Exercice 1 :

Le schéma de la figure 1 représente une structure de commande échantillonnée basée sur une régulation intégrale sur l'écart ε et proportionnelle-dérivée sur la sortie s[1].

$G(p)$ est la fonction de transfert du processus analogique à commander.
BOZ désigne un bloqueur d'ordre zéro.

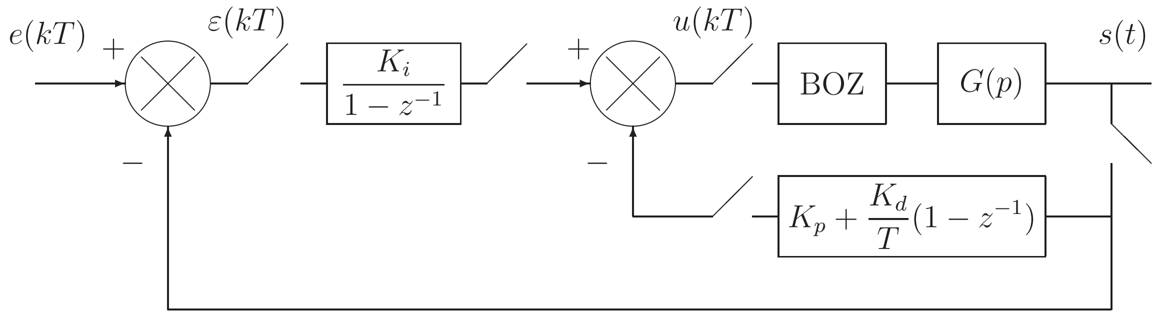

Fig. 1 – *Régulation intégrale sur ε et proportionnelle-dérivée sur s*

1.1) Etablir la relation $U(z) = f(\varepsilon(z), S(z))$.
En déduire que pour implanter sur le calculateur ce type de commande, il faut programmer l'équation récurrente suivante :

$$u(kT) = u((k-1)T) + K_i\,\varepsilon(kT) - \left(K_p + \frac{K_d}{T}\right) s(kT) + \left(K_p + \frac{2\,K_d}{T}\right) s((k-1)T) - \frac{K_d}{T}\, s((k-2)T)$$

[1]Ce type de commande a pour but de diminuer l'influence des variations brusques de consigne. En évitant de faire intervenir le terme dérivateur sur la consigne (cas d'une commande PID classique), on évite en effet de brusques discontinuités sur la commande susceptibles de provoquer des saturations au niveau des organes de commande ou du processus lui-même.

Le système analogique à commander a pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p+1}$$

<u>On choisit, pour toute la suite, de supprimer l'action dérivée ($K_d = 0$).</u>

1.2) Calculer $\dfrac{S(z)}{U(z)}$. (on posera $\alpha = e^{-T}$)

1.3) Montrer que la fonction de transfert échantillonnée $\dfrac{S(z)}{E(z)}$ s'écrit :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K_i\,(1-\alpha)\,z}{(z-\alpha)(z-1) + K_p\,(1-\alpha)(z-1) + K_i(1-\alpha)\,z}$$

Pour une période d'échantillonnage T choisie, on règle les paramètres du correcteur en prenant :

$$K_i = \frac{1}{1-e^{-T}} \qquad \left(= \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$K_p = e^{-T}\,K_i \qquad (= \alpha\,K_i)$$

1.4) Que devient la fonction de transfert $\dfrac{S(z)}{E(z)}$?

Quel intérêt présente un tel réglage de correcteur ?

1.5) On choisit une période d'échantillonnage $T = 1$ s.
En utilisant les résultats des questions 1.1) et 1.4), compléter le tableau suivant pour une entrée en échelon de position unité :

k	0	1	2	3	4
kT					
$e(kT)$					
$s(kT)$					
$\varepsilon(kT)$					
$u(kT)$					

Tracer sur un même graphique le signal de sortie $s(kT)$ et le signal de commande $u(t)$ sortant du BOZ.

1.6) On choisit maintenant une période d'échantillonnage $T = 1$ ms.
Mêmes questions qu'en 1.5).

1.7) En comparant les résultats des questions 1.5) et 1.6), indiquer quel est le facteur limitant qui impose une limite inférieure au temps de réponse du système.

Exercice 2 :

On considère le système de la figure 2-a qui correspond à un processus continu en boucle ouverte.

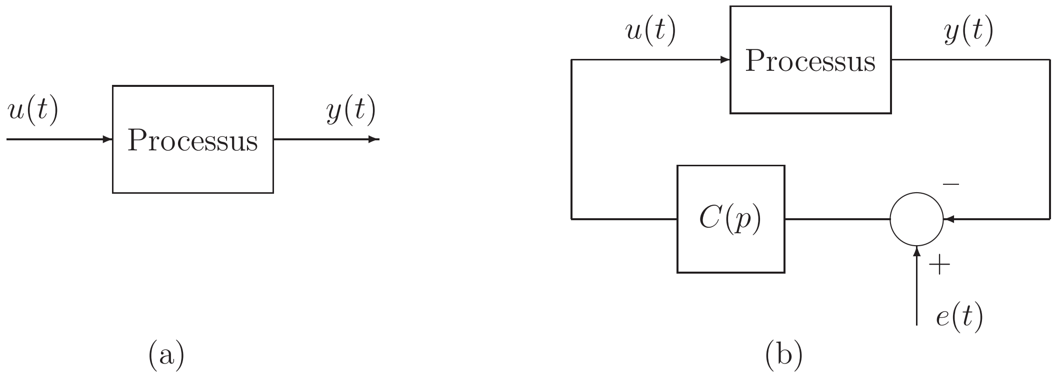

Fig. 2 – (a) Processus continu en boucle ouverte - (b) Processus continu dans une boucle analogique d'asservissement

Le processus à piloter $G(p)$ est un premier ordre de gain statique $K = 1$ et de constante de temps $\tau = 0,4$ s.

Une étude préliminaire effectuée à partir de la boucle d'asservissement analogique de la figure 2-b a permis de calculer les paramètres d'un correcteur analogique de type PI :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = 0,2\left(1 + \frac{1}{0,1\,p}\right)$$

Plutôt que de recourir à une commande analogique, on décide de piloter le processus continu par une boucle numérique d'asservissement[2] selon le schéma de la figure 3.
On choisit une fréquence d'échantillonnage de $2,5$ Hz.

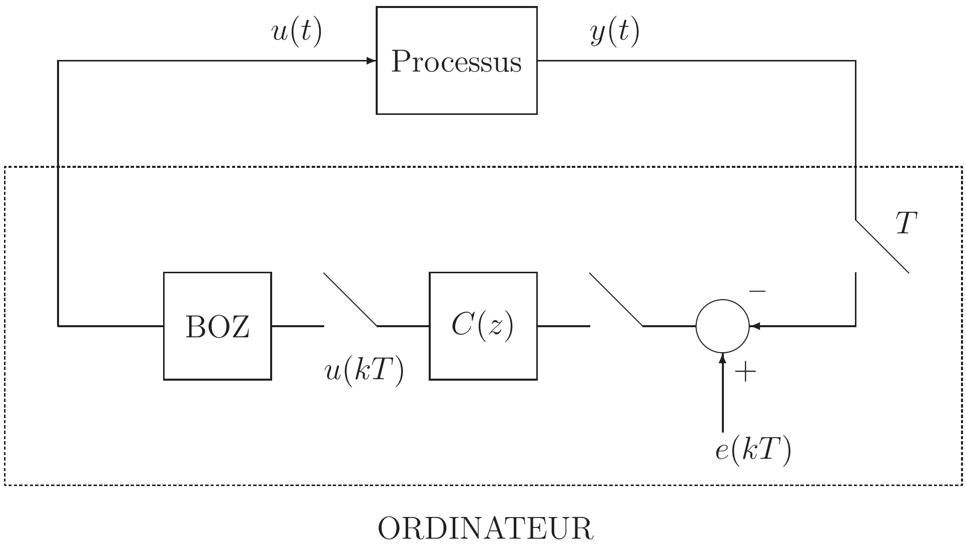

FIG. 3 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

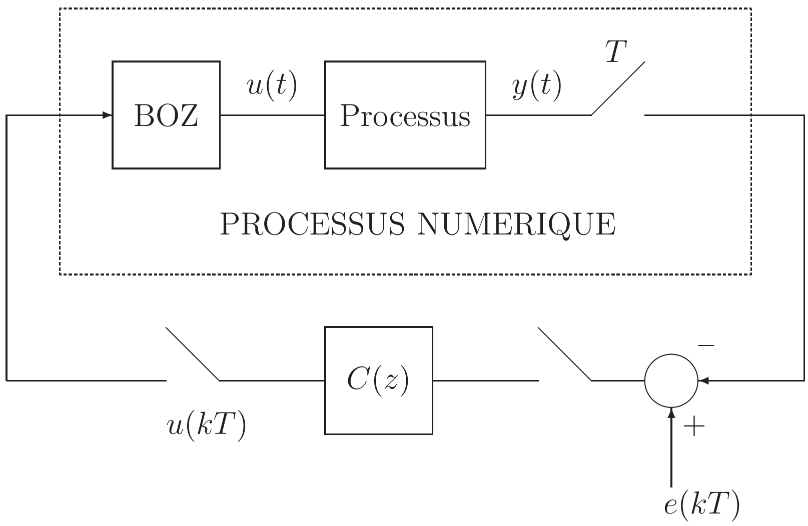

FIG. 4 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

2.1) Discrétiser la loi de commande analogique et donner l'équation récurrente permettant de calculer les échantillons de commande numérique $u(kT)$.

2.2) En déduire que la fonction de transfert en z du correcteur numérique équivalent peut se mettre sous la forme :

$$C(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - 1}$$

On donnera les valeurs numériques de K_d et z_0.

2.3) Donner la fonction de transfert en z du processus numérique équivalent au processus continu $G(p)$ muni de son BOZ et échantillonné à la période T (cf. Figure 4).

2.4) En déduire la fonction de transfert numérique $\dfrac{Y(z)}{E(z)}$ en boucle fermée.

Donner son gain statique (justifier le résultat).

2.5) Après avoir remarqué que la FTBF correspond à un 2nd ordre numérique, utiliser les abaques fournies en annexe pour déterminer :

a) le coefficient d'amortissement ξ,

b) le dépassement en réponse à un échelon,

c) l'instant du premier dépassement.

Exercice 3 :

On considère le système échantillonné de la figure 5 avec :

$$G(z) = \frac{0,3679\,z + 0,2642}{(z - 0,3679)(z - 1)}$$

Le correcteur $C(z)$ utilisé est de type proportionnel. On note K son gain.

Calculer la condition que doit vérifier K pour que le système en boucle fermée soit stable.

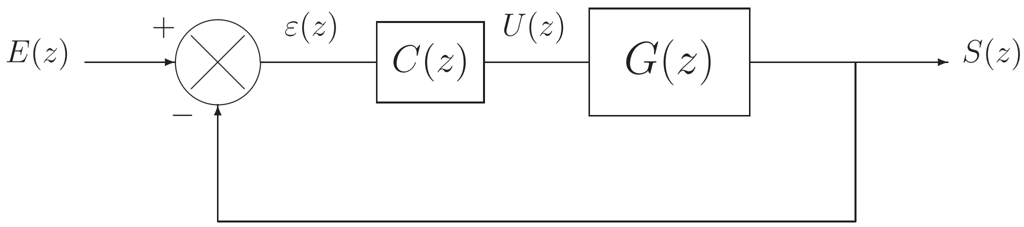

FIG. 5

Exercice 4 :

On considère le système de la figure 6-a qui correspond à un processus continu en boucle ouverte.

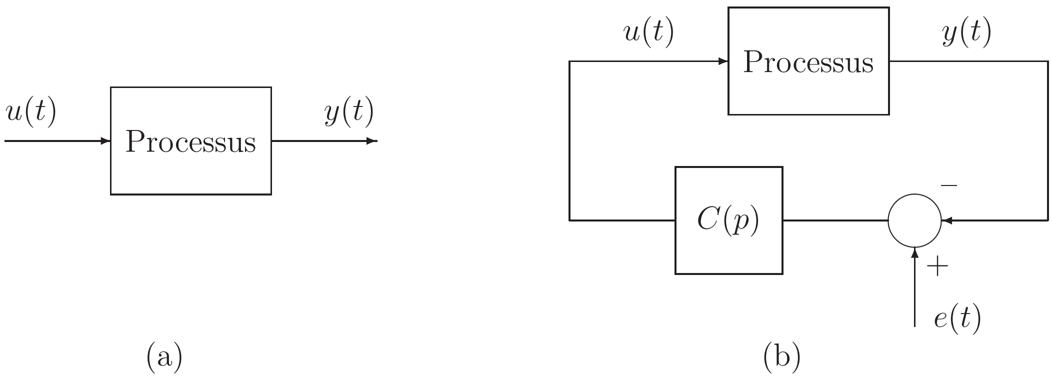

Fig. 6 – (a) Processus continu en boucle ouverte - (b) Processus continu dans une boucle analogique d'asservissement

Le processus étudié a pour fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

Dans un premier temps, on envisage de piloter le système par une boucle d'asservissement analogique (cf. Figure 6-b) et une **commande proportionnelle**.

4.1) Expliquer pourquoi cette façon de procéder est vouée à l'échec.

Dans un deuxième temps, plutôt que de poursuivre dans la voie « commande analogique », on décide de piloter le processus continu par une boucle numérique d'asservissement selon le schéma de la figure 7.
On choisit une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz.

Le correcteur numérique choisi a pour fonction de transfert :

$$C(z) = 0,374\,\frac{z - 0,85}{z}$$

4.2) À partir de l'expression du correcteur numérique utilisé, donner l'équation récurrente permettant de calculer les échantillons de commande numérique $u(kT)$.

4.3) Calculer la fonction de transfert en z du **processus numérique équivalent** au processus continu $G(p)$ muni de son BOZ et échantillonné à la période T (cf. Figure 8).

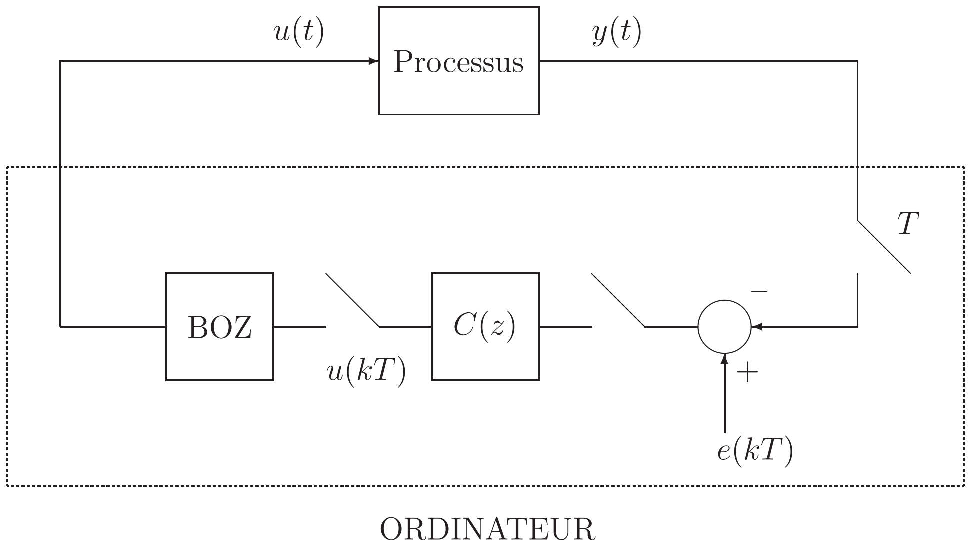

FIG. 7 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

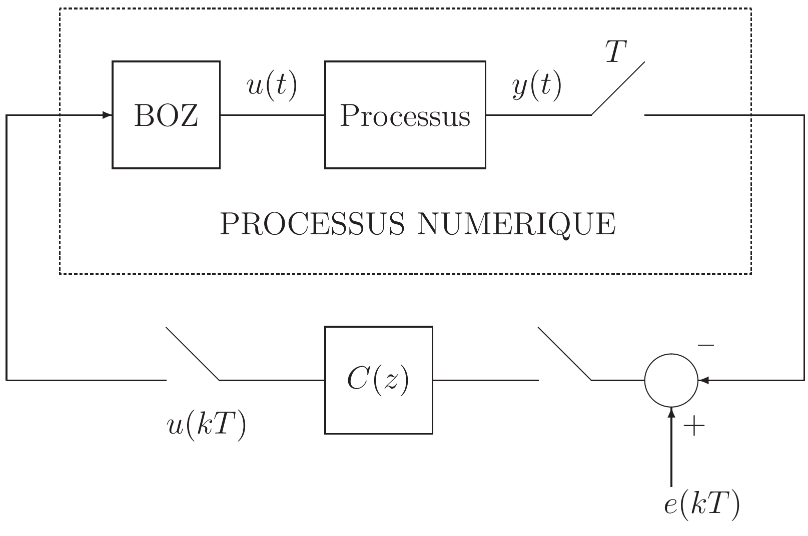

FIG. 8 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

4.4) En déduire la fonction de transfert numérique $\dfrac{Y(z)}{E(z)}$ en boucle fermée.

Donner son gain statique (justifier le résultat).

Exercice 5 :

On considère un processus continu d'ordre 1 de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10}{1 + 15\,p}$$

On se propose d'étudier la commande numérique de ce processus continu suivant le schéma de la figure 9, où $G_c(z)$ désigne le correcteur numérique choisi.

On choisit une période d'échantillonage de $T = 1$ s.

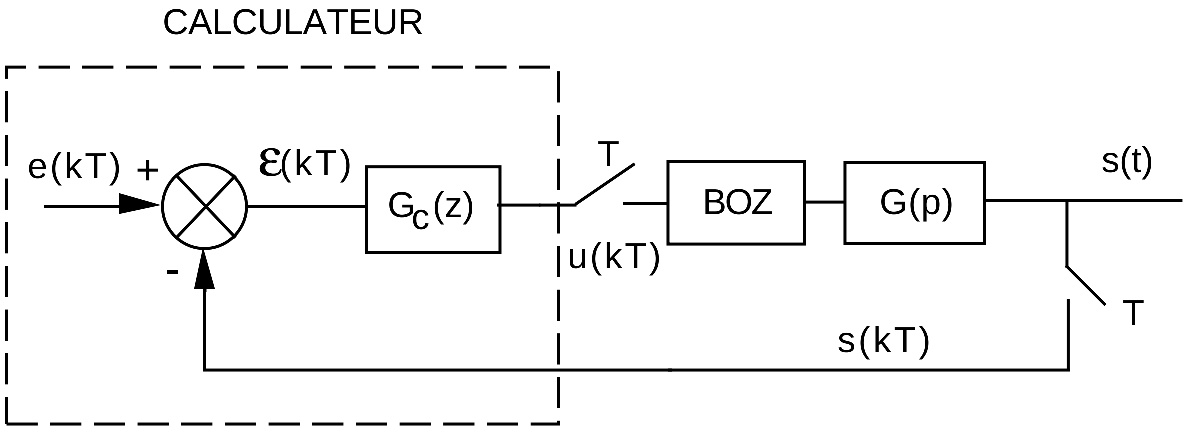

Fig. 9 –

On rappelle (ne pas le démontrer) que la fonction de transfert en z équivalente au processus continu précédé du bloqueur d'ordre zéro est égale à :

$$G_e(z) = 10\,\frac{1-a}{z-a} \qquad \text{avec} \qquad a = e^{-\frac{T}{15}}$$

1ère partie[3] :

Dans un premier temps, on choisit un correcteur $G_c(z)$ de type proportionnel de gain K_p, avec $K_p > 0$.

On rappelle (ne pas le démontrer) que la FTBF du système peut s'écrire sous la forme :

$$H_{BF}(z) = \frac{10\,K_p}{1 + 10\,K_p}\,\frac{1-\alpha}{z-\alpha}$$

[3] Les 3 parties sont indépendantes.

avec $\alpha = a - 10\,K_p(1-a)$.

Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée, on va analyser le lieu des racines du système (i.e. le lieu des pôles de la FTBF lorsque K_p varie de 0 à $+\infty$), fourni Figure 10.

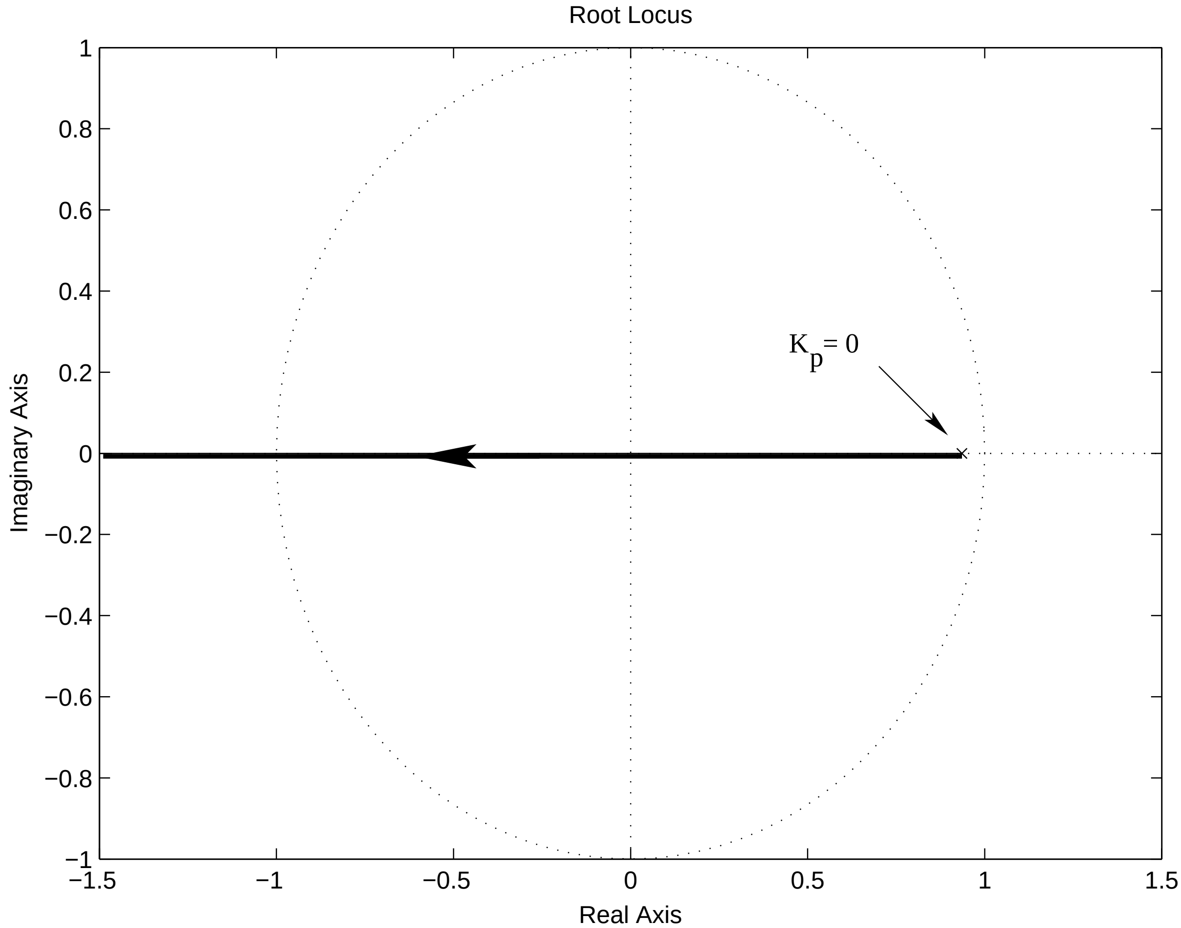

Fig. 10 – Lieu des racines de la FTBF

5.1) Quels sont les pôles de la FTBF ? Combien y en a-t-il ?
Vérifier la cohérence avec le lieu des racines.

5.2) Est-ce que la stabilité dépend de la valeur de K_p ?
Expliquer.

5.3) Quel est le domaine de variation de K_p ($K_{p_{min}}$, $K_{p_{max}}$) qui garantit la stabilité du système en boucle fermée ?

5.4) On montre que la réponse indicielle du système en boucle fermée est :

a) stable et apériodique si le pôle est stable et positif.

b) stable mais oscillatoire si le pôle est stable et négatif.

Quels sont les 2 domaines de variation de K_p ($K_{p_{min}}$, $K_{p_{max}}$) qui correspondent à chacun de ces 2 régimes transitoires ?

5.5) Le système en boucle fermée est-il précis ?
Calculer la valeur de régime permanent en réponse à une entrée de type échelon unité.

<u>2ème partie</u> :

Dans un deuxième temps, on choisit un correcteur $G_c(z)$ de type proportionnel intégral de fonction de transfert $K_p + K_i \dfrac{z}{z-1}$.

5.6) Déterminer l'équation récurrente qui permet au correcteur de calculer les échantillons de commande $u(kT)$ à partir des échantillons du signal d'erreur $\varepsilon(kT)$.

5.7) Montrer que la FTBF du système peut s'écrire sous la forme :

$$H_{BF}(z) = 10 \frac{((K_p + K_i)\, z - K_p)(1-a)}{(z-1)(z-a) + 10\,(1-a)((K_p + Ki)\, z - K_p)}$$

5.8) Calculer le polynôme caractéristique de ce système et, en appliquant le critère de ROUTH sur le polynôme en w, chercher les valeurs de K_p et K_i pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

NB : le calcul n'est pas très compliqué si on procède avec méthode : écrire le polynôme en z sous la forme $z^2 - A\,z + B = 0$, écrire les conditions sur A et B, et en déduire les conditions sur K_p et K_i.

5.9) Parmi les 4 domaines de stabilité de la figure 11, quel est le domaine de stabilité correct ?

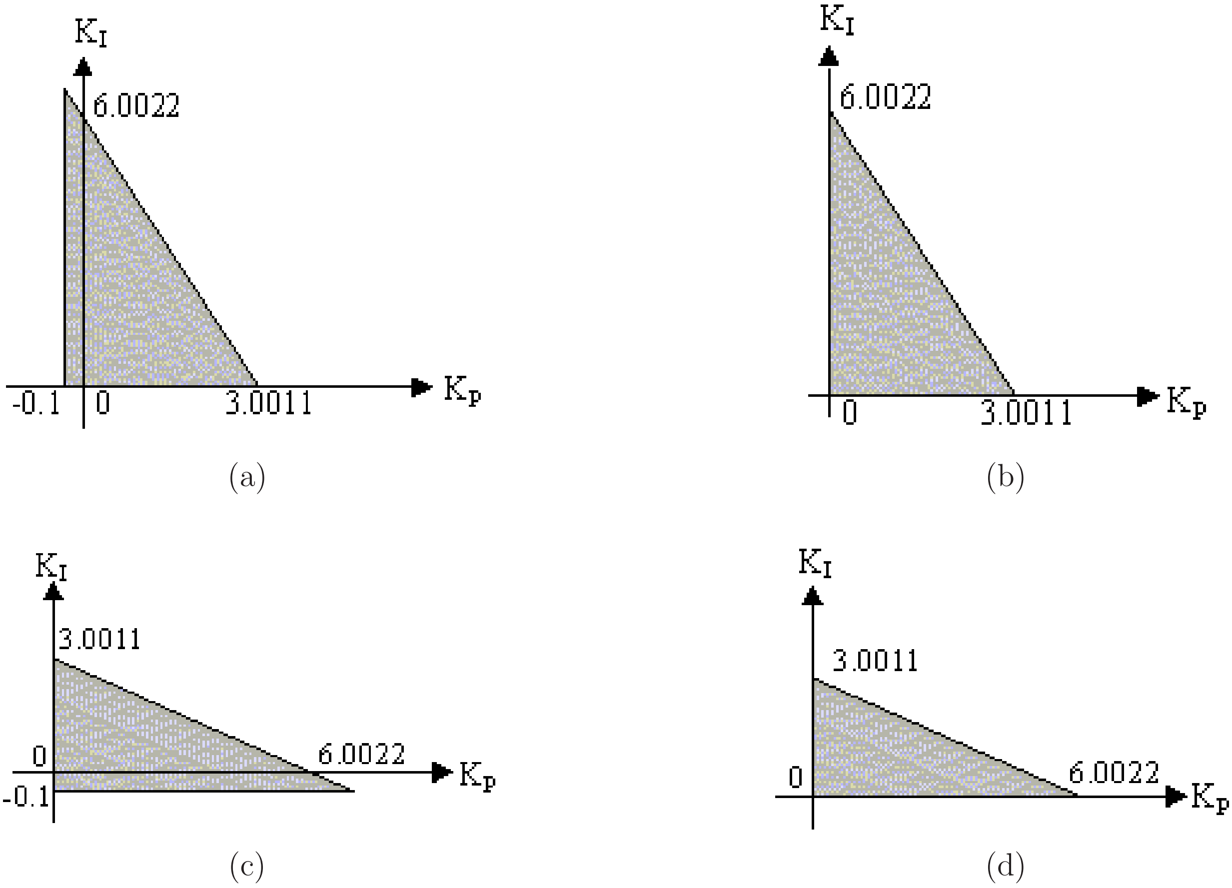

FIG. 11 – Domaines de stabilité (valeurs admissibles pour K_p et K_i)

3ème partie :

Dans un troisième temps, on met en place le correcteur numérique suivant, qui a été calculé de manière à ce que le système en boucle fermée présente un comportement type 2nd ordre :

$$G_c(z) = 0.01 \, \frac{(z+1)}{z^2 - 1.5\,z + 0.5} \, \frac{z-a}{1-a}$$

5.10) Vérifier que la FTBF correspond bien à un système numérique du 2nd ordre.

5.11) En utilisant les abaques, en déduire les performances du système en réponse à un échelon de consigne :

- **a)** gain statique (conclure sur la précision)
- **b)** valeur du dépassement
- **c)** temps du premier maximun

Exercice 6 :

On considère un processus continu du 1er ordre de gain statique 1 et de constante de temps τ. On réalise la boucle numérique d'asservissement de la figure 12.
Par la suite, on désignera par T la période d'échantillonnage et on posera $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$.

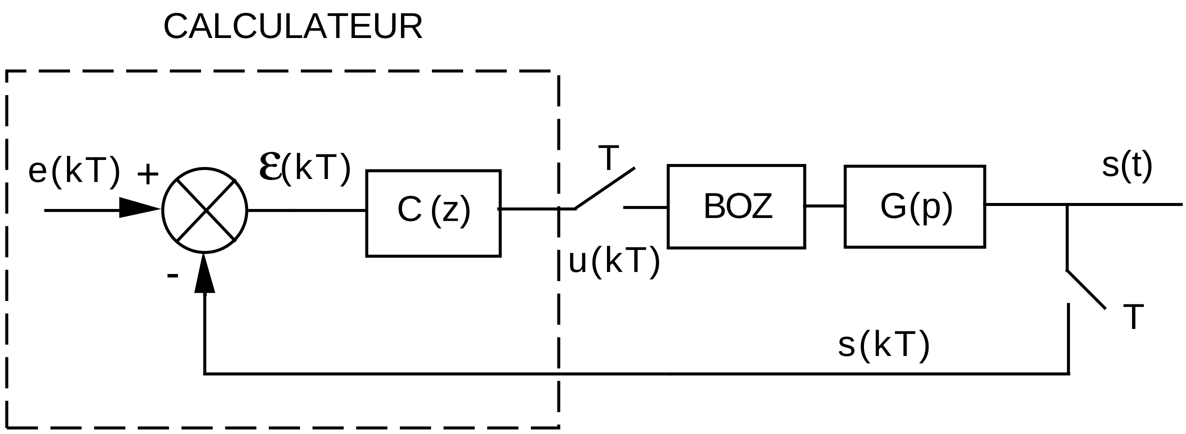

FIG. 12 –

6.1) Calculer la fonction de transfert numérique équivalente au processus continu précédé du bloqueur d'ordre zéro. On désignera cette fonction de transfert par $G_e(z)$.

6.2) En désignant par $E(z)$ la transformée en z de l'entrée et par $H(z)$ la FTBF du système bouclé, exprimer $U(z)$ en fonction de $G_e(z)$, $H(z)$ et $E(z)$.

6.3) Exprimer $C(z)$ en fonction de $G_e(z)$ et $H(z)$.

On souhaite synthétiser un correcteur numérique $C(z)$ tel que le système bouclé se comporte comme un système du 1er ordre de gain statique 1 et de constante de temps τ' ($\tau' < \tau$), soit :

$$H(z) = \frac{1-\beta}{z-\beta} \qquad \text{avec } \beta = e^{-\frac{T}{\tau'}}$$

Par la suite, on posera : $x = \dfrac{T}{\tau'}$.

6.4) Quelle condition sur x est imposée par le théorème de Shannon ?

6.5) Calculer $C(z)$ en fonction de α et β.

6.6) En déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande souhaitée.

6.7) Calculer $U(z)$ en fonction de α, β et $E(z)$.

6.8) Dans le cas où l'entrée est un échelon d'amplitude E_0, calculer $u(0)$ (par exemple, en appliquant le théorème de la valeur initiale).

En posant $a = \dfrac{\tau}{\tau'}$, montrer que :

$$u(0) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\frac{x}{a}}} E_0$$

On admettra pour la suite que $u(0)$ est la valeur maximale de $u(k)$, que l'on notera u_{max}.

L'abaque de la figure 13, représente la fonction :

$$f_a(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\frac{x}{a}}}$$

pour différentes valeurs de a.

Application : la constante de temps du processus est $\tau = 1$ s. Le système bouclé doit avoir une constante de temps $\tau' = 0,125$ s. Le signal de commande en réponse à un échelon E_0 doit être inférieur à $6,5\,E_0$ (i.e. $u_{max} = 6,5\,E_0$).

6.9) En utilisant l'abaque de la figure 13, déterminer la fréquence d'échantillonnage maximale qui permet de satisfaire au cahier des charges.

On veut maintenant que $\tau' = \dfrac{\tau}{10}$ avec $\tau = 1$ s. On impose une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz.

6.10) Quelle sera la valeur maximum du signal de commande ?

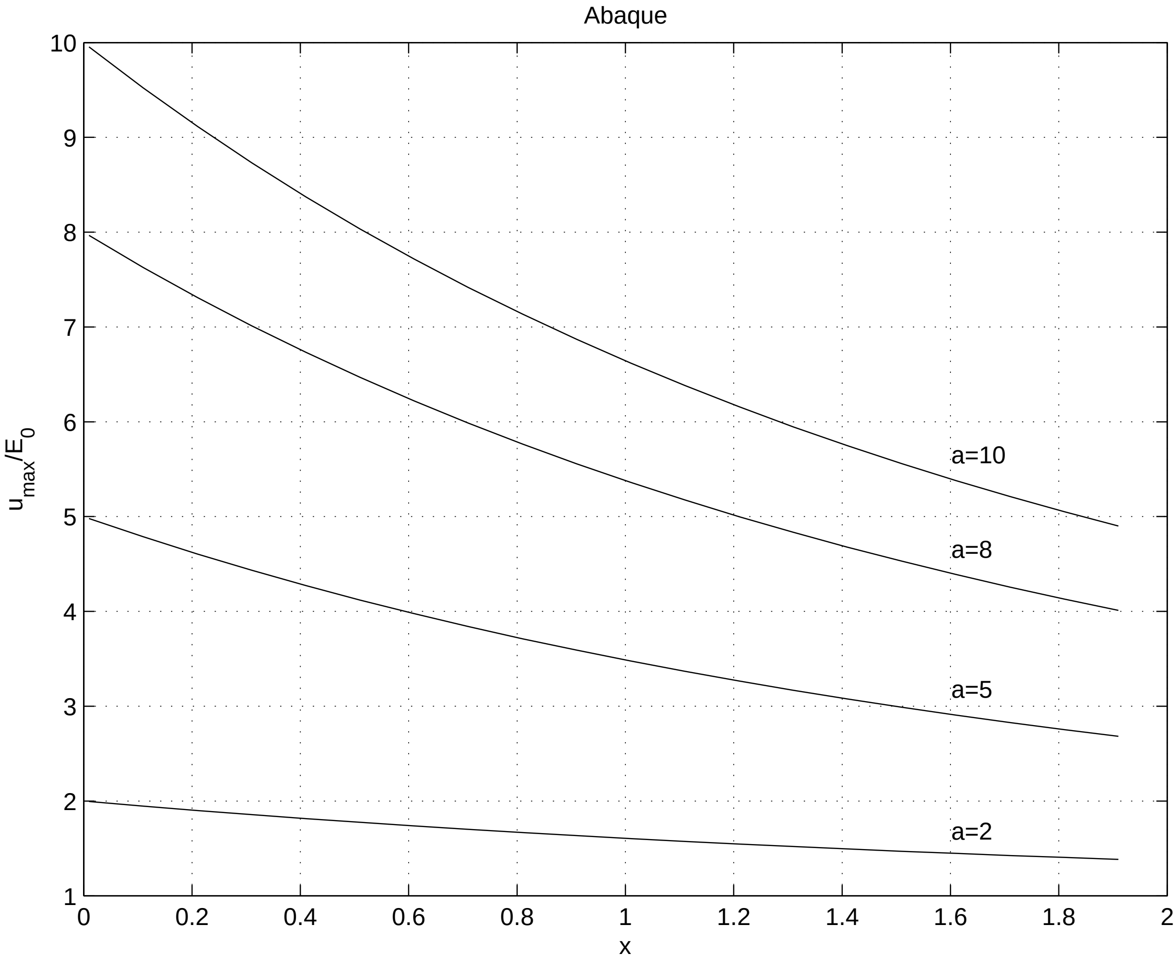

FIG. 13 – Abaque

Exercice 7 :

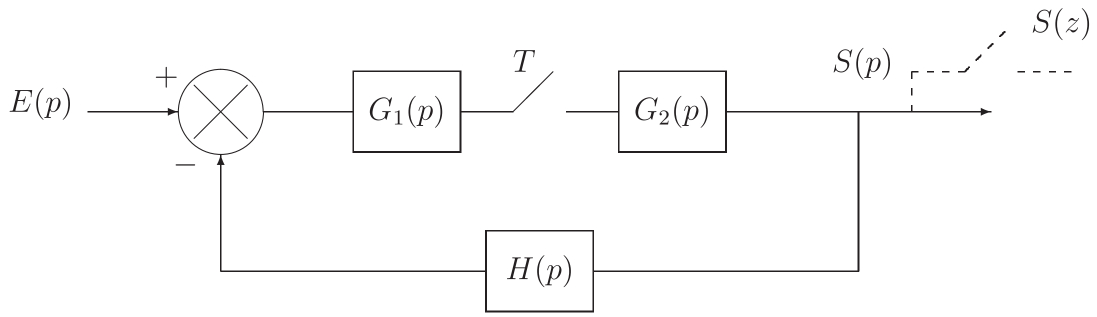

FIG. 14 – Un système bouclé échantillonné

L'entrée du système de la figure 14 est un signal continu $e(t)$ (ayant pour transformée de Laplace $E(p)$). Sa sortie est un signal continu $s(t)$ (ayant pour transformée de Laplace $S(p)$).

7.1) En désignant par $S(z)$ la transformée en z du signal échantillonné $s(kT)$ correspondant à la sortie du système aux instants d'échantillonnage (échantillonneur fictif dans le cas présent car la sortie $s(t)$ n'est pas réellement échantillonnée), montrer que l'on a :

$$S(z) = \frac{\mathcal{Z}[G_2(p)]\,\mathcal{Z}[G_1(p)\,E(p)]}{1 + \mathcal{Z}[G_1(p)\,H(p)\,G_2(p)]}$$

7.2) Peut-on définir une fonction de transfert échantillonnée $\dfrac{S(z)}{E(z)}$?

Exercice 8 :

On considère le système continu suivant :

$$G(p) = \frac{5}{1 + 4\,p}$$

On souhaite concevoir un système en boucle fermée (à retour unitaire) qui satisfait le cahier des charges suivant :

a) le système en boucle fermée se comporte comme un système du 1$^{\text{er}}$ ordre

b) il est 10 fois plus rapide qu'en boucle ouverte

c) il est précis vis-à-vis d'un échelon de consigne

8.1) Quel est le temps de réponse à 5% du système en boucle ouverte ? Quelle devra être la constante de temps du système en boucle fermée ?

8.2) Que faut-il faire pour satisfaire la condition c) ? Expliquer pourquoi.

<u>1ère partie</u> : commande analogique

On utilise un correcteur continu de type PI, de fonction de transfert :

$$C_1(p) = K_i\left(1 + \frac{1}{T_i\,p}\right)$$

et on réalise une commande analogique suivant le schéma de la figure 15.

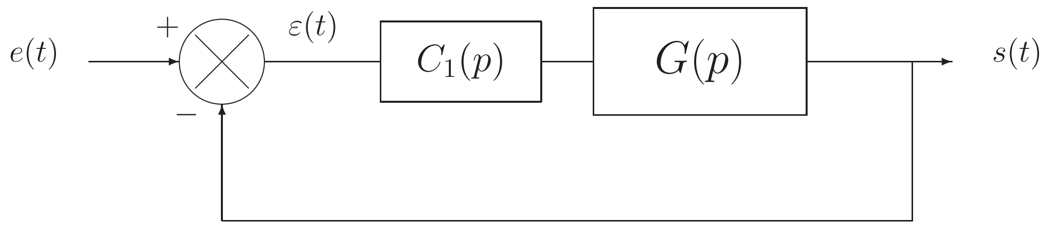

Fig. 15 – Système bouclé analogique avec correcteur PI

8.3) Déterminer les paramètres du correcteur PI qui conduisent à un système en boucle fermée <u>du 1$^{\text{er}}$ ordre</u>, avec la rapidité souhaitée.

2ème partie : commande numérique

On se propose de réaliser la commande numérique du processus continu $G(p)$ suivant le schéma de la figure 16.

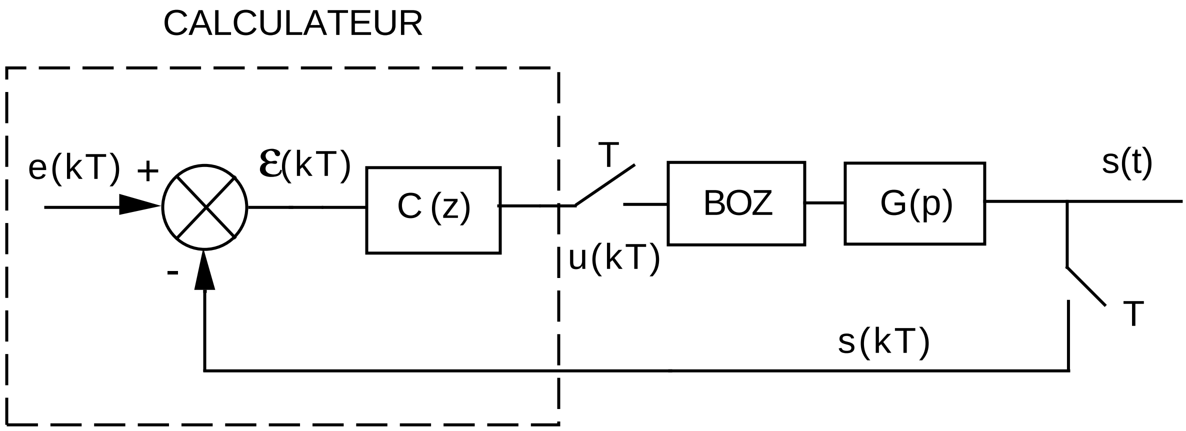

FIG. 16 – Commande numérique d'un procédé continu

On choisit une période d'échantillonnage $T = 0,5$ s.

Dans un premier temps, on décide de calculer le correcteur numérique $C(z)$ à partir du correcteur analogique $C_1(p)$ trouvé à la question 8.3).

8.4) Discrétiser le correcteur PI trouvé à la question 8.3) par la méthode de Tustin[4] et en déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande numérique du procédé.

Dans un deuxième temps, on se propose de calculer <u>directement</u> un correcteur numérique $C(z)$ qui satisfait le cahier des charges donné en préambule.

8.5) Montrer que la fonction de transfert <u>en boucle fermée</u> $\dfrac{S(z)}{E(z)}$ qui satisfait le cahier des charges donné en préambule est égale à[5] :

$$H(z) = \frac{0,7135}{z - 0,2865}$$

[4]Rappel : $p \longrightarrow \dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$

[5]On rappelle que la fonction de transfert d'un 1^{er} ordre numérique de gain K et de constante de temps τ s'écrit : $H(z) = K\dfrac{1-\alpha}{z-\alpha}$ avec $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$. On commencera par trouver la valeur de τ qui convient.

8.6) Calculer la fonction de transfert numérique équivalente au processus continu $G(p)$ précédé par le bloqueur d'ordre zéro, que l'on notera $G_1(z)$.

8.7) Donner la relation reliant $H(z)$, $C(z)$ et $G_1(z)$.

8.8) En déduire les paramètres du correcteur PI discret, de fonction de transfert notée $C_2(z) = K_2\left(1 + K_3\,\dfrac{z}{z-1}\right)$, qui assure les objectifs fixés par le cahier des charges.

8.9) En déduire l'équation récurrente permettant de réaliser la commande numérique trouvée.

Exercice 9 :

On considère un système du 1er ordre $G(p) = \dfrac{K}{1+\tau\, p}$.

On se propose d'en assurer la commande numérique suivant le schéma de la figure 17 avec un régulateur PI que l'on notera :

$$C(z) = K_c\,\frac{z-\beta}{z-1}$$

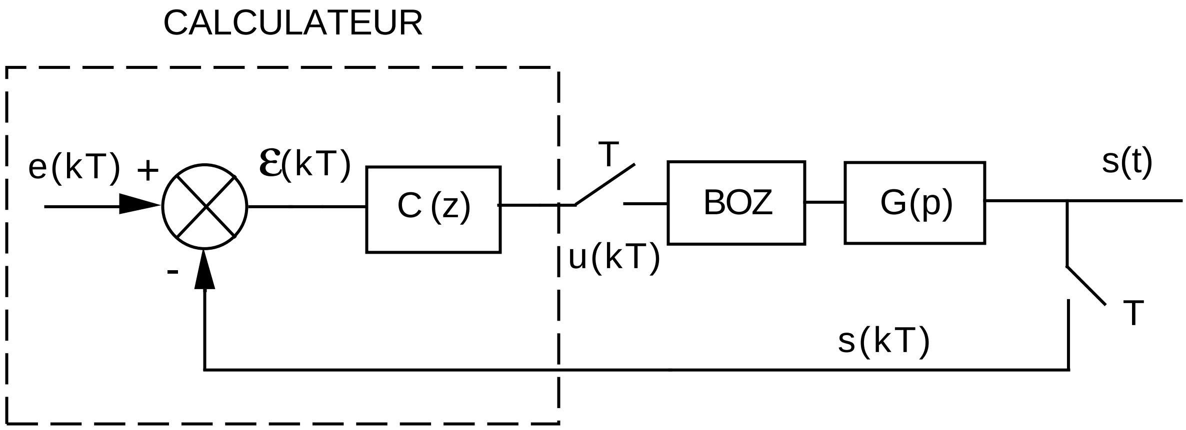

FIG. 17 – Commande numérique d'un procédé continu

On note T la période d'échantillonnage.

9.1) Calculer la fonction de transfert numérique du processus continu $G(p)$ précédé par un bloqueur d'ordre zéro. On la notera $G_1(z)$ et on notera $\alpha = e^{-T/\tau}$.

9.2) Calculer la valeur de β ($\beta \neq 1$) pour que le système en boucle fermée soit du 1er ordre. Pour la suite, on se placera dans cette configuration.

9.3) En appliquant le critère de ROUTH[6], calculer la condition de stabilité du système numérique.

9.4) En notant $U(z)$ la transformée en z du signal de commande $u(k\,T)$ issu du régulateur, calculer la fonction de transfert $\dfrac{U(z)}{E(z)}$.

9.5) En déduire la valeur de $U(z)$ pour une entrée en échelon d'amplitude E_0.

[6] Attention, système échantillonné !

9.6) En déduire les valeurs de $u(0)$ (valeur initiale de la commande) et $u(+\infty)$ (valeur finale de la commande).

9.7) Montrer que la FTBF du système peut se mettre sous la forme $H(z) = \dfrac{1-\gamma}{z-\gamma}$. Donner la valeur de γ.

9.8) Que se passe-t-il si on choisit $\gamma = 0$? Le système est-il stable pour cette valeur ? Quel est l'intérêt d'un tel réglage ?

Exercice 10 :

On veut diluer un polluant pour assurer une concentration faible dans les rejets d'usine[7]. Sur la figure 18, Q_e désigne le débit d'alimentation en eau et Q_p désigne le débit d'alimentation en polluant de concentration C_p.

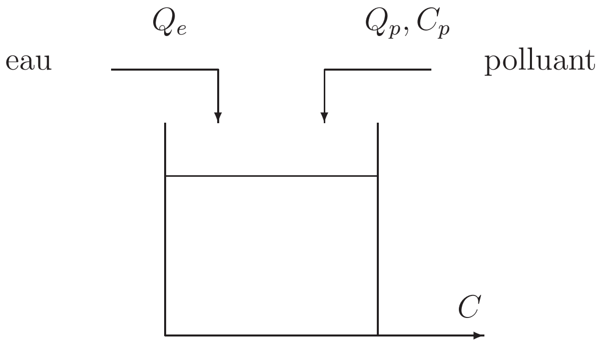

Fig. 18 – Un procédé de dilution

En désignant par Q_p^* , Q_e^* et C^* les variables d'écart par rapport au point nominal de fonctionnement $(\overline{Q_p}, \overline{Q_e}, \overline{C})$, et en supposant que la concentration C_p reste constante, le schéma fonctionnel correspondant à ce procédé est donné Figure 19.

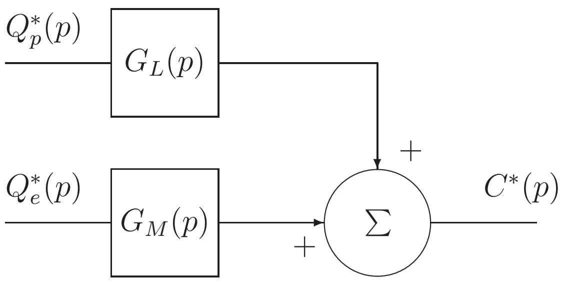

Fig. 19 –

avec :

$$G_M(p) = \frac{-K_2}{1+\tau p} \qquad , \qquad G_L(p) = \frac{K_1}{1+\tau p}$$

[7]La finalité de ce procédé de dilution est répréhensible. Ne pas le prendre comme modèle !

Afin de réguler la concentration C en sortie du process, on procéde comme indiqué Figure 20.

La mesure de la concentration en sortie du process est effectuée par un chromatographe. La sortie du process est échantillonnée toutes les T minutes. L'échantillon est injecté dans une colonne chromatographique qui présente un temps de rétention de D_c minutes, qui peut être considéré comme un retard pur. Le détecteur en sortie de la colonne produit un signal représentatif de la concentration. Ce signal est généré toutes les T minutes et est envoyé dans le régulateur analogique à travers un bloqueur d'ordre zéro.
Le régulateur agit sur le débit d'alimentation en eau à travers une vanne de type NF.

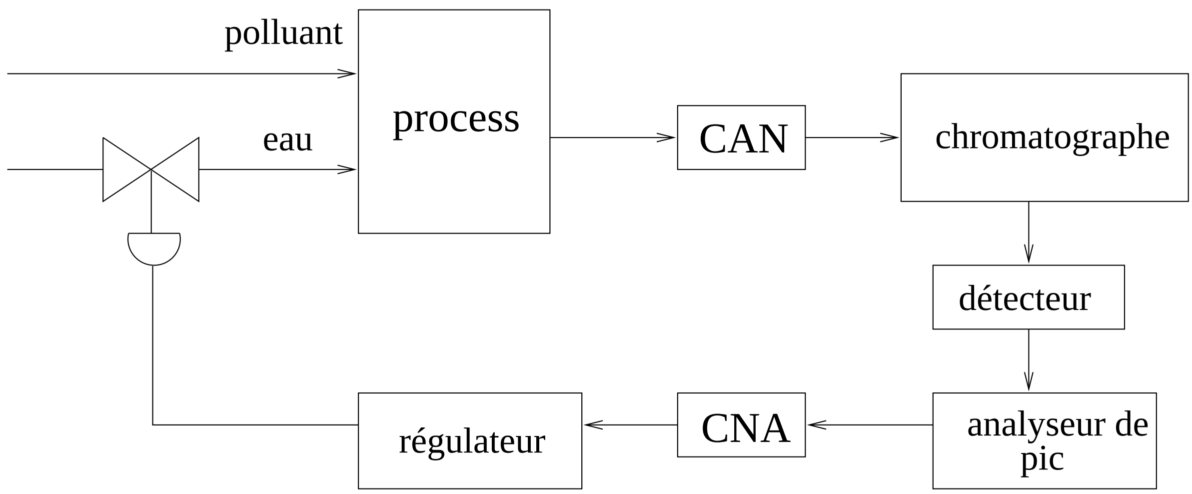

FIG. 20 –

Ce système peut être représenté par le schéma fonctionnel de la figure 21 où les variables indiquées représentent les variables d'écart par rapport au point nominal de fonctionnement choisi.

$Q_p^*(p)$ représente la perturbation agissant sur le process.

$Q_e^*(p)$ représente la variable de commande du process.

$C_c^*(p)$ représente la consigne de concentration.

$R(p)$ désigne la fonction de transfert du régulateur.

BOZ désigne un bloqueur d'ordre zéro de fonction de transfert notée $B_0(p)$.

On supposera que le temps de rétention de la colonne chromatographique est un multiple entier de la période d'échantillonnage, i.e. $D_c = k\,T$.

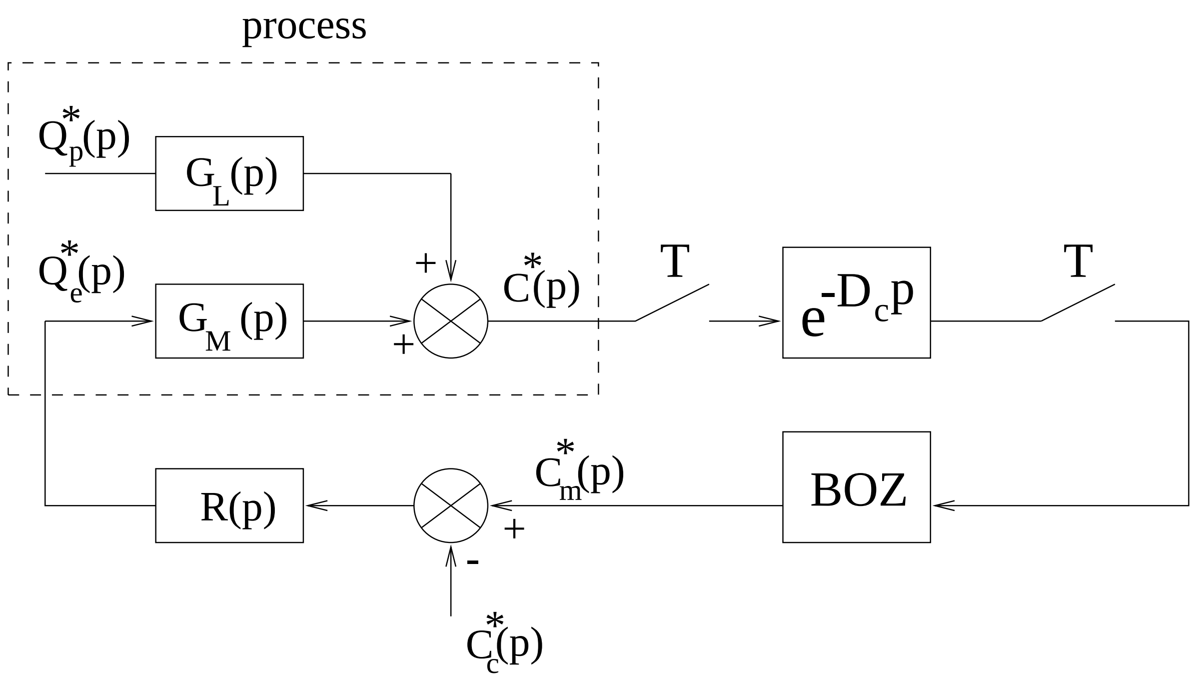

FIG. 21 –

10.1) Expliquer pourquoi le régulateur doit être nécessairement de sens direct ($\varepsilon =$ mesure - consigne), i.e. que le signal de sortie du régulateur doit évoluer dans le même sens que le signal de mesure.

10.2) Montrer que la transformée en z de la sortie C^* du process est égale à :

$$C^*(z) = \frac{\mathcal{Z}[G_L(p)\, Q_p^*(p)] - \mathcal{Z}[G_M(p)\, R(p)\, C_c^*(p)]}{1 - z^{-k}\mathcal{Z}[G_M(p)\, R(p)\, B_0(p)]}$$

Pour simplifier les calculs, on prendra $K_p = K_1 = K_2$.

On utilise un correcteur proportionnel de gain K_c ($R(p) = K_c$).

On cherche la réponse du système bouclé à une perturbation du type échelon :

$$Q_p^*(p) = \frac{1}{p}$$

alors que la consigne est maintenue constante ($C_c^*(p) = 0$).

10.3) Calculer $C^*(z)$ (on posera $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$).

10.4) Application numérique :

$$K_p = 1 \quad , \quad \tau = 1\,s \quad , \quad k = 1 \quad , \quad K_c = 1 \quad , \quad T = 0,2\,s$$

10.5) Calculer la composition en sortie du process aux instants $0, T, 2T, \cdots, 5T$.
(On pourra utiliser le fait que $C^*(z)$ présente un pôle $z = 1$).
Calculer la composition $C^*(t = +\infty)$ qui correspond au nouveau régime permanent établi.

Exercice 11 :

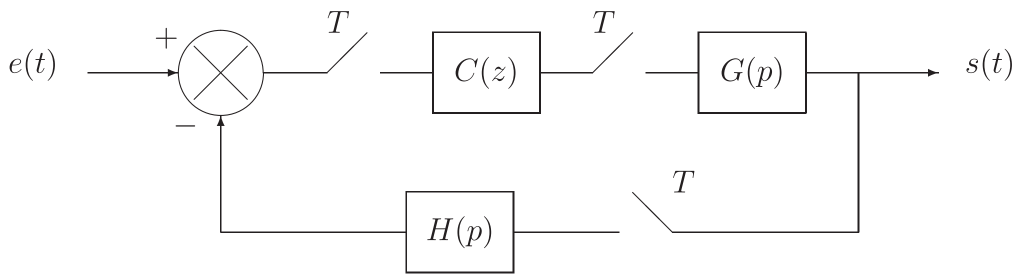

Fig. 22 – Un système bouclé échantillonné

L'entrée du système de la figure 22 est un signal continu $e(t)$. Sa sortie est aussi un signal continu $s(t)$. On met en œuvre un correcteur numérique de fonction de transfert $C(z)$.

11.1) Calculer $S(z)$, la transformée en z du signal échantillonné $s(kT)$ correspondant à la sortie $s(t)$ aux instants d'échantillonnage. Détailler les calculs au maximum.

11.2) Peut-on définir une fonction de transfert échantillonnée $\dfrac{S(z)}{E(z)}$?