Corrigé BE5

Exercice 1

1. Observation de T et w par mesure de h. Une modélisation possible est :

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= -0,5T + u \\
\dot{v} &= -0,1v + 0,2T + 0,1w \\
\dot{h} &= v \\
\dot{w} &= 0 \qquad (w\ constante)
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{v} \\ \dot{h} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ v \\ h \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ v \\ h \\ w \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

on peut déterminer l'observabilité de ce système :

$$rang\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}\right) = 4$$

le système est observable donc la mesure de la sortie (h) permet de remonter aux 4 états, donc à w et T.

2. Fonctions de transfert : on considère w comme une entrée, donc l'équation d'état devient :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{v} \\ \dot{h} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ v \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ v \\ h \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

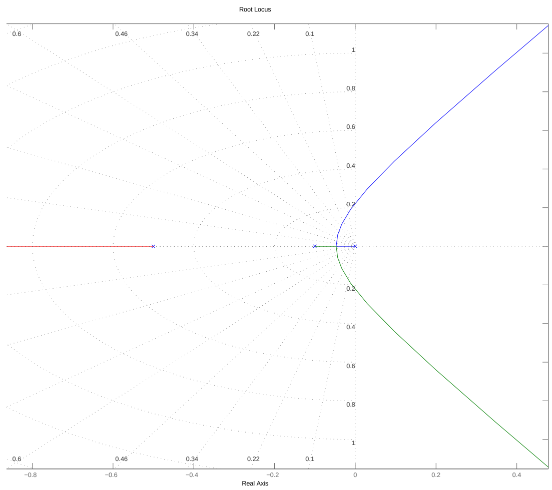
On utilise le théorème de superposition pour aboutir à :

$$\frac{H(p)}{U(p)} = \frac{0,2}{p\,(p+0,1)\,(p+0,5)} \qquad \frac{H(p)}{W(p)} = \frac{0,1}{p\,(p+0,1)}$$

$\frac{H(p)}{U(p)}$ contient les 3 modes donc le système est gouvernable par rapport à u.
$\frac{H(p)}{W(p)}$ ne contient que 2 des 3 modes donc le système est n'est pas gouvernable par rapport à w

3. Stabilisation par un gain variable K : on trace le lieu des racines de l'équation caractéristique $1 + K\frac{0,2}{p(p+0,1)(p+0,5)} = 0$: Existence d'un gain limite (systématique quand 3 asymptotes). Performances mauvaises : dynamique peu amortie et lente

4. Commande à retour d'état $u = e - k^T x$
En boucle ouverte, $\varphi(p) = p^3 + 0,6p^2 + 0,05p$ En boucle fermée, on désire une dynamique $p^2 + 1,4p + 1$.



On rajoute un troisième pôle rapide (-2) pour aboutir à $\psi(p) = p^3 + 3,4p^2 + 3,8p + 2$
On en déduit (calcul immédiat dans la base compagne $\tilde{x}$)

$$\tilde{k}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3,75 & 2,8 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage (pas obligé de calculer...) :

$$M = \begin{bmatrix} (A^2 + 0,6A + 0,05\mathbb{I})B & (A + 0,6\mathbb{I})B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc le gain de retour d'état dans la base initiale

$$k^T = \tilde{k}^T M^{-1} = \begin{bmatrix} 2,8 & 17,35 & 10 \end{bmatrix}$$

Le retour d'état ne modifie pas le numérateur, donc

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{0,2}{\psi(p)} = \frac{0,2}{p^3 + 3,4p^2 + 3,8p + 2}$$

5. Observation d'état : On met en place un observateur identité dont il faut calculer la dynamique $A - GC$.

$$A - GC = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & -g_1 \\ 0,2 & -0,1 & -g_2 \\ 0 & 1 & -g_3 \end{bmatrix}$$

On calcule $\det(p\mathbb{I} - A + GC) = p^3 + (g_3 + 0,6)p^2 + (g_2 + 0,6g_3 + 0,05)p + 0,2g_1 + 0,5g_2 + 0,05g_3$
On voit qu'il est possible de régler indépendamment tous les coefficients de ce polynome, donc de fixer la dynamique de l'observateur.

Exercice 2

1. Résolution de Riccati $PA + A^TP - \frac{PBB^TP}{r} + Q = 0$ avec

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r = 1$$

On aboutit à 3 équations :

$$\frac{p_2^2}{m^2} = 1 \qquad p_1 = \frac{p_2 p_3}{m^2} \qquad 2p_2 = \frac{p_3^2}{m^2}$$

qui conduit à la solution définie positive :

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2m} & m \\ m & m\sqrt{2m} \end{bmatrix}$$

et donc au gain $K^T = B^T P = [1 \quad \sqrt{2m}]$. Application numérique : $K^T = [1 \quad 4]$

2. Déplacement du satellite : En boucle ouverte, on résoud l'équation différentielle $\ddot{y} = 0$ avec conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 10m/s$, ce qui donne $y(5) = 50m$.
   En boucle fermée, l'équation différentielle devient $8\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$ de solution $y(t) = 40e^{-0,25t}\sin(0,25t)$ qui donne $y(5) = 10,8m$.
   Remarque : On peut aussi utiliser la solution de l'équation d'état : $x(t) = e^{At}x(0)$ en boucle ouverte et $x(t) = e^{(A-BK^T)t}x(0)$ en boucle fermée