Stabilité et Répétabilité

Les circuits analogiques sont affectés par :

- Température
- Age

Tolérance des composants :

2 systèmes analogiques :

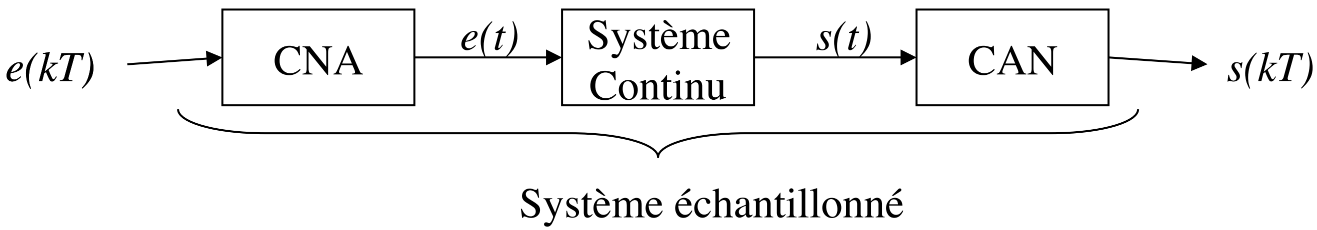
utilisant le même design

les même composantes

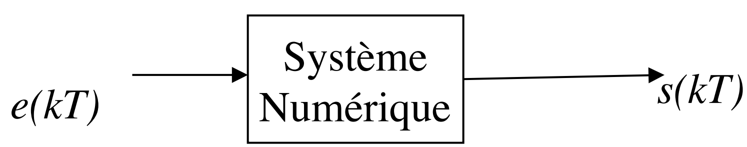
on obtient des différents performances

Les systèmes à temps discret : SLI Numériques, SLI Echantillonnés

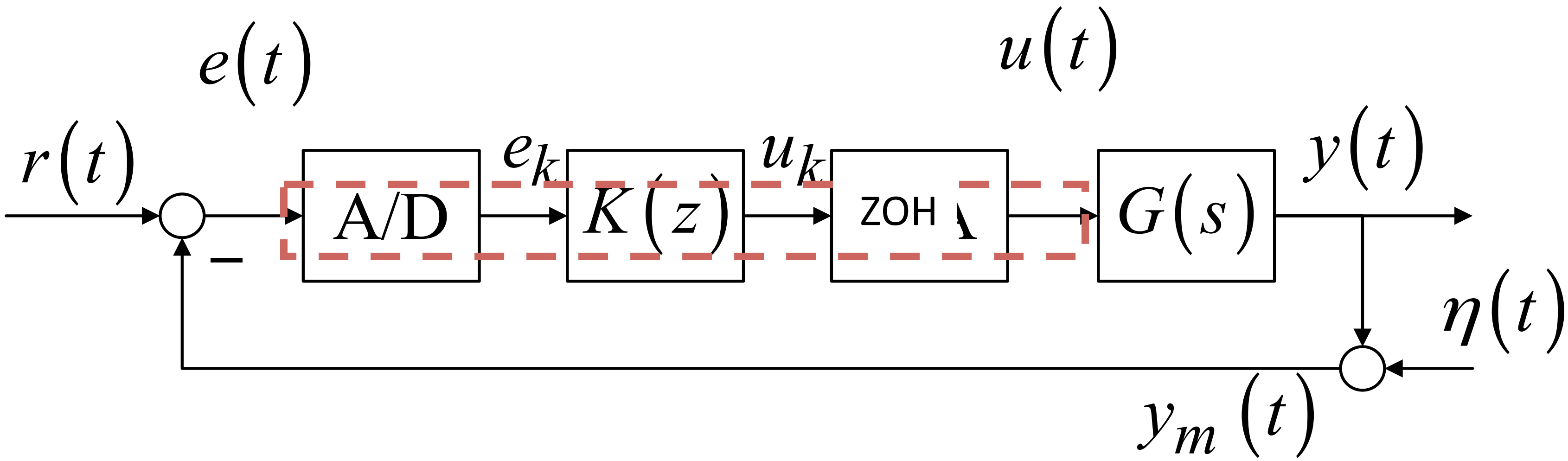
Les systèmes échantillonnés qui sont des systèmes physique donc des systèmes à temps continu mais dont la variable d'entrée *e(t)* est générée par une suite d'échantillons *e(kT)* issu d'un processeur, et dont on ne prélève que des échantillons de sortie *s(kT)* à partir de *s(t)* aux même instants *kT*.

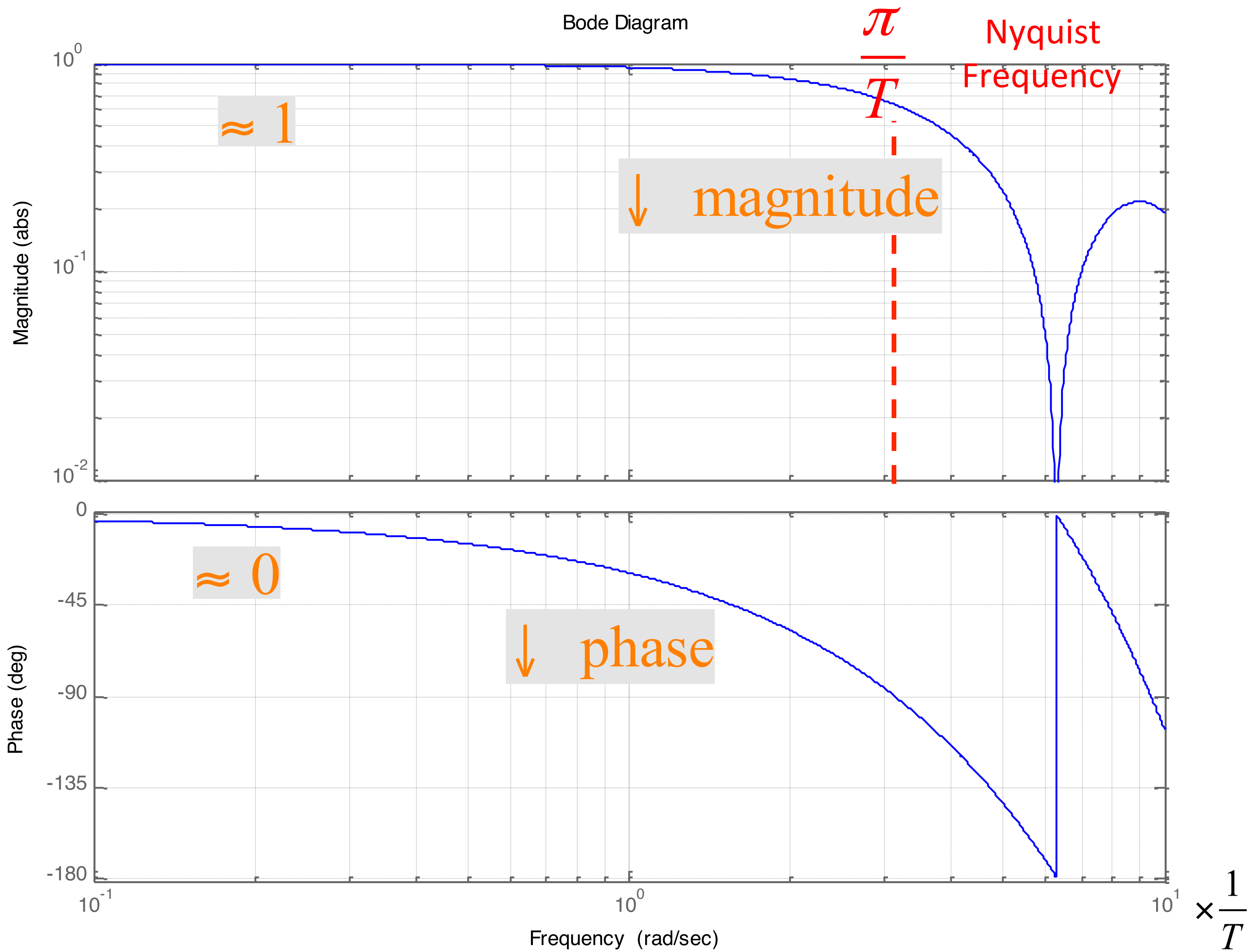


Les systèmes numériques ou purement discret transforment une suite d'échantillons d'entrée *e(kT)* en une suite d'échantillons *s(kT)*, par exemple : processeur effectuant un algorithme de filtrage numérique



➢ L’Effet de l’échantillonnage pour le Control

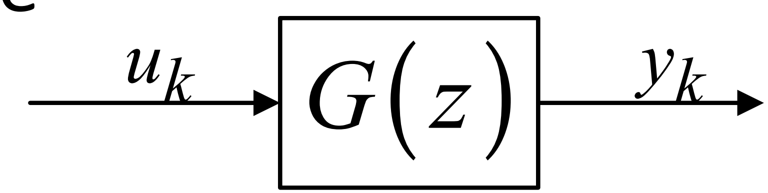




Bode Diagram
$\frac{\pi}{T}$
Nyquist Frequency
≈ 1
$\downarrow$ magnitude
≈ 0
$\downarrow$ phase
Magnitude (abs)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^{-1}
10^0
10^1
$\times \frac{1}{T}$
Frequency (rad/sec)

Réponse à Temps-Discret

- Système



$$y(z) = G(z)u(z)$$

➢ Kronecker

$$u_k = \delta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad u(z) = 1$$

$$\Rightarrow y(z) = G(z)$$

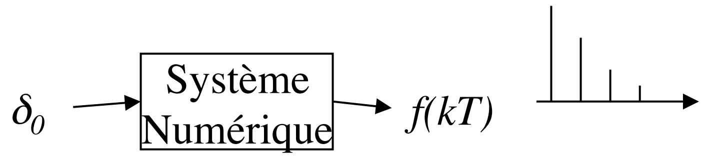
$$h(kT) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^{p_{ci} t} \Big|_{t=k} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^{p_{ci} kT}$$

$$= \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(e^{p_{ci} T} \right)^k \qquad y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \underline{p_{di}^k}$$

$$\Leftrightarrow \; p_{di} = e^{p_{ci} T}$$

$$\boxed{\underline{z} = e^{\underline{s}T}}$$

SLI Numériques



<u>Réponse impulsionnelle</u> : réponse forcée a une entrée δ_0, soit *f(kT) la RI*

Le système sera invariant, si il répond à δ_{iT} par *f(kT-iT)*

Le système sera linéaire, si pour l'excitation suivante

$$e = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(iT)\delta_{iT}$$

il répond par

$$s = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(iT) f(kT - iT)$$

<u>Réponse forcée</u> : *s(kT)=e(kT)*f(kT)*

Transmittance en Z :

$$TZ[RI] = TZ[f(kT)] = F(Z)$$

$$S(Z) = E(Z).F(Z) \Rightarrow F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)}$$

Réponse forcée

- Les RII (réponse impulsionnelle infinie) ou système récursifs obtenus par transposition analogique → numérique

- Les RIF (réponse impulsionnelle finie) obtenus par filtrage passe-bas. Il n'y a pas d'équivalents analogique.

$$\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{(i)}$$

Transposition analogique → numérique de l'équation différentielle :

Transposons en numérique la dérivation :

$$s(t) \to s(kT) = s_k$$

$$\dot{s}(t) \to \frac{s(kT) - s((k-1)T)}{T} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{s}(t) \to \frac{\frac{s_k - s_{k-1}}{T} - \frac{s_{k-1} - s_{k-2}}{T}}{T} = \frac{s_k - 2s_{k-1} + s_{k-2}}{T^2}$$

$$\vdots$$

$$s^{(i)}(t) \to \sum_{j=0}^{i} C_j s_{k-j}$$

En automatique on utilisera que les systèmes RII

Systèmes RII ou systèmes récursifs

$$\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i e^{(i)} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{k-i}$$

α_i et β_i sont des constantes dépendantes de a_i et b_i

C'est une équation aux différences d'ordre *n*.

Tout système RII peut être modélisé par cette équation

En analogique : Equation différentielle, et Fonction de Transfert en jω (ou p).

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . y(n-k) = \sum_{j=0}^{M} b_j . x(n-j)$$

Où :

- **les a_k et b_j des coefficients dépendant du type de filtre numérique réalisé;**
- ***x(n-j)* représente l'échantillon de l'entrée, *j* coups d'horloge précédent;**
- ***y(n-k)* représente l'échantillon de la sortie, *k* coups d'horloge précédent.**

$\underline{Exemple}$: $2.y(n)+0,2.y(n-1)=1,5.x(n)-0,48.x(n-1)+0,12.x(n-2)$

On distingue 2 types de filtre numérique :

Si N=0 : on parle de filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF ou FIR en anglais).

Si N≥1 : on parle de filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII ou IIR en anglais).

Représentation du filtre numérique par sa relation de récurrence :

<u>Exemple de filtre numérique RIF :</u>

$$y(n) = y(nTe) = 0,2.x(n) + 1,5.x(n-1) - 0,48.x(n-2) - 0,12.x(n-3)$$

<u>Exemple de filtre numérique RII :</u>

$$y(n) = 1,3.x(n) + 0,26.x(n-1) - 0,08.y(n-1) - 0,79.y(n-2)$$

Représentation du filtre numérique par sa Fonction de Transfert en z :

A l'image de la Transformée de Laplace en analogique de variable p, il existe aussi une transformée en numérique appelé Transformée en Z de variable z.

La transformée en Z n'étant pas au programme, on donnera la Fonction de Transfert en z à partir de la relation de récurrence.

La Fonction de Transfert d'un filtre numérique peut donc s'écrire par :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

En analogique

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

En numérique

Transmittance des systèmes RII

Prenons la transformée en Z des deux nombre en utilisant le théorème du retard :

$$TZ\left[s_{k-i}\right] = Z^{-i}.S(Z)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{k-i} \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^{n} \beta_i Z^{-i} S(Z) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i Z^{-i} E(Z)$$

$$\Rightarrow F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i Z^{-i}}$$

Rapport de Deux polynômes en Z

Pour trouver la RI il suffit de faire la *TZ^{-1}* de *F(Z)*

Pour faire la mise en œuvre (au niveau du processeur) d'un tel système il suffit de transformer **l'équation aux différences** en **équation de récurrence** en isolant **l'échantillon de sortie le plus récent**

Application aux système linéaires invariants

- La transformée en z du signal de sortie est donnée par :

$$Y^{+}(z) = \underbrace{\frac{A(z)}{B(z)}X(z)}_{\textbf{Permanent}} - \underbrace{\frac{I(z)}{B(z)}}_{\textbf{Transitoire}}$$

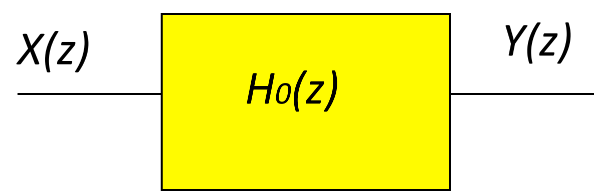
$$A(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k z^{-k}$$

$$I(z) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l \left[y(-l) + \ldots + y(-1) z^{-(l-1)}\right]$$

$$B(z) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l z^{-l}$$

Si on admet des conditions initiales toutes nulles

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$



L'expression de la *Tz* du signal de sortie, tenant compte de conditions initiales non-nulles

$$Y(z)=H_0(z)X(z)-I(z)/B(z)$$

Evaluation de la sortie d'un système *ARMA*

Un tel système est caractérisé par:

- ses K coefficients a_k et ses L coefficients b_l avec $b_0=1$

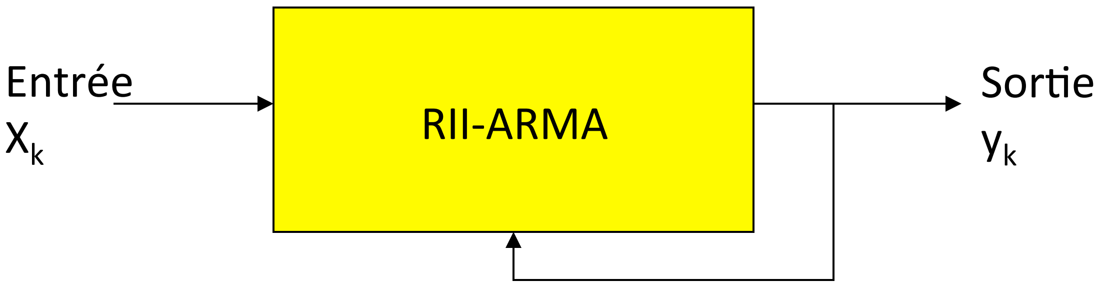
- la séquence d'entrée $\{x_n\}$

- la séquence de sortie $\{y_n\}$, y compris les conditions initiales, soit pour une séquence de N échantillons du signal de sortie:

$$n\in[-(L-1),N-1]$$

Filtres

- Filtres récursifs



- Filtres non-récursifs

Stabilité des Modèles ARMA

- La CNS pour qu'un système linéaire, de réponse impulsionnelle {h(n)} soit stable est que :

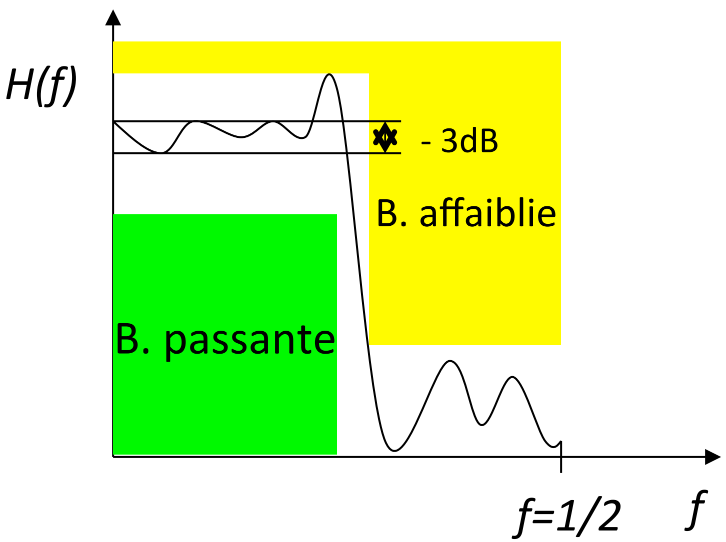
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty \; sommabilité$$

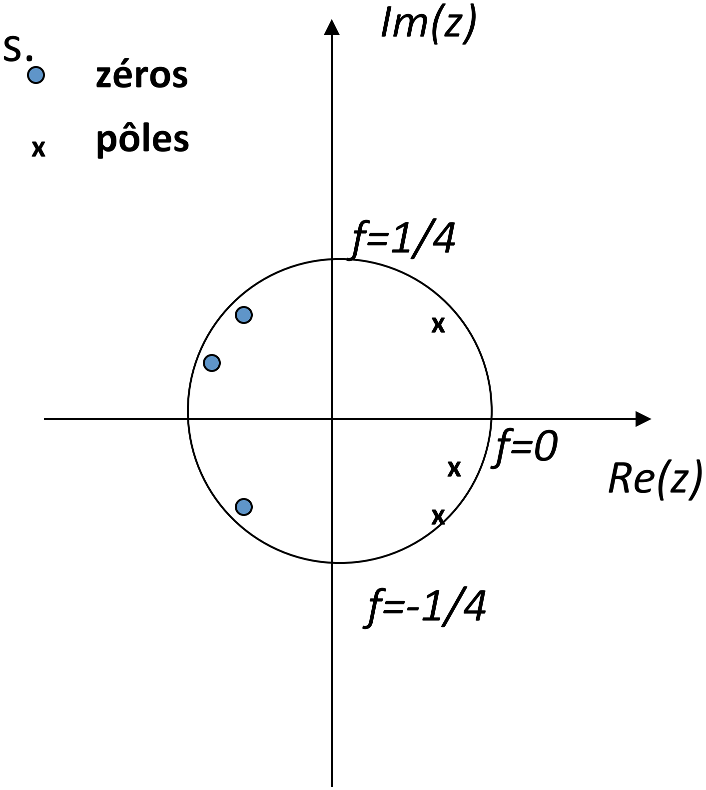
- La stabilité d' un système *AR* ou *ARMA* exige que les pôles de la fonction de transfert *H(z)* soient à l'intérieur du cercle unité du plan *{z}*

- La partie du plan complexes où se trouvent les zéros correspond à la bande affaiblie.

- Plus les zéros sont proches du cercle unité, plus l'atténuation est grande.

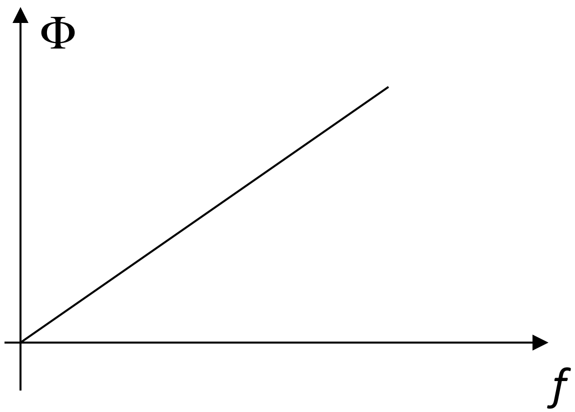
- Plus le nombre de zéros est grand, plus les ondulations dans la bande affaiblie pourront être rendues faibles.

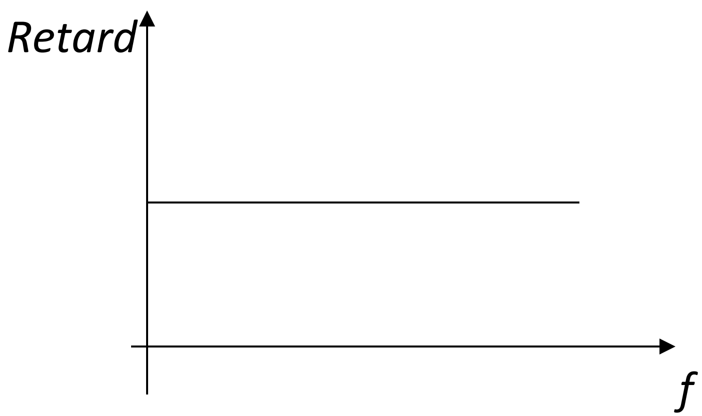




La phase

Phase linéaire





Représente le retard entre les différentes fréquences

Équation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i e_{k-i} \Leftrightarrow s_k = \frac{1}{\beta_0}\left[\sum_{i=0}^{m}\alpha_i e_{k-i} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i s_{k-i}\right]$$

A chaque instant ***kT*** on applique l'équation de récurrence.

Pour ***k=0*** on applique les propriétés du signal d'entrée qui est causal ce qui signifie que ***e_{-1} à e_{-m} =0.***

Les *n* valeurs s_{-1} à s_{-n} représentent les conditions initiales. Si le système est initialement au repos, alors on prend ***s_{-1} à s_{-n} =0.***

Exercice : On suppose le système de transmittance :

$$F(Z) = \frac{0.1}{Z - 0.9}$$

Déterminer l'équation de récurrence, le système est initialement au repos. Puis donner la réponse à l'échelon.

Causalité

Un système *F(Z)* est causal si sa réponse impulsionnelle (RI) est causal, donc si *F(Z)* sous sa forme polynomiale ne comporte pas de puissance positive de Z. En effet, puissance positive de Z $\Rightarrow$ avance dans le temps

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) Z^{-k}$$

Causalité $\Rightarrow$ degré(N) $\leq$ degré(D)

Stabilité

Un système numérique causal est stable, si les pôles de sa transmittance en *Z* sont tous en module inférieurs à 1

$$|Z_i| < 1$$

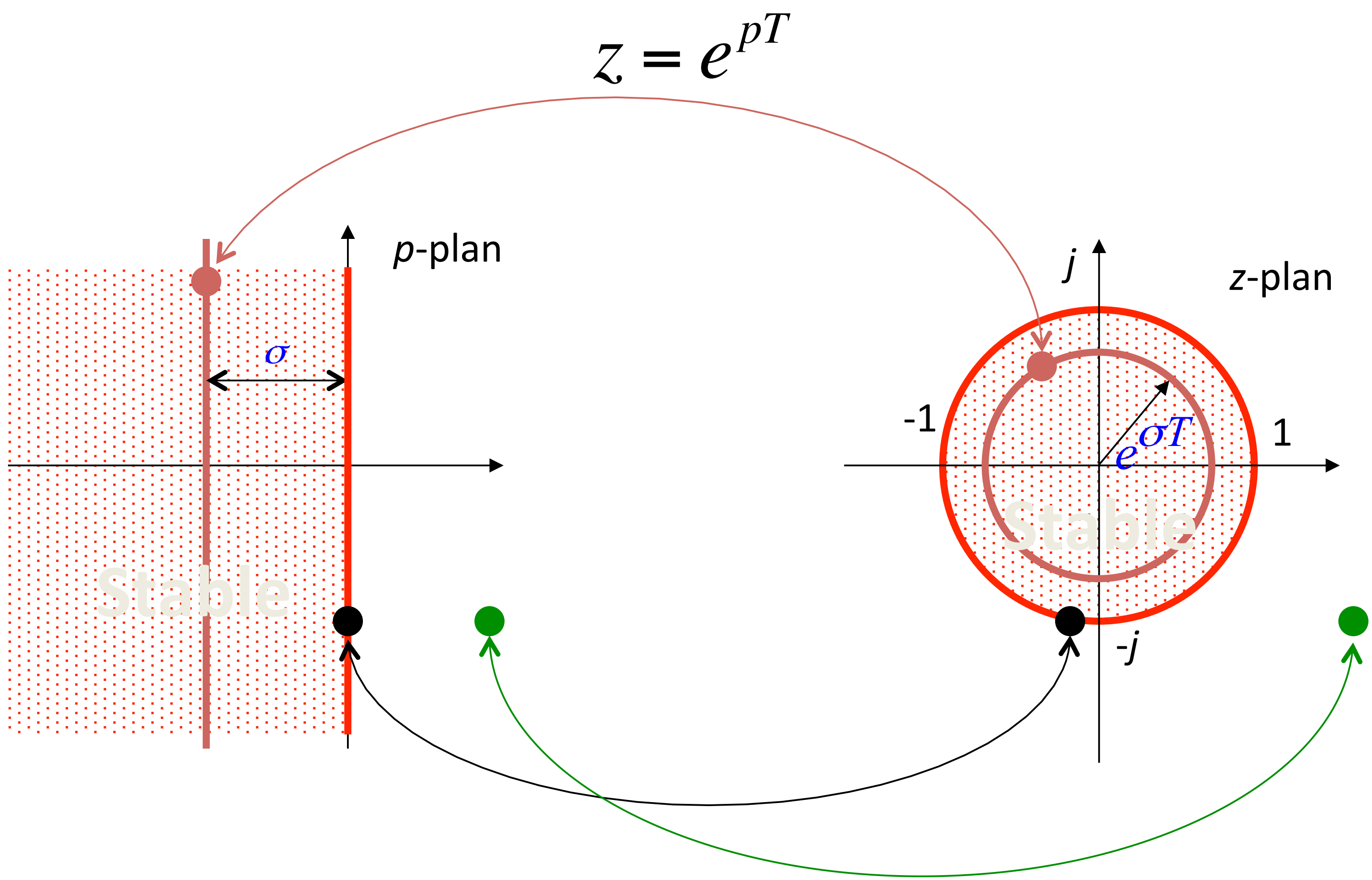
$F(Z)$ est la TL de la réponse impulsionnelle pour $Z=e^{pT}$,

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,z^{-k}$$

les pôles p_i de la transmittance doivent être à partie réelle <0, donc les pôles de $F(Z)$, devront être tels que , c' est-à-dire à l' intérieur du cercle unité.

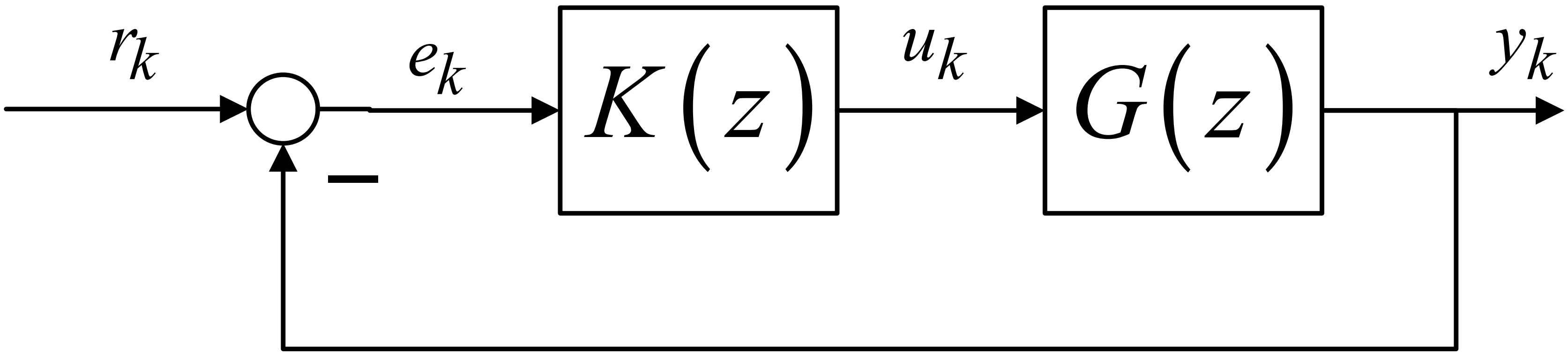
$$z_i = e^{p_i T} = e^{r_i T} e^{j\omega_i T}$$

$$\left|z_i\right| < 1$$



$z = e^{pT}$
p-plan
σ
Stable
j
z-plan
-1
1
$e^{\sigma T}$
Stable
-j

- Système Asservi Discret



$$L(z) = K(z)G(z)$$

$$T(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)}$$

Stable ⇔ pôles de
T à l' intérieur du cercle 1

Test de Stabilité

On peut utiliser le critère de Routh Hurwitz dans la mesure où l'on trouve un changement de variable qui fait correspondre au cercle unité en *Z*, un demi plan gauche en *W*, on utilise pour cela la transformée bilinéaire :

$$\boxed{W = \frac{Z-1}{Z+1} \text{ ou encore } Z = \frac{1+W}{1-W}}$$

En conclusion, on transforme *F(Z)* en *F(W)* et on applique le critère de Routh-Hurwitz au dénominateur de *F(W)* .

On peut transposer ce qui a été fait pour les systèmes analogique, aux système RII

La réponse forcée se sépare en une réponse transitoire et une permanente :

ANALYSE DES FILTRES RECURSIFS OU RII

Relation entre les Modèles à Temps Continu et à Temps Discret

Transformation de H(p) en H(z)

- Transposer la fonction de transfert H(p) de son homologue analogique du plan p dans le plan z par une règle reliant p à z

Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

$$y(t)=\frac{dx}{dt} \longrightarrow y_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{T_e}$$

$$Y(p)=pX(p) \Rightarrow H(p)=p$$

$$Y(z)=\frac{1}{T_e}\left[X(z)-X(z)z^{-1}\right]=\frac{1-z^{-1}}{T_e}X(z)$$

$$p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

$$\boxed{p \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}}$$

Connaissance précise de Te

Equivalence à la réponse impulsionnelle

Réponse du système à un Dirac $S(p) = F(p)L(\delta(t)) = F(p)$

Echantillonnage de s(t) qui est l'original de la fonction de transfert, calcule de la suite s_k
Sachant que la suite ek est connue, on peut calculer les transformée en z

$S(z) = \sum_{k=0} s_k z^{-k} \quad et \quad E(z) = 1$ Et on déduit $F(z) = \sum_{k=0} s_k z^{-k}$ Intérêt limité

Approche Modale $p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$ Basée sur la concordance des pôles entre les deux fonctions

Inconvénient : traiter que des pôles des fonctions. Il est nécessaire d'ajuster leurs numérateurs

Réponse permanente en régime harmonique

$$Soit\ \mathrm{e}(\mathrm{kT}) = \sin(\omega kT)$$

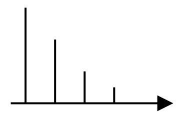
$$s_p(\mathrm{kT}) = \left|F(\omega)\right|\sin\left(\omega kT + \angle F(\omega)\right) \quad \text{avec } F(\omega) = F\left(z = e^{j\omega T}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
s(kT) &= TZ^{-1}\left[F(z)E(z)\right] = s_t(kT) + s_p(kT)\\
s_t(kT) &= \sum_{\text{pôles de } F(Z)} \text{résidus de} F(z)E(z)z^{k-1} \quad \text{si k} \geq 1\\
&= \sum_{\text{pôles de } \frac{F(Z)}{\mathrm{Z}}} \text{résidus de} \frac{F(z)}{\mathrm{z}}E(z) \quad \text{si k} = 0\\
s_p(kT) &= \sum_{\text{pôles de } E(Z)} \text{résidus de} F(z)E(z)z^{k-1}
\end{aligned}}$$

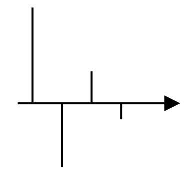
Allure de la réponse transitoire en fonction de la position des pôle de *F(Z)*

- Pôle réel $Z_i = r$

Si $0 < r < 1$



Si $-1 < r < 0$



$$s_t(\mathrm{kT}) = \left[(z-r)\mathrm{FE}\right]_{z=r} r^{k-1} = C^{te}.r^{k-1}$$

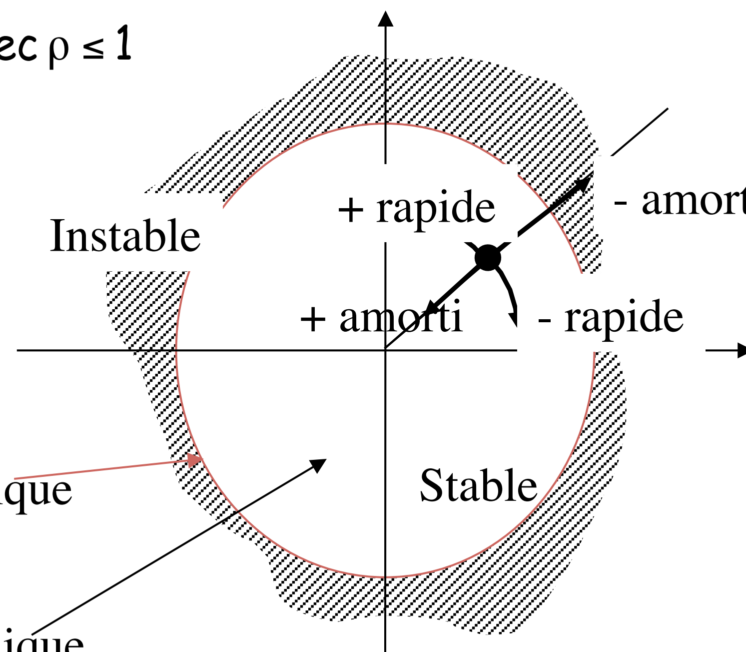
$$Z = p_{\pm} = \rho e^{\pm j\theta} \quad \text{avec } \rho \leq 1$$

- Pôle couple imaginaire conjugué

$$s_t(\mathrm{kT}) = \left[(Z-p_+)\mathrm{FE}\right]_{Z=p_+} \rho^{k-1} e^{j(k-1)\theta} +$$

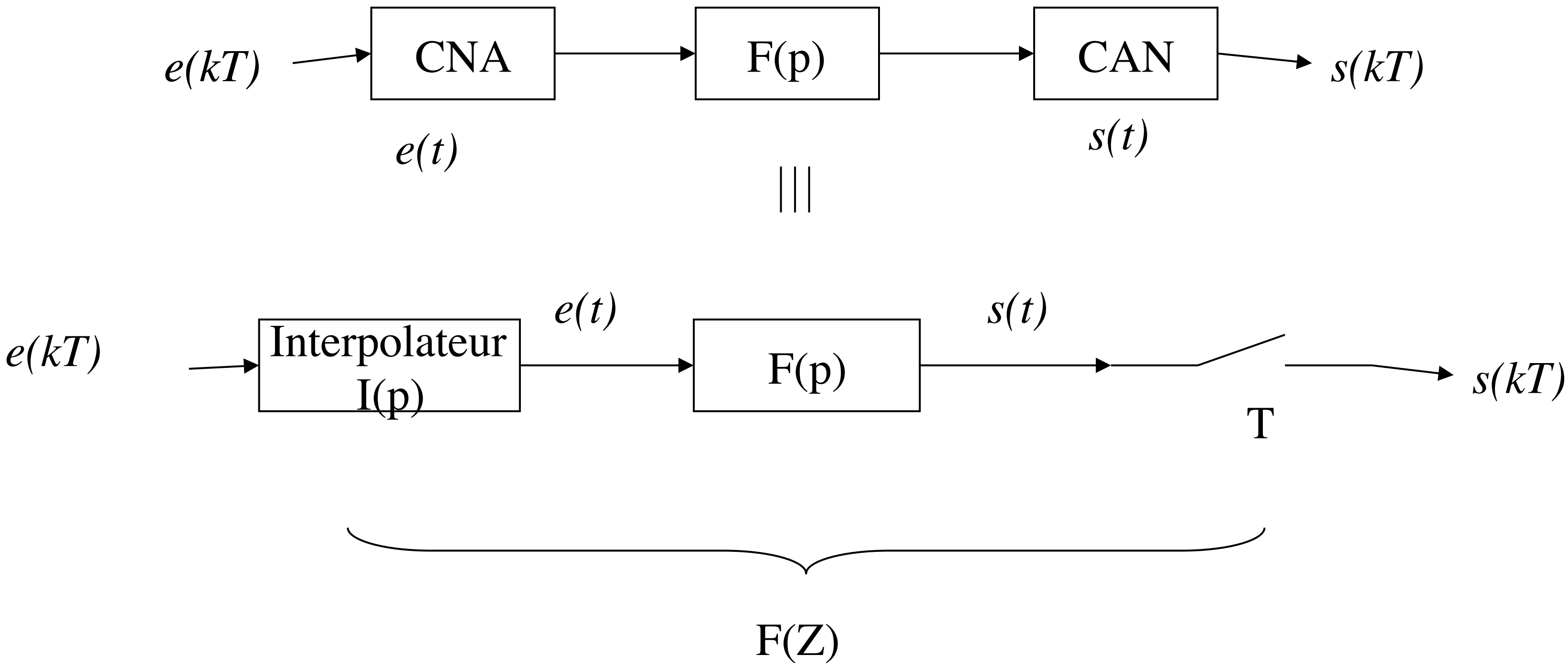
$$+\left[(Z-p_-)\mathrm{FE}\right]_{Z=p_-} \rho^{k-1} e^{-j(k-1)\theta}$$

$$= 2C^{te}.\cos\left[(k-1)\theta + \phi\right]$$

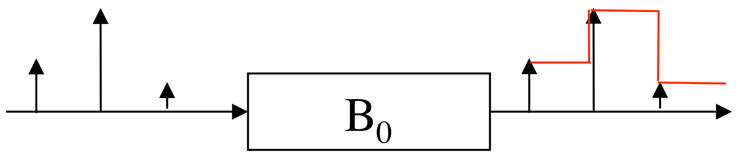


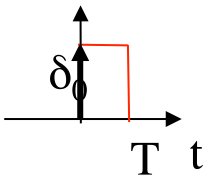
Systèmes échantillonné

Soit un système analogique de transmittance *F(p)*
dont l'entrée est fournie par un convertisseur numérique analogique CNA :



Le signal *e(t)* est un signal quantifié résultant d'une interpolation. L'interpolateur est, sauf cas exceptionnel, un bloqueur d'ordre zéro





Réponse impulsionnelle du B_0

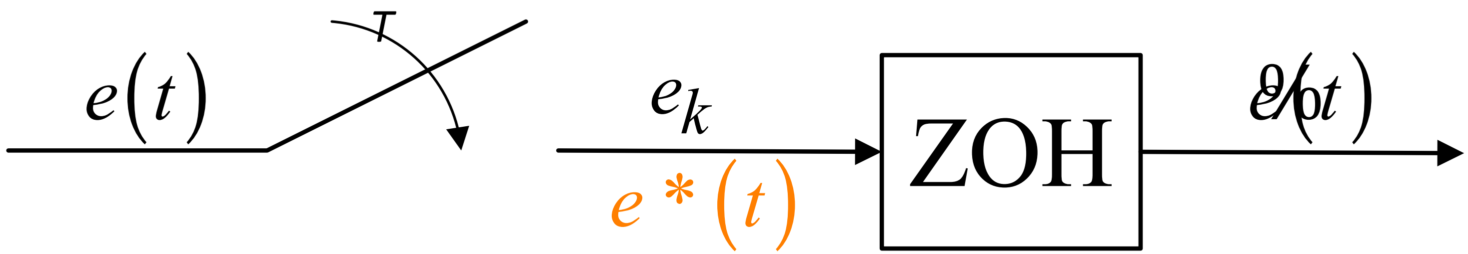
$$b_0(t) = h(t) - h(t - T) \xrightarrow{TL} \boxed{B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}}$$

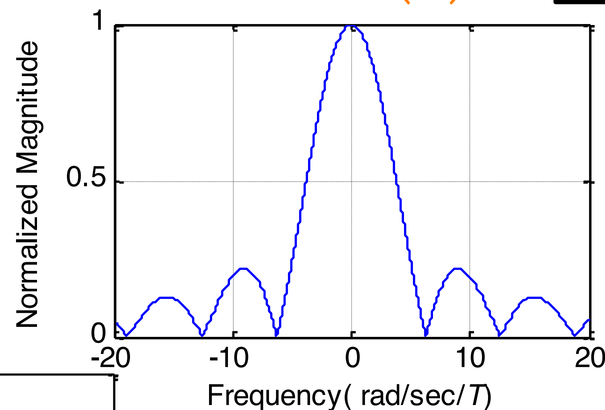
On peut aussi écrire :

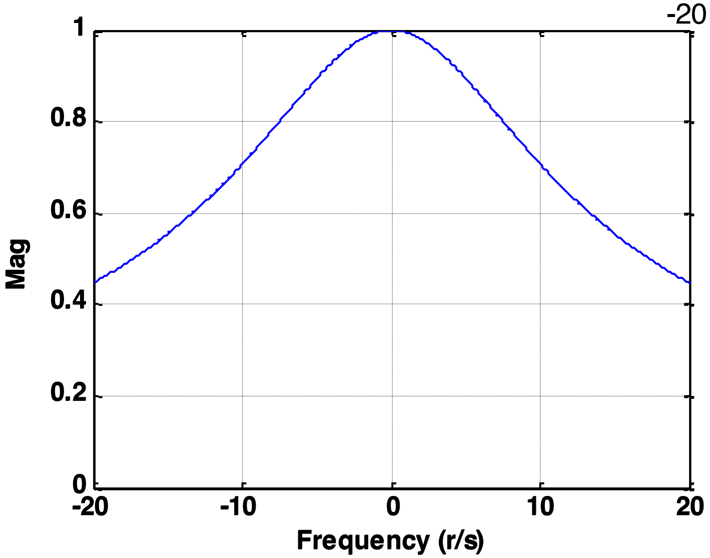
$$\boxed{G(z) = (1 - z) Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}}$$

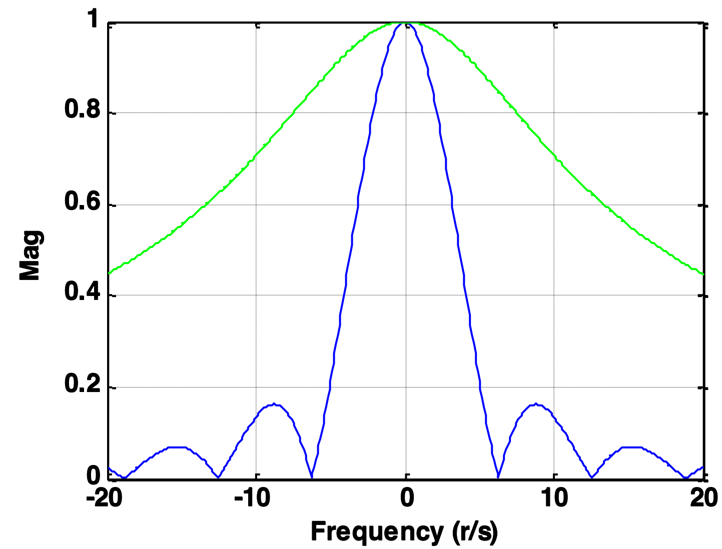
On constate que la transmittance d'un bloqueur est mixte en *p* et *Z*

- Reconstruction avec $B_0(p)$ zero-order hold

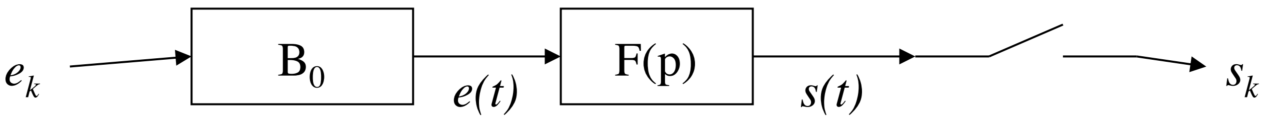






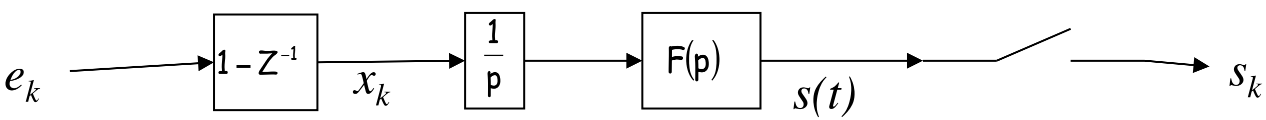


Calcul de $F(Z)$ avec un B_0



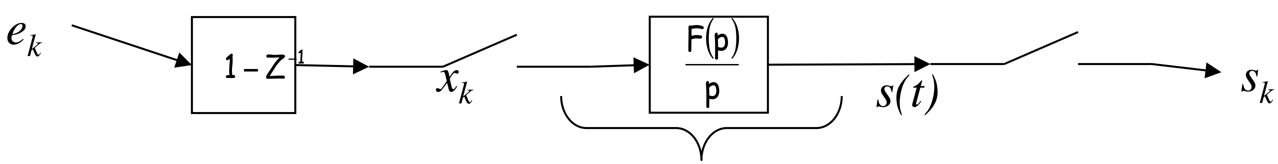
$$B_0(p) = \frac{1 - Z^{-1}}{p}$$

$$\equiv$$



La variable intermédiaire $x(kT)$ est de nature échantillonnée

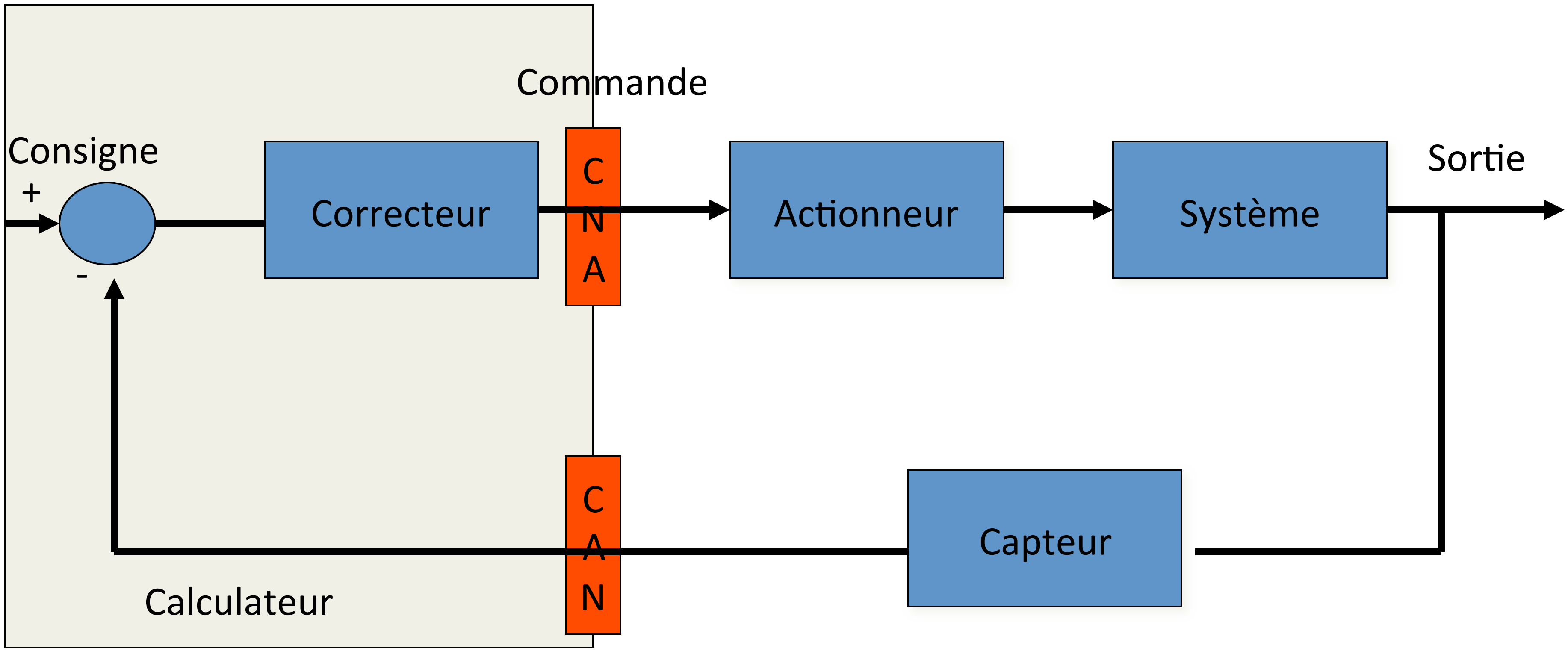
$$\equiv$$



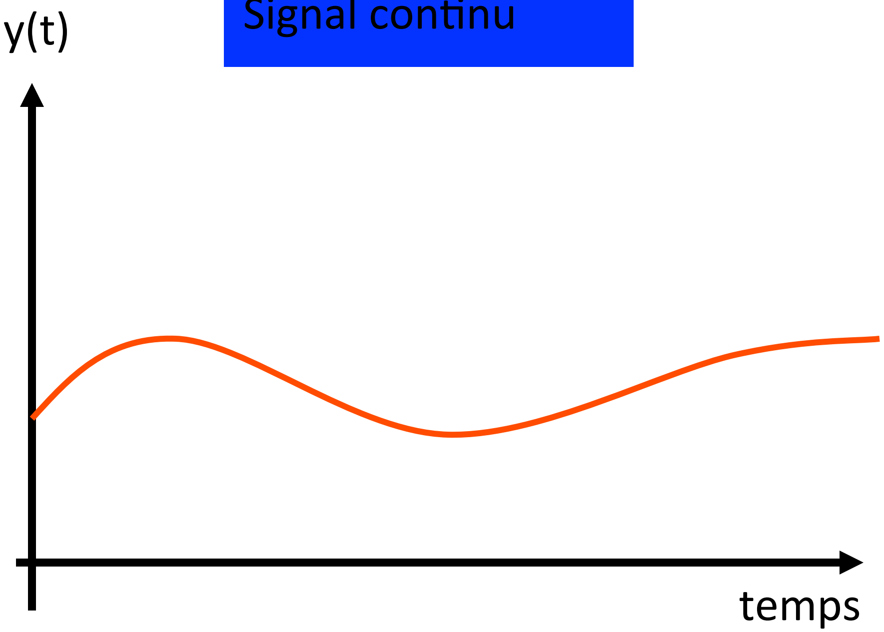
$$TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]}$$

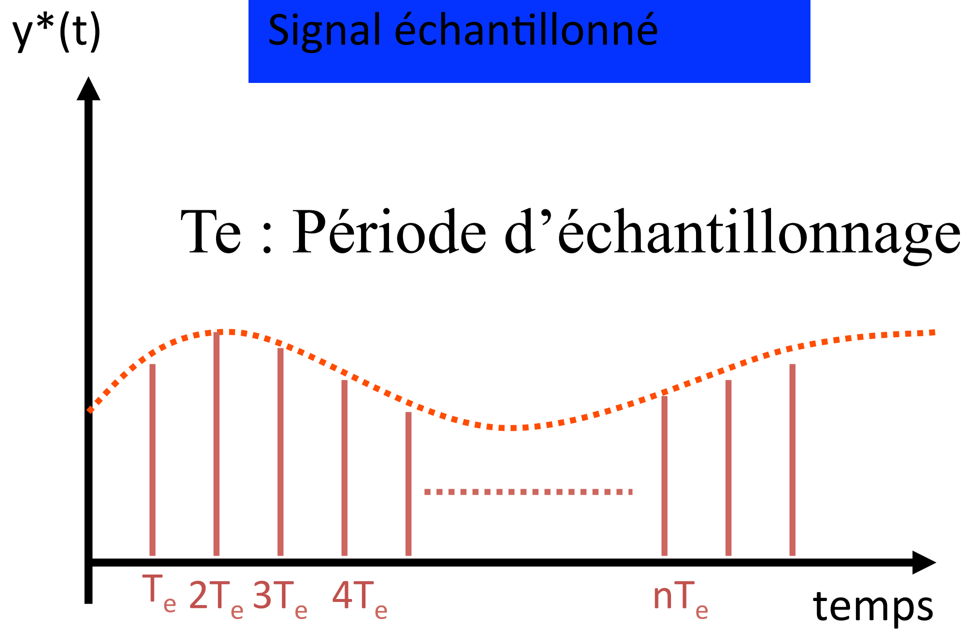
Systèmes Asservis Echantillonnés



Signal continu

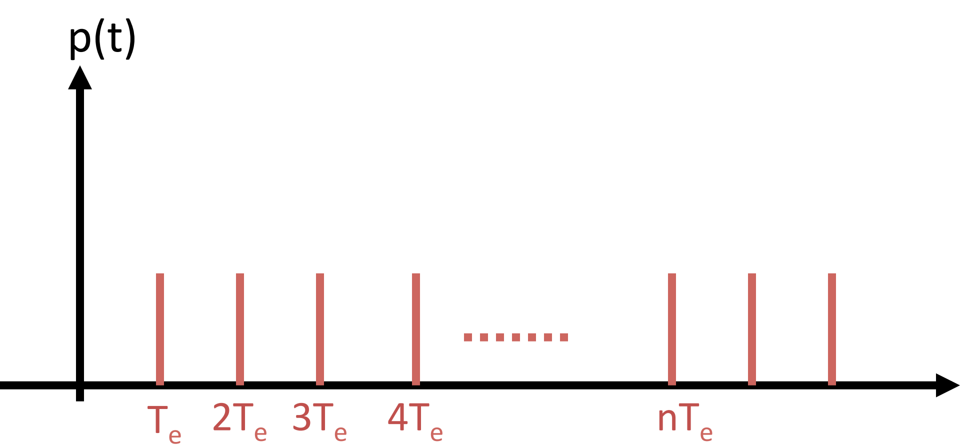


Signal échantillonné



Résultat de l'échantillonnage : y(0), y(Te), ….y(nTe)

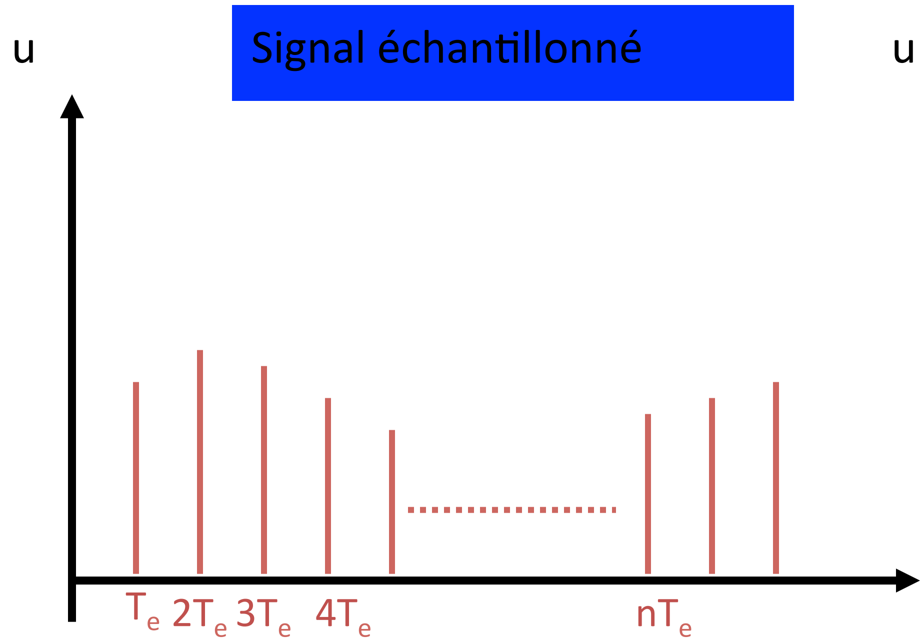
y*(t)={y(0), y(Te), ….y(nTe)}

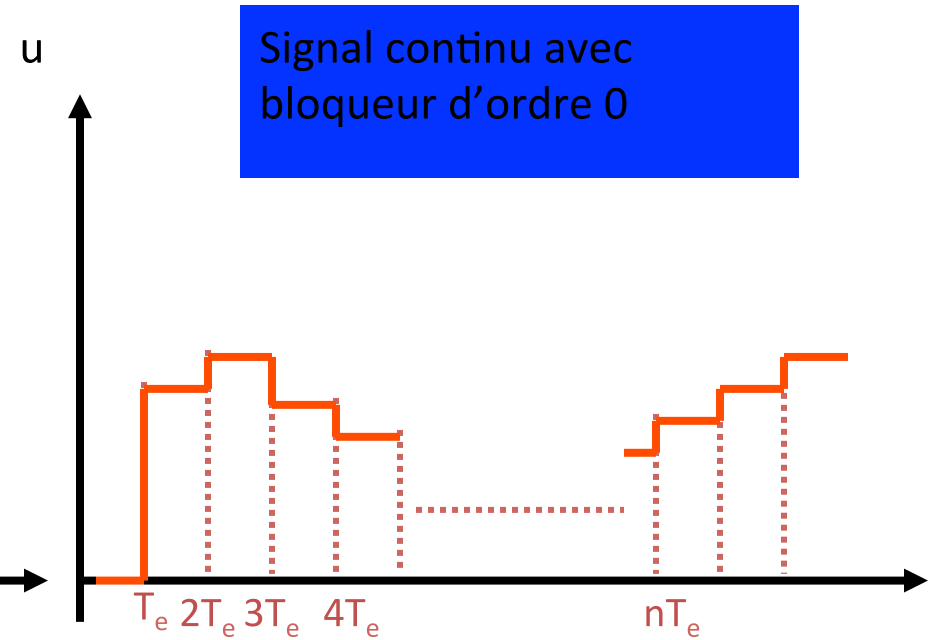


$$y^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty} y(nT_e)\delta(t-nT_e)$$

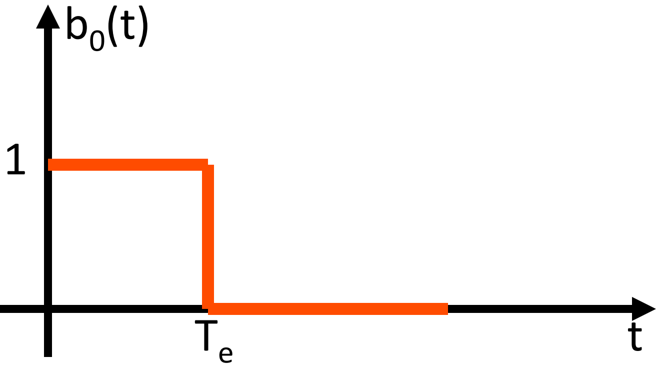
$$Y^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty} y(nT_e)e^{-nT_e s}$$

$$Y^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty} y(nT_e)z^{-n}=F(z) \quad z=e^{T_e s}$$



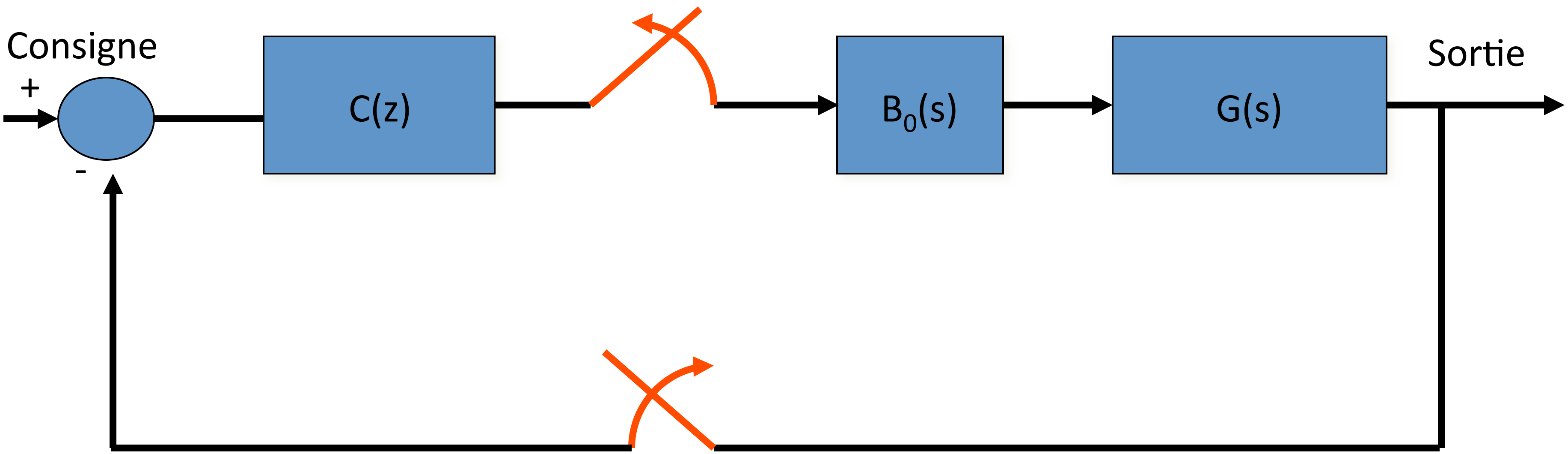


Le bloqueur permet de maintenir la valeur de l'échantillonnage jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant ($u(nT_e+\tau)$ $u(nT_e)$ pour $0<\tau<T_e$)



$$b_0(t)=\Gamma(t)-\Gamma(t-T_e)$$

$$B_0(s)=\frac{1-e^{-T_e s}}{s}$$



Passage de la FT en s à la fonction de transfert en z sans bloqueur

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad F(z)=\sum_{p_i \, \text{pôles}}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{N(v)}{D(v)}\frac{1}{1-e^{T_e v}z^{-1}}\right)_{v=p_i}\right)$$

Calcul de Résidus

a) p_i est un pôle simple de G(s)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{N(v)}{D(v)}\frac{1}{1-e^{T_e v}z^{-1}}\right)_{v=p_i}=\left|(v-p_i)\frac{N(v)}{D(v)}\frac{1}{1-e^{T_e v}z^{-1}}\right|_{v=p_i}$$

b) p_i est un pôle multiple de G(s)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{N(v)}{D(v)}\frac{1}{1-e^{T_e v}z^{-1}}\right)_{v=p_i}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dv^{r-1}}\left[(v-p_i)^r\frac{N(v)}{D(v)}\frac{1}{1-e^{T_e v}z^{-1}}\right]_{v=p_i}$$

Exemple

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad G(z)=\frac{(1-e^{-T_e})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_e}z^{-1})}$$

Passage de la FT en s à la fonction de transfert en z avec bloqueur

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$F(z)=Z(B_0(s)G(s))=Z\left(\frac{1-e^{-T_E s}}{s}G(s)\right)=Z\left(\frac{1-z^{-1}}{s}G(s)\right)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Exemple

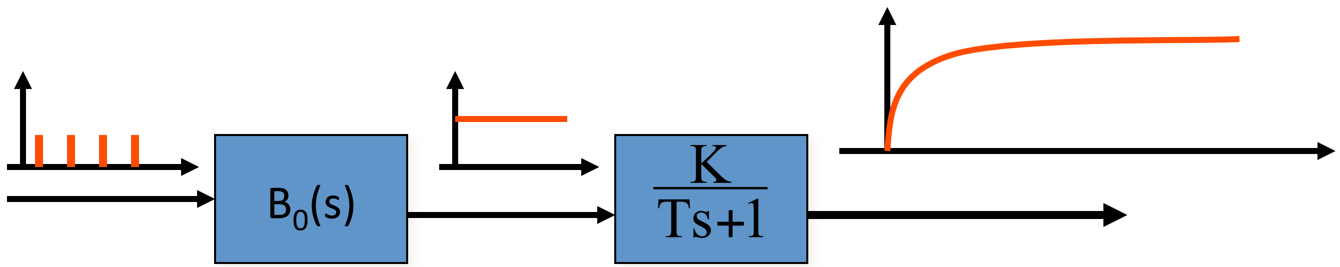
$$G(s)=\frac{1}{(s+4)(s+5)} \qquad G(z)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s(s+4)(s+5)}\right)$$

$$G(z)=(1-z^{-1})(r_1+r_2+r_3)=(1-z^{-1})\left(\frac{1}{20}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-e^{-4T_e}z^{-1}}+\frac{1}{5}\frac{1}{1-e^{-5T_e}z^{-1}}\right)$$

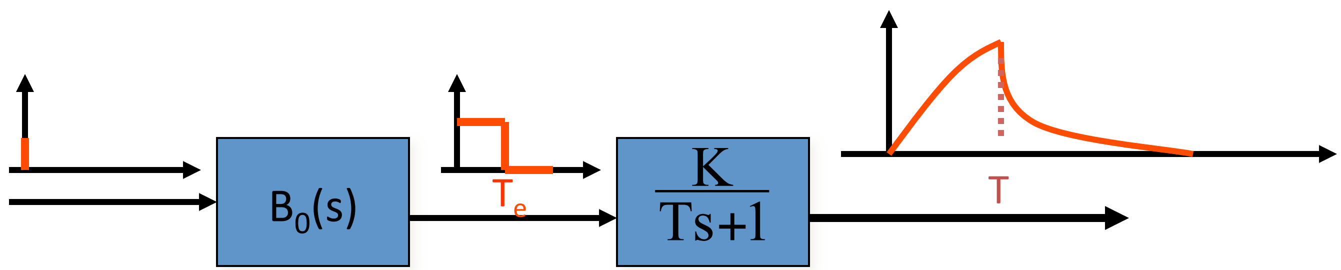
$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{K}{s(1+Ts)}\right)=\frac{K}{T}\frac{(1-e^{-\frac{T_e}{T}})z^{-1}}{1-e^{-\frac{T_e}{T}}z^{-1}}$$

Influence du bloqueur d'ordre zéro sur la Rép. Indicielle du 1er ordre

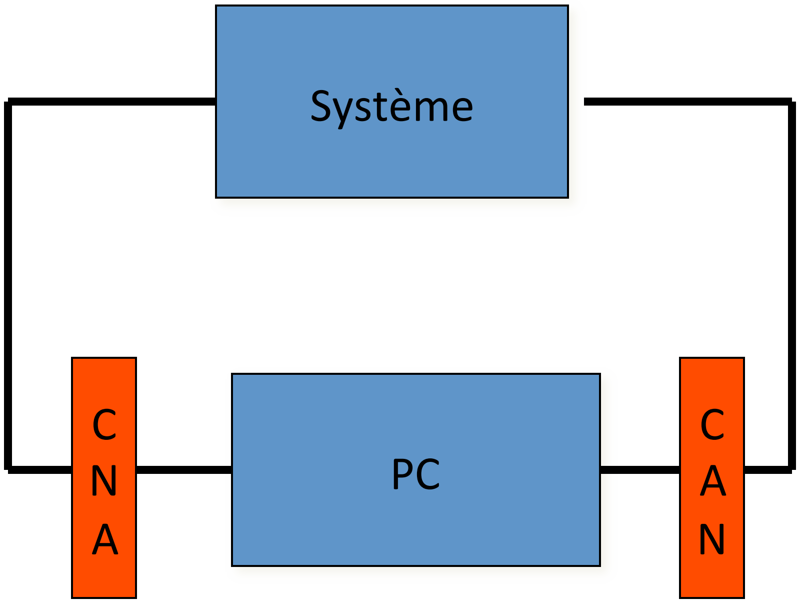


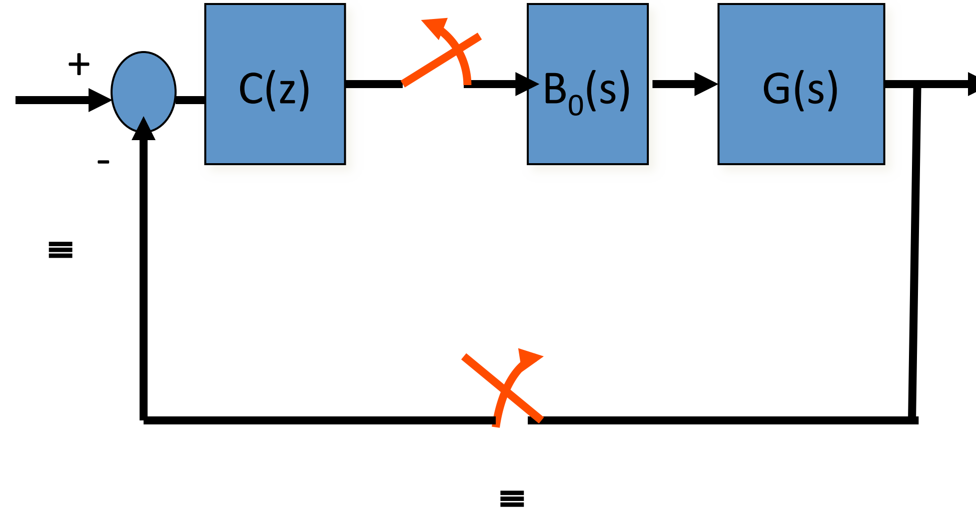
Influence du bloqueur d'ordre zéro sur la Rép. Impulsionnelle du 1er ordre

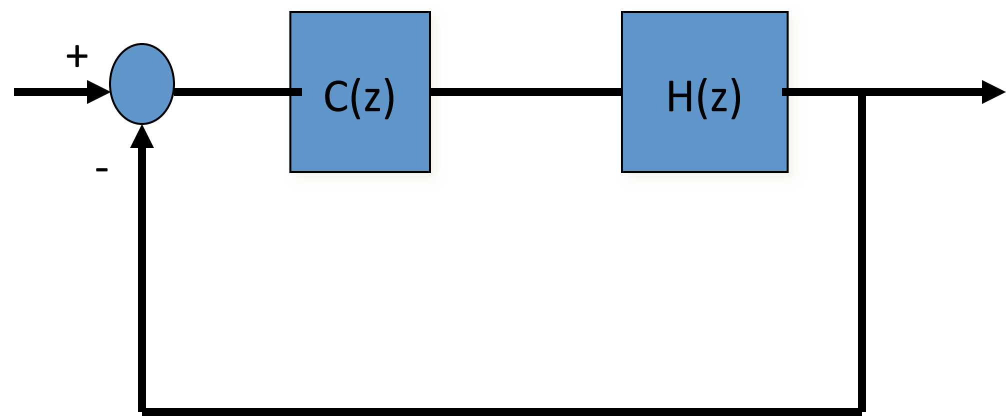


Si $T=T_e$

$$y(T)=\frac{K}{T_e}(1-e^{-\frac{T}{T_e}})=\frac{K}{T}(1-e^{-1})=\frac{0{,}63K}{T}$$







$$H(z) = (1 - z^{-1})\,Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

FTBO = C(z)H(z)

$$\text{FTBF} = \frac{C(z)H(z)}{1 + C(z)H(z)}$$

Correcteurs numériques

Correcteur P continu

$$u(t)=K_p e(t)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)}=K_p$$

$T=kT_e$

Correcteur P numérique

$$u(kT_e)=K_p e(kT_e) \qquad u(k)=K_p e(k)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)}=K_p$$

Correcteur PI continu

$$u(t)=K_p(e(t)+\frac{1}{T_i}\int e(t)dt)$$

$$C(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=K_p(1+\frac{1}{T_i s})$$

Correcteur PI numérique

$$u(k)=u(k-1)+K_p(e(k)+(\frac{T_e}{T_i}-1)e(k-1))$$

$$C(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=K_p\left(1+\frac{T_e}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

Correcteur PID continu

$$u(t)=K_p(e(t)+\frac{1}{T_i}\int e(t)dt+T_d\frac{de(t)}{dt})$$

$$C(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=K_p(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)$$

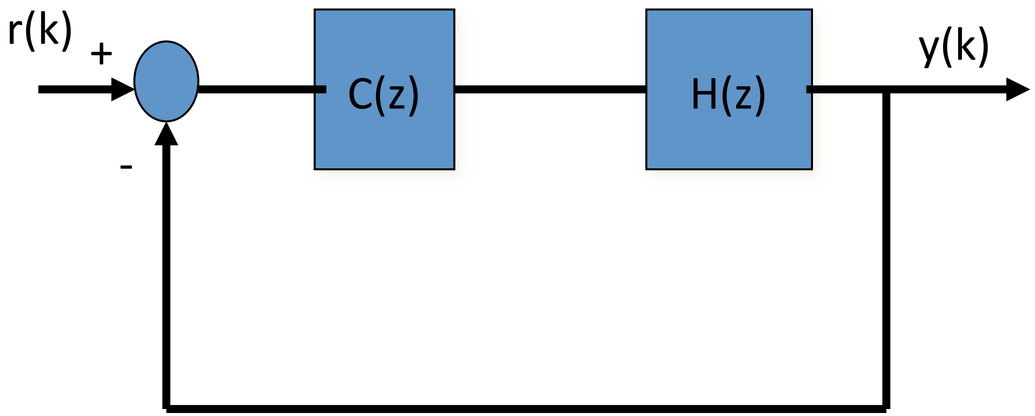
Correcteur PID numérique

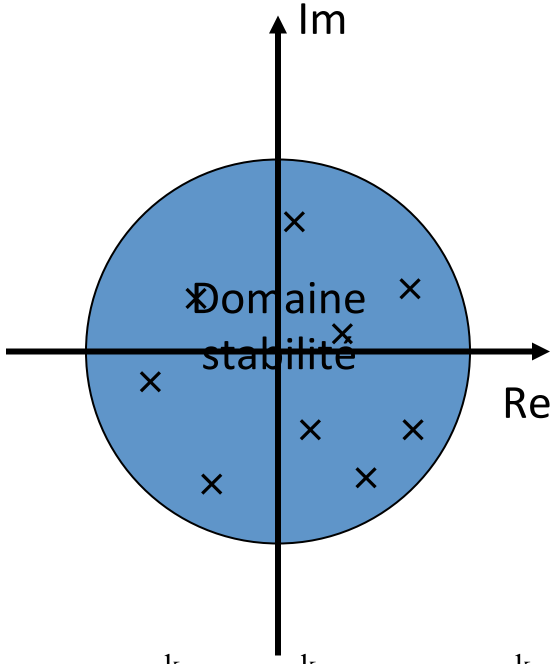
$$u(k)=u(k-1)+K_p\left(\left(1+\frac{T_e}{T_i}+\frac{T_d}{T_e}\right)e(k)-(2\frac{T_d}{T_e}+1)e(k-1)+\frac{T_d}{T_e}e(k-2)\right)$$

$$C(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=K_p\left(1+\frac{T_e}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{T_e}(1-z^{-1})\right)$$

Stabilité des systèmes échantillonnés

Le système asservi est stable SSI sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand k tend vers l'infini.





$$FTBF=\frac{C(z)H(z)}{1+C(z)H(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+1}$$

$$FTBF=\frac{A_1 z}{z-z_1}+\frac{A_2 z}{z-z_2}+\cdots\frac{A_n z}{z-z_n}=\frac{A_1}{1-z_1 z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z_2 z^{-1}}+\cdots\frac{A_n}{1-z_n z^{-1}}$$

$$y(k)=A_1 z_1^k+A_2 z_2^k+\ldots+A_n z_n^k$$

Condition de stabilité :

$y(k)\to 0$ quand $k\to\infty$ ssi $|z_i| < 1 \; \forall\, i=1\ldots n$

Critère de Jury

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

$$D(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$c_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-1-k} \\ c_{n-1} & c_k \end{vmatrix}$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \qquad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

1	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
3	c_0	c_1	c_2	…	c_{n-1}	
4	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	…	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	…		
6	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	…		
:	:	:	:	:	:	:
2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3		
2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0		
2n-3	q_0	q_1	q_2			

Enoncé du critère

Toutes les racines de $D(z)$ sont situées à l'intérieur du cercle unité
Ssi les (n+1) conditions sont satisfaites :

- $D(1)>0$ et $D(-1)>0$ pour n pair
- $D(1) >0$ et $D(-1)<0$ pour n impair
- $|a_0|<a_n$ avec $a_n >0$
- $|c_0|>|c_{n-1}|$
- $|d_0|>|d_{n-2}|$ ....
- $|q_0|>|q_2|$

Cas particuliers

Système de 2ème ordre :

$D(z)=a_2z^2+a_1z+a_0$

$|a_0|<a_2$, $a_2+a_1+a_0>0$ et $a_2-a_1+a_0>0$

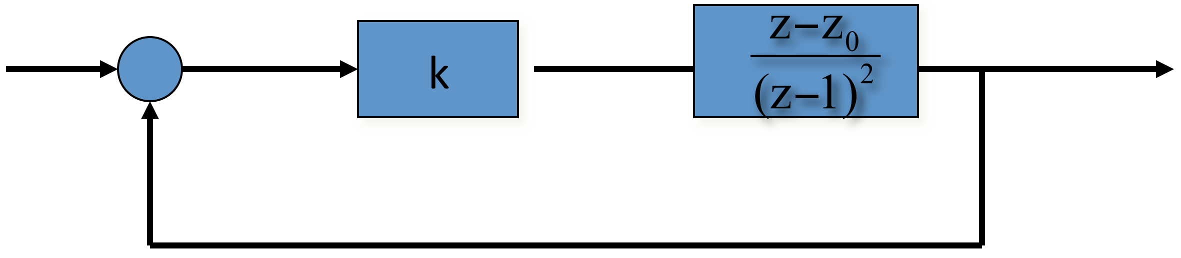
Système de 3ème ordre :

$D(z)=a_3z^3+ a_2z^2+a_1z+a_0$

$|a_0|<a_3$, $a_3+ a_2+a_1+a_0>0$, $-a_3 +a_2-a_1+a_0<0$

$|a_0^2- a_3^2|> |a_0a_2- a_1a_3|$

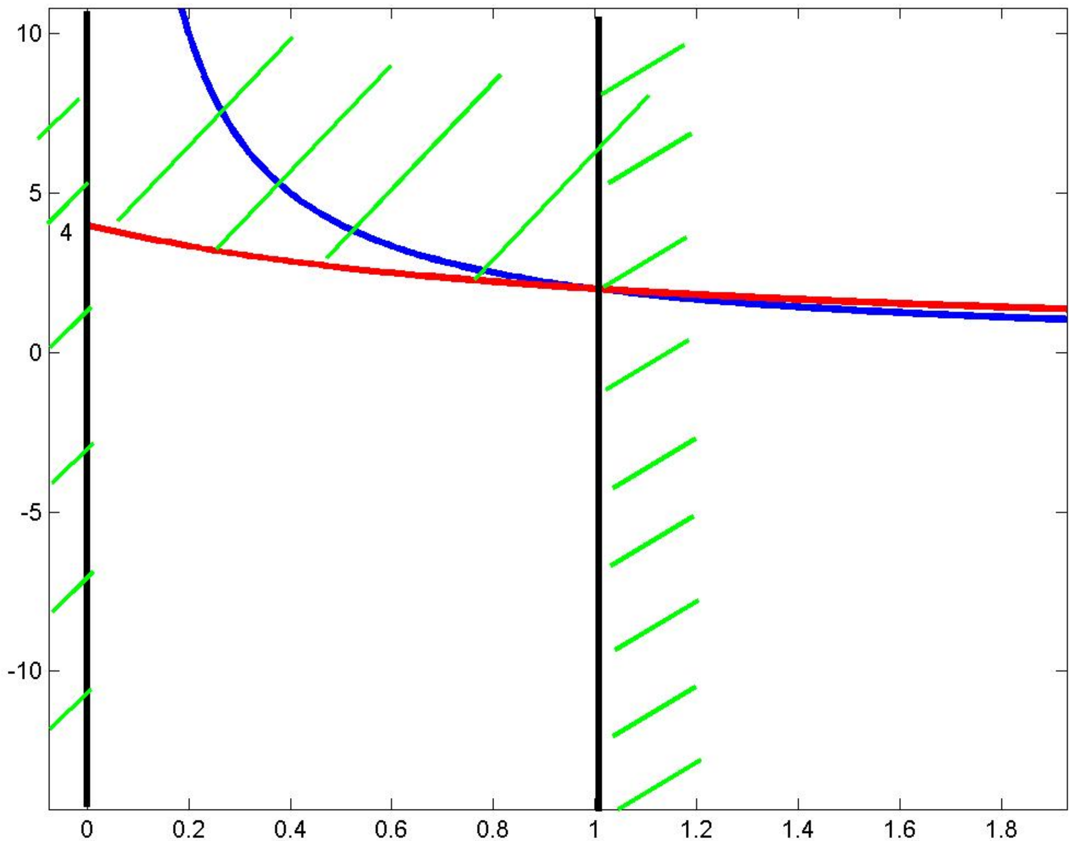
Exemple :



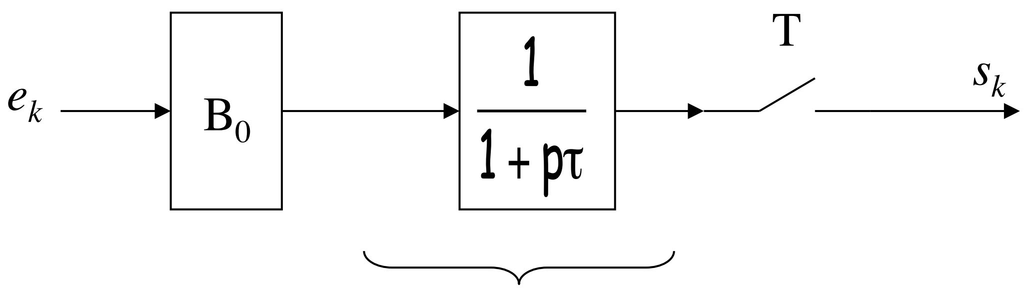
Quelle est la condition de stabilité sur k du système asservi ?

- $|1-kz_0|<1$
- $1+(k-2)+k-kz_0>0$
- $1-(k-2)+k-kz_0>0$

- $0< z_0 <1$
- $k <2/z_0$
- $k<4/(1+z_0)$



Exemple : 1er ordre échantillonné:



$$F(Z) = \left(1 - z^{-1}\right).TZ\left[\frac{1}{p\left(1 + p\tau\right)}\right]$$

On sait que :

$$TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right] = \sum_{\text{pôles de } \frac{1}{p(1+p\tau)}} \text{résidus de } \frac{1}{p(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=0} + \left[\frac{1/\tau}{p\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=-1/\tau}$$

$$= \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

$$\Rightarrow F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right)\left[\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1 - Z^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right] = \frac{Z-1}{Z}\left[\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{\left(Z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{Z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}$$

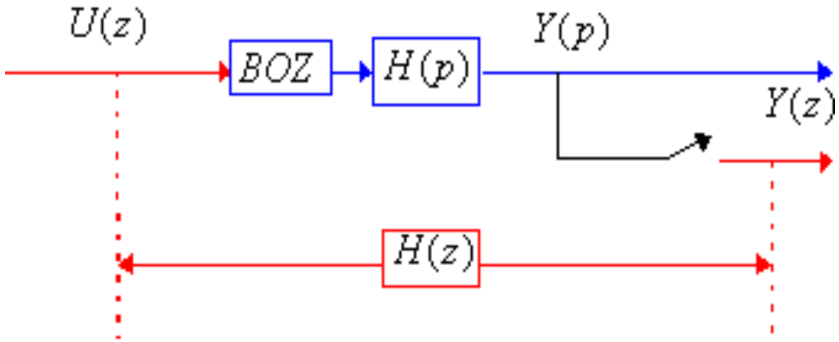
Cas d'un système ayant un retard pur Tr

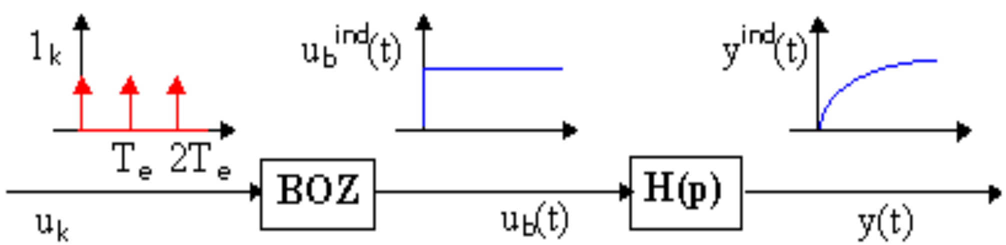
$$G(p) = G'(p)e^{-pTr}$$

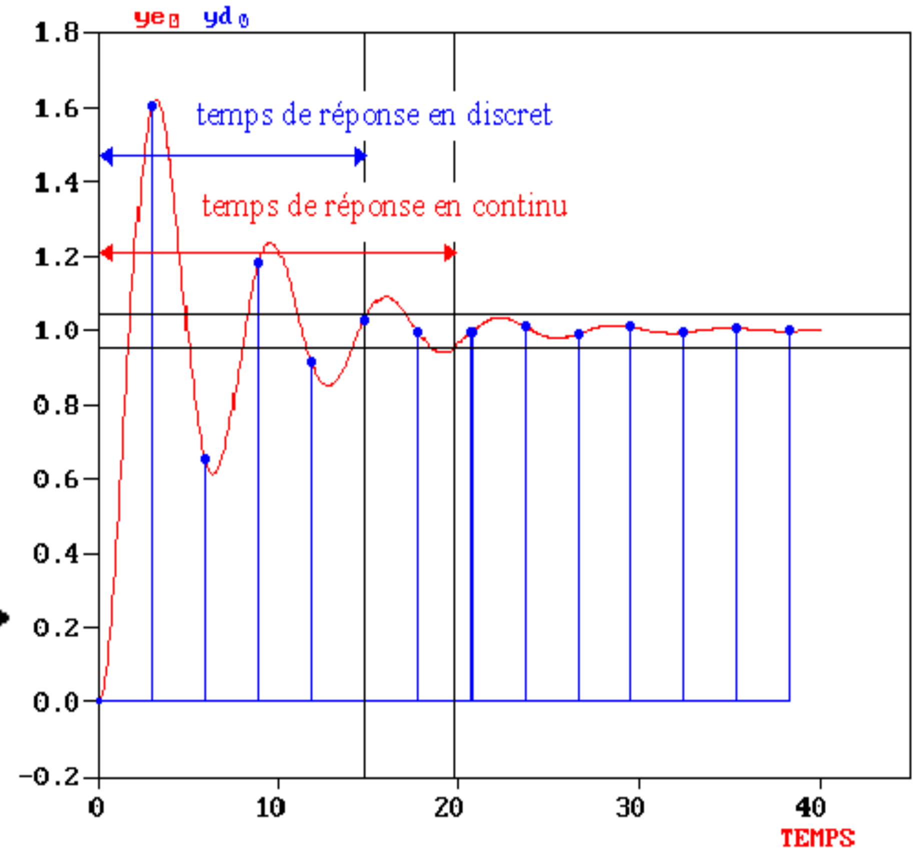
On choisit T tel que $Tr=mT$ avec ***m entier***. Pour calculer la transmittance en Z il suffit donc de multiplier la transmittance en Z sans retard par Z^{-m}.

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right].Z^{-m}}$$

Relation entre les temps de réponse d'un système continu avant et après l'échantillonnage de sa fonction de transfert par conservation de la réponse indicielle







Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) placé dans une bouc
à retour unitaire avec : $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$ en utilisant $\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]}$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{K\left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})}$$

$$p_1 = K(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Remarque : On n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en BF à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Remarque : Le système en temps continu H(p) est toujours stable, le système échantillonné ne l'ai pas toujours.

$$|p_1| < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

Si le gain statique est fixé $T_e < T \ln \frac{1-K}{1+K}$

Choix de la fréquence d'échantillonnage

$$6 f_{pas} < f < 25 f_{pas}$$

Précision des asservissements échantillonnées

Erreur de position

$$\varepsilon_p = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en échelon unité}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z-1}{z} \varepsilon(z) \right]$$

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

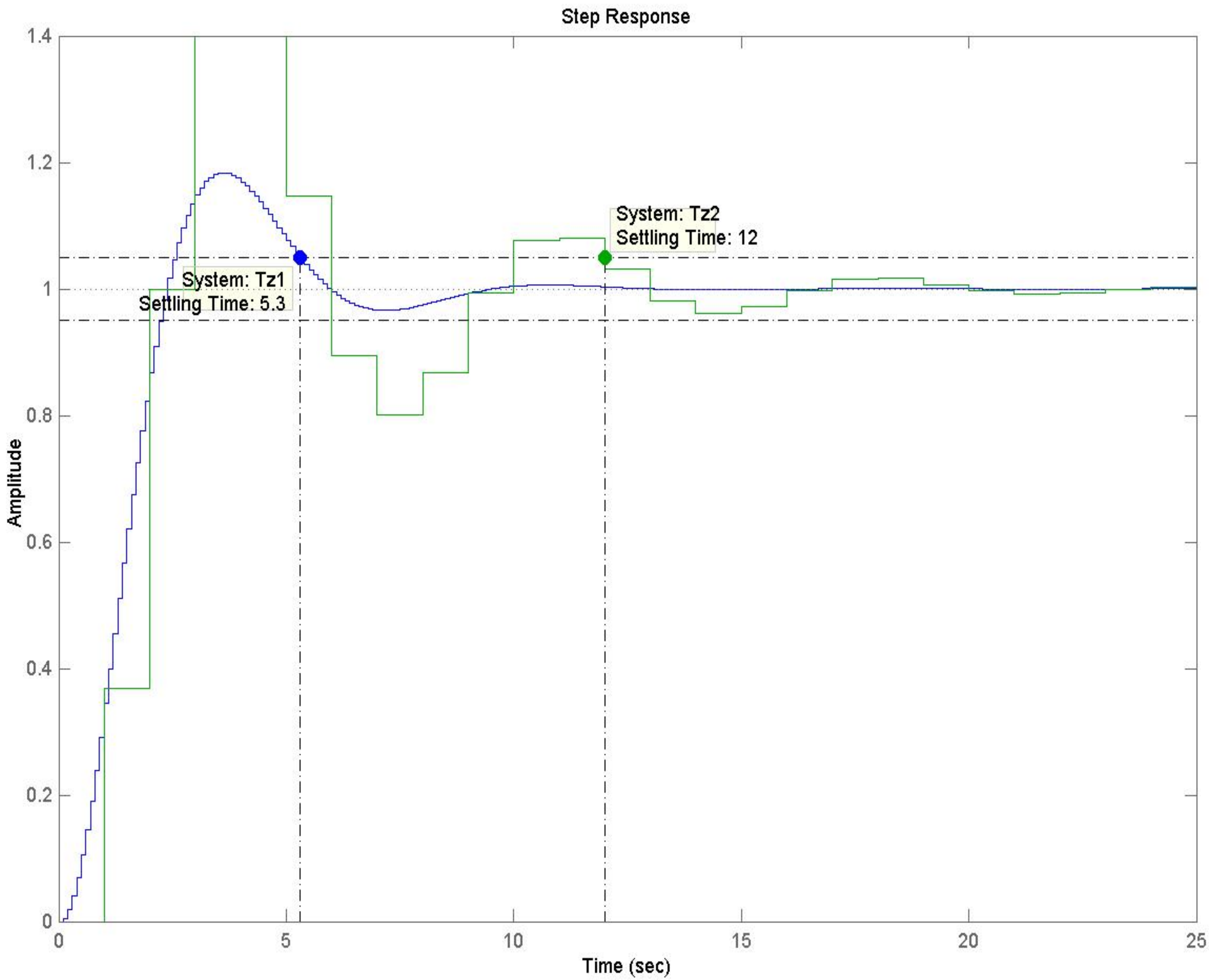
Comme l signal d'entrée est un échelon unité

$$E(z) = \left[\left(\frac{z}{z-1} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right]$$

Erreur de vitesse

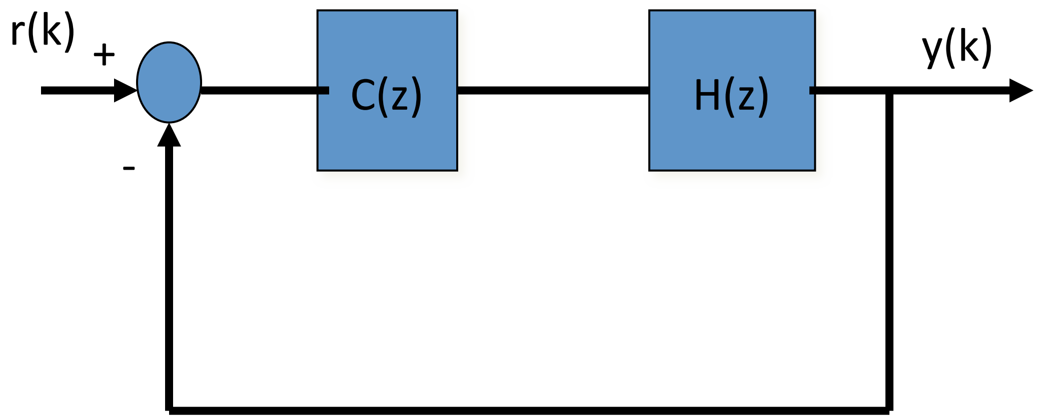
$$\varepsilon_v = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en rampe}$$

$$E(z) = \left[\left(\frac{T_e z}{(z-1)^2} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \to 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)(1+G(z))} \right]$$



Step Response
Amplitude
Time (sec)
System: Tz1
Settling Time: 5.3
System: Tz2
Settling Time: 12
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15
20
25

Précision des systèmes asservis échantillonnés



FTBO $=C(z)H(z)=\dfrac{K}{(z-1)^m}\dfrac{N(z)}{D(z)}$ Avec $N(1)=1$ et $D(1)=1$, $0<m<n$

Erreur en position (*r(k)=1*)

$$E_p=\lim_{k\to\infty}(r(k)-y(k))=\lim_{z\to 1}(z-1)(R(z)-Y(z))=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})(R(z)-Y(z))$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+\text{FTBO}}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+\dfrac{K}{(z-1)^m}\dfrac{N(z)}{D(z)}}=\begin{cases}\dfrac{1}{K+1} & \text{si } m=0\\ 0 & \text{si } m>0\end{cases}$$

Erreur en vitesse ($r(k)=kT_e$)

$$E_v=\lim_{k\to\infty}(r(k)-y(k))=\lim_{z\to 1}(z-1)(R(z)-Y(z))=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})(R(z)-Y(z))$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{T_e}{z-1}\frac{1}{1+FTBO}=\lim_{z\to 1}\frac{T_e}{(z-1)\left(1+\frac{K}{(z-1)^m}\frac{N(z)}{D(z)}\right)}=\begin{cases}\infty & \text{si } m=0\\ \frac{T_e}{K} & \text{si } m=1\\ 0 & \text{si } m>1\end{cases}$$

Nombre d'intégrateurs	Erreur en position	Erreur en vitesse
m=0	$\frac{1}{K+1}$	∞
m=1	0	$\frac{T_e}{K}$
m=2	0	0

Performances Dynamiques des Systèmes Echantillonnées

Rapidité et limitation du dépassement

Assimiler le fonctionnement quelconque à celui d'un Système de 2éme ordre

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta p}{\omega_n} + 1}$$

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{p_1 T_e})\ (1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e})(z - e^{p_2 T_e})}$$

$$G(z) = \frac{K\left(1 + e^{-2\zeta\omega_n T_e} - e^{-2\zeta\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\left(z^2 + 2z e^{-2\zeta\omega_n T_e} - e^{-2\zeta\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\zeta^2} + e^{-2\zeta\omega_n T_e}\right)}$$

Prévision des Performances Dynamiques

<u>Méthode la plus simple</u> : Rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement
En temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier le Bo

$$B_0(p) = \frac{1-e^{-pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1+\frac{T_e p}{2}}$$

$$A(p) = \frac{4}{1+p} \qquad A(z) = \frac{4\left(1-e^{-T_e}\right)}{z+e^{-T_e}}$$

Te=0.2s

$$G(p) = \frac{4}{\left(1+\frac{p}{10}\right)\left(1+p\right)}$$

Pulsation de coupure à 0dB et la marge de phase de ce système

$$\left|G(\omega)\right| = 1 \Rightarrow \left(1+\omega^2\right)\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right) = 16 \Rightarrow \omega_0 = 3{,}6\ rad/s$$

Temps de montée en boucle fermée

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_0} \approx 0{,}8s$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi\left(\omega_0\right) = \pi - \arctan\frac{\omega_0}{10} - \arctan\omega_0 = 85^\circ$$

Validation

$$A(z) = \frac{4\left(1 - e^{-T_e}\right)}{z + e^{-T_e}} \Rightarrow H\left(z\right) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{0.72}{z - 0.1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.72}{z - 1} \Rightarrow s_k = 0.1 s_{k-1} + 0.72 e_{k-1}$$

Représentation d'échantillons D=?

Erreur de position

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1 + A(z)} = \lim_{z \to 1} \frac{z - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e} + 4\left(1 - e^{-T_e}\right)} = 0.2 = 20\%$$