BE3: Correction

Exercice 1

1. Calcul des valeurs propres:
$$\varphi(p) = \det(p\mathbb{I} - A) = p^3 - 3p^2 - 10p = p\,(p+2)\,(p+5)$$
donne 3 valeurs propres 0; -2; +5
2. Evaluation de la gouvernabilité donc
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 36 \\ 2 & 7 & 40 \\ 1 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$
$$rank\,(\mathcal{C}) = 3$$
donc système gouvernable.
3. Calcul de la commande à retour d'état dans la base compagne de commande
$$\left.\begin{array}{l} \psi(p) = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\ \varphi(p) = p^3 - 3p^2 - 10p \end{array}\right. \Rightarrow \quad \widetilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}^T$$
Retour en base initiale: $K = \widetilde{K}M^{-1}$avec M matrice de passage en base compagne de commande $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$
$$m_3 = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$m_2 = (A - 3\mathbb{I})\,B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$m_1 = \left(A^2 - 3A - 10\mathbb{I}\right)B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & -6 & 11 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 12 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$
Finalement, la loi de commande s'écrit $\boxed{u = e - 2x_1 - x_2 - 2x_3 = e - \widetilde{x}_1 - 13\widetilde{x}_2 - 6\widetilde{x}_3}$
4. Etude de la robustesse vis à vis de K
On prend par exemple $K = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, soit une variation de 10% sur un des trois gains. On a alors
$$\det(p\mathbb{I} - A + BK) = p^3 + 3{,}2p^2 + 4{,}2p + 0{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad p_i = -0{,}22;\ -1{,}5 \pm \jmath 1{,}14$$
donc un pôle dominant 5 fois plus lent!
Avec $K = \begin{bmatrix} 1{,}8 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$
$$\det(p\mathbb{I} - A + BK) = p^3 + 2{,}8p^2 + 1{,}8p + 1{,}2 \qquad \Rightarrow \qquad p_i = -2{,}23;\ -0{,}28 \pm \jmath 0{,}67$$
qui donne un mode dominant très oscillant. Ce réglage présente donc une grande sensibilité par rapport aux valeurs du gain de retour (les spécifications de performances en BF sont trop diffférentes de celles du système non corrigé)

Exercice 2

1. Equation d'état

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{array}\right.$$

2. Calcul du retour d'état

$$\psi(p) = \left(p^2 + p + 1\right)(p + \alpha)$$

avec αqui ne doit pas perturber la dynamique dominante: on prend $\alpha = 3$ par exemple.

$$\begin{array}{l} \psi(p) = p^3 + 4p^2 + 4p + 3 \\ \\ \varphi(p) = p^3 - p^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{K} = K = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$$

3. Calcul du retour de sortie

$$x_1 = y \qquad x2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y}$$

$$u = e - k_0 y - k_1 \dot{y} - k_2 \ddot{y} \qquad avec\, K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$$

$$U(p) = E(p) - \left(k_0 + k_1 p + k_2 p^2\right) Y(p) = E(p) - 5\left(p^2 + 0{,}8p + 0{,}6\right) Y(p)$$

La fonction de transfert en boucle fermée devient alors

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{\frac{1}{p^2(p-1)}}{1 + \frac{5p^2+4p+3}{p^2(p-1)}} = \frac{1}{p^2\,(p-1) + 5p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{\psi(p)}$$

4. Cas où x_3 non mesurable

$$u = e - \begin{bmatrix} k_0^{'} & k_1^{'} & 0 \end{bmatrix}^T x$$

ce qui donne en boucle fermée $A_{BF} = A - B \begin{bmatrix} k_0^{'} & k_1^{'} & 0 \end{bmatrix}^T$, d'où un polynôme caractéristique

$$\det\left(p\mathbb{I} - A_{BF}\right) = p^3 - p^2 + k_1^{'} p + k_0^{'}$$

les coefficients de p^3 et p^2sont de signes opposés, donc il y a au moins une racine positive: le système est instable $\forall k_0^{'}$ et $\forall k_1^{'}$

Exercice 3

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + 5p + 6} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{array}\right.$$

Le polynôme caractéristique en BF $\psi(p) = p^2 + 2p + 1$ donne un gain de retour d'état $K^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \end{bmatrix}$et donc un régulateur $\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = -5 - 3p$. La fonction de transfert en boucle fermée devient

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{-5 - 3p}{p^2 + 2p + 1}$$

Le régulateur PD impose un zéro en BF et un gain statique différent de 1. Ce zéro est *ajouté* car le régulateur est placé dans la boucle directe.
Avec le régulateur PID, on obtient la FTBF

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k_2 p^2 + k_1 p + k_3}{p^3 + (k_2 + 5)p^2 + (k_1 + 6)p + k_3}$$

- k_1, k_2 et k_3 permettent de modifier tous les coefficients de l'équation caractéristique de manière indépendante, donc de fixer la dynamique
- la dynamique finale est d'ordre $n + 1$
- on rajoute 2 zéros (influence sur la réponse trnasitoire)
- le gain statique est bien unitaire
- *on peut faire un parrallèle avec la correction à retour d'état...*