Automatique Echantillonnée

Andrei Doncescu

Généralités sur les systèmes asservis

Définitions

<u>Automatique</u>: science qui étudie les **automatismes**
<u>Automatisme</u>: dispositif technologique qui remplace l'opérateur humain dans la **conduite** d'une machine, d'un **processus**, d'une installation industrielle
<u>Processus</u>: (ou système)
C'est l'ensemble de l'installation que l'on doit piloter. Il est caractérisé par des **signaux** d'entrée et de sortie et les lois mathématiques reliant ces signaux.
<u>Exemple de systèmes</u>: four, robot, avion, usine chimique, colonne de distillation, etc.

<u>Signal</u> :
Grandeur physique générée par un appareil ou traduite par un capteur (température, débit etc.)
On distingue :
<u>Signal d'entrée</u> : indépendant du système, il se décompose en commandable et non commandable (perturbations)
<u>Signal de sortie</u> : dépendant du système et du signal d'entrée.

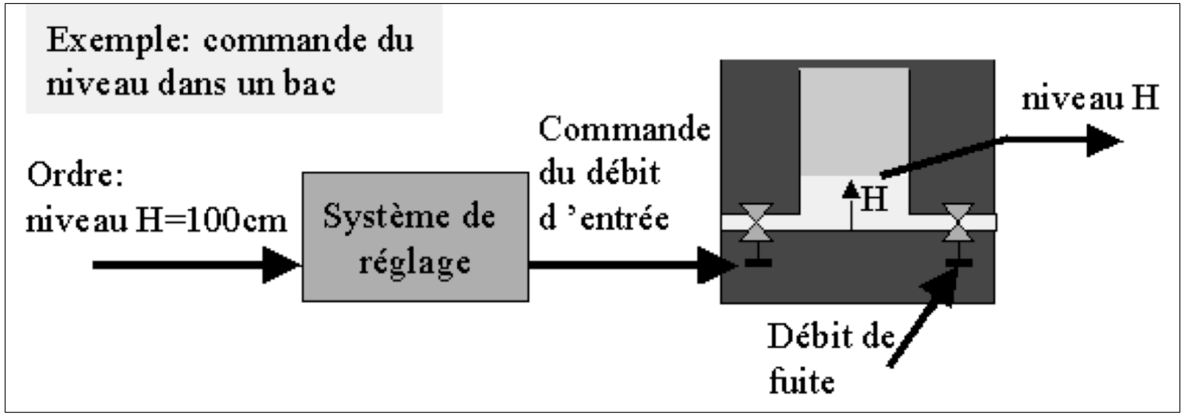
<u>Conduite</u> : (ou contrôle) On peut conduire un système de manière automatisée pour:
- maintenir une grandeur de sortie constante (**Régulation**)
- faire suivre à certaines sorties une séquence (**automatisme séquentiel**) ou une loi donnée (**asservissement**).

<u>Note</u>: Si on ajoute l'optimisation d'un critère (*de coût par exemple*) on parle alors de contrôle optimal.

Généralités sur les systèmes asservis

Structure d'un système asservi

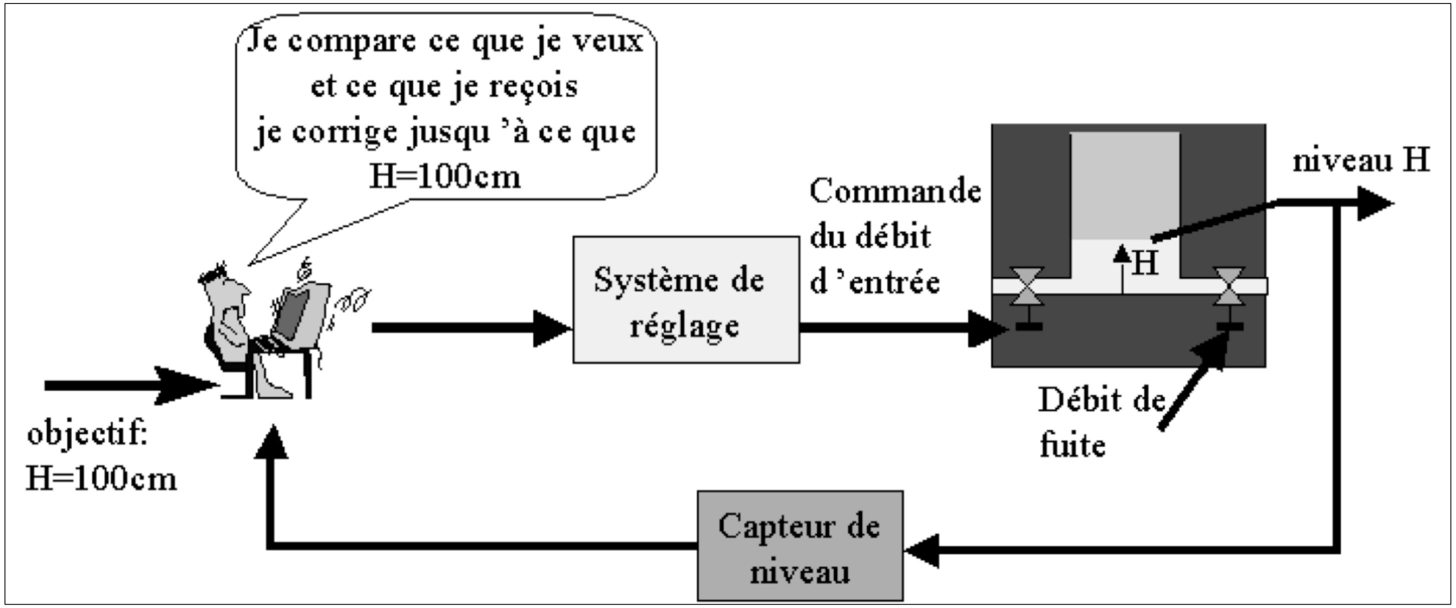
Commande en boucle ouverte:



Ceci est une commande en boucle ouverte qui ne **permet pas de régler précisément le niveau** de sortie et corriger l'effet des perturbations **Commande en boucle fermée:**

Généralités sur les systèmes asservis

Commande en boucle fermée:

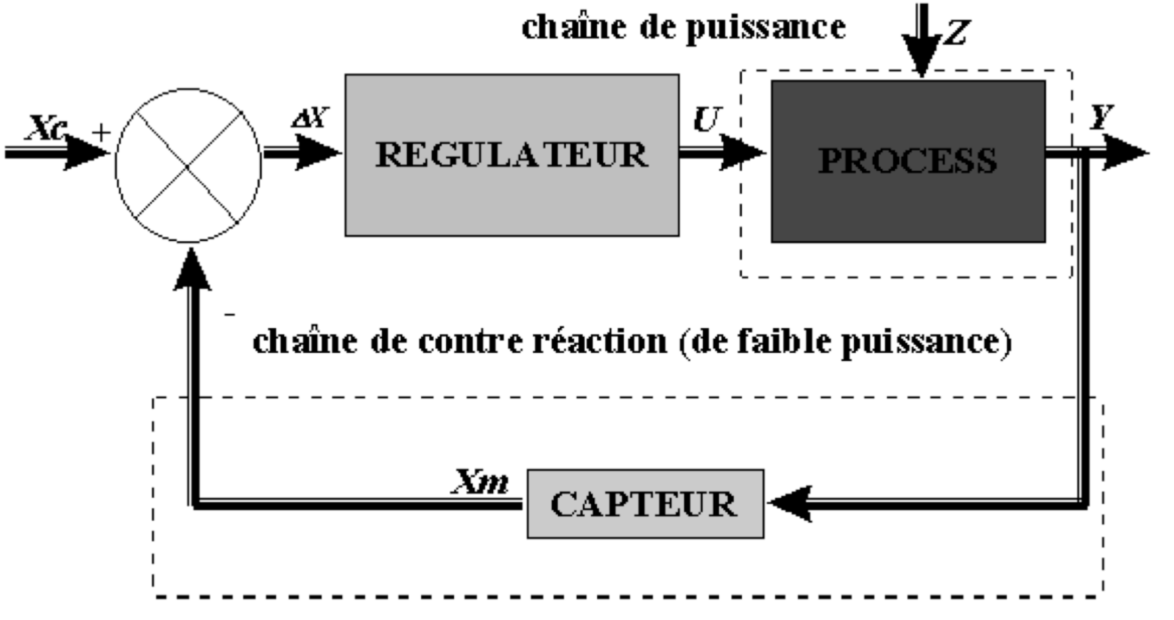


Pour régler le niveau je dois agir sur l'organe de réglage (*la vanne*) en fonction de l' écart entre la valeur désirée et la valeur réelle.

Généralités sur les systèmes asservis

Structure générale

Un système asservi est un système à **boucle fermée** (*closed loop system*) que l'on peut décrire par le **schéma fonctionnel** suivant:



Xc : Consigne (set value),
ΔX : écart de régulation,
U : signal de commande,
Y : variable de sortie ou variable à régler ou mesure (mesured value)
Z : perturbation ***Xm*** : grandeur physique à la sortie du capteur

Généralités sur les systèmes asservis

<u>Exemple 1</u> : RÉGULATION DE TEMPÉRATURE

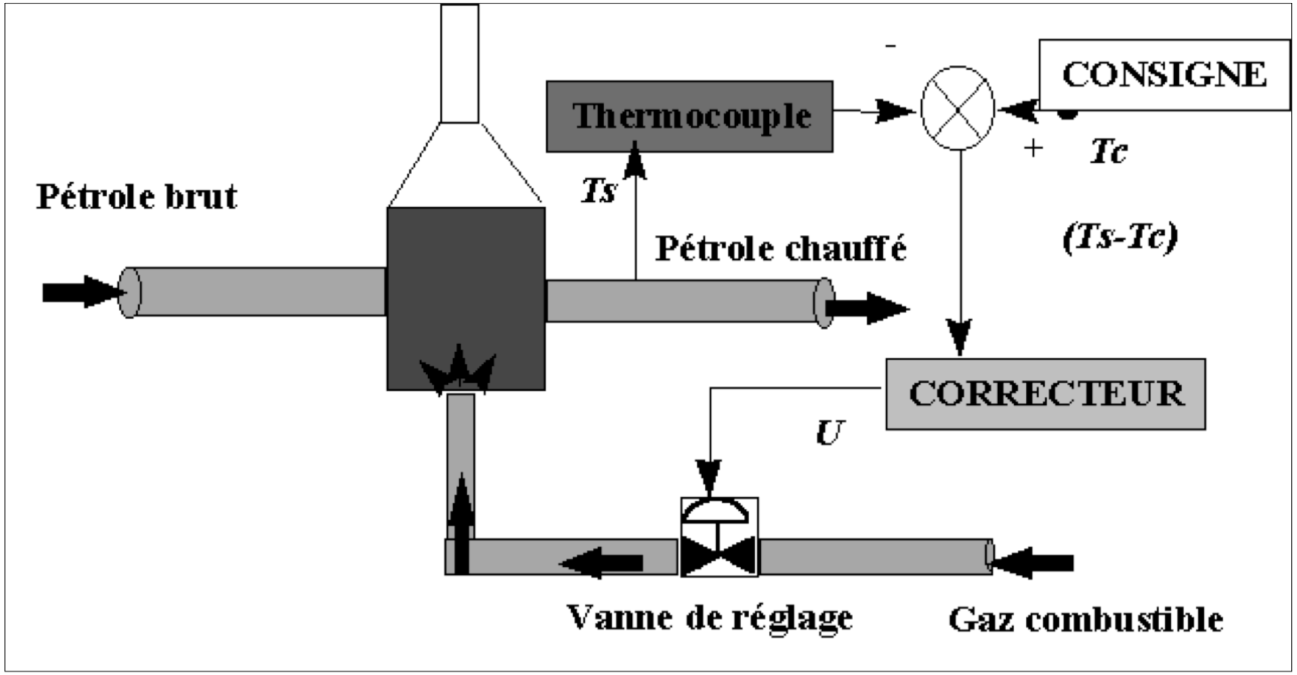
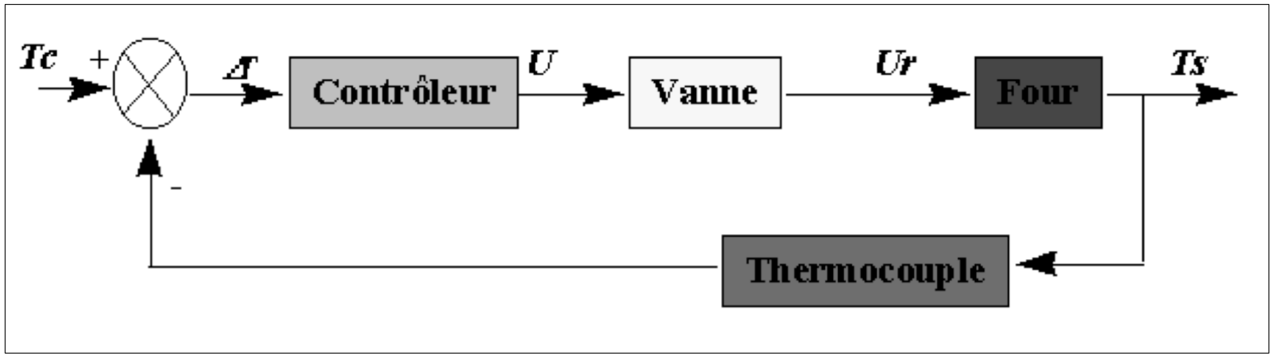


Schéma fonctionnel



Généralités sur les systèmes asservis

Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis

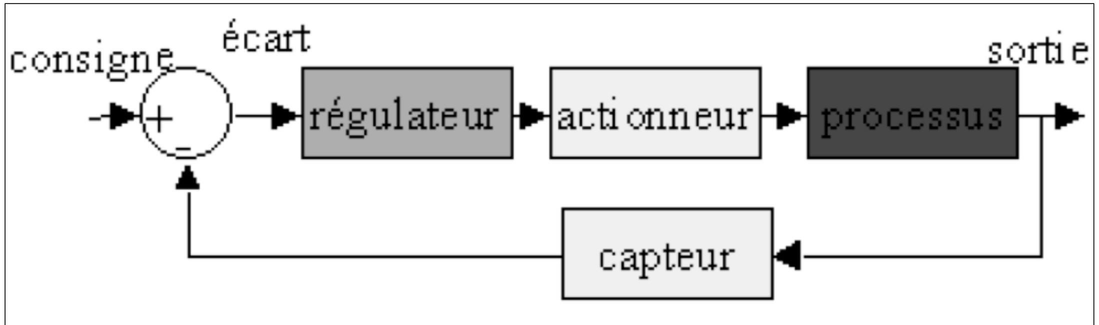
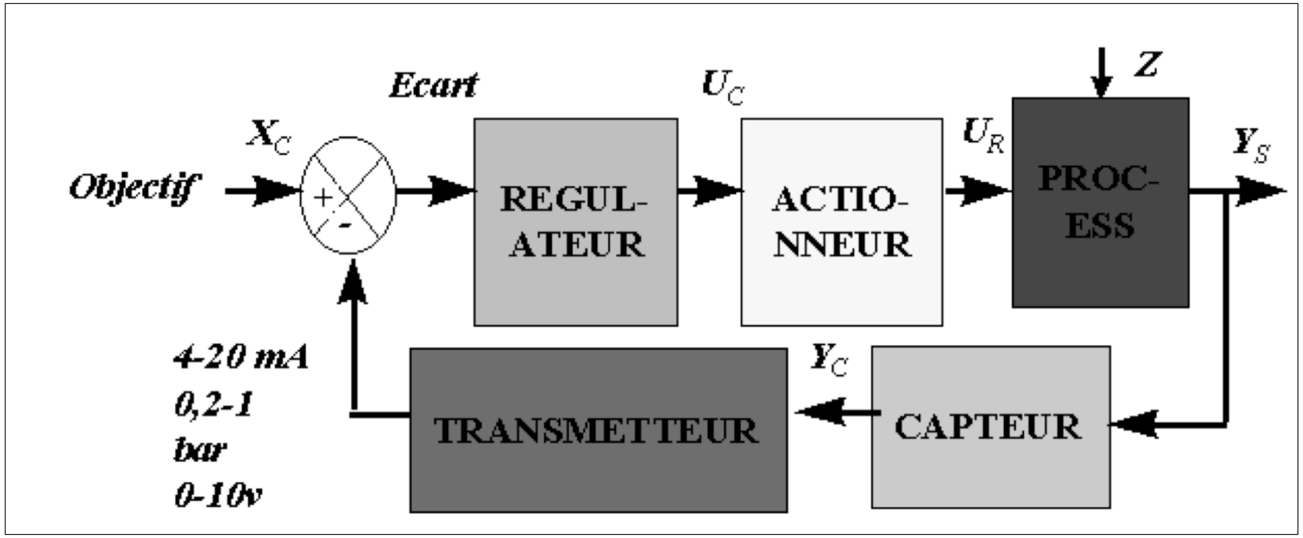


Schéma fonctionnel d'un système asservi

Les caractéristiques à étudier dans un système asservi sont
précision statique et dynamique , rapidité, stabilité

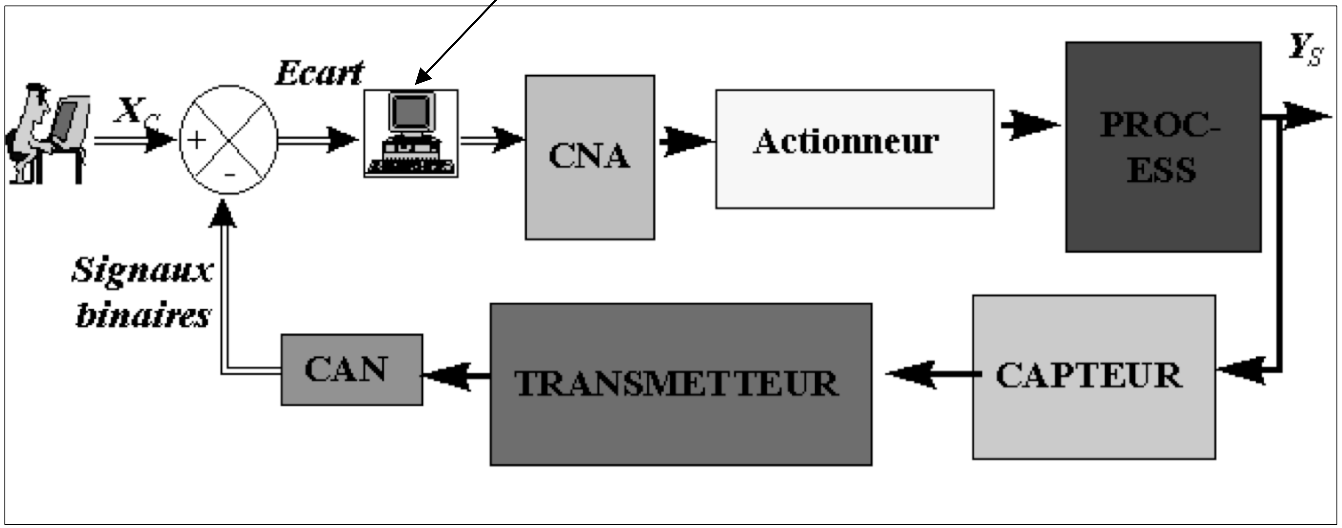
Généralités sur les systèmes asservis

<u>Régulation analogique</u>



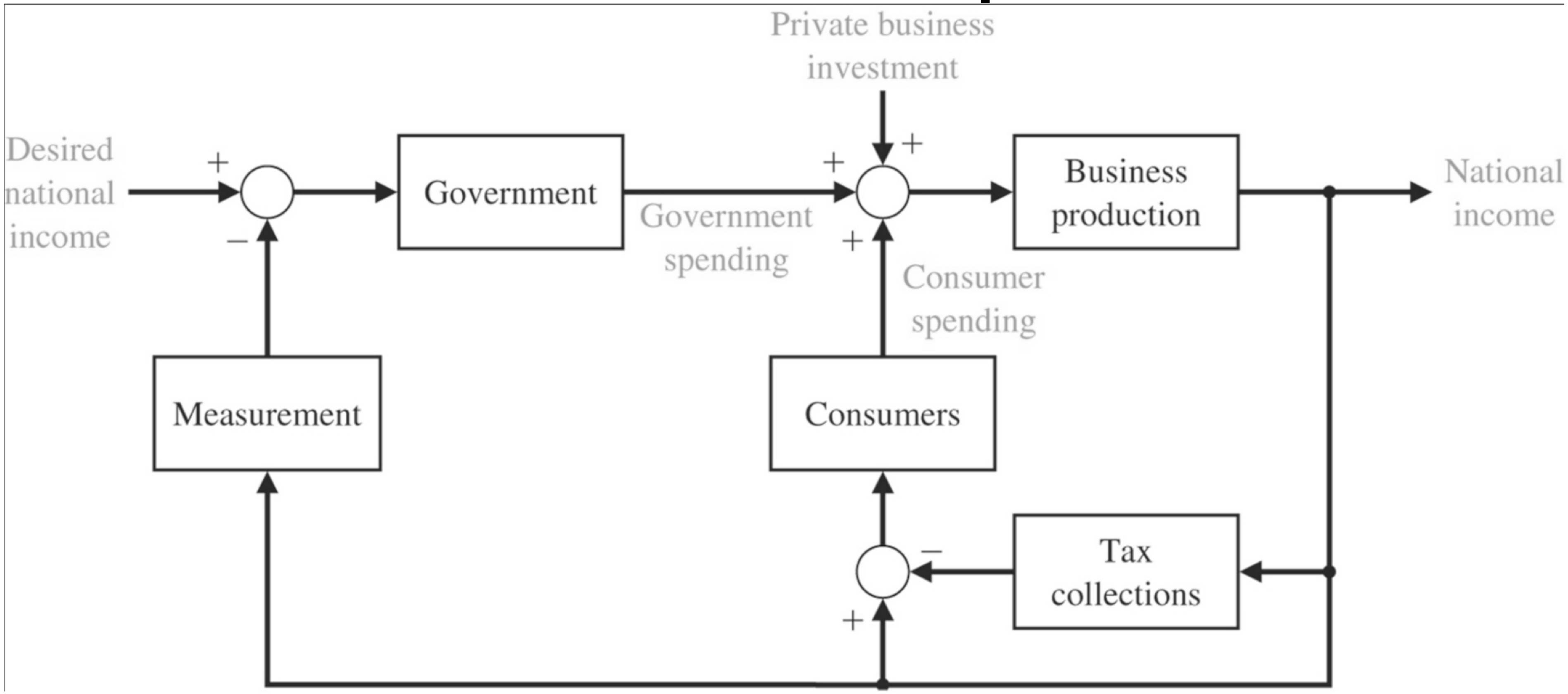
Généralités sur les systèmes asservis

Régulation numérique



CNA : convertisseur Numérique Analogique
CAN : convertisseur Analogique Numérique

Autre exemple



Généralités sur les systèmes asservis

Classification des automatismes

On peut classer les automatismes selon la **nature des signaux** d'entrée et sortie

signaux continus	
systèmes linéaires	**systèmes non-linéaires**
Régulations et asservissements monovariables et multivariables **Méthodes:** équations différentielles, fonctions de transfert étude harmonique **Matérialisation de la commande**: comparateurs,sommateurs,intégrateurs, réseaux correcteurs, régulateurs PID	

signaux discontinus	
binaires	**plusieurs niveaux**
systèmes logiques combinatoires et séquentiels **Méthodes**: algèbre de Boole GRAFCET **Matérialisation de la commande**: logique cablée automates programmables	**systèmes échantillonnés** commande numérique des systèmes continus **Méthodes:** équations de récurrence, transmittance en z **Matérialisation de la commande**: calculateurs, PID numériques

Systèmes linéaires

- *Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion unité*

$$y(k) = L\left[\sum x(l)\,\delta(k-l)\right] = \sum x(l)\,L[\delta(k-l)]$$

CLASSEMENT DES SIGNAUX

Signaux Analogiques

- **Les signaux périodiques** $x(t) = x(t+kT)$
  - Le signal sinusoidal est le plus représentatif de ces signaux périodiques:
    - $x(t) = A \sin(2\pi\, t/T + a) = A\, \mathrm{Sin}(\omega\, t+a)$ ou $\omega = 2\pi\,/T = 2\pi\, f$

- **Les signaux à énergie finie**

  Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale suivante est bornée :

  $\int |\, x(t) \,|^{2}\, dt < \infty$

    - Ces signaux sont nommés de carré intégrable (sommable), leur puissance moyenne est nulle.
- Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle

- **Signaux de durée finie**
  - Signaux de durée limitée ou "support borné" : $x(t) = 0 \; t \notin T$

- **Signaux pairs et impairs**

  Un signal est pair si $x(t) = x(–t)$ example : $\cos(\omega\, t)$

  Un signal est impair si $x(t) = –x(–t)$ exemple : $\sin(\omega\, t)$

  Remarque Tout signal réel peut être décomposé : une partie "paire" et une partie "impaire".

  $$x(t) = xp(t) + xi(t)$$

- **Signaux causals :**
  - Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps $x(t) = 0 \; t< 0$. On peut le rendre causal si * *u(t)*

Signaux numériques

- Un signal numérique est un signal discret dont l'amplitude a été quantifiée

$\neq$

<u>signaux à temps discret</u>

<u>Exemple</u>

$x(t)=A \sin(\omega t+\phi)$

$X(k)=A \sin[2\pi/N (k+k_0)$

Classement des signaux

- Déterministes : **fonctions mathématiques réelles ou complexes**
- Stationnaires : **probabilités**
- Non-stationnaires : **transformée en ondelettes,**
  transformations fractales

Quelques signaux déterministes

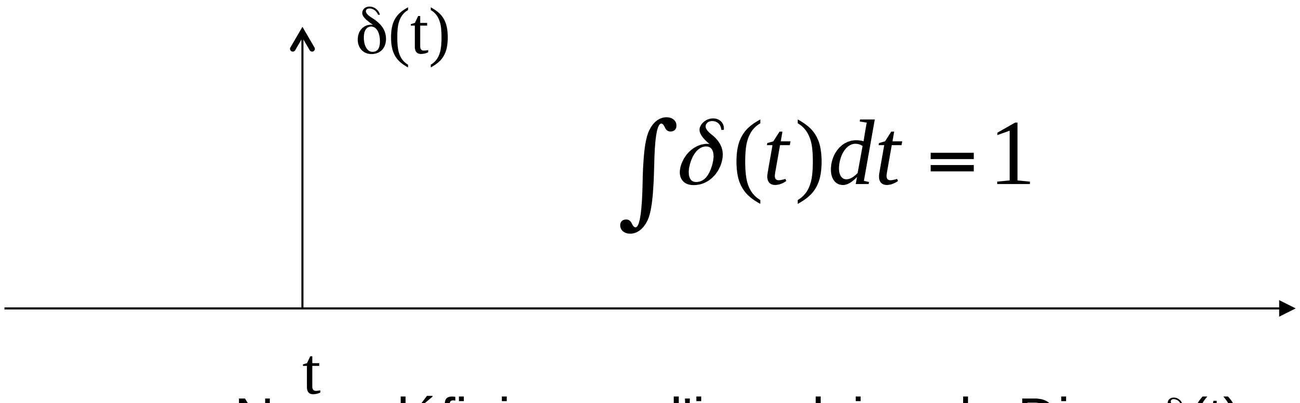
- Fonction de Heaviside $u(t)$

- La fonction signe $2u(t)-1$

- La fonction porte $rect(t)=u(t+T/2)-u(t-T/2)$

Distributions ≠ Fonctions

- Impulsion infinie pendant un intervalle de temps infiniment court



$$\int \delta(t)dt = 1$$

- ***Remarque :*** Nous définissons l'impulsion de Dirac δ(t) au sens des distributions. Elle a pour valeur en t=0, la valeur égale à 1 de l'intégrale de moins l'infini à plus l'infini d'une impulsion idéale de largeur nulle centrée en t=0.

Transformées

Dans l'étude des systèmes continus, la fréquence réelle ω ou la fréquence complexe s sont utilisées dans la fonction de transfert $T(s)$ ou $H(s)$ et la fonction de transfert sinusoïdale $H(\omega)$.

Il est avantageux de décrire les systèmes continus dans l'espace des fréquences ce qui permet de tirer un certain nombre de conclusions concernant leurs propriétés.

La transformée en z, basée sur l'utilisation d'une **fréquence complexe** $\boldsymbol{z}$, va procurer des avantages similaires pour les systèmes DLI. **La transformation en** $\boldsymbol{z}$ **transforme l'espace du temps discret en un espace de fréquences** $\boldsymbol{z}$**.**

Outils mathématiques

Étude des signaux déterministes continus

Représentation fréquentielle

Transformée de Fourier

Signaux périodiques

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos(2\pi n \nu_o t) + b_n \sin(2\pi n \nu_o t)\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos(2\pi n \nu_o t).dt$$

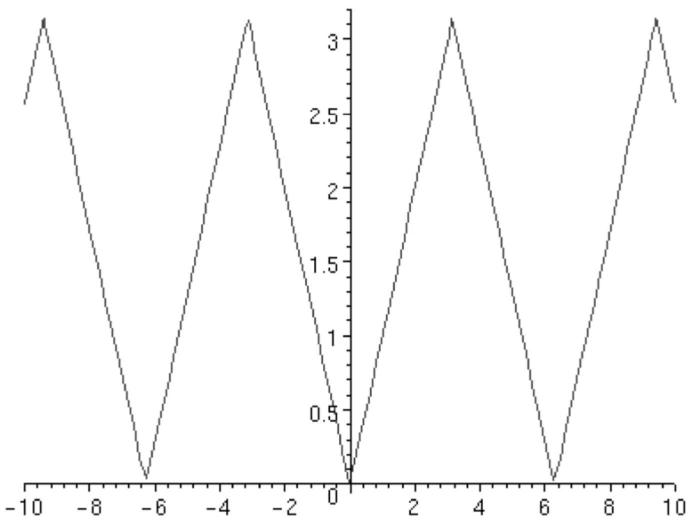
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin(2\pi n \nu_o t).dt$$

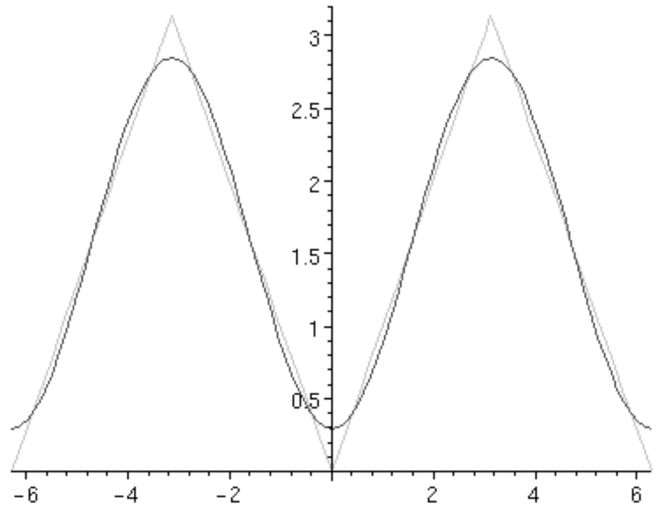
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \nu_o t}$$

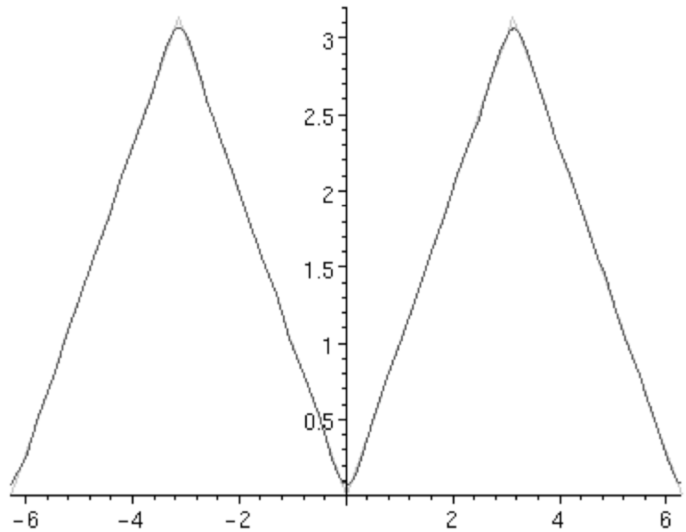
f_o=1/T est la fondamentale

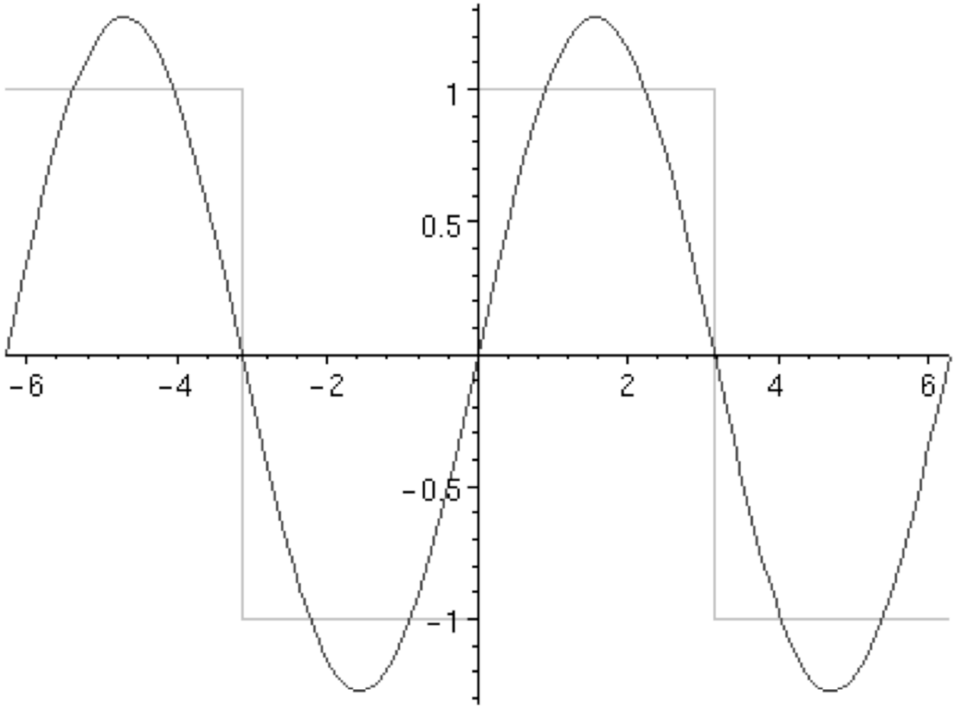
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-j2\pi n \nu_o t} dt$$

Synthèse d'un signal triangulaire à partir de sa série Fourier

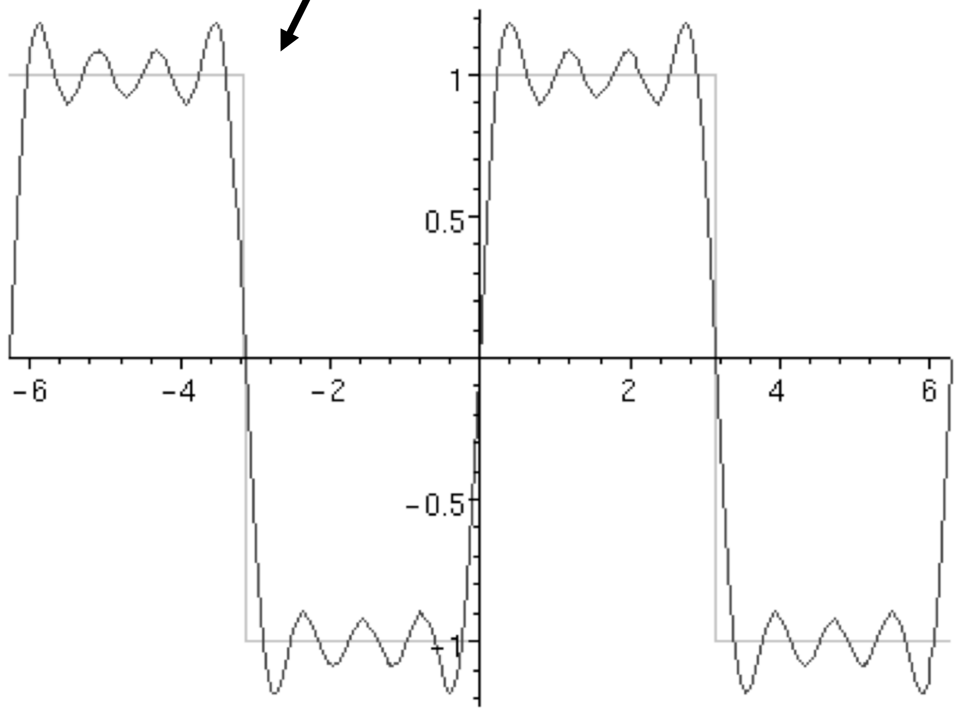


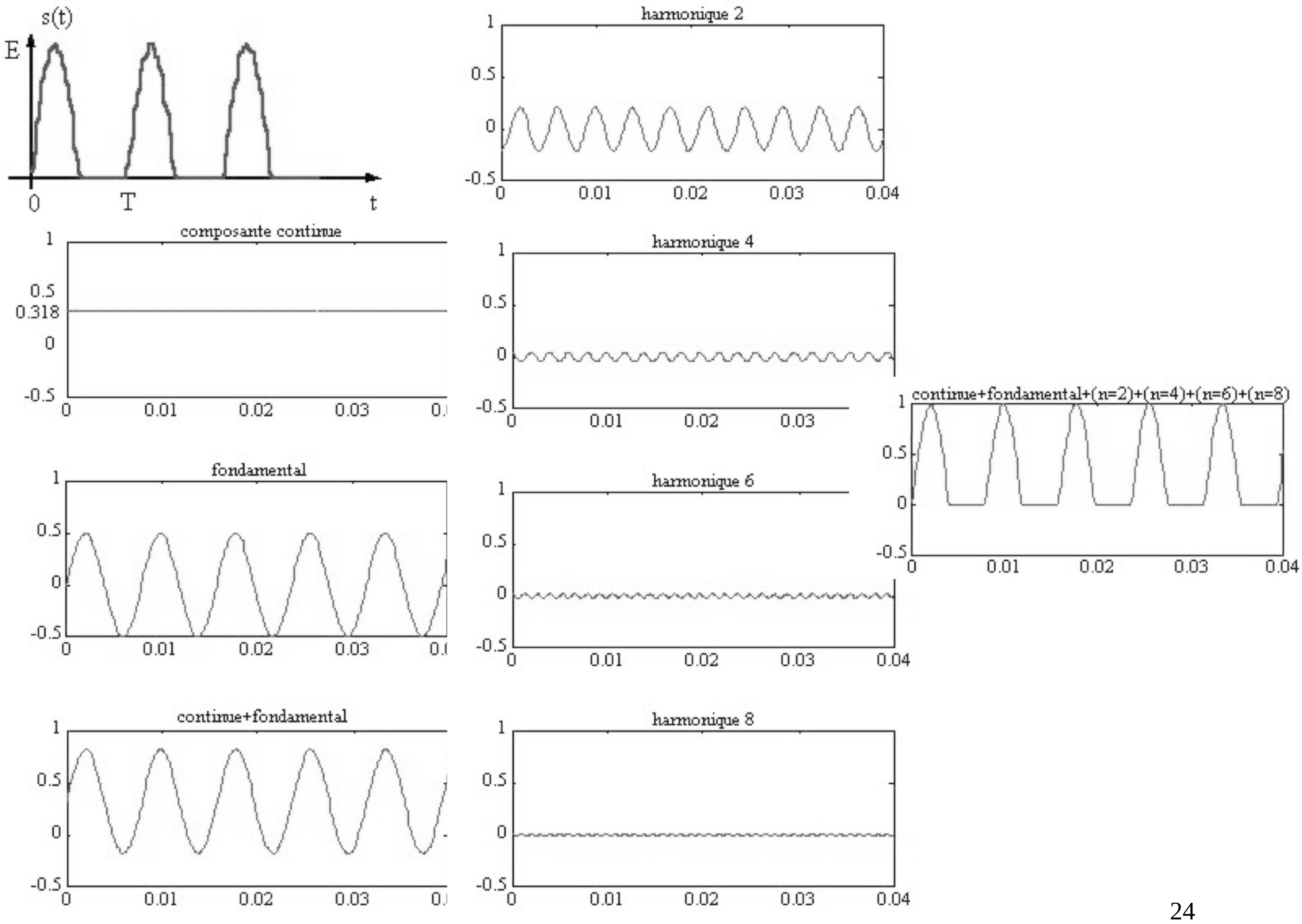






Effet Gibbs




s(t)
E
0
T
t
harmonique 2
composante continue
0.318
harmonique 4
continue+fondamental+(n=2)+(n=4)+(n=6)+(n=8)
fondamental
harmonique 6
continue+fondamental
harmonique 8
1
0.5
0
-0.5
0.01
0.02
0.03
0.04

La fonction sinus/cosinus

- $\sin(t)$ est périodique de période 2π
- $\sin(2\pi t)$ est périodique de période 1

TRANSFORMATION DE FOURIER

<u>Définition</u>

La transformation de Fourier permet de décrire dans l'espace des fréquences un signal dont on connaît l'histoire au cours du temps, et réciproquement.

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

DUALITE TEMPS-FREQUENCES

y = f (t) <=> Y =F(f)

F(f) est appelée la transformée de Fourier de f(t) et sa représentation, le spectre en fréquences.

On appelle densité spectrale d' énergie $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$

<u>Remarque</u> : On utilise les lettres minuscules pour décrire l'histoire du signal au cours du temps et les lettres majuscules pour le décrire dans le domaine des fréquences ou domaine spectral.

Propriétés

La transformation de Fourier est une opération biunivoque.
<u>Conséquence:</u> il y a la même information dans f (t) que dans F(f)

<u>Définition</u>

La bande passante B d'un signal est le domaine de fréquence où se trouve l'énergie utile transportée par le signal.

Exemples :

Signaux	Bande passante
Téléphonique	300Hz < f < 3300Hz
Audio haute fidélité	20 Hz < f < 20 kHz
Télévision	0Hz < f < 5 MHz

La transformée de Fourier

<u>Exemple:</u>

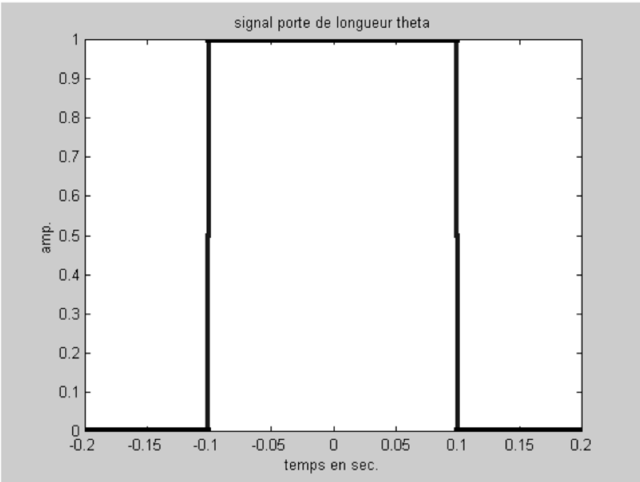
Soit la fonction indicateur $f = \mathbf{1}_{[-T,T]}$

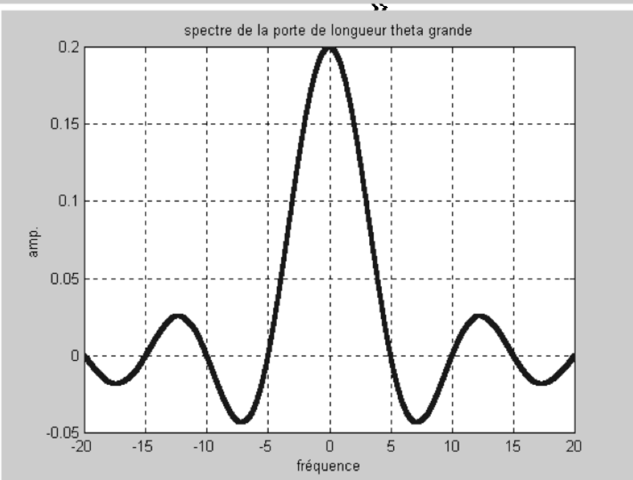
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

Exemple de calcul de Transformée de Fourier

- \- Le spectre du signal

$$s(t)=\pi_{\frac{\theta}{2}}(t)$$





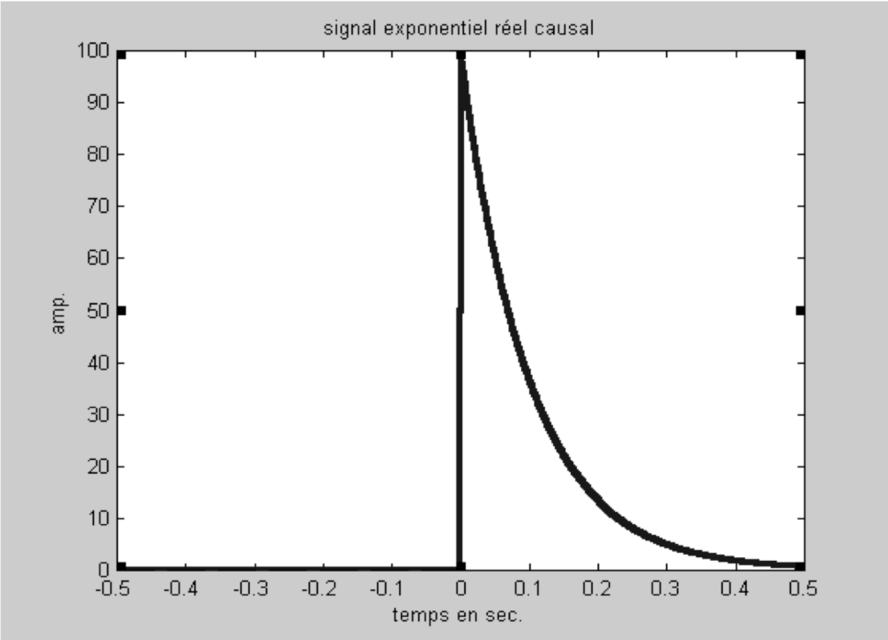
\- si θ est faible, le signal est bien localisé en temps mais $1/\theta$ est grand et le spectre est mal localisé en fréquence

\- si θ est grand, le spectre est bien localisé en fréquence mais mal localisé en temps

Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

Exemple de calcul de Transformée de Fourier

- - calculer le spectre du signal $s(t)=S_0 e^{-at} u(t)$
- $$S(f)=\frac{S_0}{a+j2\pi f}$$



- Module du spectre $$|S(f)|=\frac{S_0}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$$
- Phase du spectre $$\varphi(S(f))=-arctg(\frac{2\pi f}{a})$$

Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

Exemple de calcul de Transformée de Fourier

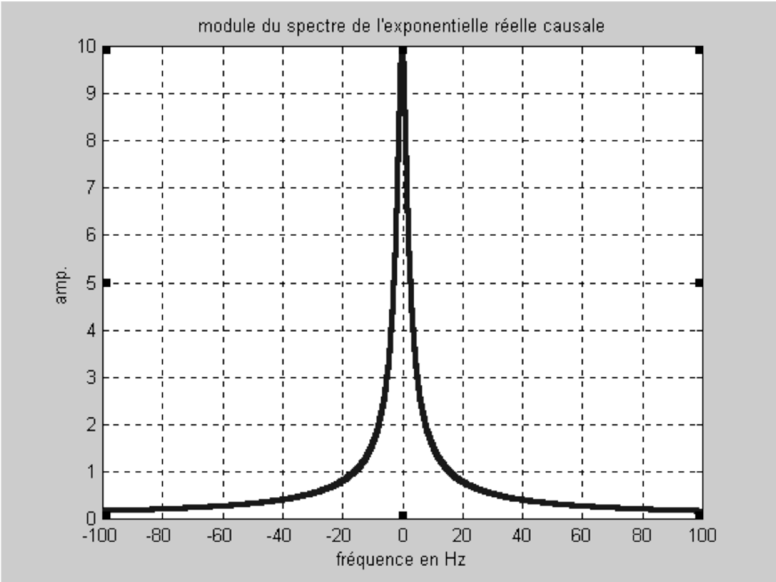
- - tracer le spectre du signal

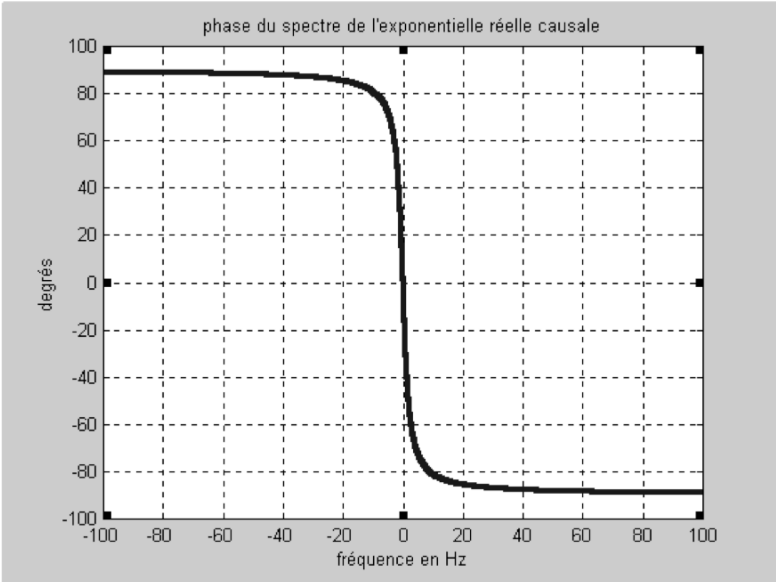
$$s(t) = S_0 e^{-at} u(t)$$

-

$$|S(f)| = \frac{S_0}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\varphi(S(f)) = -arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$





Convolution

- <u>Définition:</u>

On appelle fonction de convolution du signal $s_1(t)$ et $s_2(t)$ l'intégrale

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tau) S_2(t-\tau) d\tau$$

<u>Théorème de convolution</u>

La TF du produit de convolution est le produit algébrique
Des TF des signaux du produit

$$S(\omega) = S_1(\omega) S_2(\omega)$$

Propriétés du produit de convolution

- Commutativité
- Associativité
- Distributivité
- Différentiabilité $$\frac{d}{dt}(f * h)(t) = \frac{df}{dt} * h(t) = f * \frac{dh}{dt}(t)$$
- Convolution avec un Dirac

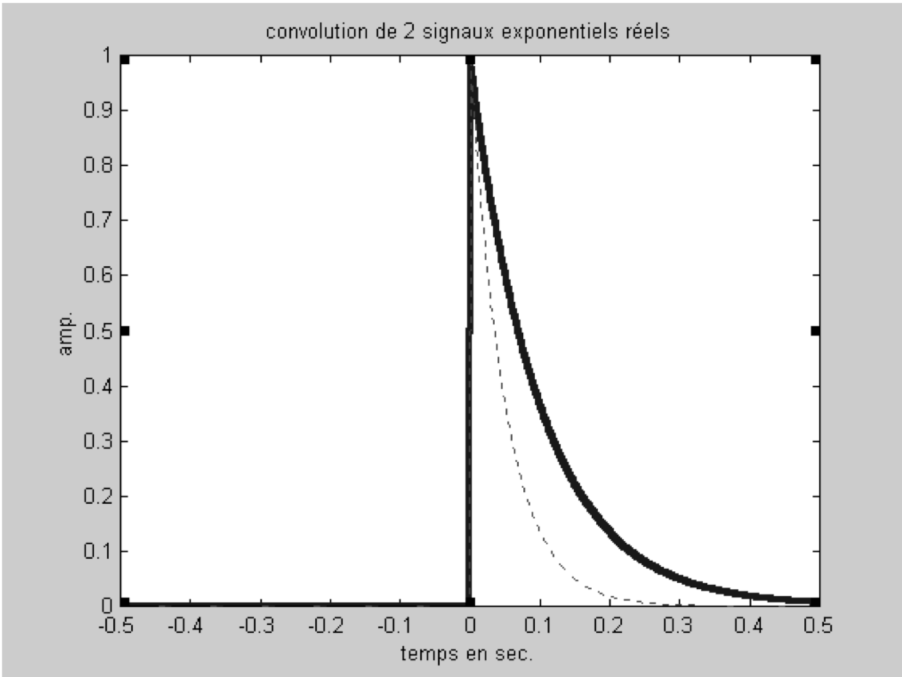
Algorithme de Convolution

- *Le signal y(l) est inversé pour obtenir y(-l)*
- *Le signal y(-l) est décalé d'une certaine quantité k*
- *Le produit x(l)y(k-l) est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
- *Les valeurs ainsi obtenues sont additionnées*

convolution en temps

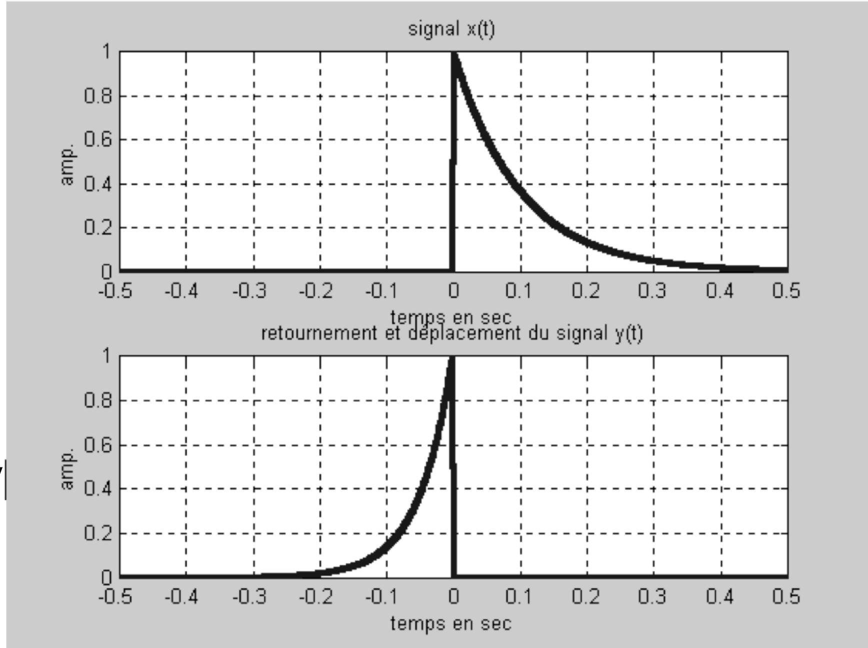
- \- exemple d’application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux x(t) et y(t) :

$$x(t)=e^{-at}u(t) \qquad y(t)=e^{-2at}u(t)$$



- convolution en temps
- \- exemple d'application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux x(t) et y(t) :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad y(t) = e^{-2at}u(t)$$

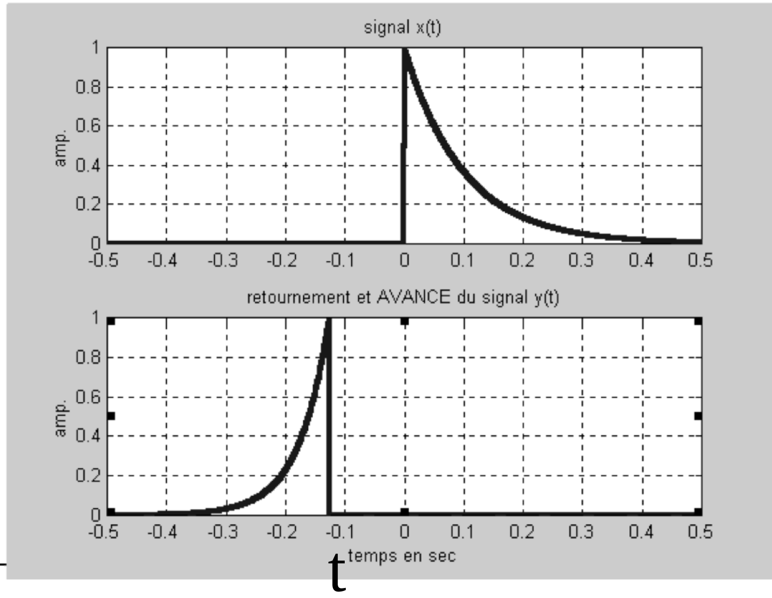


\- **Principe de la méthode**

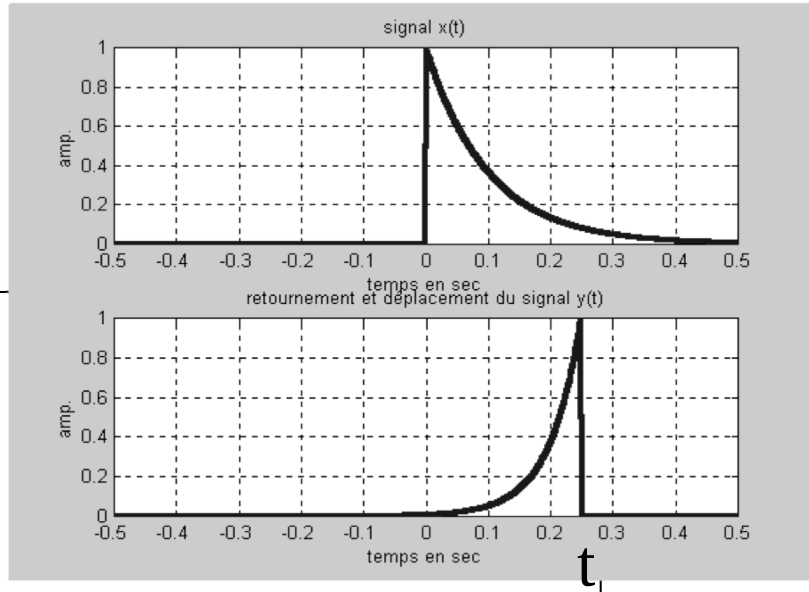
\- **On garde le premier signal x(t')**

\- **On retourne le second signal y(t') pour obtenir y|**

- convolution en temps
- \- exemple d'application de la méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux x(t) et y(t) :

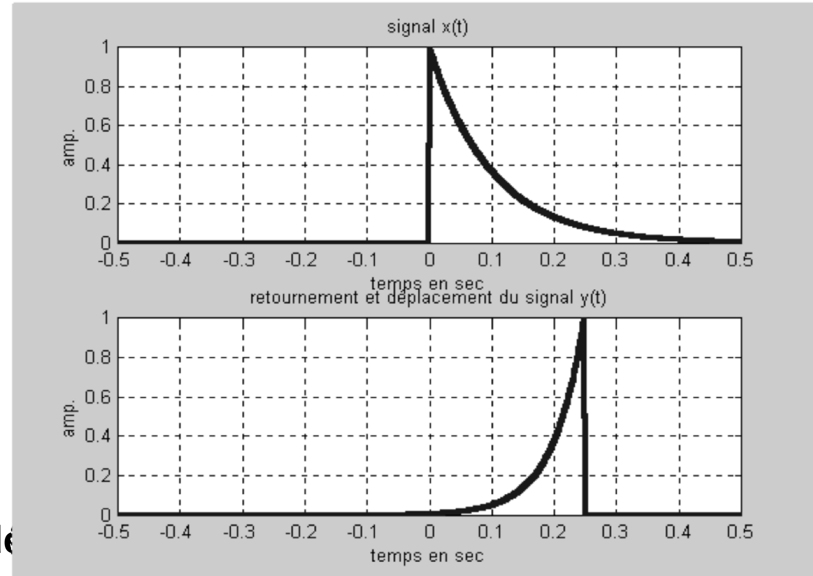


$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad y(t) = e^{-2at}u(t)$$



- **Principe de la méthode**
- **On garde le premier signal x(t')**
- **On retourne le second signal y(t') pour obtenir y[-t']**

- convolution en temps
- \- méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux x(t) et y(t) :



t

\- **Principe de la méthode, suite**

\- **On fait le produit x(t’).y(t-t’) là où les 2 signaux sont dé**

\- **On calcule l’aire commune des 2 signaux**

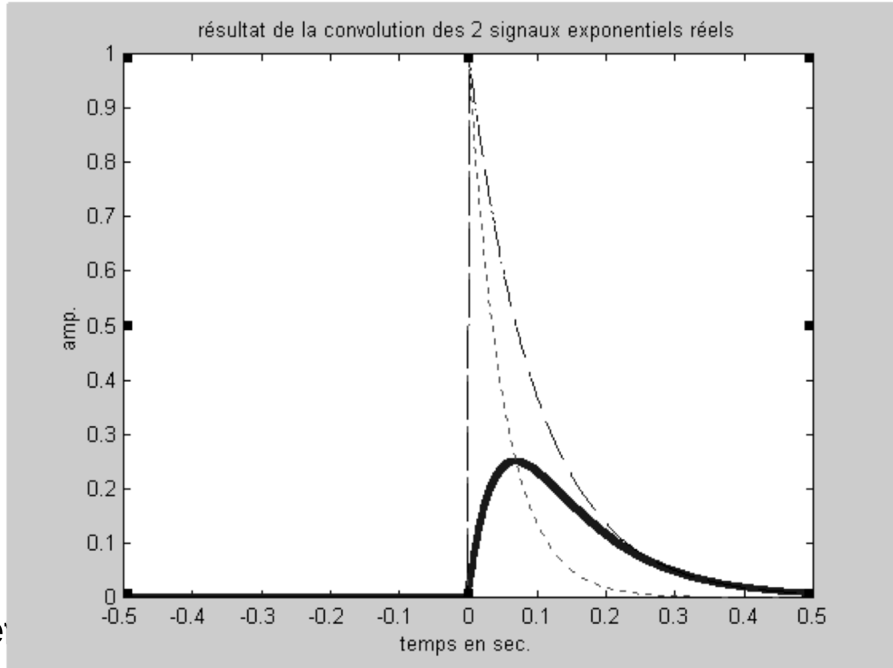
$$t<0, x(t)*y(t)=0 \qquad t>0, x(t)*y(t)=\int_0^t e^{-at'}e^{-2a(t-t')}dt'=\frac{1}{a}e^{-at}-\frac{1}{a}e^{-2at}$$

\- **On recommence pour t variant sur R et on obtient la convolution x(t)*y(t)**

• convolution en temps

• - méthode graphique de calcul de la convolution de 2 signaux x(t) et y(t) :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad y(t) = e^{-2at}u(t)$$



- **Principe de la méthode**

- **On garde le premier signal x(t')**

- **On retourne le second signal y(t') pour obtenir y[-t']**

- **On décale y[-t'] de t pour obtenir y[-(t'-t)]**

- **On fait le produit x(t').y(t-t') là où les 2 signaux sont dé**

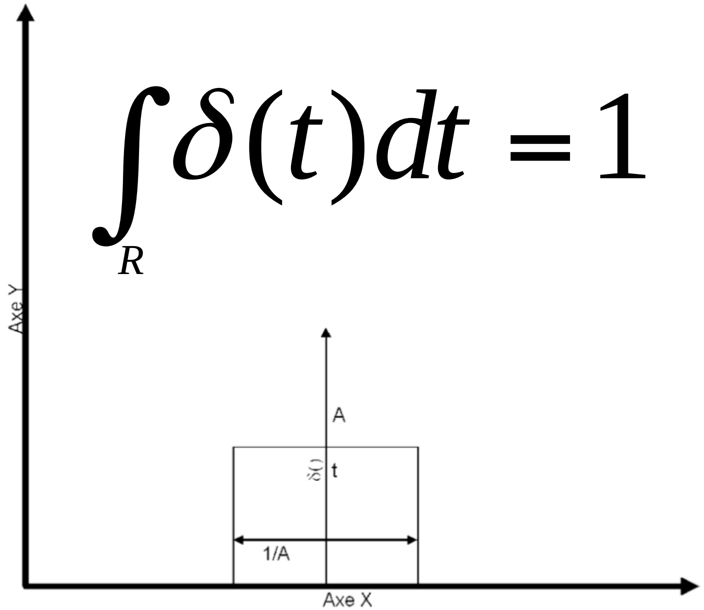
- **On calcule l'aire commune des 2 signaux**

- **On recommence pour t variant sur R et on obtient la convolution x(t)*y(t)**

La distribution de Dirac δ(t)

- Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une masse de 1 en x=0

$$\int_R \delta(t)\,dt = 1$$



La distribution de Dirac δ(t)

- Un Dirac a un support réduit à t=0 et associe à une fonction continue ϕ sa valeur en t=0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

Propriétés:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi'(t)\,dt = -\varphi'(0)$$

Propriétés de δ(t)

- Localisation

$$[A\delta(x-a)][B\delta(x-b)] = \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq b \\ AB\delta(x-a) \text{ si } a = b \end{cases}$$

- Élément neutre

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$$

Application

Définition **:** **La réponse impulsionnelle d'un circuit est la réponse à une impulsion de Dirac.**

Conclusion :

1- Un système linéaire est entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle *h(t).*

2- La réponse du système à une excitation est égale au produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionnelle.

Utilisation de la distribution de Dirac pour le calcul des Transformées Fourier

- **A partir de la TF d'une constante nous pouvons déduire :**

$$\boxed{\begin{gathered} TF\left(\delta(t)\right)=1 \\ TF^{-1}\left(2\pi\delta(t)\right)=1 \\ TF\left(A\right)=2\pi A\delta(\omega) \\ TF\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}=2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right) \end{gathered}}$$

<u>**Donc la transformée Fourier de cos et de sin est :**</u>

$$TF\left\{\cos\omega_0 t\right\}=\pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$

$$TF\left\{\sin\omega_0 t\right\}=\pi/j\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)-\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$

Corrélation des signaux

- *Définition*

$$C_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)\,x_2(t)\,dt \qquad \varphi_{x,y}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\,y(l+k)$$

- *Propriétés*
  - *Fonction paire*
  - *$C_{x,y}$=0 les signaux sont décorrélés*

Algorithme

- *Le signal y(l) est décalé d'une certaine quantité k*
- *Le produit x(l)y(l+k) est effectué échantillon par échantillon pour tous les k*
- *Les valeurs ainsi obtenus sont additionnées*

Autocorrélation

- *Définition*

$$C_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \qquad C_{x,x}(k) = \varphi_{x,x}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)x(l+k)$$

- *Propriétés*
  - $C_{x,x}(0)$= *l' énergie du signal*

Propriétés de la Transformée de Fourier

L'Intégrale de Fourier

$$F(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)\,dt \qquad (f \in L^1):$$

Mesure '' la quantité'' d'oscillations à la fréquence ω qui est présente en f. Si $f \in L^1$ cette intégrale converge

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

Donc, la Transformée de Fourier est bornée et continue.

Notion de système

- Un système fait subir une transformation à un signal d'entrée x(t) et délivre un signal de sortie y(t).

Filtre

- On appelle filtre, d'entrée x(t) et sortie y(t), un système défini par:

$$y(t)=\int_R x(u)h(t-u)du = \int_R x(t-u)h(u)du$$

- Réponse impulsionnelle h(t)

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

- Réponse indicielle *u(t)*
- Réponse en fréquence $\quad Y(f)=X(f)*H(f)$

Valeurs et Vecteurs Propres

- Soit $T: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire sur un espace vectoriel V sur un corps K. Un scalaire $\lambda \in K$ est appelé valeur propre de T s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ pour lequel :

$$T(v) = \lambda v$$

- <u>*Remarque*</u> *kv* est aussi un vecteur propre
- <u>*Exemple*</u> : l'opérateur différentiel sur l'espace vectoriel V. $D(e^{5t}) = 5e^{5t}$

Transformée de Fourier

Fonction de Transfert:

Les exponentielles complexes $e^{j\omega t}$ sont les vecteurs propres des opérateurs de convolution:

$$Le^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega(t-u)}du = \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}$$

Les valeurs propres

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j\omega u}du$$

est la Transformée de Fourier de h à la fréquence ω.

Donc nous voudrions décomposer une fonction f dans une somme de vecteurs propres

La Transformée de Fourier

Filtrage linéaire invariant en temps

L'invariance à la translation dans le domaine temps d'un opérateur L
Signifie que si l'entrée $f(t)$ est retardée de τ

$$\tau, f_\tau(t) = f(t-\tau)$$

la sortie a aussi un retard $g(t) = Lf(t) \quad \Rightarrow \quad g(t-\tau) = Lf_\tau(t)$

Réponse impulsionelle

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta_u(t)du$$

Si $h(t) = L\delta(t)$ nous avons :

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(t-u)du = (f * h)(t)$$

Propriétés

- Réciprocité $\quad f(t) \rightarrow F(f) \quad F(f) \rightarrow f(t) \quad f(t) \Leftrightarrow F(f)$
- Linéarité $\quad \alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \Leftrightarrow \alpha\, F(f) + \beta\, G(f)$
- Dérivation $\quad \dfrac{d\, f(t)}{d\, t} \Leftrightarrow j2\pi f\, F(f)$
- Intégration $\quad \int f(t)dt \Leftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi f} F(f)$
- Décalage temporel $\quad f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{j2\pi f t} F(f)$

- Décalage fréquentiel $F(f - f_0) \Leftrightarrow e^{j2\pi ft} F(f)$

- Conjugaison $f(t) \Leftrightarrow F(f) \qquad f(-t) \Leftrightarrow F^{*}(f)$

- Symétrie $f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \qquad F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

Fourier

La transformée de Fourier inverse ($\hat{f}, f \in L^1$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{h}^*(\omega) d\omega$$

Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{f}(\omega) |^2 d\omega$$

Et,

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

La Variation Totale

- Si *f* est dérivable, la variation totale est :

$$\|f\|_v = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$$

- <u>*Exemple:*</u>

  f(t)=exp(-t ^{2}*)* $\qquad \|f\|_v = 2$

- *Relation avec la Transformée de Fourier*

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{\|f\|_v}{|\omega|}$$

La Phase de la TF

- Dans une TF, l' information sur le temps est cachée dans les phases.

- Il est impossible de déterminer les phases avec assez de précision pour extraire les informations sur le temps.

Relation d’incertitude de Heisenberg

- **Le principe: Le produit de la variance de x pour $|f|^2$ et de la variance de x pour $|F|^2$ est supérieur ou égal à** $\frac{1}{16\pi^2}$

- **La largeur du paquet d'énergie d'un signal dans le temps est inversement proportionnelle à sa largeur dans l'espace des fréquences. On ne peut pas connaître avec une égale précision la position dans le temps et en fréquences d'un signal.**

Conclusions

- **La série de Fourier d'une fonction périodique ne comporte que les sinusoïdes de fréquence égales à des multiples entiers de la fréquence fondamentale**
- **La TF de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie = la redistribution de l'énergie sur les axes de fréquences**

Défauts de la TF

- La transformée de Fourier est une représentation globale du signal. Elle ne permet pas d'analyser son comportement fréquentiel local, ni sa régularité locale. La condition de convergence sur la transformée de Fourier n'indique que le **pire** ordre de singularité. Elle ignore les régularités locales.

- Le défaut de cette transformée est d ’avoir une fenêtre indépendante de la fréquence que l’on calcule.

Transformée de Laplace

Définition

Si *f*(*t*) désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle *t*, définie sur le domaine et nulle pour ; on appelle **Transformée de Laplace** de *f*(*t*) la fonction

$$F(p) = \mathcal{L}\, f(t) = \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt$$

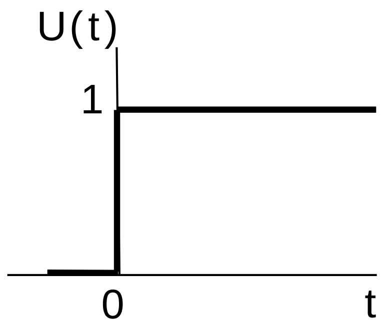
où *p* est complexe

- l'existence de *F(p)* suppose la convergence de l'intégrale

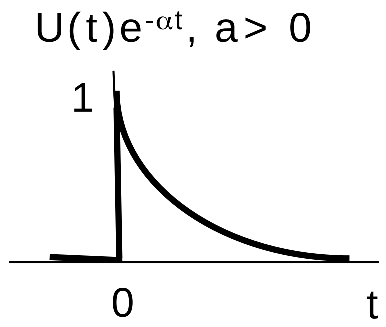
- on dit que *F*(*p*) est " l'image " de *f*(*t*)

Transformée de Laplace

- **Exemples**



Echelon unité



Exponentielle décroissante

	Signal	**TL**
Echelon unité	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
Exponentielle décroissante	$U(t)e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{p+a}$
Exponentielle complexe	$U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p-i\omega}$

***Note**: la TL n'est pas définie pour tout p: la partie réelle de p doit être plus grande qu'une valeur, l'abscisse de convergence.*

Transformée de Laplace

- **Propriété de linéarité**

Théorème

Si $V_1(t)$ a pour TL : $v_1(p)$

et $V_2(t)$ a pour TL : $v_2(p)$

alors , $\forall\ \alpha$ et $\beta \in$ £

$\alpha V_1(t) + \beta V_2(t)$ a pour TL :

$\alpha v_1(p) + \beta v_2(p)$.

Exercices. Calculer les TF de $U(t)\cos(\omega t)$ et $U(t)\sin(\omega t)$

	Signal	**TL**
Exponentielle complexe	$U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p-i\omega}$
Cosinus	$U(t)\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus	$U(t)\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

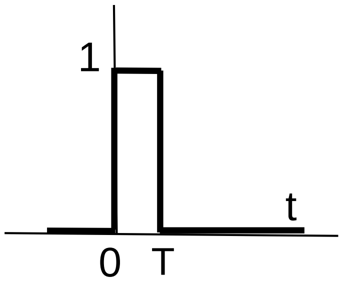
Transformée de Laplace

- **Propriété de linéarité**

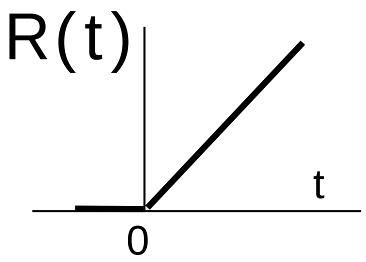
	Signal temporel	**TL**
Exponentielle complexe	$U(t)e^{(-\alpha+i\omega)t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p+\alpha-i\omega}$
Cosinus	$U(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t), \alpha > 0$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Sinus	$U(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace

- **Propriétés**



Impulsion



Rampe

1. Théorème du retard

Si V(t) a pour TL : v(p),

alors V(t - T) a pour TL : $e^{-pT} v(p), \forall\ T > 0$.

Exercice. Montrer que la TL de l'impulsion (*cf*. Fig.) est : $\dfrac{1 - e^{-pT}}{p}$.

2. Théorème de dérivation

Si V(t) a pour TL : v(p),

alors $\dfrac{dV(t)}{dt}$ a pour TL : p.v(p).

Exercice. Vérifier que la TL de la rampe R(t) (*cf*. Fig.) est : $\dfrac{1}{p^2}$.

Transformée de Laplace

- ## Propriétés

3. Théorème inverse de translation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $e^{-at}V(t)$ a pour TL : $v(p+a), \forall\, a > 0$.

Exercice. Retrouver les expressions des TL du tableau page précédente.

4. Théorème inverse de dérivation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $-t.V(t)$ a pour TL : $\dfrac{dv(p)}{dp}$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $t.U(t).e^{-at}$.

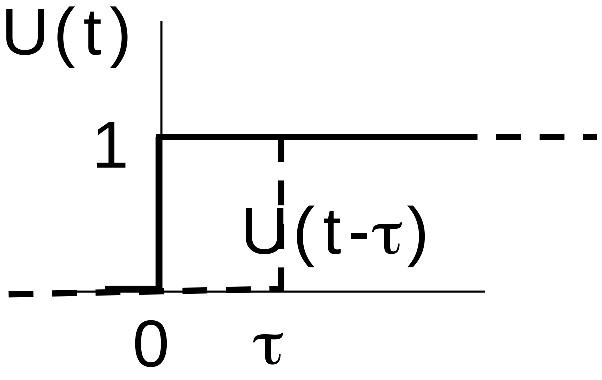
5. Théorème d'affinité - homothétie ou changement d'échelle de temps

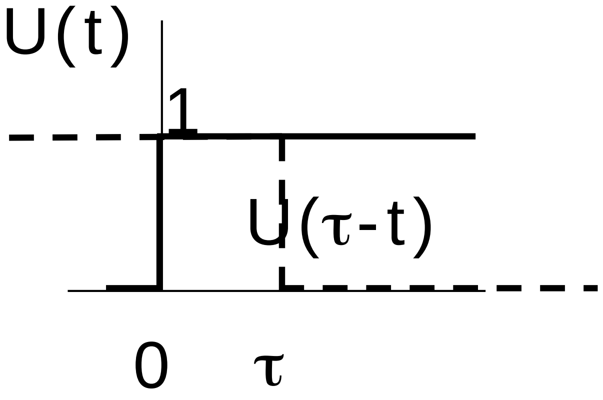
Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $V(kt)$ a pour TL : $\dfrac{1}{k}v(\dfrac{p}{k}), \forall\, k > 0$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $U(t)\sin(3t)$

Transformée de Laplace

- **Convolution**





Théorème

Si X(t) a pour TL : x(p)

et Y(t) a pour TL : y(p),

alors le produit de convolution

$$\int_0^{\infty} X(t)Y(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL:} \quad x(p).y(p)$$

ou, symboliquement :

$*$ a pour TL $\cdot$

Exercice. Montrer de deux manières différentes que $U(t) * U(t) = R(t)$

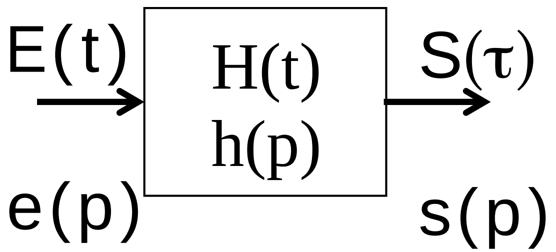
Transformée de Laplace

- **Opérateurs**

Opérateurs dans l'espace temps	**TL**
* (convolution entre signaux)	$\times$ (multiplication de leurs TL)
$\frac{d}{dt}$ (dérivation d'un signal)	$\times p$ (multiplication de sa TL par p)
T - périodisation	$x\ \frac{1}{1-e^{-pT}}$

Transformée de Laplace

- **Systèmes linéaires stationnaires**



Théorème

Si $E(t)$, qui a pour TL : $e(p)$ est le signal d'entée

$H(t)$, la réponse percussionnelle du SLS et sa TL :

$h(p)$, la fonction de transfert du SLS

alors le signal temporel de sortie est donné par le produit de convolution et sa TL par un produit :

$$S(\tau) = \int_0^\infty E(t)H(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL} \quad s(p) = e(p).h(p)$$

Transformée de Laplace

- **Systèmes linéaires stationnaires**

$$E(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} H(t) \\ h(p) \end{matrix}} \longrightarrow S(\tau) = (E(t) * H(t))_{\tau} = \int_0^{\infty} E(t) H(\tau - t) dt$$

$$e(p) \qquad\qquad s(p) = e(p).h(p)$$

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

1. Décomposition en éléments simples de première espèce

$$\frac{1}{(p - a)^2 (p - b)} = \frac{A}{(p - a)^2} + \frac{B}{(p - a)} + \frac{C}{(p - b)}$$

Pour calculer A (resp. C), on multiplie l'équation par $(p\text{-}a)^2$ (resp. p - b) et on fait p = a (resp. p = b). On trouve :

$$A = \left[\frac{1}{p - b}\right]_{p=a} = \frac{1}{a - b} \quad C = \left[\frac{1}{(p - a)^2}\right]_{p=b} = \frac{1}{(b - a)^2}$$

Pour calculer B, on multiplie l'équation par (p-a) et on fait tendre p vers l'infini. On trouve: B = - C. Les originaux des éléments simples peuvent alors être trouvés directement à partir des tables de TL usuelles.

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

2. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

C'est le cas où le dénominateur est un trinôme du second degré qui n'a pas de racines réelles. On décomposition en éléments simples de 2ème espèce :

$$ap^2+bp+c = a\left[\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left(P^2 + A^2\right),$$

$$\text{avec } P = p + \frac{b}{2a} \text{ et } A = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$\frac{1}{ap^2+bp+c} = \frac{1}{a}\;\frac{1}{P^2+A^2} = \frac{1}{aA^2}\;\frac{1}{P^2/A^2+1}$$

Transformée de Laplace

- **Calcul opérationnel**

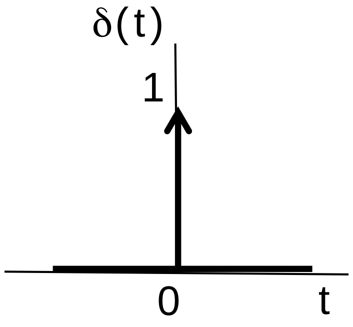
Exercice. On définit la distribution de Dirac $\delta(t)$ de la manière suivante:

$\delta(t)$ a pour TL: 1.

Résoudre l'équation différentielle: $\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \dfrac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = \delta(t)$

(α et ω_0 sont réels et positifs et ne dépendent pas du temps).

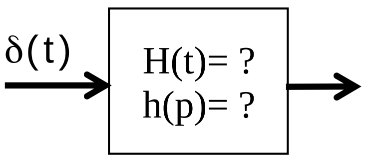
Discuter brièvement la nature de la solution en fonction de α.



Distribution de Dirac

Note

La méthode présentée dans cet exercice permet de retrouver la réponse percussionnelle d'un système linéaire stationnaire lorsque l'on connait l'équation différentielle à laquelle il obéit.



Transformée de Laplace

- **Réponses**

Exercice: identification d'un système linéaire stationnaire

Réponse: H(t) est la dérivée de S(t)

Exercices. Eléments de réponse:

$$\frac{1}{p^3+3p^2+2p}=\frac{1}{p(p+2)(p+1)}\;;\quad \frac{1}{p^3-1}=\frac{1}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{p^3+p^2-p-1}=\frac{1}{(p-1)(p+1)^2}$$