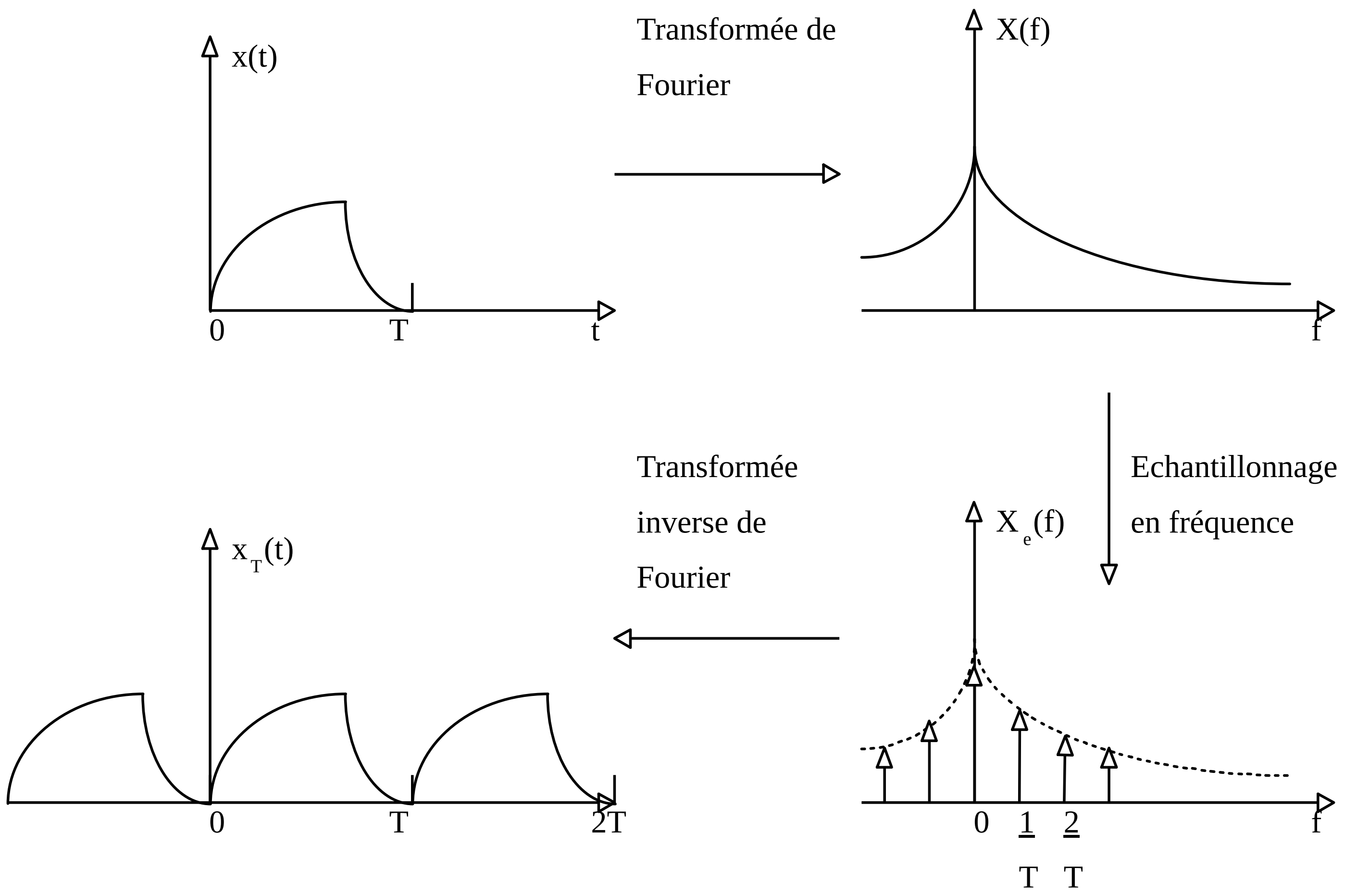
- ...Transformée de Fourier...

$$X_e(f) = \frac{1}{T}X(f) * \delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-\frac{k}{T})$$

⇨ *... périodisation en fréquence.*

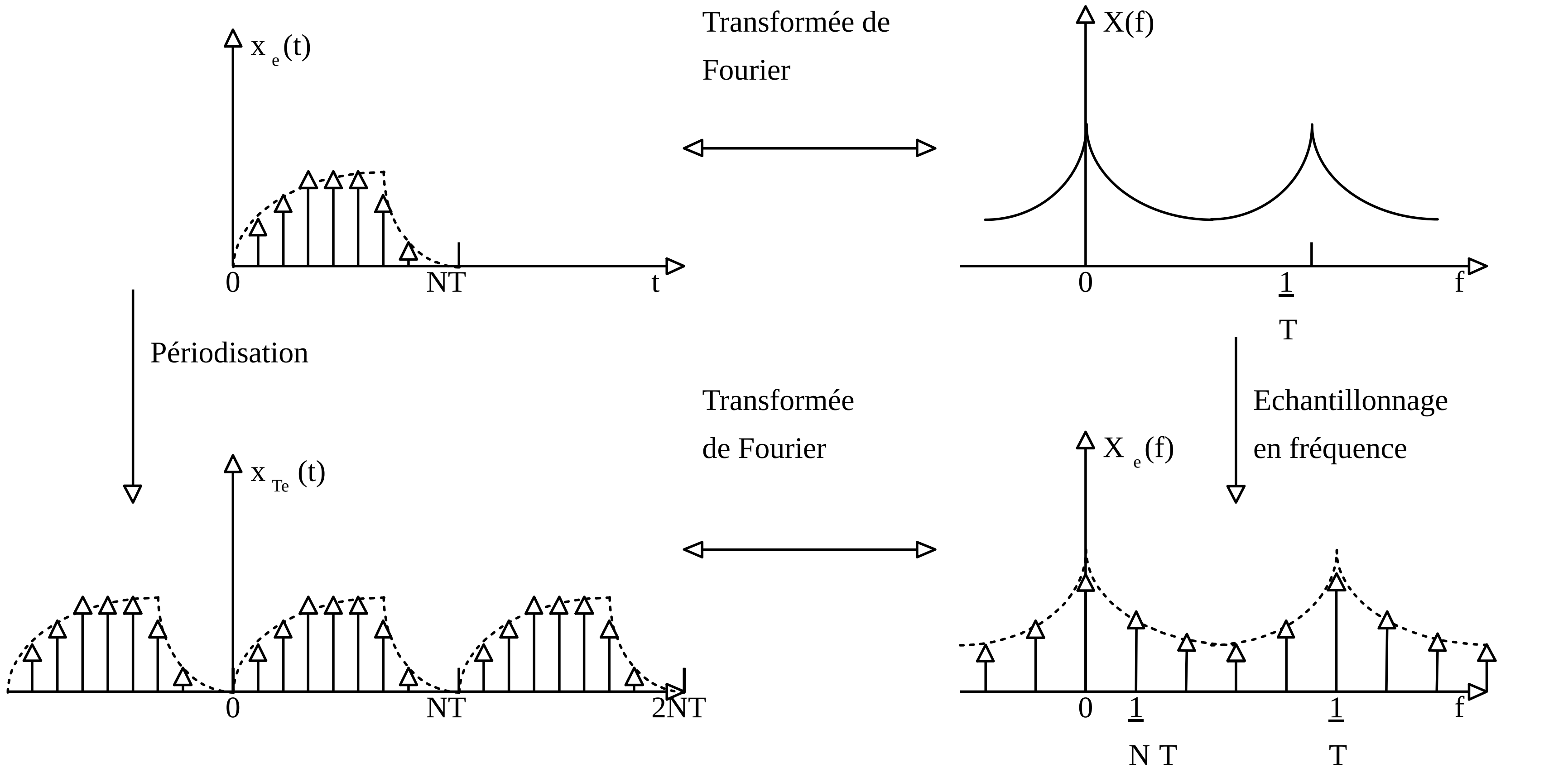
Échantillonnage temporel <=> périodisation en fréquence
Échantillonnage en fréquence <=> périodisation temporelle

✓ Signaux de durée finie et signaux périodiques



✓ Signaux échantillonnés de durée finie

$$x_e(t) = \sum_{0}^{N-1} x[k]\delta(t - kT)$$



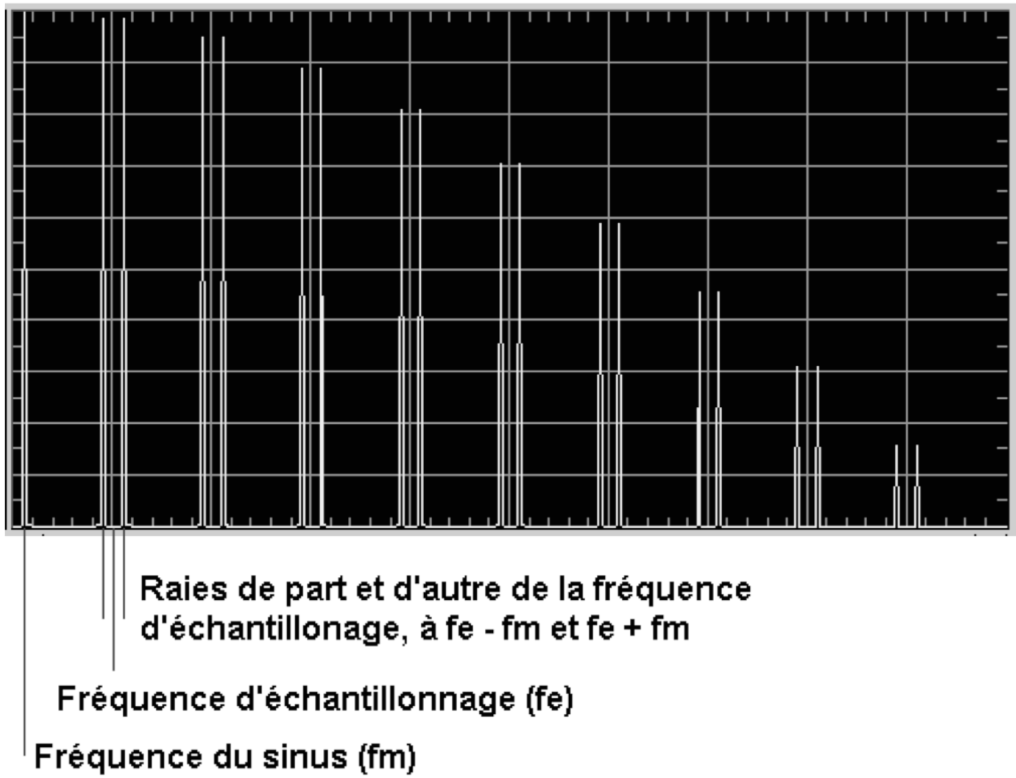
Théorème de Shannon

- Pour éviter une superposition des spectres élémentaires il est nécessaire d'imposer le théorème de Shannon

$$\boxed{Fe \geq 2f_{\max}}$$

Un signal de spectre borné ne peut pas être que de durée infinie. Il est donc erroné de considérer des signaux à la fois de durée et de spectre finis.

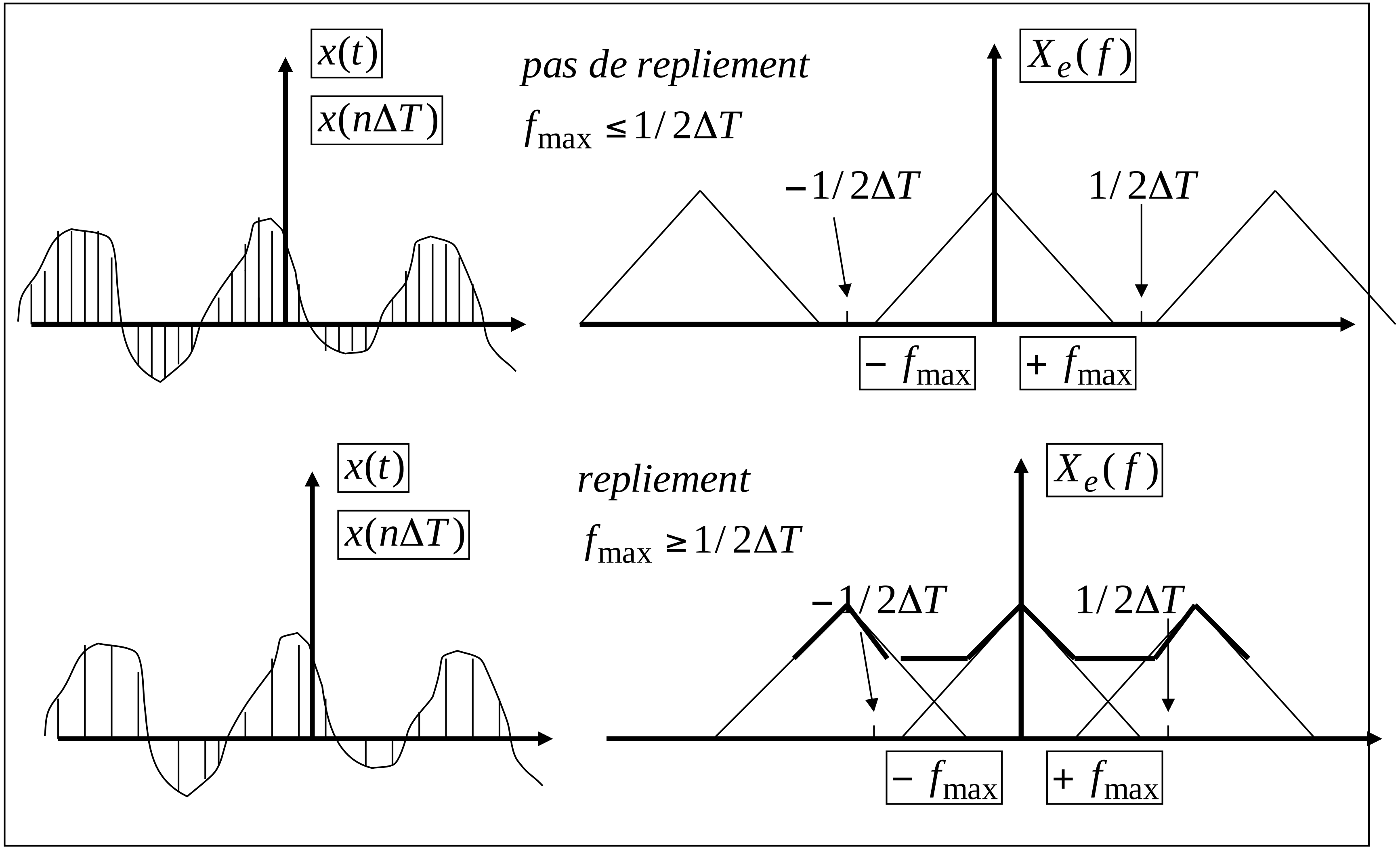
Spectre dans le cas sinusoïdal



Le spectre d'un signal échantillonné se compose d'une série de raies réparties de part et d'autre des multiples de la fréquence d'échantillonnage. Les raies intéressantes pour la démodulation sont celles qui se situent aux alentours de 0, puisque ce sont celles qui correspondent au signal original.

Transformée de Fourier Discrète

repliement de spectre dans le domaine fréquentiel

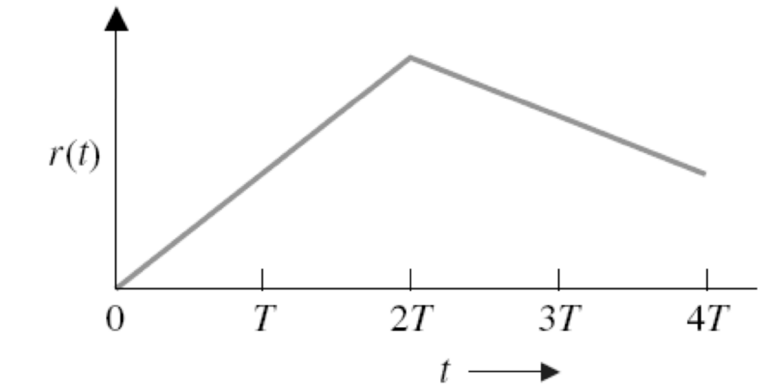


Quelques valeurs

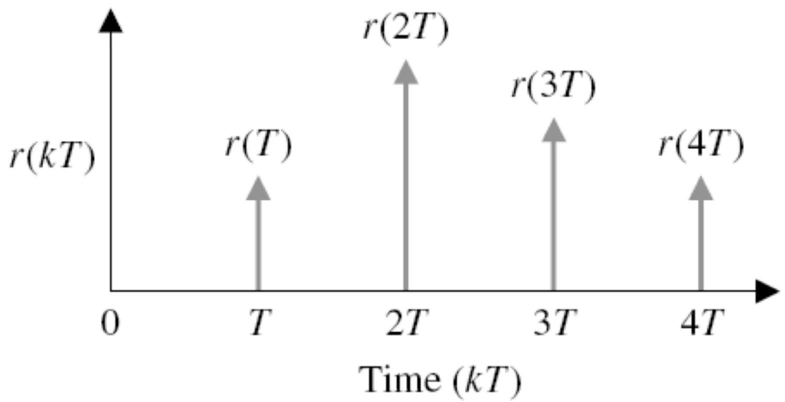
- En téléphonie, on utilise une largeur de bande de 300 à 3400 Hz. Dans le cadre du réseau numérique à intégration de services (RNIS, ISDN pour les anglo-saxons), on utilise une fréquence d'échantillonnage de 8000 Hz (au lieu des 6800 théoriquement nécessaires).

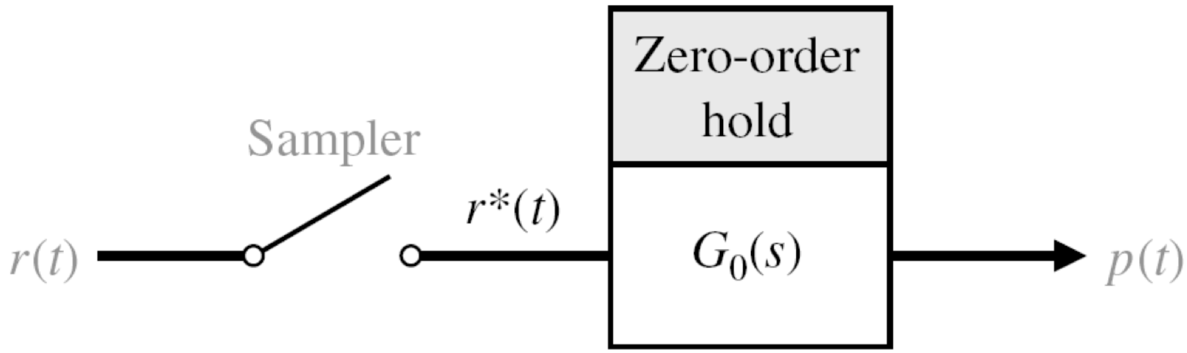
- La musique se satisfait de 16, voire 20 kHz de largeur de bande. Un disque CD (Compact Disc) utilise une fréquence d'échantillonnage de 44 kHz.

- ***<u>Remarque:</u>*** Dans les deux cas, il est essentiel que l'on ait au préalable limité la largeur de bande du signal original : des fréquences inaudibles dans le signal original deviennent audibles par le phénomène de repliement !


r(t)
0
T
2T
3T
4T
t

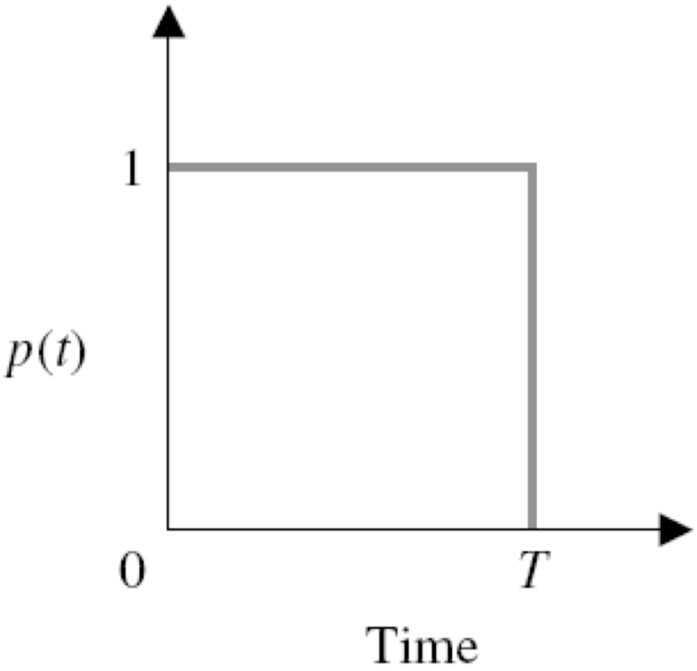
(a)

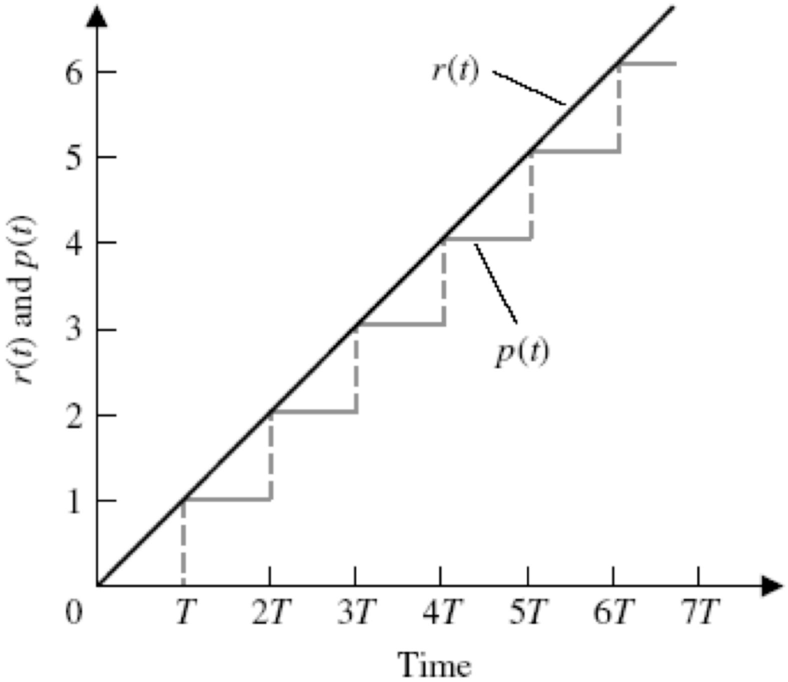

r(kT)
r(T)
r(2T)
r(3T)
r(4T)
0
T
2T
3T
4T
Time (kT)

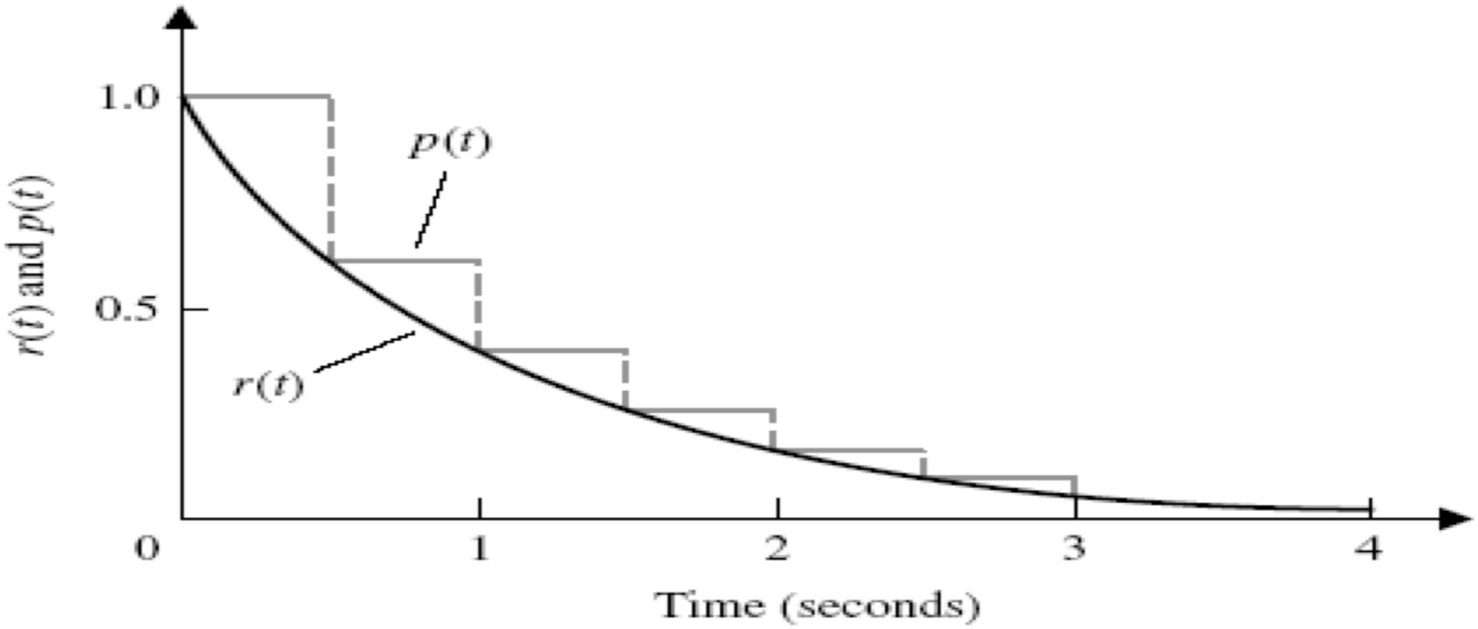

Sampler
Zero-order
hold
r(t)
r*(t)
G0(s)
p(t)

La F.T. d'un bloqueur d'ordre 0

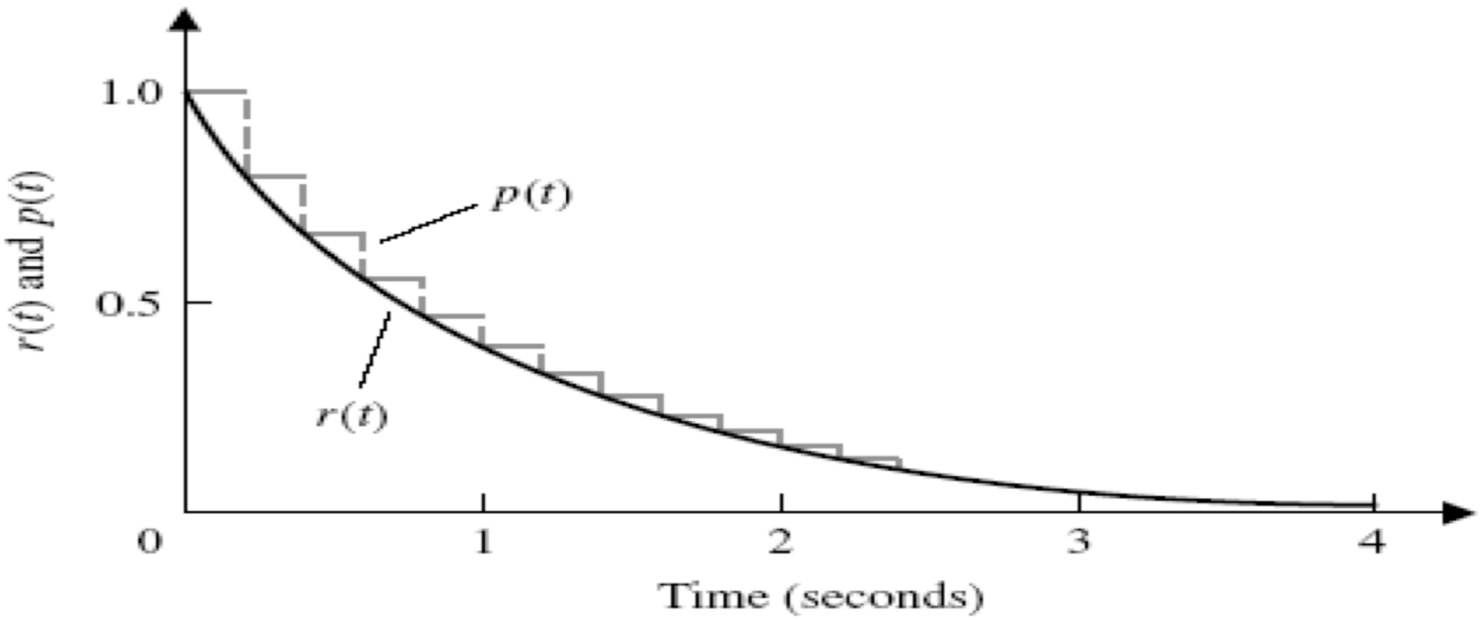
$$G_o(s) = 1/s - e^{sT}/s = (1 - e^{sT})/s$$





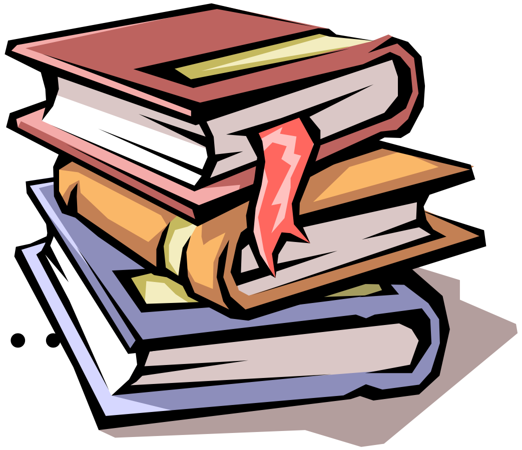


(a) $T = 0.5$ seconds



(b) $T = 0.2$ seconds

Encore ….



La Transformée de Fourier

mais

… Discrète

Transformée de Fourier à temps discret

- Si le temps est discrétisé

$$X(f) = \sum_{t \in Z} x(t)\, e^{-2 j\pi f t}$$

La T.F. est périodique de période 1

- Et la transformée inverse

$$x(t) = \int_{-1/2}^{1/2} x(t) e^{2\pi jft} df$$

Propriétés

- $X(f)$ est périodique $T_0=1$

$$X(f+1) = \sum_{t \in Z} x(k)\, e^{-2j\pi(f+1)k} = \sum_{t \in Z} x(k)\, e^{-2j\pi fk} e^{-2j\pi k} = X(f)$$

Remarques:

1. La transformée de Fourier de $X_a(t)$ d'un signal analogique n'est pas périodique
2. $X(f)$ est périodique $F_0=1$, tout intervalle de longueur unité est suffisant pour décrire complètement cette fonction

Règle de construction de la TFtd à partir de la TF de x(t)

$x(t)$ *continue en t*

$x_e(t = n\Delta T)$ *la version échantillonnée* ΔT *période d'échantillonnage*

$$x_e(n\Delta T) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - n\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - n\Delta T)$$

$$X_e(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - n\Delta T))e^{-2\pi jft}dt$$

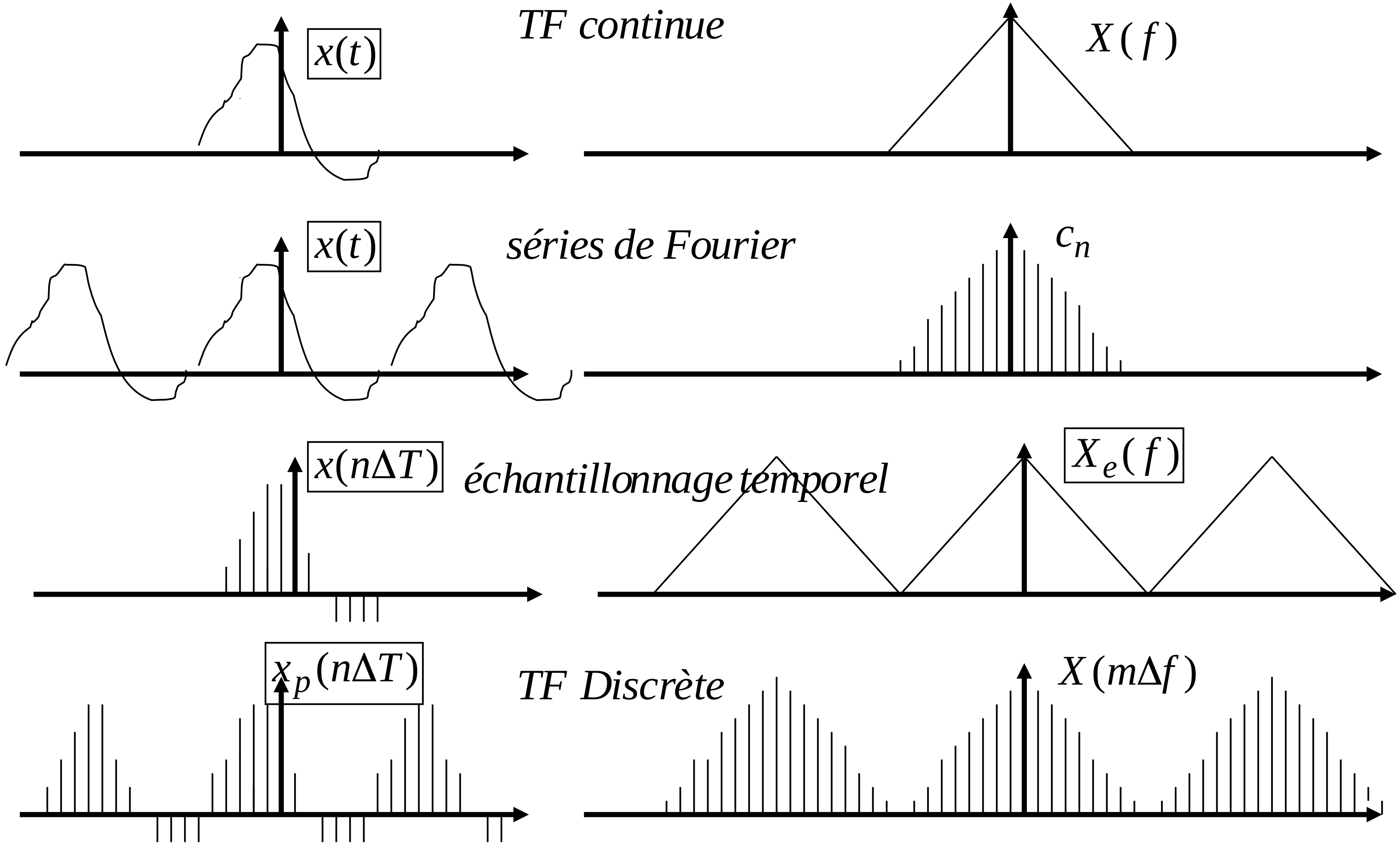
$$\begin{cases} X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T).e^{-2\pi jf(n\Delta T)} \\ x(n\Delta T) = \Delta T \int_{-1/2\Delta T}^{1/2\Delta T} X_e(f)e^{+2\pi jf(n\Delta T)}df \end{cases}$$

conclusion :

$x(n\Delta T) \Rightarrow X_e(f)$ *est une fonction périodique en f de période* $(1/\Delta T)$

- On divise l'axe des fréquence par Fe
- On périodise avec la période 1
- On divise l'amplitude par Te

Transformée de Fourier Discrète
discrétisation T/F=Périodisation T/F (1)



Observations spectrales

- Précision
  - Pour mesurer la fréquence d’une seule sinusoïde
- Résolution
  - La capacité de mesurer des fréquences distinctes

Transformée de Fourier discrète

- En se limitant à un nombre fini de L valeurs de la fréquence, à savoir $f=k/L$, on obtient la Transformée de Fourier Discrète

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi jkn/N}$$

- L est le nombre de points de calcul de Tftd et N est le nombre de points de la suite temporelle

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{nk} \quad k\in\{0,...,N\text{-}1\} \qquad \text{avec} \quad w_N=\exp(-2j\pi/N)$$

La Transformée de Fourier Rapide

- <u>Exemple</u> $N=2^p$ où $p=3$

$$X_k=(x(0)+x(2)W_8^{2k}+x(4)W_8^{4k}+x(8)W_8^{6k})+W_8^{k}(x(1)+x(3)W_8^{2k}+x(5)W_8^{4k}+x(7)W_8^{6k})$$

- Ce qui donne

$$(x(0)+x(4)W_8^{4k})+W_8^{2k}(x(2)+x(6)W_8^{4k})$$

$$(x(1)+x(5)W_8^{4k})+W_8^{2k}(x(3)+x(7)W_8^{4k})$$

- Une structure de papillon : addition, soustraction et multiplication

La Densité Spectrale

- … est obtenue par la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (théorème de Wiener-Khintcine):

$$S(f) = \mathrm{TF}\{\mathrm{C(p)}\} = \sum_{p \in Z} C(p) \exp(-2\pi j f p T_e)$$

- La loi de probabilité gaussienne est importante dans la mesure où elle garde son caratère gaussien dans toute opération linéaire : convolution, filtrage, dérivation, intégration. En d'autres termes, si l'entrée d'un système linéaire est gaussienne, sa sortie est gaussienne.

Corrélation des signaux

- *<u>Définition</u>*

$$\varphi_{x,y}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(l+k)$$

- *Algorithme*
  - *Le signal y(l) est décalé d'une certaine quantité k*
  - *Le produit x(l)y(l+k) est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
  - *Les valeurs ainsi obtenus sont additionnées*

Propriétés

$$\Phi xy(f)=\sum \varphi_{xy}(k)\, e^{-2\pi jfk}=X^*(f)Y(f)$$

<u>Théorème de Parseval</u>

$$\varphi_x(0)=\sum x^2(l)=\int_{-1/2}^{1/2}\Phi_x(f)\,df \qquad k=0$$

La fonction d'autocorrélation est une fonction paire

Transformée z

Transformées

Dans l'étude des systèmes continus, la fréquence réelle ω ou la fréquence complexe s sont utilisées dans la fonction de transfert $T(s)$ ou $H(s)$ et la fonction de transfert sinusoïdale $H(\omega)$.

Il est avantageux de décrire les systèmes continus dans l'espace des fréquences ce qui permet de tirer un certain nombre de conclusions concernant leurs propriétés.

La transformée en z, basée sur l'utilisation d'une **fréquence complexe z**, va procurer des avantages similaires pour les systèmes DLI. **La transformation en z transforme l'espace du temps discret en un espace de fréquences z.**

Transformée en *z*

La transformée en *z* est très facile à utiliser en plus d'être très commode.

•La transformée en *z* (TZ) de la réponse impulsionnelle d'un système DLI est sa fonction de transfert.

•Il existe une relation directe entre la TZ et la TFSD.

•La TZ permet la solution directe des équations aux différences de la même façon que la transformée de Laplace avec les équations différentielles.

•La TZ est une méthode générale pour l'étude des systèmes discrets.

Transformée en z

Définition :

La transformée en z d'un signal discret $x[n]$ est :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

dans laquelle z, une variable complexe, peut prendre toute valeur sur le plan complexe appelé, en l'occurrence, plan z.

Définition

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Transformée
de Fourier

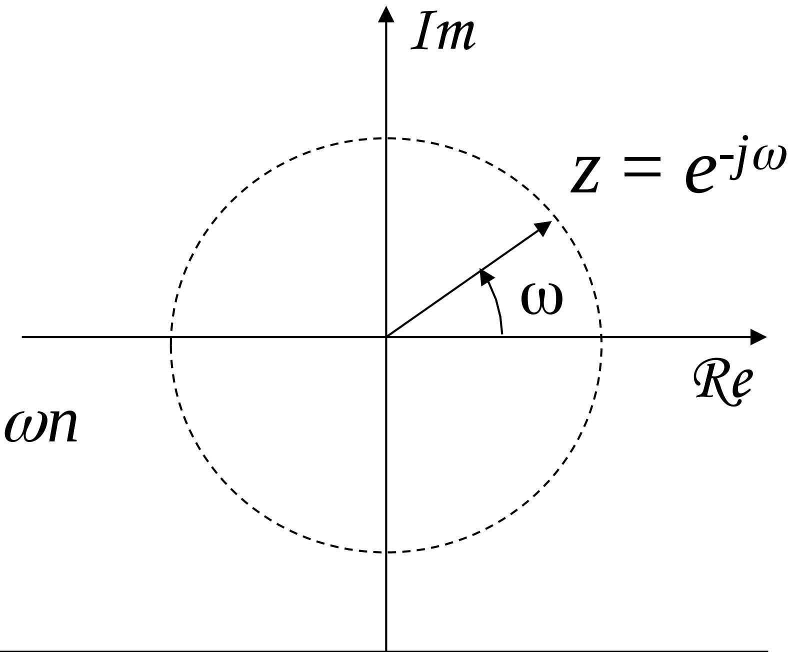
- $z = e^{-j\omega}$.

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Plane z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$



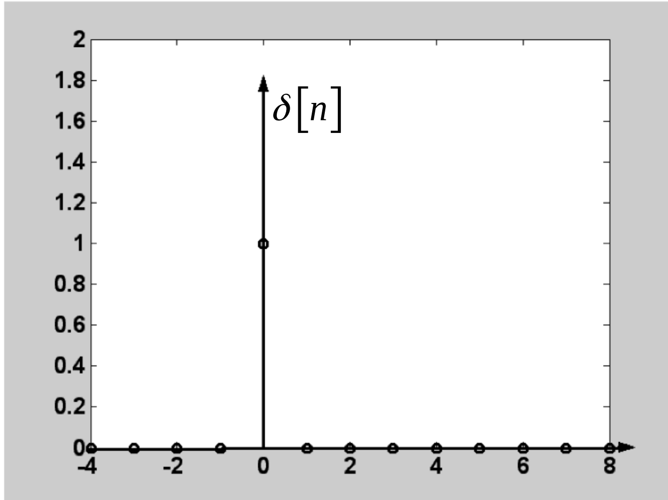
Transformée de Fourier équivalente à la Tz sur un cercle de rayon1.

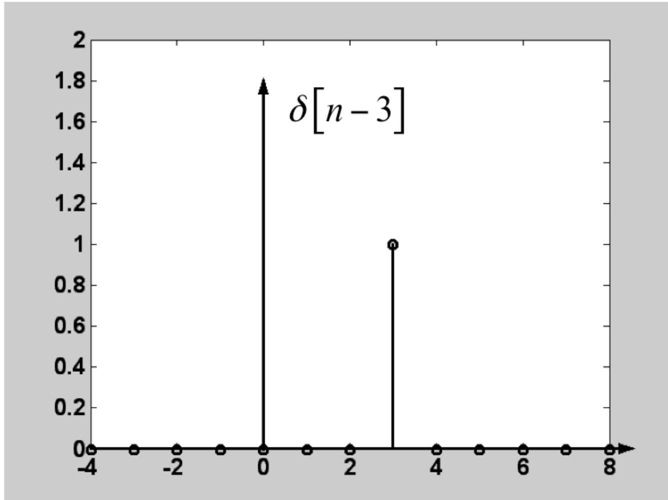
Transformée en z

Exemples

$$\delta[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^{-k}$$





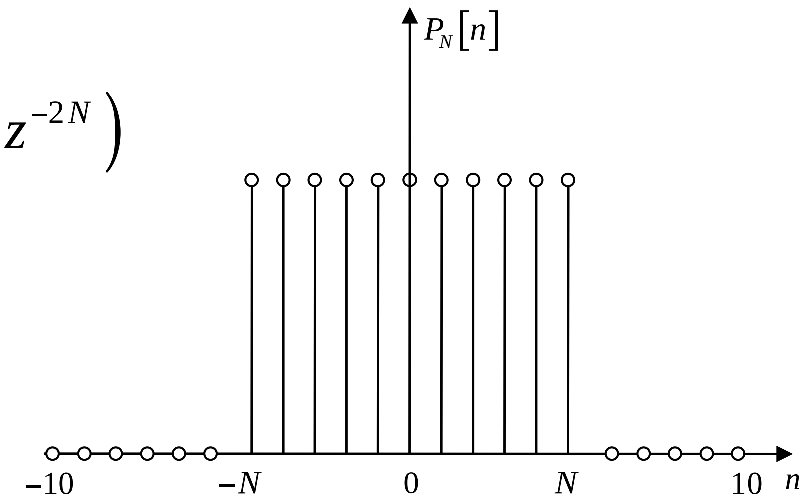
Transformée en z

Exemples

$$P_N[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^N + z^{N-1} \ldots\ldots z \;\; + 1 + z^{-1} + \ldots\ldots\ldots z^{-N}$$

$$P_N[n] \leftrightarrow z^N \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\ldots\ldots + z^{-2N}\right)$$

$$P_N[n] \leftrightarrow \frac{z^N \left(1 - z^{-2N-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)}$$



Remarque importante

Lorsque X(z) prend la forme d'un polynôme en z^{-1}, alors le coefficient de z^{-n} est $x[n]$. On peut ainsi interpréter z^{-1} comme un **opérateur de délai unitaire** et z comme une avance.

Domaine de convergence

Exemples

1) $u[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1} \quad , \; \left|z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \quad |z| > 1$

2) $-u[-n-1] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -z - z^2 - z^3 \ldots.$

$$= -z\left(1 + z + z^2 + \ldots.\right) = -z\frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} \quad , \; |z| < 1$$

Seules, les régions de convergence, ou RDC, spécifiques à chacune de deux TZ permettent de les distinguer et éventuellement de retrouver les séquences originales. En somme, il faut connaître la région de convergence de chaque TZ pour pouvoir retrouver les séquences.

Domaine de convergence

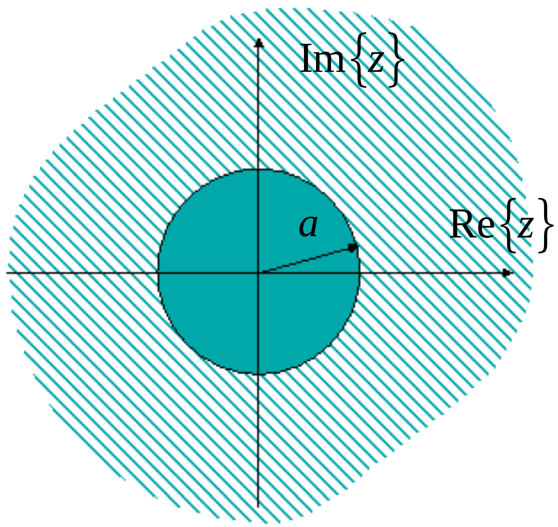
Exponentielle

$$a^n u[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1 + az^{-1} + \left(az^{-1}\right)^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ,$$

lorsque $\left|az^{-1}\right| < 1$ c`est à dire $|z| > |a|$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

La condition $|z| > |a|$ définit la région de convergence *R*, ou RDC de la transformée en *z*, c' est à dire le domaine du plan *z* où cette transformée existe.



Condition d' existence

$$\boxed{\text{Une suite } \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ converge si d' après Cauchy } \lim_{n\to\infty}\left[\left|U_n\right|\right]^{1/n} < 1}$$

Appliquons ce critère à *F(Z)*

$$F(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k Z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} f_k Z^{-k} = S_1 + S_2$$

$$S_2 \text{ existe si } \lim_{k\to\infty}\left|f_k Z^{-k}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\left|f_k\right|^{\frac{1}{k}} \lim_{k\to\infty}\left|Z\right|^{-1} < 1$$

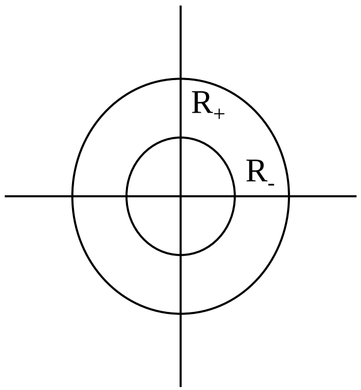
$$\boxed{\Rightarrow \left|Z\right| > \lim_{k\to\infty}\left|f_k\right|^{\frac{1}{k}} = R_- \text{ Rayon de convergence}}$$

Pour S_1 on pose k = -n

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k Z^{-k} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(-nT)Z^n \text{ existe si } \lim_{n\to\infty}\left|f(-nT)Z^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty}\left|f(-kT)\right|^{\frac{1}{k}} \lim_{k\to\infty}\left|Z\right| < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow S_1 \text{ existe si } \left|Z\right| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|f(-nT)\right|^{\frac{1}{n}}} = R_+}$$

$$\boxed{\text{Donc } F(Z) \text{ existe si } R_- < \left|Z\right| < R_+}$$

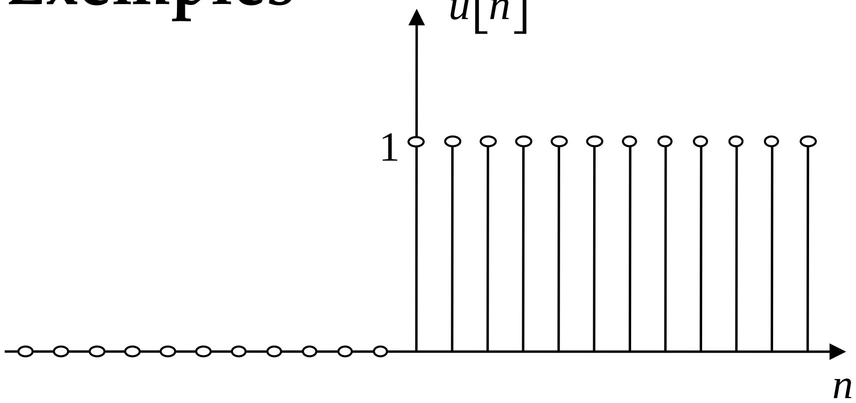


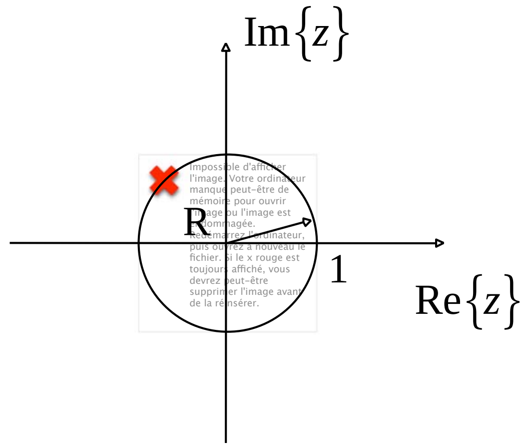
La zone de convergence est un anneau délimité par les rayons R_- et R_+ qui représentent l' équivalent des abscisses de convergence de la TL

<u>Remarque :</u> Si *f(kT)* est causal $R_+ \rightarrow +\infty$

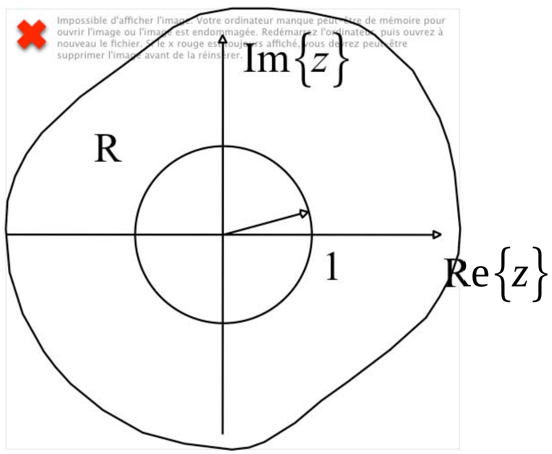
Domaine de convergence

Exemples

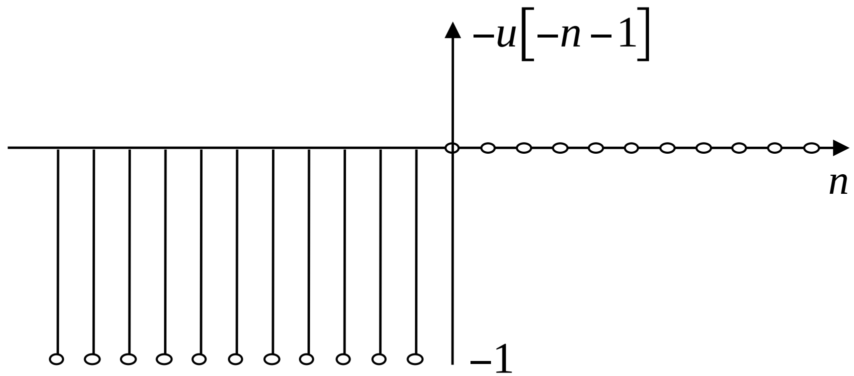




C

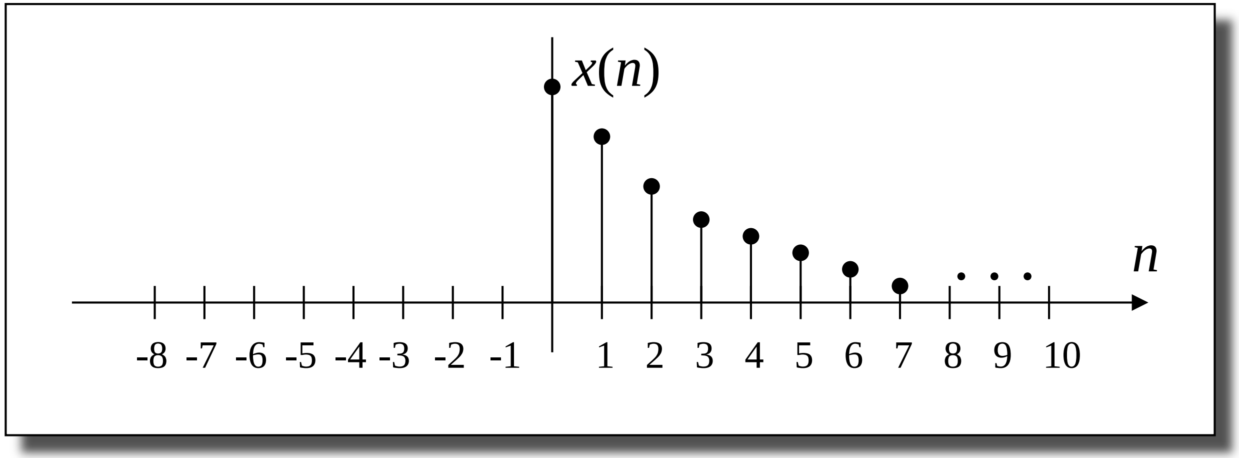


C



Exemple:

$$x(n) = a^n u(n)$$



Example

$$\boxed{x(n) = a^n u(n)}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Pour la convergence de $X(z)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}| < \infty \Longrightarrow |az^{-1}| < 1$$

$$\Longrightarrow |z| > |a|$$

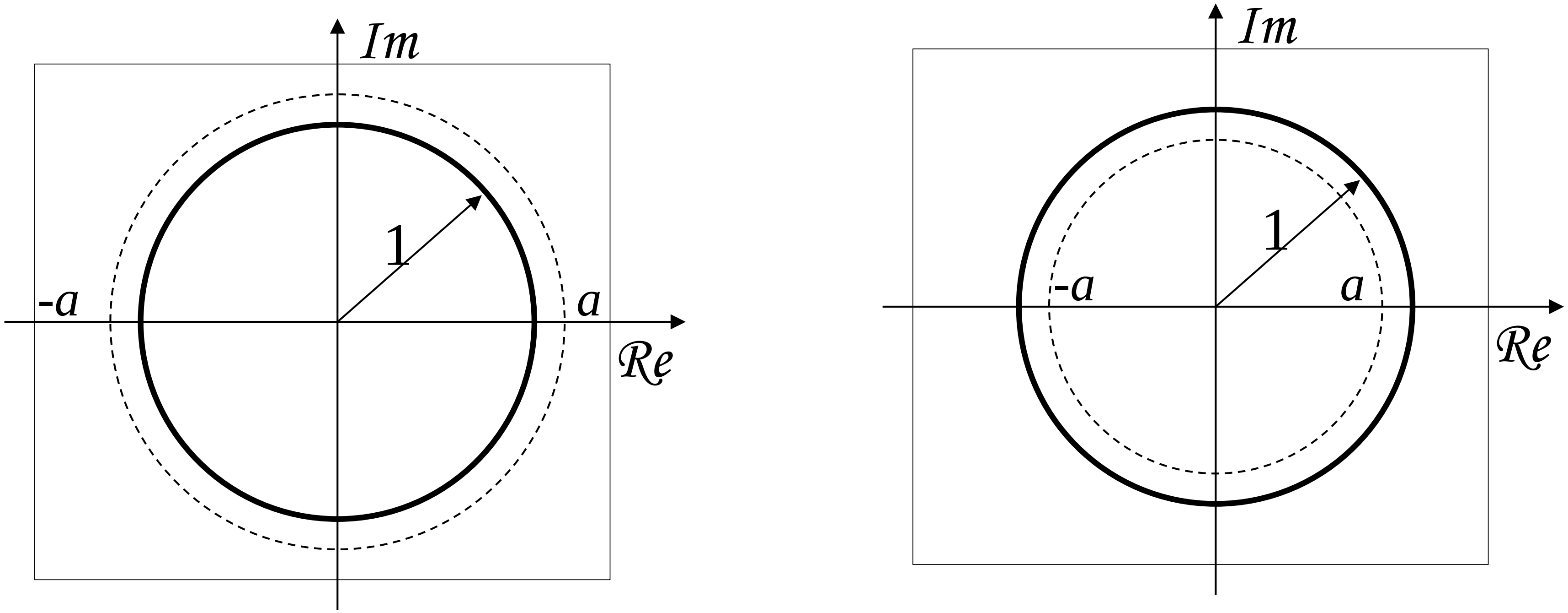
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$|z| > |a|$$

Exemple: $x(n)=a^n u(n)$

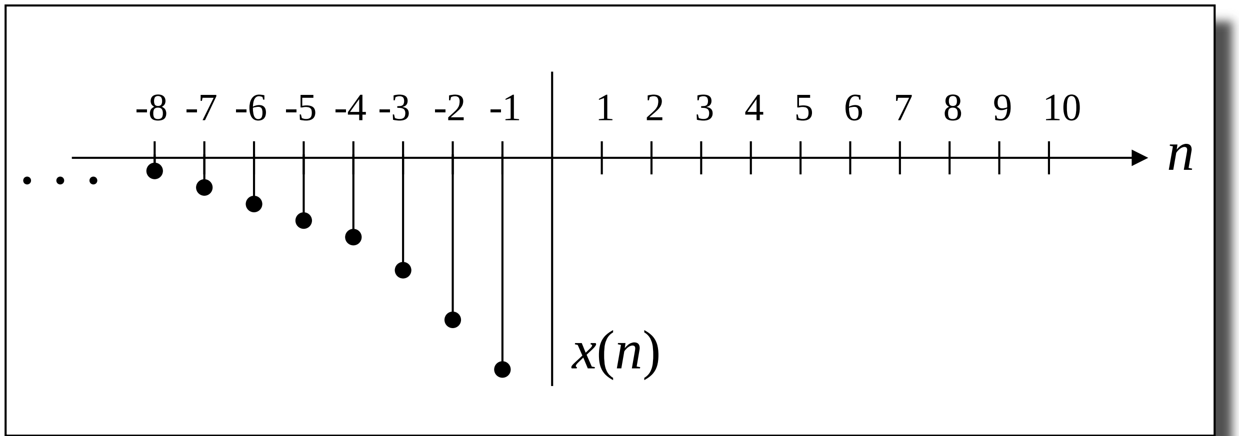
$$X(z)=\frac{z}{z-a}, \qquad |z|>|a|$$

Lequel est stable?



Exemple :

$$\boxed{x(n) = -a^n u(-n-1)}$$



Exemple :

$$\boxed{x(n) = -a^n u(-n-1)}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^n$$

Pour la convergence de $X(z)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^{-1} z| < \infty \Longrightarrow |a^{-1} z| < 1$$

$$\Longrightarrow |z| < |a|$$

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z - a}$$

$$|z| < |a|$$

Domaine de convergence

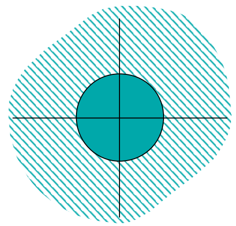
$X(z)$ n' a de sens que pour des valeurs de z se trouvant dans R, le domaine de convergence ou RDC. Il faut formellement définir cette région.

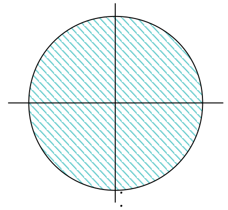
En pratique, la convergence pose rarement des problèmes.

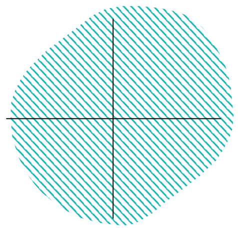
Mais ces conditions sont parfois essentielles pour effectuer la transformation ou la transformation inverse comme dans l' exemple suivant.

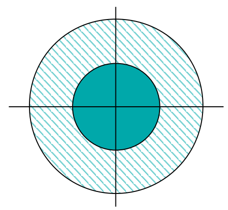
Domaine de convergence

$x[n]$	$X(z)$
$x[n]$ est borné à gauche, i.e. $x[n]$ =0 pour tout n inférieur à un n_0 particulier	$X(z)$ converge pour tout z situé à l'extérieur d'un cercle de rayon particulier
$x[n]$ est borné à droite, i.e. $x[n]$ =0 pour tout $n > n_0$	$X(z)$ converge pour tout z situé à l'intérieur d'un cercle de rayon particulier
$x[n]$ a une longueur finie, i.e. $x[n]$ =0 pour tout $n<n_1$ et tout $n>n_2$ avec $n_1<n_2$	$X(z)$ pour toute les valeurs de x sauf éventuellement en z=0 et en $z=\infty$
$x[n]$ n'est borné ni à gauche, ni à droite	Si $X(z)$ converge, la RDC se situe entre deux cercles.









Transformées en z

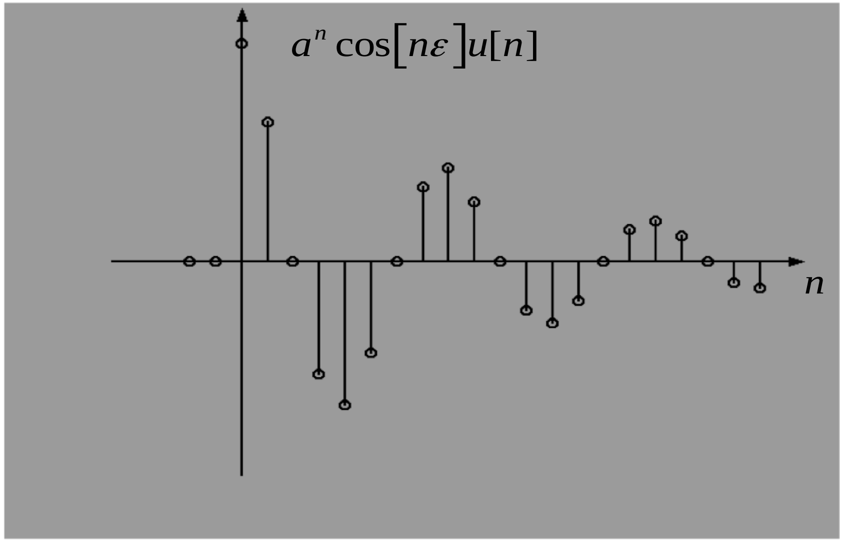
Exemple

$$x[n] = a^n \cos[n\varepsilon]u[n] = \frac{a^n e^{jn\varepsilon} + a^n e^{-jn\varepsilon}}{2}u[n] = \frac{b^n + b^{n*}}{2}u[n]$$

$$a^n \cos[n\varepsilon]u[n] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{1}{1-b^*z^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^{j\varepsilon}z^{-1}} + \frac{1}{1-ae^{-j\varepsilon}z^{-1}}\right)$$

$$a^n \cos[n\varepsilon]u[n] \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-az^{-1}\cos\varepsilon}{1+a^2z^{-2}-2az^{-1}\cos\varepsilon} \\ \dfrac{z\left(z-a\cos\varepsilon\right)}{z^2-2az\cos\varepsilon+a^2} \end{cases}$$

$$|z| > |a|$$



Transformée-z

Séquence	Transformée-z	ROC
$\delta(n)$	1	z
$\delta(n-m)$	z^{-m}	z sauf 0 (si m>0) ou ∞ (si m<0)
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z \rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$

Transformée-z

Sequence	Transformée-z	ROC
$[\cos\omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[\sin\omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[r^n\cos\omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$[r^n\sin\omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1 \\ 0 & ailleur \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

Linéarité

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \qquad z \in R_x \cap R_y$$

Shift

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z) \qquad z \in R_x$$

Multiplication par une Exponentielle

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \qquad z \in |a| \cdot R_x$$

Différentiation de $X(z)$

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\,\frac{dX(z)}{dz} \qquad z \in R_x$$

Conjugué

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad z \in R_x$$

Inverse

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}) \qquad z \in 1/R_x$$

Parties : Réelle et Imaginaire

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{R}e[x(n)] = \tfrac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \qquad z \in R_x$$

$$Im[x(n)] = \tfrac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)] \qquad z \in R_x$$

Théorème de la valeur initiale

$$x(n) = 0, \qquad \text{pour } n < 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Convolution

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z) \qquad z \in R_x \cap R_y$$

Convolution de Séquences

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k)$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n} \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

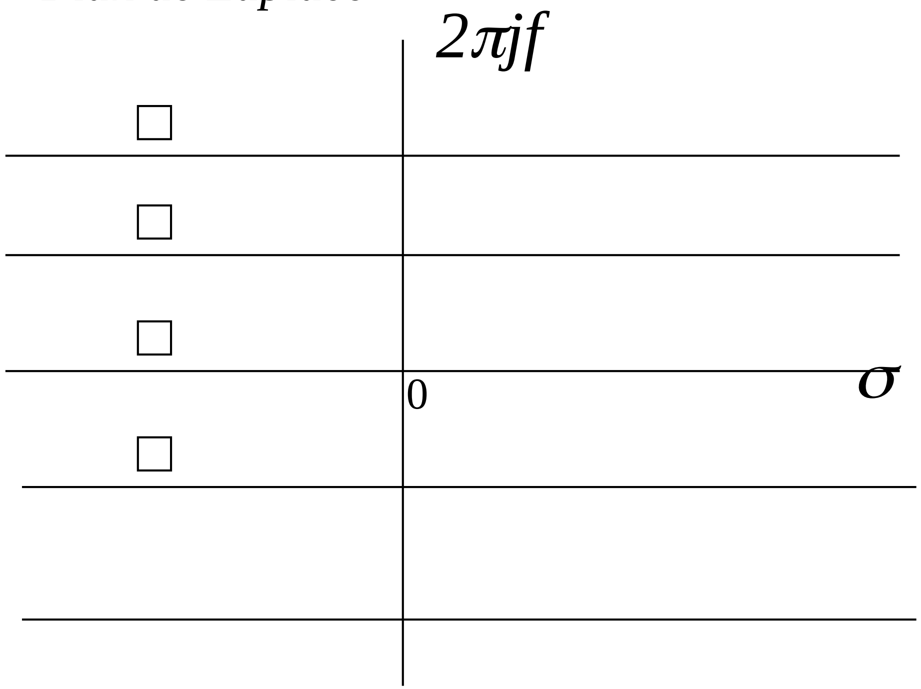
$$= X(z) Y(z)$$

Lien avec la Transformée de Laplace

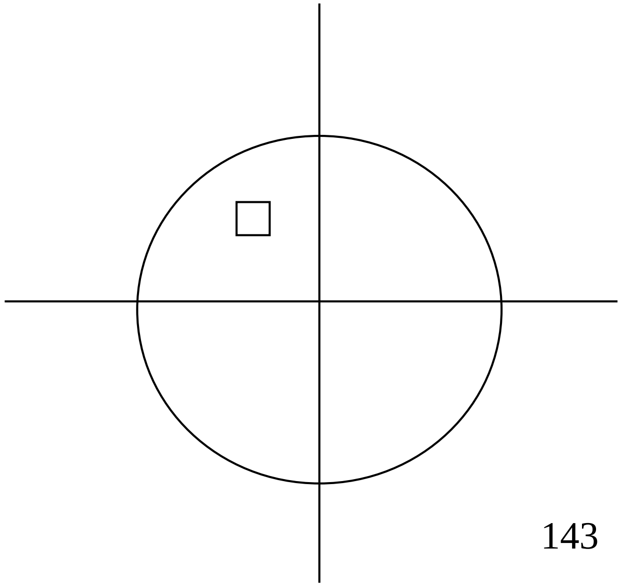
- Pour *p=σ+2πjf, σ l'amortissement et f=fréquence*

$$Tz\{x(n)\} = TL\{x(n)\}\Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{n\in Z} x(n)\, e^{-npTe} \Big|_{z=e^{pt}}$$

Plan de Laplace



Plan des {z}



Représentation par la Transformée en z

- ***Définition***

On appelle transformée en z bilatérale d' une suite *{x(n)}*, la somme $X_b(z)$ définie par :

$$Xb(z) = Tzb\left\{x(n)\right\} = \sum_{n \in Z} x(n) z^{-n}$$

Remarque :
On peut considérer la transformée monolatérale:

$$Xb(z) = Tzb\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=0} x(n) z^{-n}$$

Propriétés

- Linéarité

$$w(n)=ax(n)+by(n) \Leftrightarrow W(z)=aX(z)+bY(z)$$

- Shift (retard ou avance)

$$x(n-n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$$

- Inversion dans le temps

$$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$$

Propriétés

- Multiplication par une exponentielle

$$\alpha^n x(n) \leftrightarrow X(\alpha^{-1})$$

- Convolution

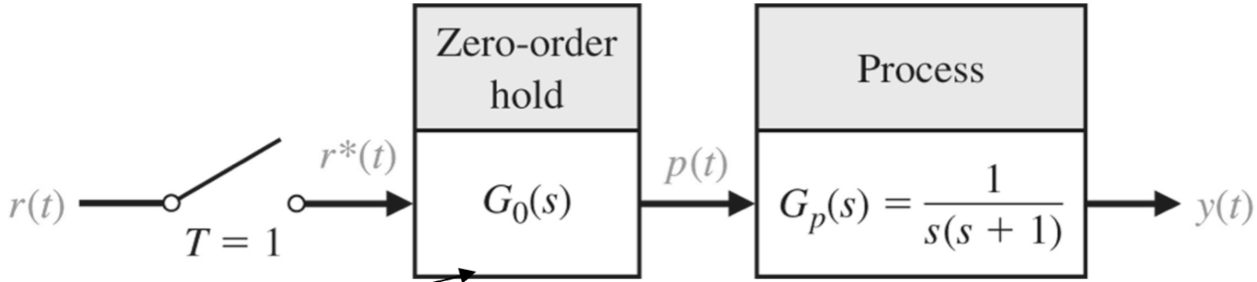
$$y(n) = x(n) * h(n) \leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

- La transformée en z n'a pas de sens que si l'on précise le domaine de convergence

Le domaine de convergence d'un signal causal est un codisque

Exemple

Boucle ouverte



$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}.$$

$$G(s) = (1 - e^{-sT})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$G(z) = Z\{G(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right).$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right]$$

$$= \frac{(ze^{-T} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}.$$

Si T=1

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$= \frac{0.3678z + 0.2644}{(z-1)(z-0.3678)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}.$$

Pour une impulsion R(z)=1

$$\begin{array}{r|l} & 0.3678z^{-1} + 0.7675z^{-2} + 0.9145z^{-3} + \dots = Y(z) \\ \hline z^2 - 1.3678z + 0.3678 & 0.3678z \quad + 0.2644 \\ & 0.3678z \quad - 0.5031 \quad + 0.1353z^{-1} \\ \hline & \quad + 0.7675 \quad - 0.1353z^{-1} \\ & \quad + 0.7675 \quad - 1.0497z^{-1} + 0.2823z^{-2} \\ \hline & \quad 0.9145z^{-1} - 0.2823z^{-2} \end{array}$$

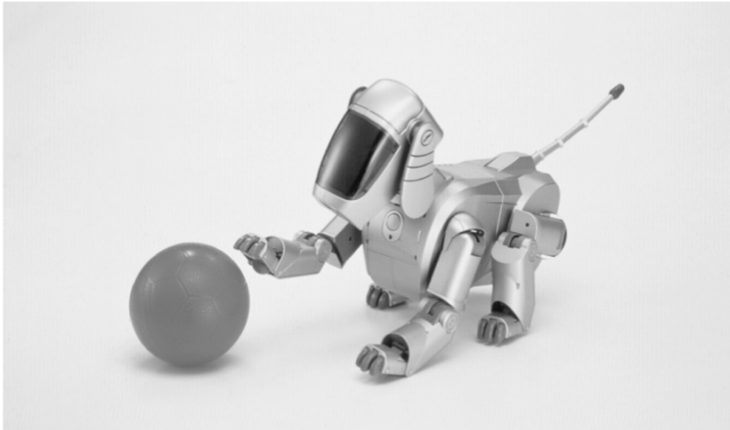
$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}.$$

Exemple

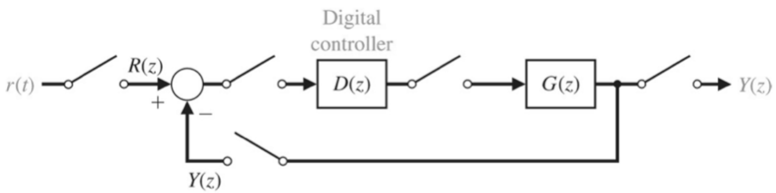
Boucle fermée

Sans contrôleur

$$Y(z)/R(z) = T(z) = G(z)/(1+G(z))$$

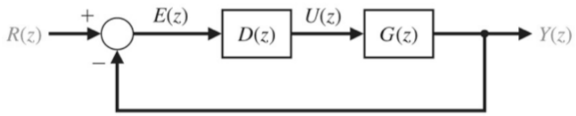


(a)



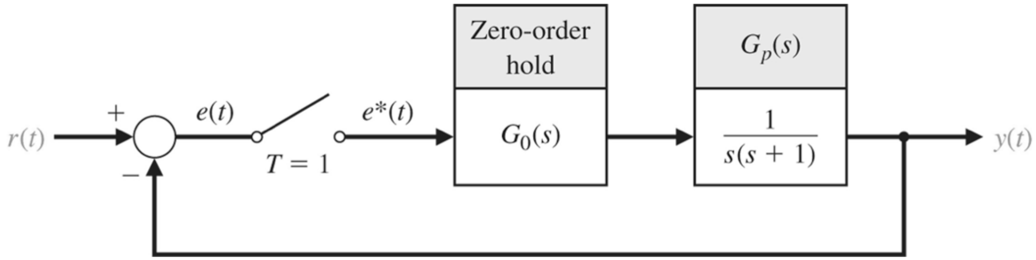
(b)

Avec contrôleur



(c)

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}.$$



$$G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}.$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

Rappel

Si T=1 ⇒

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$= \frac{0.3678z + 0.2644}{(z-1)(z-0.3678)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}.$$

Donc $$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - z + 0.6322}.$$

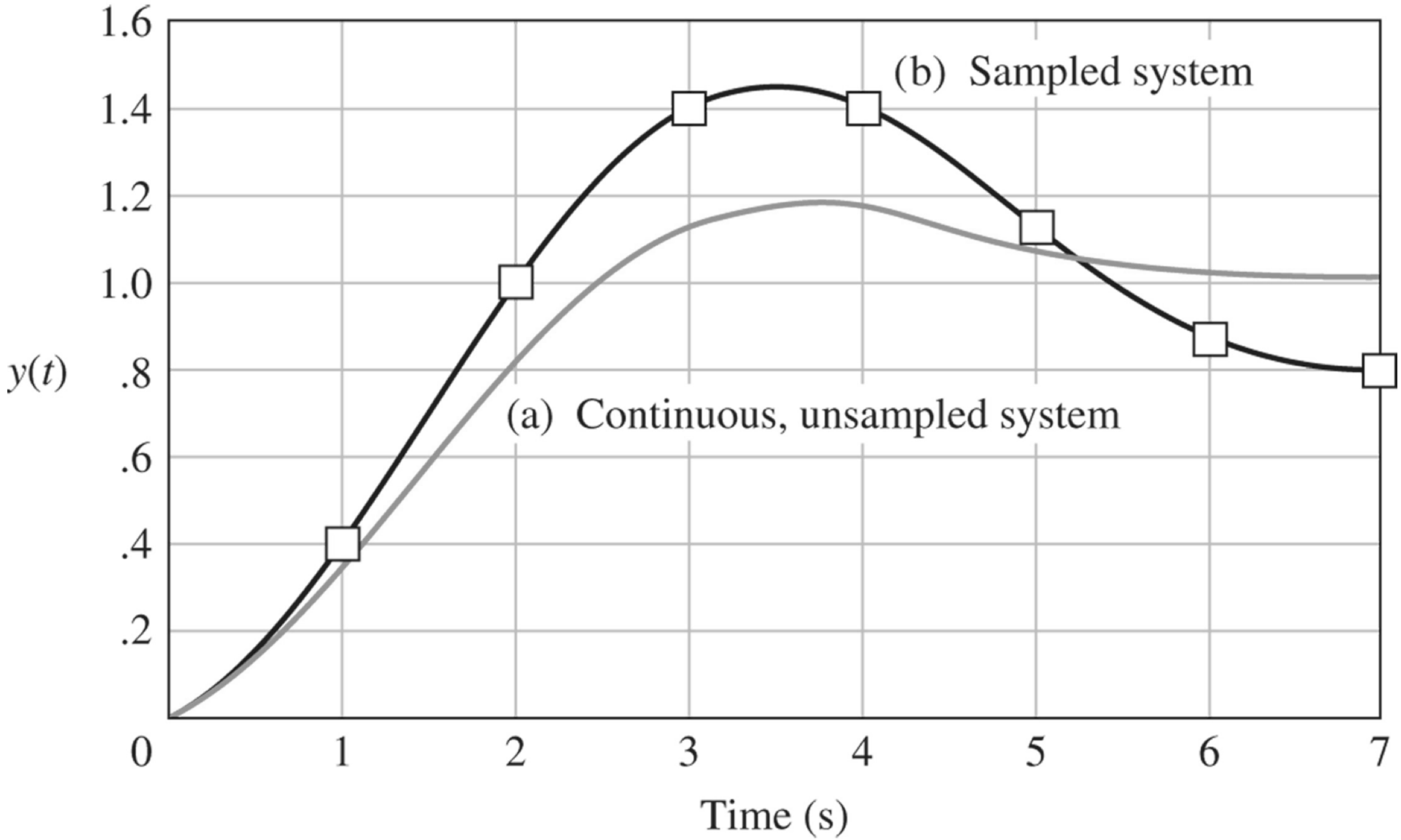
Pour un échelon $R(z) = \frac{z}{z-1}$ ⇒

$$Y(z) = \frac{z(0.3678z + 0.2644)}{(z-1)(z^2 - z + 0.6322)} = \frac{0.3678z^2 + 0.2644z}{z^3 - 2z^2 + 1.6322z - 0.6322}.$$

Après division

$$Y(z) = 0.3678z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} \ldots$$

Réponse du système bouclé (en continu et en échantillonné)



Signaux Déterministes

- Dans un contexte de logique câblée ou programmée, il est immédiat de créer certains signaux déterministe:

$$x(n) = rect_N(n)$$

$$x(n) = triang_N(n)$$

- Par contre il est moins facile de créer des signaux plus élaborés comme par exemple:

$$y(n) = a \exp(\alpha \alpha_e) \cos(2\pi f_0 n T_e)\, u(n)$$

Génération des signaux numériques

- Relation de récurrence :

$$x(k) = a\, x(k-1) \qquad x(0) = 1 \qquad \mathrm{x(k)} = \begin{cases} a^{k} & \mathrm{k} \geq 0 \\ 0 & \text{en rest} \end{cases}$$

- Générer un signal sinusoïdal

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(kb+b) &= \sin(kb)\cos(b) + \cos(kb)\sin(b) \\ \cos(kb+b) &= \cos(kb)\cos(b) - \sin(kb)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k)\cos(b) + y(k)\sin(b) \\ y(k+1) &= y(k)\cos(b) - x(k)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k) = \sin(kb) \\ y(k) = \cos(kb) \end{cases}$$

Relation de récurrence et transformée en z monolatérale

- Considérons la relation de récurrence:

$$y(n)+b_1 y(n-1)+b_2 y(n-2)=0 \qquad b_1 \text{ et } b_2 \text{ ctes}$$

- La Transformée en z est :

$$Y^+(z)=-\frac{\{b_1 y(-1)+b_2 y(-2)\}+\{b_2 y(-1)\}z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$$

Systèmes linéaires invariants

- *Définition*

$$Lx(k)=y(k) \quad Lx(k-k_0)=y(k-k_0)$$

$$\sum_{n=0}^{N} b_n y(k-n)=\sum_{m=0}^{M} a_m x(k-m)$$

Exemple (l'importance des conditions initiales)

$$y(k)=0 \quad \forall k<0$$
$$x(k)=u(t)$$

$$y(0)=x(0)-ay(-1)=1$$
$$y(1)=x(1)-ay(0)=1-a$$
$$y(2)=1-ay(1)=1-a+a^2$$
$$y(k)=\frac{1-(-a)\wedge(k+1)}{1+a}u(k)$$

De l'analogique au numérique

- Discrétisation temporelle

  $f_e \geq 2B$

- Discrétisation de l'amplitude

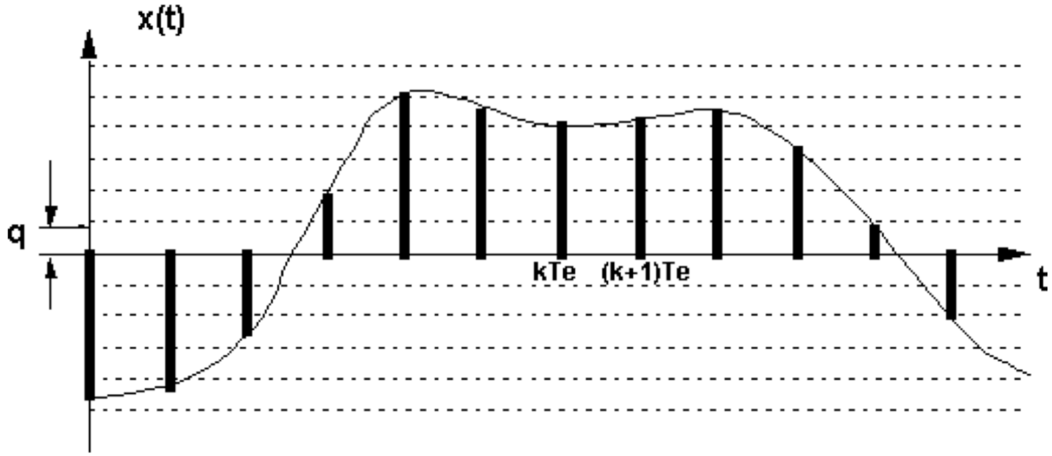
  N niveaux -------------log_2N bits par échantillon

- Débit

  D=F_e * log_2N

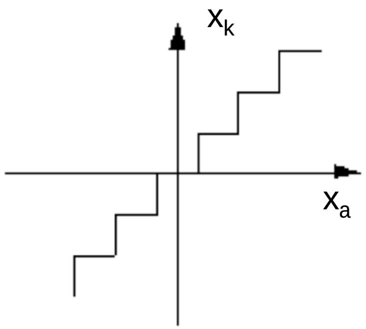
Quantification

- La quantification est une règle de correspondance entre :
  - L'ensemble infini des valeurs des échantillons $x_a(t=nTe)$
  - et un nombre fini de valeurs x_k



q est le pas de quantification

Quantification uniforme



$$x_k(kT_e) = nq \quad \text{pour } nq - \frac{q}{2} \leq x_e(kT_e) \leq nq + \frac{q}{2}$$

$$e(t) = x_k - x_a(t)$$

e(t) est l'erreur de quantification ou le bruit de quantification

Si la densité de probabilité p(x) de l'amplitude du signal est connue, on peut
déterminer la caractéristique de quantification qui, pour un nombre n donné de bits, minimise la puissance de distorsion totale.

Hypothèse

Le bruit de quantification est considéré comme un processus aléatoire stationnaire, il possède une valeur moyenne μ_e et une variance σ_e qui s'exprime par:

$$\sigma_e^2 = \sum_{k=1}^{K} \int_{q_k} (x_k - x)^2 \, p(x) \, dx = \sum_{k=1}^{K} p(x_k) \int_{x_k - q/2}^{x_k + q/2} (x_k - x)^2 dx \qquad \sigma_e^2 = \sum_{k=1}^{K} p(x_k) \frac{q_k^2}{12}$$

Convertisseur linéaire

$q_k = q = cte$

En écrivant que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{K} p(x_k) q = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

Le rapport signal à bruit est donné par :

$$\rho = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$

σ=valeurs efficace

On a ainsi:

$$\rho = \frac{12\sigma_x^2}{q^2}$$

En exprimant q en fonction de la plage de variation V du signal D'entrée par un découpage en $k=2^M$ intervalles (M nbr de bits)

$$\rho = 12\frac{\sigma_x^2}{V^2}2^{2M}$$

$$\rho_{dB} = 10.8 + 6.M - 20\log\left(\frac{V}{\sigma_x}\right)$$

Exemples

1) Pour un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude V/2

$$\sigma_x = V/2\sqrt{2} = valeur\ efficace$$

$$\rho_{dB} = 10.8 + 6.M - 20\log(2\sqrt{2}) = 6M + 1.77$$

2) Un signal avec une distribution gaussienne : la règle de 3σ donc $V = 6\sigma_x$

$$\sigma_x = V/6$$

$$\rho_{dB} = 10.8 + 6.M - 20\log(6) = 6M - 4.76$$

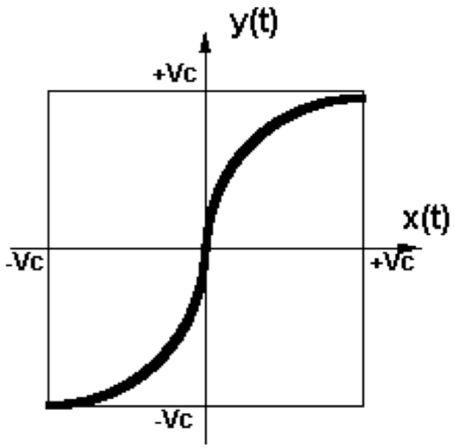
Remarque:

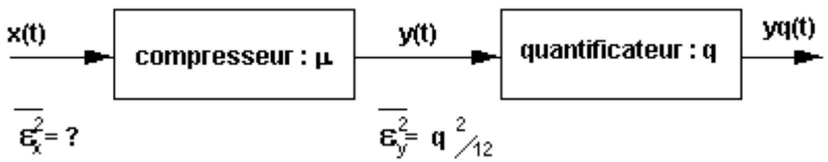
Moyen simple de déterminer le nombre de bits d'un convertisseur linéaire permettant d'assurer un rapport signal à bruit connaissant la statistique du signal d'entrée.

Convertisseur Logarithmique

Définition: Découper les amplitudes en intervalles d'autant plus petits que l'amplitude est faible.

Méthode : Utiliser un amplificateur non linéaire avant échantillonnage.





La loi μ Etats Unis Japon

$$\boxed{y = \operatorname{sgn}(x)\ln(1+\mu|x|)/\ln(1+\mu)}$$

x = signal d'entrée
μ = le paramètre de conversion

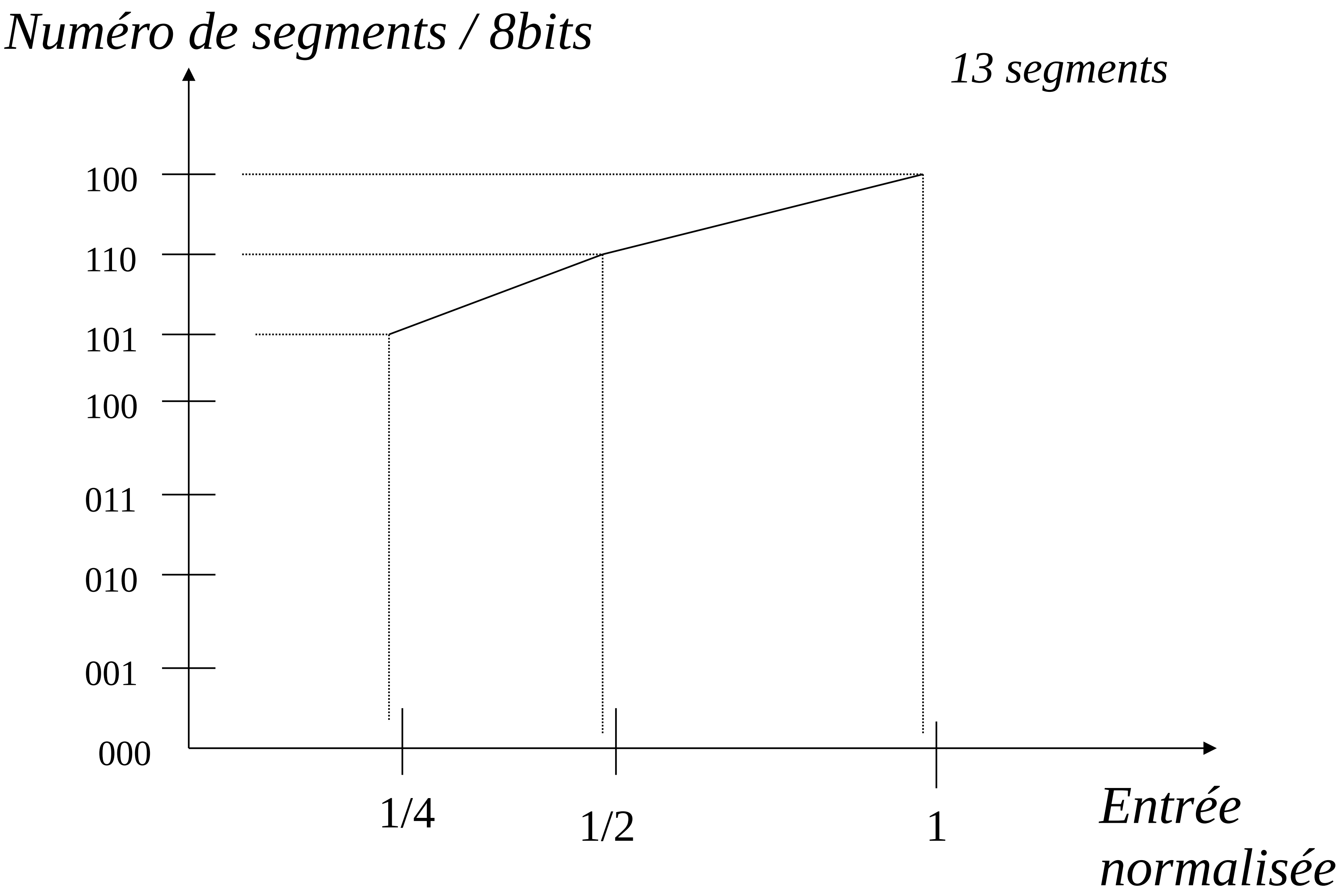
La loi A ou la loi de 13 segments Europe

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)[A|x|/[1+\ln(A)] & \text{pour } 0 \le |x| \le 1/A \\ \operatorname{sgn}(x)[(1+\ln(A|x|)]/[1+\ln(A)] & \text{pour } 1/A \le |x| \le 1 \end{cases}$$

x = signal d'entrée
A = le paramètre de compression A=87.6

Remarque:

Dans la pratique la loi A est une loi approchée par des segments de droite : chaque pas de quantification vaut le double du pas précédent


Numéro de segments / 8bits
13 segments
100
110
101
100
011
010
001
000
1/4
1/2
1
Entrée
normalisée