Corrigé BE4

Analyse

1. Equation d'état :

$$x_1 = \phi \qquad x_2 = \phi \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_1 + u \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{array} \right.$$

   et donc la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 - \frac{g}{l}}$

2. Stabilité : L'équation caractéristique $\varphi(p) = p^2 - \frac{g}{l}$ admet 2 racines $p = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ donc le système est instable. Il est gouvernable et observable

3. Retour statique de sortie

$$u = -k_1 y = -\begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} x = -k^T x$$

   L'équation caractéristique en boucle fermée

$$\psi(p) = p^2 - \frac{g + k_1}{l} \qquad \Rightarrow \qquad p = \pm\sqrt{\frac{g + k_1}{l}}$$

   sera toujours instable quelque soit le gain (facile à interpréter physiquement...)

Commande

1. Placement de pôles

$$\left. \begin{array}{l} \psi(p) = p^2 + 2p + 1 \\[2ex] \varphi(p) = p^2 - \frac{g}{l} = p^2 - 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \widetilde{K} = K = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

2. Commande LQ : Equation de Riccati

$$A^T P + PA - \frac{PBB^T P}{r} + Q = 0$$

   avec

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2p_2 - \frac{p_2^2}{r} + q_1 = 0 \\ p_3 + p_1 - \frac{p_2 p_3}{r} = 0 \\ 2p_2 - \frac{p_3^2}{r} + q_2 = 0 \end{array} \right.$$

   avec

$$q_1 = q_2 = r = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{cr} 2p_2 - p_2^2 + 1 = 0 & (1) \\ p_3 + p_1 - p_2 p_3 = 0 & (2) \\ 2p_2 - p_3^2 + 1 = 0 & (3) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lllll} (1) & \rightarrow & p_2 = 1 \pm \sqrt{2} & \rightarrow & p_2 = 1+\sqrt{2} \\ (3) & \rightarrow & p_3 = 1+\sqrt{2} & & \\ (2) & \rightarrow & p_1 = 2+\sqrt{2} & & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad P = \left[\begin{array}{cc} 2+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Le gain de retour d'état :

$$K = \frac{B^T P}{r} = \left[\begin{array}{c} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{array} \right]$$

La matrice dynamique en BF devient

$$A_{BF} = A - BK^T = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{array} \right] \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(p) = p^2 + (1+\sqrt{2})p + \sqrt{2}$$

Les racines sont $p = -1$ et $p = -\sqrt{2}$ donc le système est bien stable en BF.
Les gains de retour d'état calculés avec les 3 autres solutions P de l'équation de Riccati conduisent toujours à une **solution instable**.

Etude aux limites sur r

$$K^T = \frac{B^T P}{r} = \frac{1}{r} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{array} \right] = \frac{1}{r} \left[\begin{array}{cc} p_2 & p_3 \end{array} \right]$$

on va donc déterminer p_2 etp_3 en fonction de r. On a :

$$2p_2 - \frac{p_2^2}{r} + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad p_2 = r + \sqrt{r(r+1)}$$

Si $r \rightarrow 0$ alors $p_2 \rightarrow \sqrt{r}$. La troisième équation du système de départ $2p_2 - \frac{p_3^2}{r} + 1 = 0$ donne $p_3^2 = r(1+2p_2)$ donc $p_3^2 = r(1+2r+2\sqrt{r(r+1)})$.
Le passage à la limite donne $p_3 \rightarrow \sqrt{r}$

$$\Longrightarrow \qquad K^T \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{r}}{r} & \frac{\sqrt{r}}{r} \end{array} \right]$$

Si $r \rightarrow \infty$ alors $p_2 \rightarrow 2r$ et donc $p_3 \rightarrow 2r$

$$\Longrightarrow \qquad K^T \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \right]$$

Etude de la dynamique

$$r \rightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(p) \rightarrow p^2 + \frac{\sqrt{r}}{r} p + \frac{\sqrt{r}}{r} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} p^{'} \rightarrow -\frac{\sqrt{r}}{r} \\ p^{''} \rightarrow -1 \end{array} \right.$$

Le pôle stable n'est pas modifié. Le pôle instable part à l'infini dans le demi plan gauche (prévisible dans la mesure ou l'énergie n'est pas limitée dans le critère quadratique). Par contre, les gains sont très importants (en module), ce qui peut entrainer une grande sensibilité aux bruits de mesures, etc.

$$r \rightarrow \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(p) \rightarrow p^2 + 2p + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} p^{'} \rightarrow -1 \\ p^{''} \rightarrow -1 \end{array} \right.$$

La contraine très fortes sur le signal de commande conduit à une stabilisation à moindre effort, ce qui se traduit concrètement par une conservation des pôles stables et par une symétrisation des pôles instables par rapport à l'axe imaginaire.

Observation de l'état :

1. Observateur identité

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + G(y - C\widehat{x}) = (A - GC)\widehat{x} + Bu + Gy$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \qquad A - GC = \begin{bmatrix} -g_1 & 1 \\ 1 - g_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(p\mathbb{I} - A + GC) = (p + g_1)p + g_2 - 1 = p^2 + 5p + 25$$

$$\begin{cases} g_1 = 5 \\ g_2 = 26 \end{cases}$$

$$\dot{\widehat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\widehat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}(y - \widehat{x}_1)$$

2. Fonction de transfert

$$\dot{\widehat{x}} = (A - GC)\widehat{x} + Bu + Gy \qquad avec \qquad u = -K^T\widehat{x}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \dot{\widehat{x}} = (A - GC - BK^T)\widehat{x} + Gy \\ &\rightarrow \quad X(p) = \left(p\mathbb{I} - A + GC + BK^T\right)^{-1} GY(p) \\ &\rightarrow \quad U(p) = -K^T\left(p\mathbb{I} - A + GC + BK^T\right)^{-1} GY(p) \end{aligned}$$

L'application numérique donne

$$\frac{U(p)}{Y(p)} = -62\frac{p + 1}{p^2 + 7p + 37} = R(p)$$

Interprétation On retrouve un effet avance de phase, stabilisant. Le zéro du régulateur est placé en -1 : logique car le retour d'état impose ce zéro. Si l'on trace le lieu des racines du système corrigé avec $R(p)$, on obtient