BE6: Correction

Exercice 1

1. Fonction de transfert

$$m\left(\ddot{x} - x\dot{\phi}^2\right) = mg\sin\phi + F$$
$$m\ddot{x} - mx\dot{\phi}^2 = mg\sin\phi + F$$

en prenant la transformée de Laplace:

$$\frac{7}{5}p^2X(p) - X(p)\dot{\phi}^2 = g\sin\phi$$

L'hypothèse des petits angles permet de supposer que $\dot{\phi}^2 \to 0$ et que $\sin\phi \to \phi$ pour finalement aboutir à

$$\frac{X(p)}{\phi(p)} = \frac{5g}{7}\frac{1}{p^2} = \frac{7}{p^2}$$

2. Performances: le polynôme caractéristique en boucle ouverte est

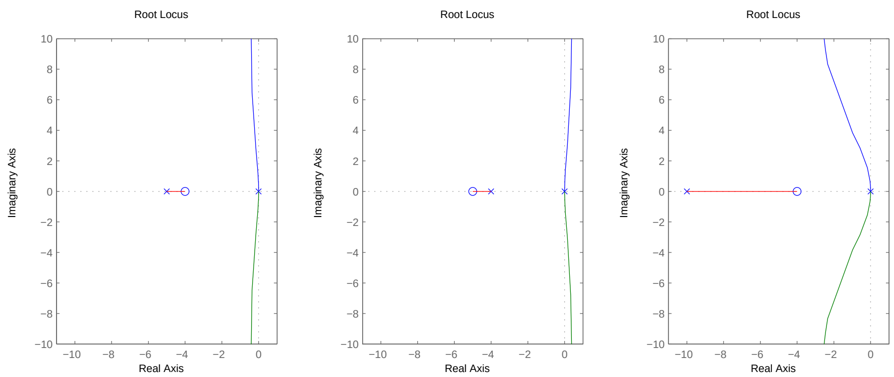
$$\varphi(p) = p^2 + \varepsilon p$$

et donc en boucle fermée

$$\psi(p) = p^2 + \varepsilon p + 7K$$

qui est donc stable $\forall \varepsilon \in [0 \cdots 1]$. Le temps de réponse est constant ($t_{95} = {}^{6}/_{\varepsilon}$) et l'amortissement diminue quand le gain augmente.

3. Choix d'un régulateur: on trace les 3 lieux d'Evans:



Seule la dernière solution (R_3) convient: elle correspond à une correction par avance de phase.

4. Commande à retour d'état: en boucle fermée on désire une dynamique

$$\psi(p) = p^2 + 2p + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad K^T = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2-\varepsilon \end{array}\right]$$

on peut alors étudier tous las cas en fonction des valeurs de ε

$$\begin{array}{llcll}
\varepsilon = 0 & K^T = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array}\right] & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 0{,}5 & \psi(p) = p^2 + 2{,}5p + 4 \\
 & & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 1 & \psi(p) = p^2 + 3p + 4 \\
\varepsilon = 0{,}5 & K^T = \left[\begin{array}{cc} 4 & 1{,}5 \end{array}\right] & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 0 & \psi(p) = p^2 + 1{,}5p + 4 \\
 & & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 1 & \psi(p) = p^2 + 2{,}5p + 4 \\
\varepsilon = 1 & K^T = \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array}\right] & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 0 & \psi(p) = p^2 + p + 4 \\
 & & \Longrightarrow & si\ \varepsilon = 0{,}5 & \psi(p) = p^2 + 1{,}5p + 4
\end{array}$$

Finalement, la solution médiane $\varepsilon = 0{,}5$ est la moins sensible à des variations de ε

5. Choix d'un régulateur: on calcule les pôles en boucle fermée pour chacun des 3 régulateurs:
   R_2 donne 2 modes réels-1; $-19{,}5$ et un mode complexe $\xi = 0{,}95$; $\omega_n = 0{,}23 rd/s$: beaucoup trop lent
   R_1 donne un mode réel en -8 et un mode complexe $\xi = 0{,}39$; $\omega_n = 2{,}8 rd/s$: convenable
   R_3 donne un mode réel en -4 et un mode complexe $\xi = 0{,}12$; $\omega_n = 4{,}2 rd/s$: trop oscillant
   R_2 a été calculé par un observateur identité, les deux autres par des observateurs minimaux.

Exercice 2

Calcul de la fonction de transfert:

$$\left\{\begin{array}{c} \tau p \gamma = \alpha \\ pH = V\gamma \\ p^2\theta = mU - \gamma \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \tau p \gamma \\ \alpha = \frac{\tau p^2}{V} H \\ p^2\theta = p^2\left(\alpha + \gamma\right) = mU - \frac{\tau p^2}{V} H \end{array}\right.$$

et donc

$$\frac{H(p)}{U(p)} = \frac{mV}{\tau p^4 + p^3 + \tau p^2}$$

- groupe 1: commande en boucle ouverte mènera à l'instabilité en pratique (2 pôles en *0*)
- groupe 2: commande à retour partiel de l'état

  $$u = h_d - k_1 h - k_2\alpha - k_2\gamma = h_d - k_1 h - k_2\frac{\tau}{V}\ddot{h} - k_2\frac{1}{V}\dot{h}$$

  d'où un polynôme caractéristique en boucle fermée

  $$\psi(p) = \tau p^4 + p^3 + (\tau + mk_2\tau)p^2 + mk_2 p + mk_1 V$$

  On peut analyser la stabilité par le critère de Routh-Hurwitz

  $$\begin{array}{ccc} \tau & \tau + mk_2\tau & mk_1V \\ 1 & mk_2 & 0 \\ \tau & mk_1V & 0 \\ \frac{m(k_2\tau - k_1V)}{\tau} & 0 & 0 \\ mk_1V & 0 & 0 \end{array}$$

  il faut donc remplir une double condition

  $$k_1 > 0 \qquad k_2 > \frac{k_1 V}{\tau}$$

- groupe 3: commande à retour de sortie. Le polôme caractéristique en boucle fermée devient

  $$\psi(p) = \tau p^4 + p^3 + \tau p^2 + mkV$$

  Le critère de Routh-Hurwitz donne

  $$\begin{array}{ccc} \tau & \tau & mkV \\ 1 & 0 & 0 \\ \tau & mkV & 0 \\ \frac{-mkV}{\tau} & 0 & 0 \\ mkV & 0 & 0 \end{array}$$

  qui est donc instable pour tout k