STABILITE

Stable ou instable ?

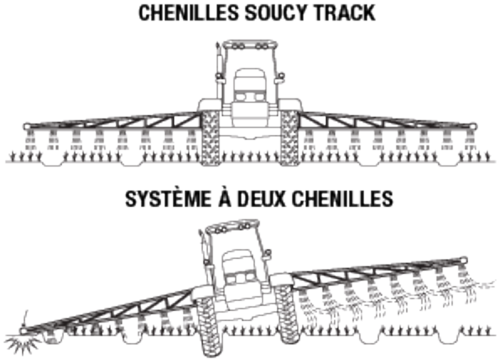
Définition

Un système est en équilibre stable si,

écarté de sa position d'équilibre, il y revient spontanément.

Si, écarté de sa position d'équilibre, il s'en éloigne indéfiniment,

le point d'équilibre est instable.



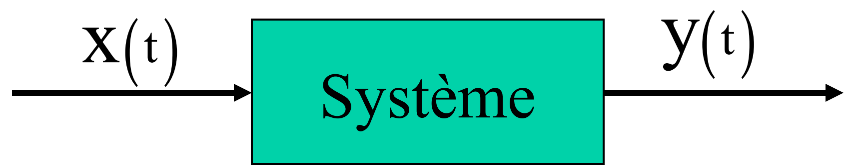
Définition

La nature du régime transitoire est déterminante

- Si le régime transitoire disparaît, le système est stable ,

- Si le régime transitoire devient prépondérant, le système est instable.

Stabilité mathématique

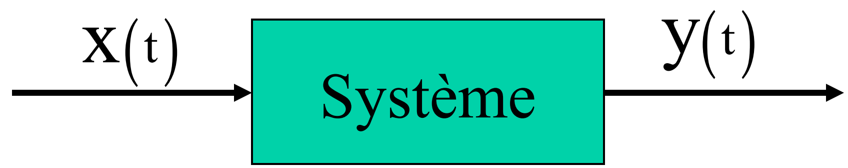


système linéaire,

équation différentielle à coefficients constants

$$x(t) = a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\, y(t)}{dt^2} + ... + a_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n}$$

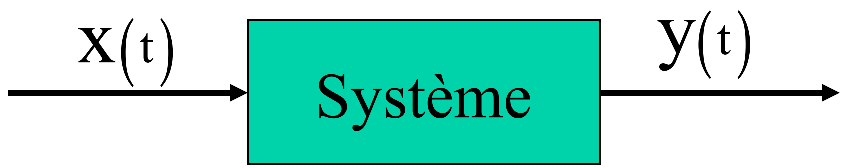
Stabilité mathématique



régime transitoire,
équation différentielle sans second membre

$$0 = a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\, y(t)}{dt^2} + ... + a_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n}$$

Stabilité mathématique



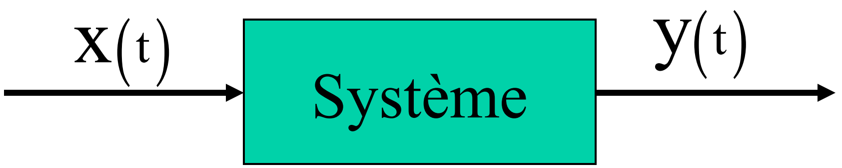
Système du premier ordre :

$$0 = a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt}$$

Ou encore :

$$0 = r_0\, y(t) + \frac{d\,y(t)}{dt}$$

Stabilité mathématique



Système du premier ordre :

$$0 = r_0 \, y(t) + \frac{d\,y(t)}{dt}$$

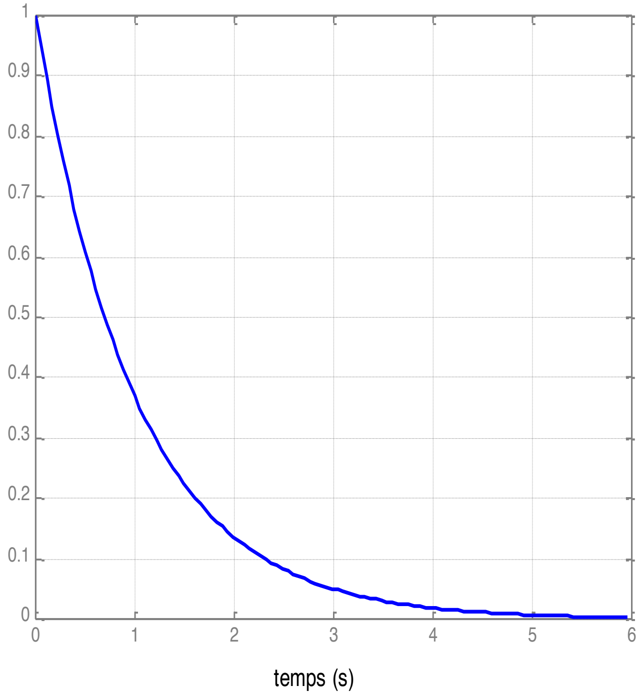
Solution :

$$y(t) = A\, e^{r_0 t}$$

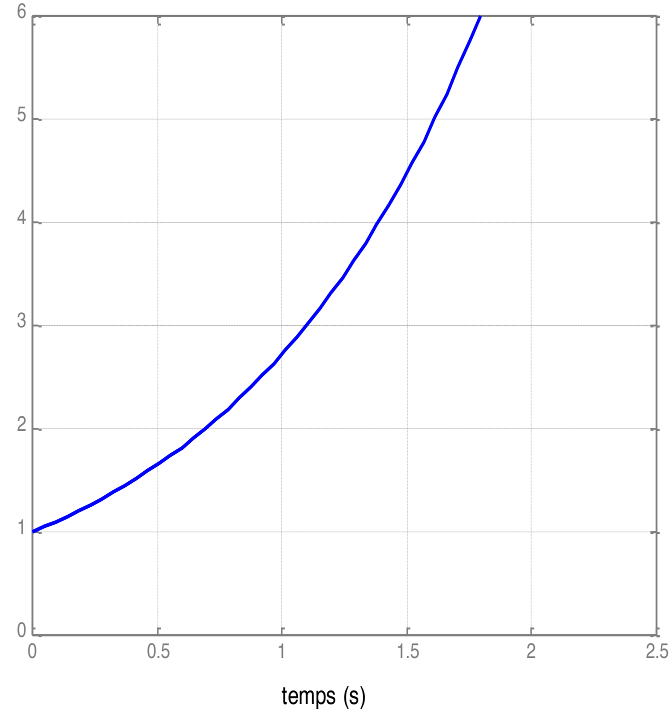
Stabilité mathématique

$$y_{libre}(t) = A\, e^{r_0 t}$$

$r_0 < 0$



$r_0 > 0$



Analyse des systèmes linéaires invariants

1 Définitions

1 Système

$$e \longrightarrow \boxed{x_i} \longrightarrow s$$

xi : variables d'état

Système :
Entité établissant un relation de cause à effet entre un signal d' entrée e et un signal de sortie s

Deux manières pour décrire les relations entre e et s

Interne : On décrit l'état d'un système par n (ordre de système) variables internes x_i (appelée variable d'état) qui constituent le vecteurs d'état :

$$x(t) = \left| \begin{matrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{matrix} \right.$$

La sortie du système s'écrit :

$$s(t) = \underbrace{f\big(x(t), e(t), t\big)}_{\text{équation d'observation}} + \text{equation différentielle vectorielle du } 1^{\text{er}} \text{ ordre } \underbrace{\dot{x} = f(x, e, t)}_{\text{équation d'état}}$$

Pour un système donné le vecteur d'état n'est pas unique.

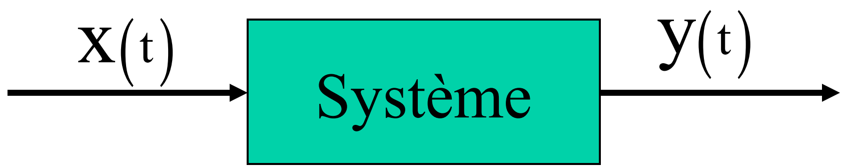
Externe : C'est une approche des systèmes faisant intervenir les paramètres externes du systèmes (évidemment !), c'est-à-dire *e(t), s(t)* et l'état initial *x(0)*. La sortie du système s'écrit :

$$s(t) = f\left(e(t_0, t), x(t_0), t\right) \text{ pour } t \geq t_0$$

t_0 : instant initial

Donc la sortie dépend de la configuration du système à t_0 ($x(t_0)$) et de l'ensemble des valeurs prises par l'entrée depuis t_0 ($e(t_0,t)$), ce qui est le cas pour une intégration.

Stabilité mathématique



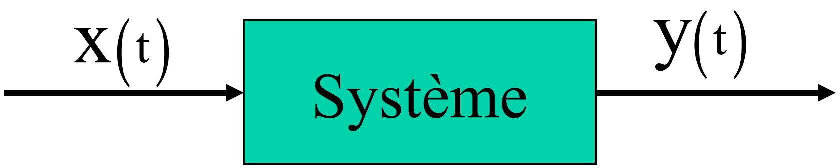
Système du deuxième ordre :

$$0 = a_0 \, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\,y(t)}{dt^2}$$

Ou encore :

$$0 = \omega_0{}^2 \, y(t) + 2\,m\,\omega_0 \frac{d\,y(t)}{dt} + \frac{d^2\,y(t)}{dt^2}$$

Stabilité mathématique



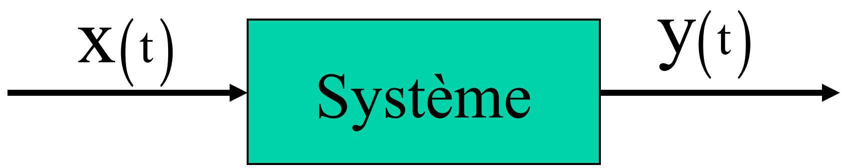
Système du deuxième ordre :

$$0 = \omega_0^{\,2}\, y(t) + 2\, m\, \omega_0 \frac{d\,y(t)}{dt} + \frac{d^2\, y(t)}{dt^2}$$

Equation caractéristique :

$$0 = \omega_0^{\,2} + 2\, m\, \omega_0\, r + r^2$$

Stabilité mathématique



Equation caractéristique :

$$0 = \omega_0{}^2 + 2\,m\,\omega_0\,r + r^2$$

Racines de l' équation caractéristique r_1 et r_2 ,

Solution :

$$y_{libre}(t) = A_1\,e^{r_1 t} + A_2\,e^{r_2 t}$$

Stabilité mathématique

$$\Delta' = \omega_0^{\,2}\left(m^2 - 1\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix}\Delta' < 0 \\ |m| < 1\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\Delta' > 0 \\ |m| > 1\end{matrix}}$$

Racines complexes conjuguées

Racines réelles de même signe

$$r_1 = -m\,\omega_0 - j\,\omega'_0$$

$$r_2 = -m\,\omega_0 + j\,\omega'_0$$

$$\omega'_0 = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

$$r_1 = \pm\frac{1}{\tau_1}$$

$$r_2 = \pm\frac{1}{\tau_2}$$

$$r_1 + r_2 = -2\,m\,\omega_0$$

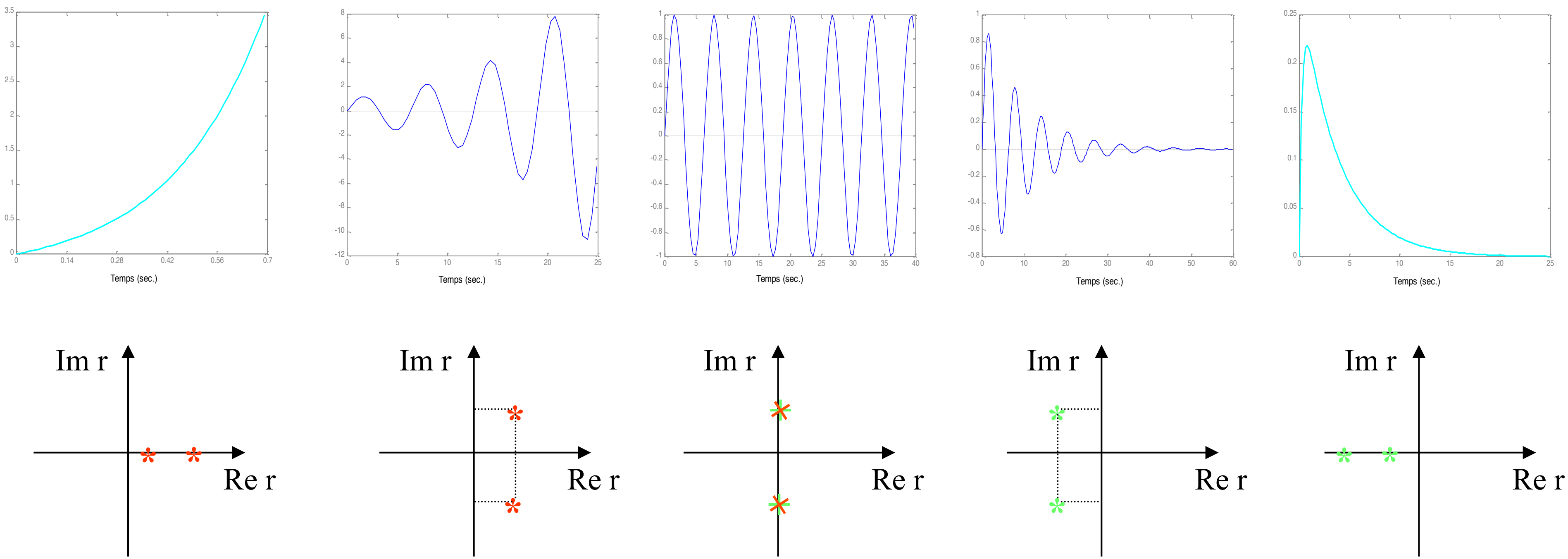
Stabilité mathématique

Recherche des racines r_1 et r_2 : $\Delta' = \omega_0{}^2\left(m^2 - 1\right)$

$\Delta' < 0$	$\Delta' > 0$
$\lvert m \rvert < 1$	$\lvert m \rvert > 1$
Racines complexes conjuguées	Racines réelles de même signe
$y_{libre}(t) = A\, e^{-m\omega_0 t} \cos\left(\omega'_0\, t + \varphi\right)$	$y_{libre}(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t}$

Stabilité mathématique

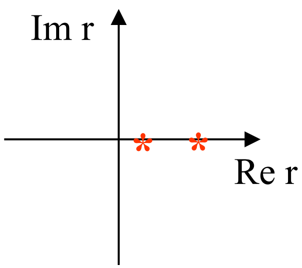
$m < -1$ | $-1 < m < 0$ | $m = 0$ | $0 < m < 1$ | $m > 1$



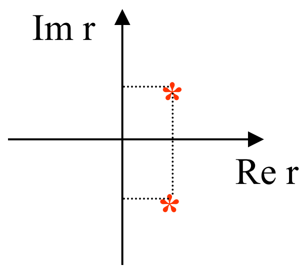
Instable | Instable | Limite stable-instable | Stable | Stable

Stabilité mathématique

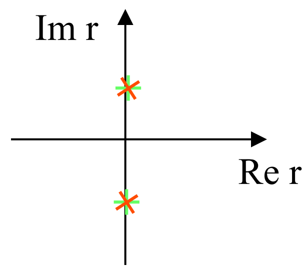
Ce système est stable si les racines de son équation caractéristiques sont toutes les deux à partie réelle négative



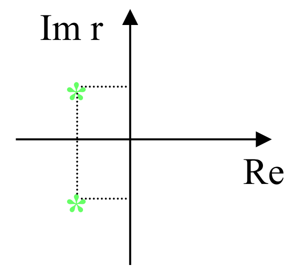
Instable



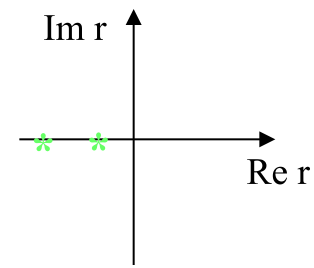
Instable



Limite stable-instable



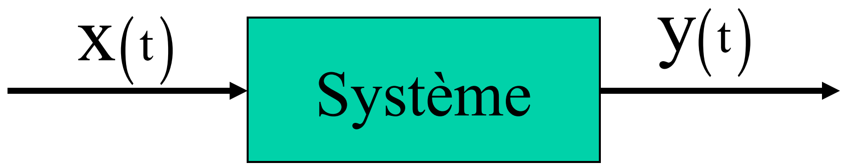
Stable



Stable

Stabilité mathématique

Plus généralement…



$$x(t) = a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\, y(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n}$$

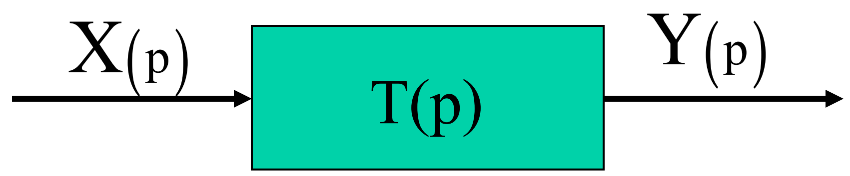
ESSM : $0 = a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\, y(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n}$

Equation caractéristique :

$$0 = a_0 + a_1\, r + a_2\, r^2 + \dots + a_n\, r^n$$

Stabilité mathématique

En variables de Laplace



$$X(p) = a_0\,Y(p) + a_1\,p\,Y(p) + a_2\,p^2\,Y(p) + \ldots. + a_n\,p^n\,Y(p)$$

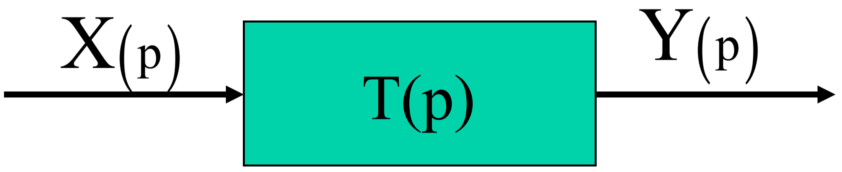
$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{\left(a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + \ldots. + a_n\,p^n\right)}$$

Equation caractéristique :

$$0 = a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + \ldots. + a_n\,p^n$$

Stabilité mathématique

En variables de Laplace



$$0 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^n$$

Les racines de l'équation caractéristique s'appellent les pôles de la fonction de transfert.

Ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert !

Stabilité mathématique

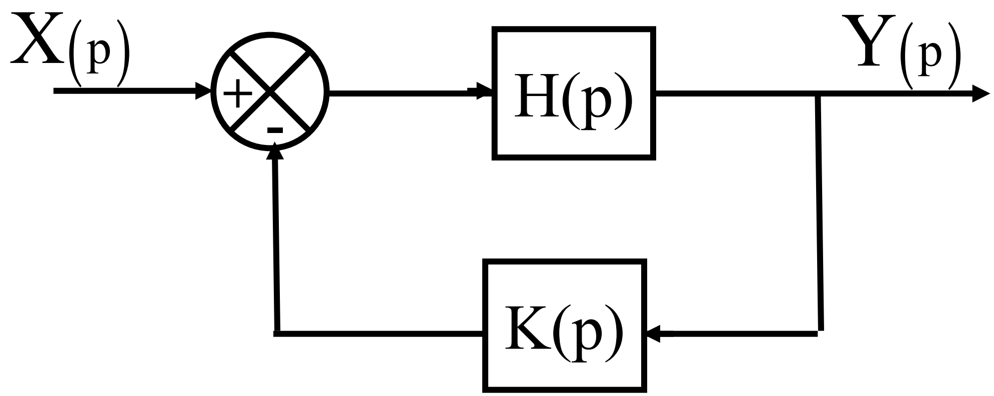
Au sens mathématique,

un système est stable si les pôles de sa fonction de transfert sont

TOUS

à partie réelle négative.

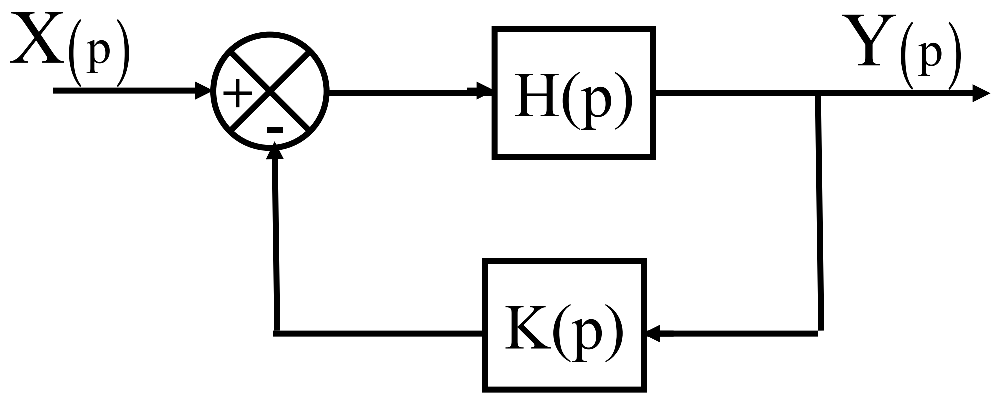
Cas des systèmes bouclés



$$T_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)\,K(p)}$$

Equation caractéristique : $0 = 1 + H(p)\,K(p)$

Cas des systèmes asservis

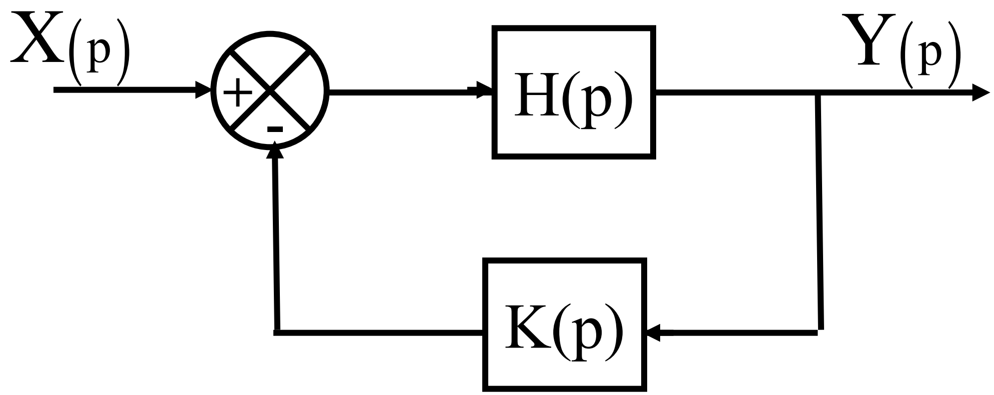


Le système est stable en boucle fermée si les racines de l'équation caractéristique sont toutes à partie réelle négative.

Equation caractéristique : $0 = 1 + H(p)\,K(p)$

$$T_{BO}(p) = H(p)\,K(p)$$

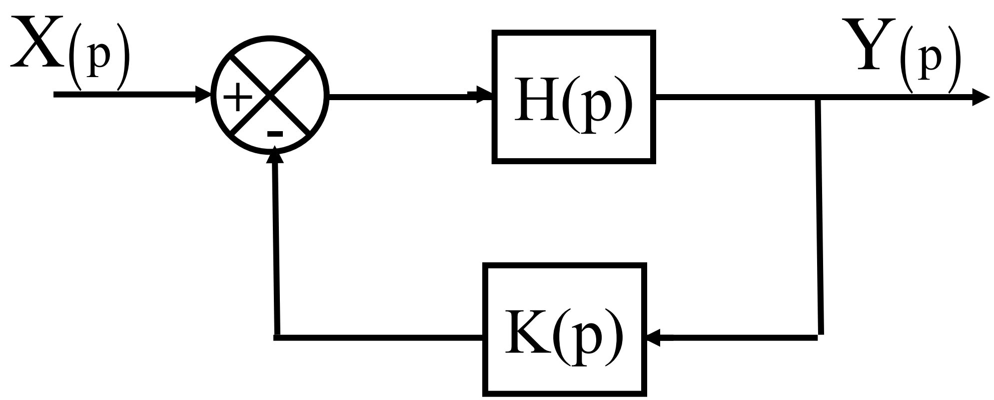
Cas des systèmes asservis



Equation caractéristique : $0 = 1 + T_{BO}(p)$

$$T_{BO}(p) = -1$$

Cas des systèmes asservis



$$T_{BO}(p) = -1$$

Critères graphiques de stabilité :

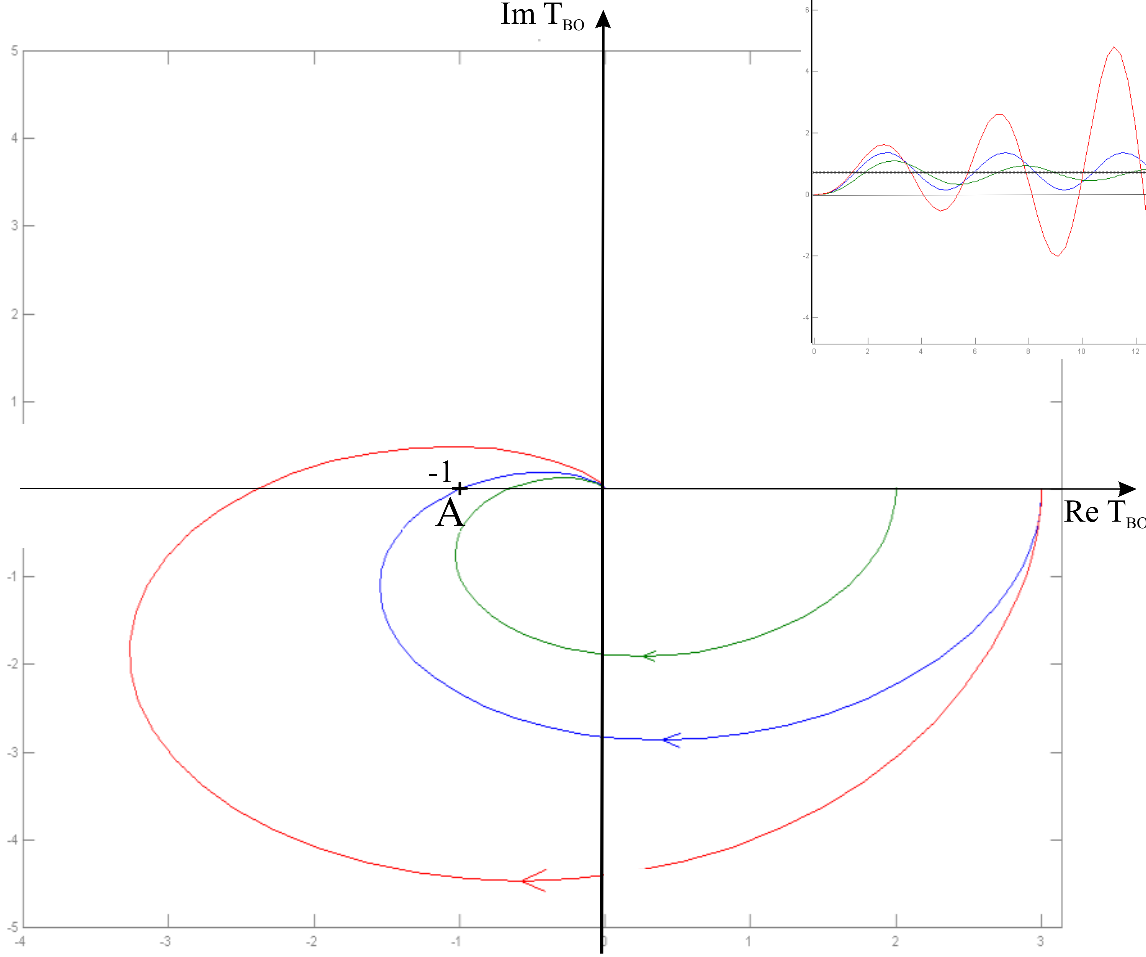
- on trace le « lieu de transfert » en BO,
- on regarde où il passe par rapport au point critique A (–1,0).

Critère de Revers

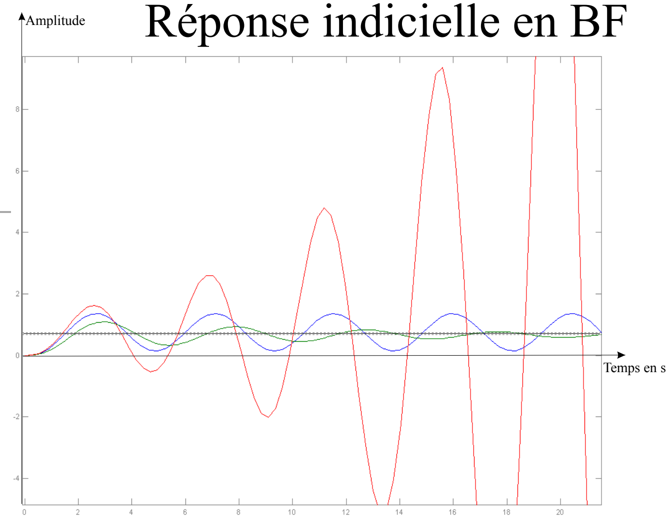
- on trace le « lieu de Nyquist » en BO,
- lorsqu' on parcourt le lieu de Nyquist en BO dans le sens des ω croissants, si :

  - on laisse le point –1 à sa gauche le système est stable en BF,
  - on passe sur le point –1 le système en BF est à la limite de la stablilité,
  - à sa droite le système en BF est instable.

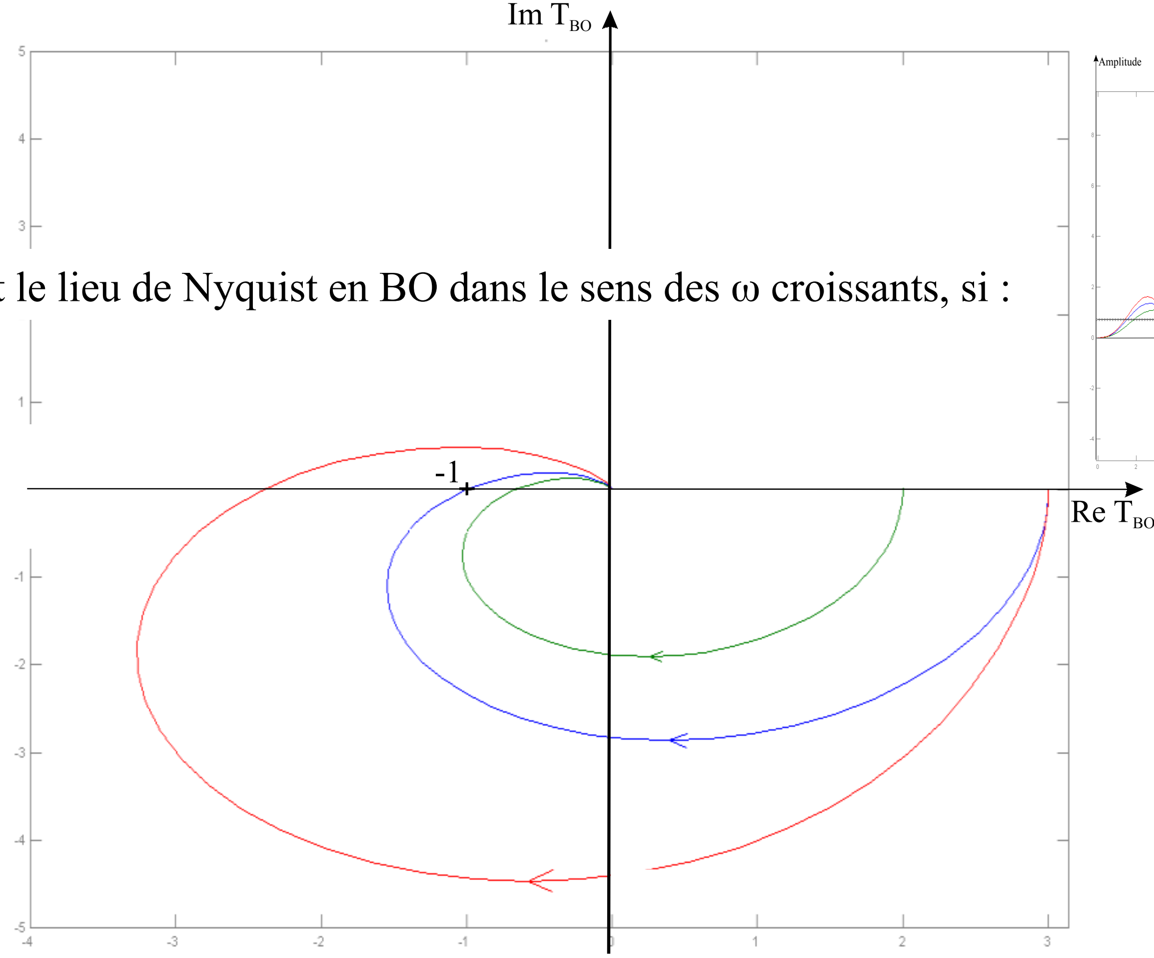
Lieu de Nyquist en BO

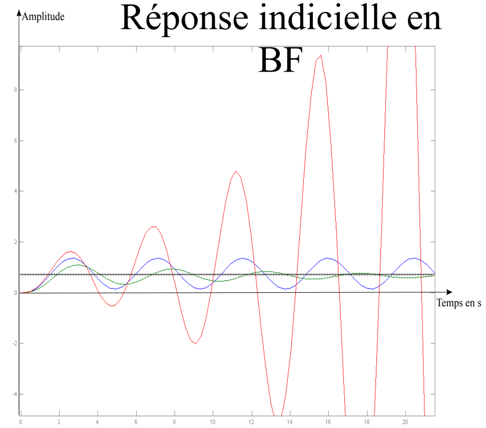


Réponse indicielle en BF



Critère de Nyquist





Réponse indicielle en BF

Lorsqu'on parcourt le lieu de Nyquist en BO dans le sens des ω croissants, si :

- on laisse le point –1 à sa gauche le système est stable en BF,
- on passe sur le point –1 le système en BF est à la limite de la stablilité,
- à sa droite le système en BF est instable.

Marge de phase

- on trace le « lieu de Nyquist » en BO,
- on trace le cercle de rayon 1, de centre 0 :
- on trace la droite passant par 0 et par l'intersection du lieu de transfert et du cercle unité,

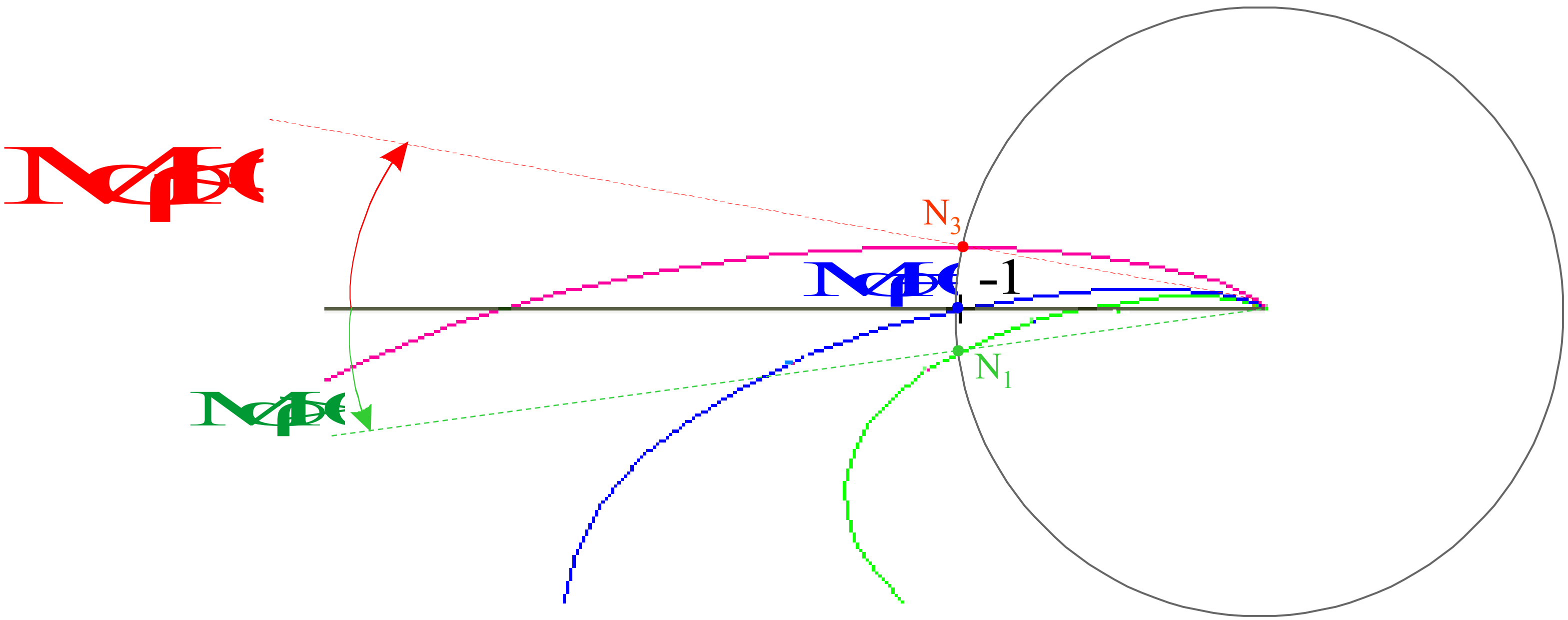
L'angle entre cette droite et l'axe réel s'appelle la marge de phase $M\varphi$

- si $M\varphi > 0$, le système en BF est stable,
- si $M\varphi = 0$, le système en BF est à la limite de la stablilité,
- si $M\varphi < 0$, le système en BF est instable.

Marge de phase

- on trace le cercle de rayon 1, de centre 0 :
- on trace la droite passant par 0 et par N, l’intersection du lieu de transfert et du cercle unité,

L’angle entre cette droite et l’axe réel s’appelle la marge de phase Mφ

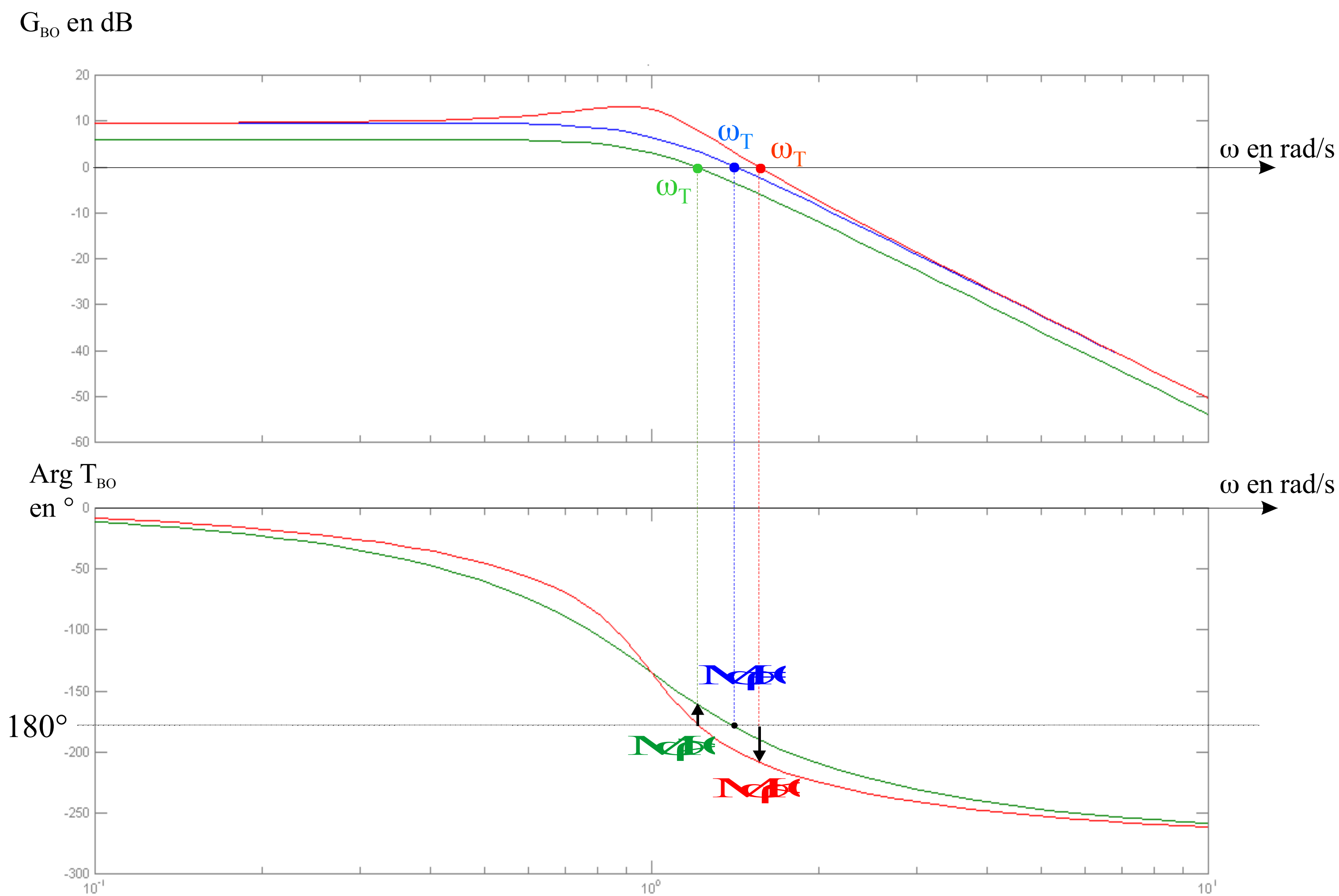


➢ si Mφ > 0, le système en BF est stable,

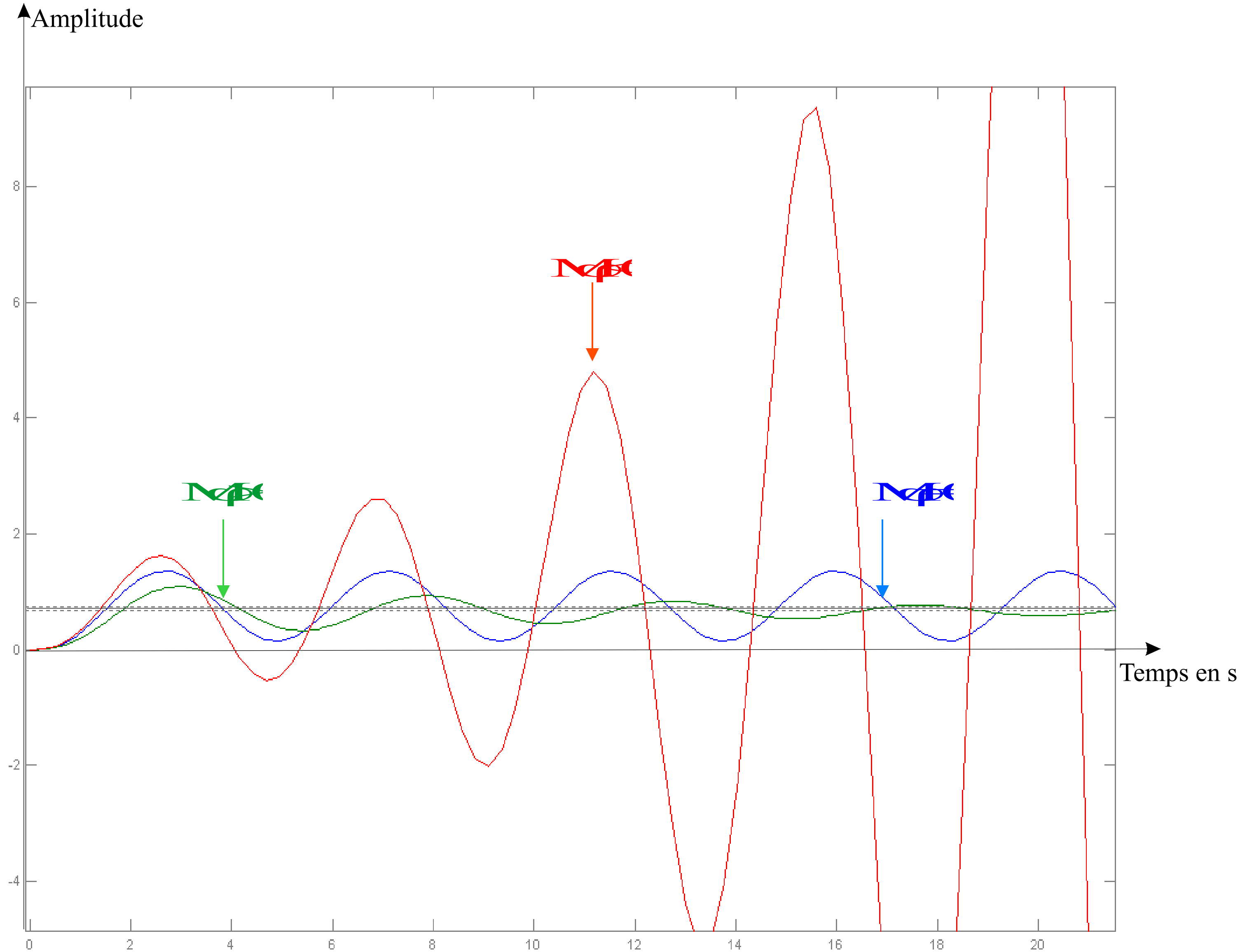
➢ si Mφ = 0, le système en BF est à la limite de la stablilité,

➢ si Mφ < 0, le système en BF est instable.

- on repère le point N situé à la pulsation ω_T pour laquelle $|T_{BO}| = 1$, ($G_{BO} = 0$),
- on mesure la marge de phase $M\varphi = 180° + \text{Arg } T_{BO}(\omega_T)$



> ➢ si $M\varphi > 0$, le système en BF est stable,
>
> ➢ si $M\varphi = 0$, le système en BF est à la limite de la stablilité,
>
> ➢ si $M\varphi < 0$, le système en BF est instable.


Amplitude
Temps en s
8
6
4
2
0
-2
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Diagrammes de Bode

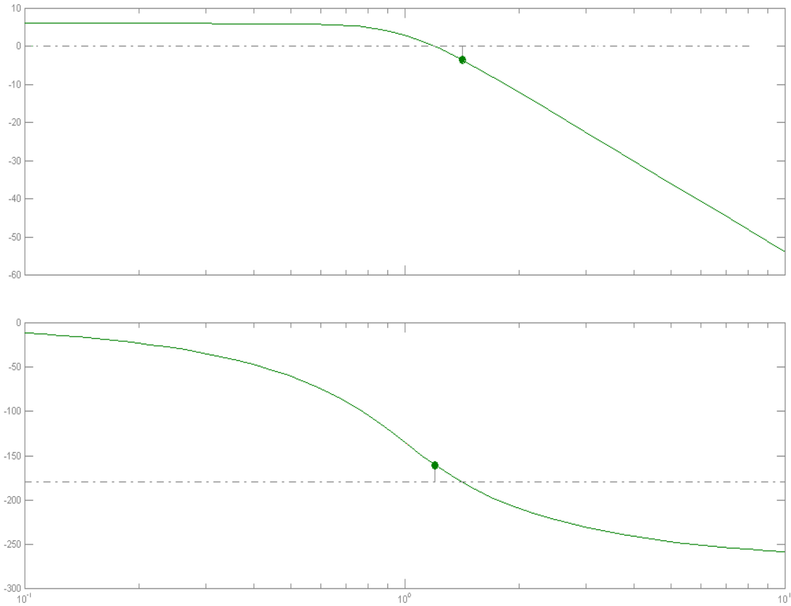
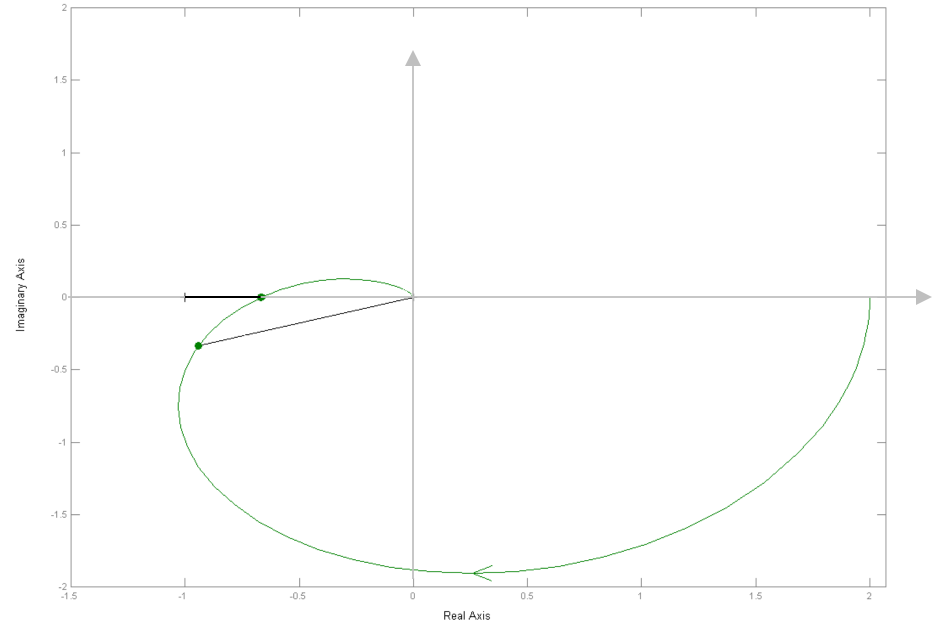


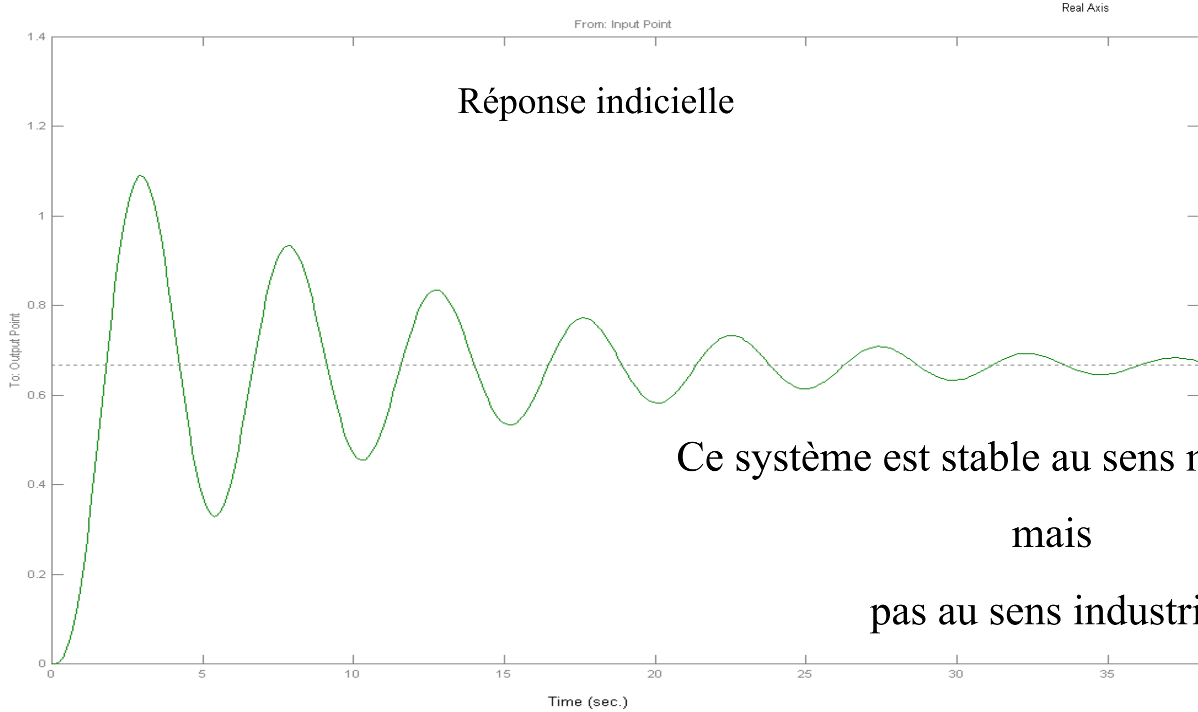
Diagramme de Nyquist



Mφ = 19,6°

MG = 3,52 dB

Réponse indicielle



Ce système est stable au sens mathématique

mais

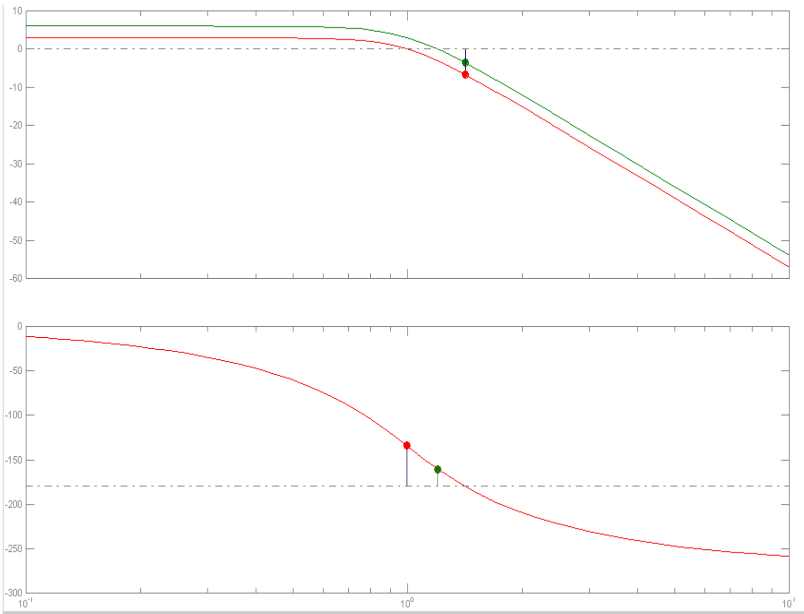
pas au sens industriel

Marge de phase

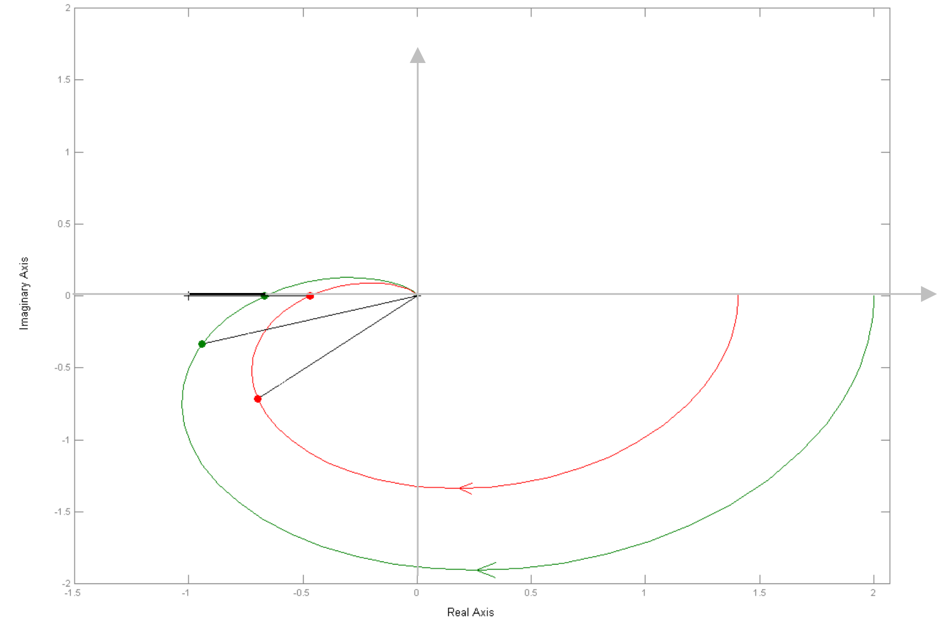
Le critère industriel retenu est

$$M\varphi = 45°$$

Diagrammes de Bode



Diagrammes de Nyquist

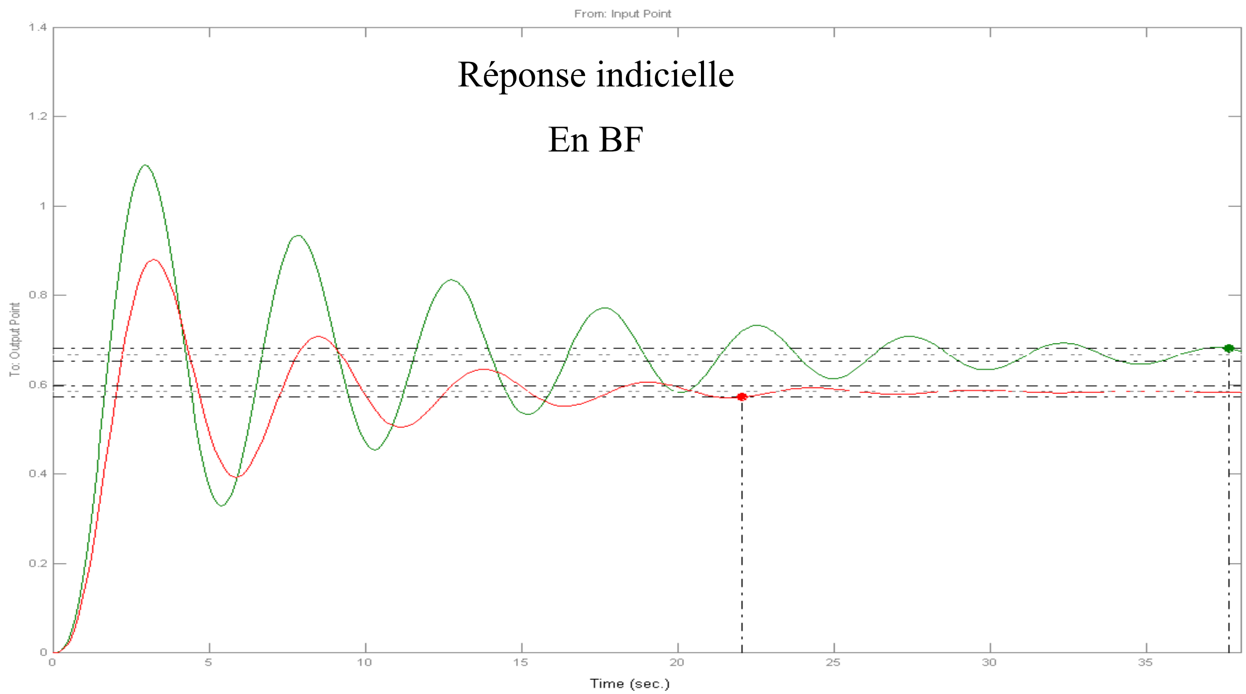


Mφ = 19,6°

Mφ = 45°

Réponse indicielle

En BF



MG = 3,52 dB

MG = 6,5 dB

Position de repos et origine de temps de toutes les variables

Un système est au repos si sa sortie est dans un état permanent constant, donc **si ses dérivées sont nulles**. La position de repos constitue généralement l'origine des temps de toutes les variables du système. Pour un système d'ordre *n*, la sortie et ses *(n-1)* premières dérivées peuvent en générale constituer un jeu de variables d'état. Par suite, **en position de repos l'état d'un système est nul**

Réponse forcée et Réponse libre

Système au repos

Réponse forcée :

$$\left.\begin{aligned} s_f(t) &= f(e \neq 0, x(0) = 0, t) \\ s_l(t) &= f(e = 0, x(0) \neq 0, t) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad s(t) = s_f(t) + s_l(t)$$

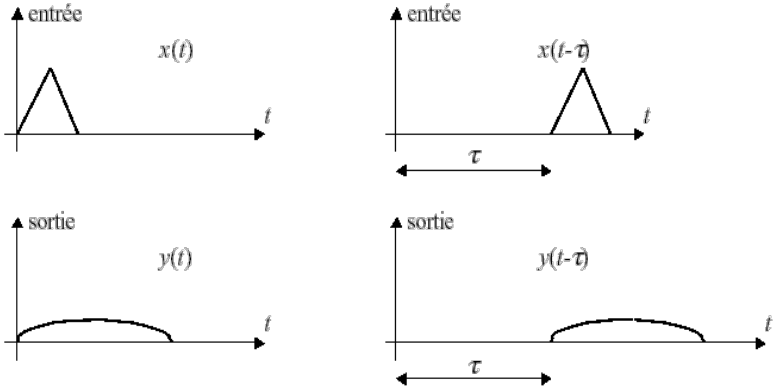
Réponse libre :

Pour un système linéaire invariant (SLI) il y a **séparabilité** :

Réponse = Réponse forcée + Réponse libre

Invariant

La sortie est indépendante du temps



Linéarité

$$si\ s_1 = f(e_1, 0)\ et\ s_2 = f(e_2, 0)$$

$$si\ e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

$$\boxed{\Rightarrow s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2}$$

Il existe la même définition par rapport aux conditions initiales (CI)

<u>Linéaire ⇒ vis à vis des entrées et des CI</u>

SLI à temps continu

Les SLI sont descriptibles par une équation différentielle linéaire invariantes :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i e^{(i)}}$$

En appliquant la TL :

$$TL\left[e^{(i)}\right] = p^i.E(p) \quad \text{Entrée causale}$$

$$TL\left[s^{(i)}\right] = p^i.S(p) - p^{i-1}s(0) - p^{i-2}s'(0) - \ldots - s^{(n-1)}(0)$$

La deuxième TL est un peu plus compliquée car le système existait avant $t=0$ et produisait déjà une sortie à laquelle on commence à s'intéresser à $t=0$. On a ici une expression particulière de l'état initiale :

$$x(0) = \left|\begin{array}{l} s(0) \\ s'(0) \\ \vdots \\ s^{(n-1)}(0) \end{array}\right.$$

La réponse impulsionnelle ou la transmittance (domaine de Laplace)

La Réponse Impulsionnelle *f(t)* est la **réponse forcée** à δ_0 d'un système initialement au **repos**

La Transmittance ou fonction de transfert *H(p)* est la TL de la **réponse impulsionnelle.**

$$\text{Soit e} = \delta_0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i f^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i \delta_0^{(i)}$$

$$TL \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i . p^i . F(p) = \sum_{i=0}^{m} a_i . p^i$$

$$\boxed{F(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i . p^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i . p^i}}$$

évidemment : $\boxed{f(t) = TL^{-1}\left[F(p)\right]}$

Définition équivalente de la Transmittance :

Réponse forcée d'un système à une entrée *e(t)* :

Pas de conditions initiales donc on a bien la réponse forcée

$$s_f(t) = f(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t').e(t-t')dt'$$

Si on passe par la TL : $S_f(p) = F(p).E(p)$

$$\boxed{F(p) = \frac{S_f(p)}{E(p)}}$$

Remarque : **La transmittance ne permet de calculer que des réponses forcées**

$\Rightarrow$ Les variables $e(t_0)$ et $s(t_0)$ (point de fonctionnement ou position de repos) doivent constituer l'origine de $e(t)$ et $s(t)$.

Cas d'un retard pur

Dans l'équation différentielle on trouve à la place de

$$e^{(i)}(t) \Rightarrow e^{(i)}(t-T) \text{avec } T : \text{retard}$$

$$\Rightarrow TL\left[e^{(i)}(t-T)\right] = e^{-pT}.p^{i}.E(p)$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i.p^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i.p^i}.e^{-pT}$$

Donc un retard T fait apparaître dans $F(p)$ le facteur $e^{-p\,\mathrm{T}}$.

Forme nomalisée d'une transmittance

$F(p)$ = rapport de deux polynômes en p à coefficient réels
$\Rightarrow$ donc il y a des zéros et des pôles :

- nuls $\Rightarrow p^{\alpha}$ en facteur
- réels $\Rightarrow (1+\varepsilon p\tau)$ en facteur avec $(\varepsilon = \pm 1)$
- paire complexe conjugué $\Rightarrow \left(1+2m\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right)$ en facteur

Toutes les transmittances que nous manipulerons entreront dans le cadre suivant:

$$F(p)=K.p^{\alpha}.\prod_k(1+\varepsilon_k p\tau_k)^{\beta_k}.\prod_n\left(1+2m_n\frac{p}{\omega_n}+\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right)^{\gamma_n}.e^{-pT}$$

avec $\alpha, \beta_k, \gamma_n$: positif, négatif ou nul

Analyse de la sortie forcée d'un SLI causal : Stabilité

Entrée bornée $\Rightarrow$ Sortie Bornée

Un SLI est stable si pour un entrée bornée $|e(t)| \leq A < \infty$ et non nulle alors il lui correspond une sortie bornée $|s(t)| \leq B < \infty$

Conséquences sur la Réponse Impulsionnelle (RI)

$$s_f(t) = f(t) * e(t) = \int_0^{+\infty} f(t').e(t - t')dt'$$

$$|s_f(t)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t')|.\underbrace{|e(t - t')|}_{\text{bornée par } A}dt'$$

$$\Leftrightarrow |s_f(t)| \leq A\int_0^{+\infty} |f(t')|dt'$$

donc on a $|s_f(t)| \leq A < \infty$ si la RI est absolument sommable

Conséquences au niveau de la transmittance *F(p)*

TL^{-1} s' écrit :

$$f(t) = TL^{-1}\left[F(p)\right] = \sum_{\text{pôles de } F(p)} \underbrace{\text{résidus de} F(p) e^{pt}}_{r_i} = \sum_i r_i$$

$$r_i = \text{combinaison linéaire de } e^{p_i t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_i \text{combinaison linéaire de } e^{p_i t}$$

f(t) est absolument sommable si $Re[p_i] < 0$ car on est avec des <u>signaux causals</u>

Donc un SLI de transmittance *F(p)* est stable si tous les pôles de *F(p)* sont à partie réelle négative.

S'il y a des pôles sur l'axe imaginaire, il est dit juste oscillant).

Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer la stabilité d'un système sans calculer les pôles.

La fonction de transfert F(p) est un rapport de deux polynômes en *p*. Les racines du dénominateur (pôles de la fonction de transfert) sont soit réelles, soit complexes conjuguées. La décomposition de F(p) en éléments simples est (si on suppose, pour simplifier l'étude, qu'il n'y a pas de racines multiples) donc de la forme :

$$f(p) = \sum_k \frac{C_k}{p - c_k} + \sum_l \frac{A_l . p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$$

Compte tenu de la forme de F(p) la solution temporelle f(t) est de la forme :

$$f(t) = \sum_k e^{c_k t} + \sum_l e^{a_l t} \cos(b_l t + \phi_l)$$

On voit que :

- Si les **parties réelles** sont toutes **négatives**,
 alors la réponse → 0 quand t → ∞, le système revient à sa position d'équilibre, **le système est stable**.
- Si un des **pôles réels est positifs**, le systèmes est **instable**. Il est de type **divergent exponentiel**.
- Si un des **pôles complexes est à partie réelle positive**, le systèmes est **instable**. Il est de type **oscillatoire divergent**.

❖ Cas des pôles nuls et imaginaires purs

Pôles réel double

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $1/p^2$

alors *0* est un pôle double. Ce pole réel entraîne une solution

temporelle de la forme $TL^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = t$ qui tend donc vers l'infini,

le système est instable.

Pôles réel simple

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{p}$. Le système ne retourne pas dans position d'équilibre, mais ne s'en écarte pas non plus car

$$TL^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1.U(t)$$

Pôles imaginaire pur double

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$ alors ± jω est un pôle imaginaire pur double. La solution temporelle de la forme :

$$TL^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^2}\left(\sin\omega.t - \omega.t.\cos\omega.t\right)$$

Le système diverge.

Pôles imaginaire pur simple

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme.

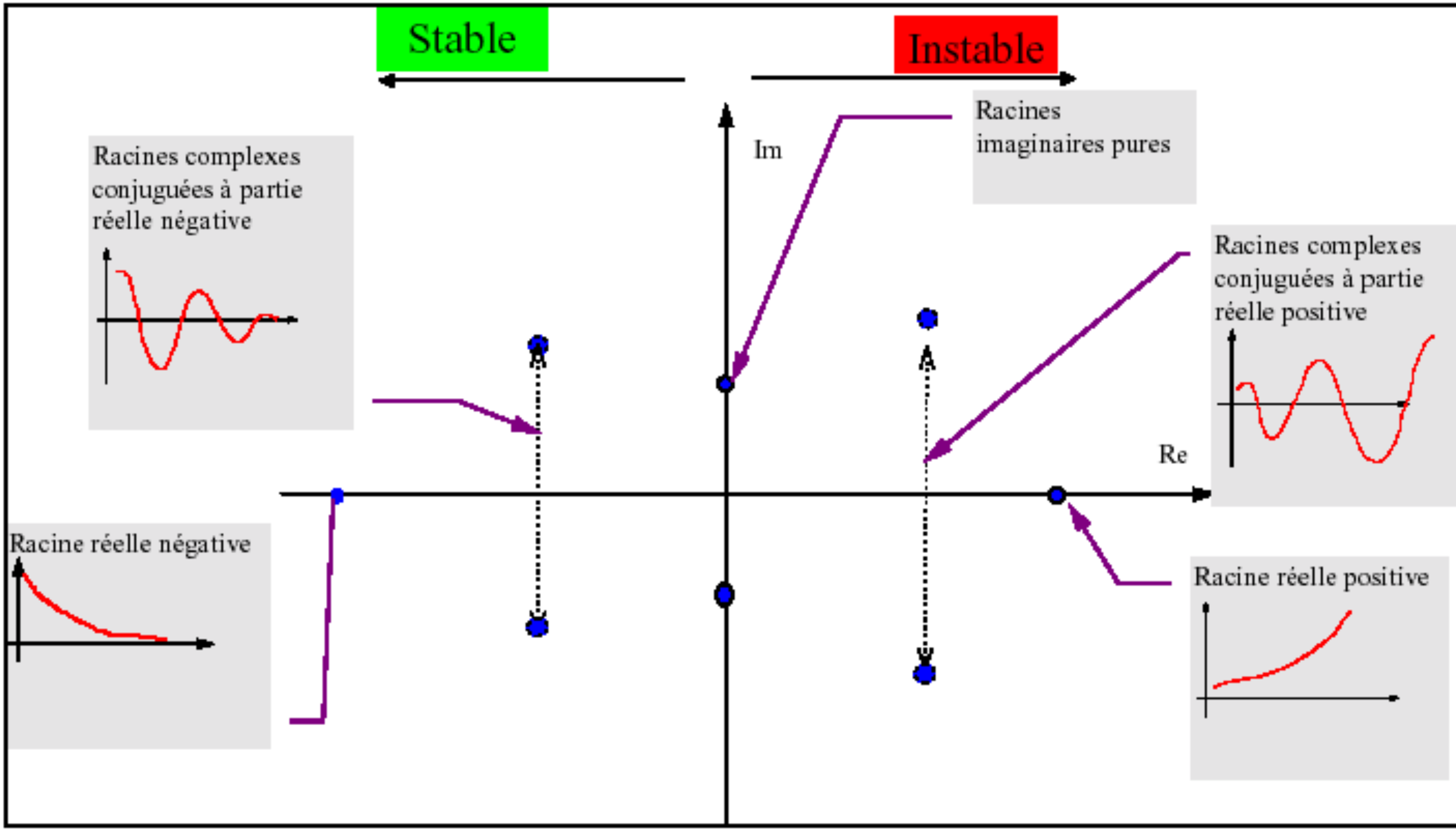
$$\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)}$$

La solution temporelle de la forme :

$$TL^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)}\right]=\frac{1}{\omega}\sin\omega.t$$

Le système est oscillant pur de pulsation ω. Il diverge pas mais oscille toujours. La sortie est donc bornée !.

On dit que le système est **juste oscillant** .



Stable
Instable
Im
Re
Racines imaginaires pures
Racines complexes conjuguées à partie réelle négative
Racines complexes conjuguées à partie réelle positive
Racine réelle négative
Racine réelle positive

Critères de stabilité

Comme nous l'avons vu précédemment, la stabilité d'un système passe par la détermination des pôles de sa fonction de transfert (F(p)). Ce calcul peut être compliqué et long. C'est pourquoi nous donnons dans la suite deux règles rapides pour savoir si un système est stable ou non.

La fonction de transfert peut s'écrire : $F(p) = \dfrac{A_m.p^m + A_{m-1}.p^{m-1} + \ldots + A_0}{B_n.p^n + B_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + B_0} = \dfrac{N(p)}{D(p)}$

La stabilité de F passe par la résolution de l'équation suivante :

$$D(p) = B_n.p^n + B_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + B_0 = 0$$

On peut démontrer qu'une **condition <u>nécessaire</u>** de stabilité est que tous les coefficients de *D(p)* soient du même signe.

Cette condition devient <u>suffisante</u> pour les systèmes du premier et du second ordre.

Critère de Routh-Hurwitz

Ce critère permet d'établir la stabilité d'un système encore à partir des coefficients de son dénominateur. Il permet aussi de déterminer si le système est juste oscillant et dans le cas d'un système instable, il donne le nombre de pôle à partie réelle positive.

On forme le tableau suivant :

Degré	Coefficient			
p^n	B_n	B_{n-2}	B_{n-4}	$\dots$
p^{n-1}	B_{n-1}	B_{n-3}	B_{n-5}	$\dots$
p^{n-2}	$\dfrac{B_{n-1}.B_{n-2} - B_n B_{n-3}}{B_{n-1}}$	$\dfrac{B_{n-1}.B_{n-4} - B_n B_{n-5}}{B_{n-1}}$	$\dots$	
p^{n-3}	$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$				

Colonne des pivots

Enonce du critère :

- Si tous les éléments de la 1ère colonne (pivots) sont de même signe
  $\Rightarrow$ Stabilité et donc Re[pi] < 0

- S'il y a λ changement de signe, il y a λ pôle à partie réelle >0
  $\Rightarrow$ Instabilité

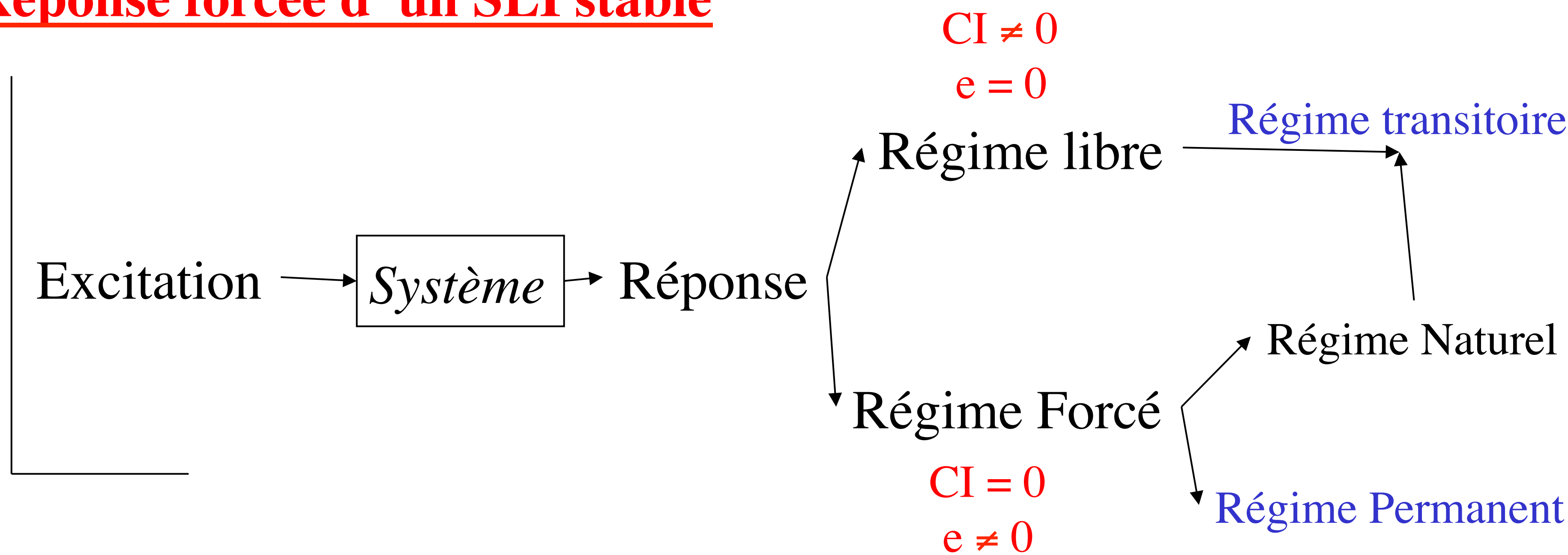
- Une ligne de zéros indique la présence de racines imaginaires pures et le caractère **juste oscillant du système**. Ces racines sont les zéros de l'équation auxiliaire :

Pour continuer le calcul on remplace cette ligne par : $a_1 p^m + a_2 p^{m-2} + \dots = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} p^m & a_1 & a_2 & a_3 \\ p^{m-1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} p^m & a_1 & a_2 & a_3 \\ p^{m-1} & m.a_1 & (m-1).a_2 & (m-2).a_3 \end{array}$$

- Si l'on trouve un pivot nul, on peut continuer en le remplaçant par ε. Les caractéristiques du système seront déduites en le faisant tendre ε vers *0*.

Réponse forcée d'un SLI stable



La réponse d'un système peut être décomposée en deux :

- ✓ Régime Libre : CI ≠ 0 et e = 0
- ✓ Régime Forcé : CI = 0 et e ≠ 0

Le Régime Forcé est aussi décomposé en deux :

- ✓ Régime Naturel
- ✓ Régime Permanent

Si l'on part de l'état de repos, c'est notre cas, le régime transitoire n'est composé que du régime naturel. Autre avantage il est possible de faire l'étude de la réponse d'un système à l'aide de la transmittance car CI=0

$$s_f(t) = s(t) = TL^{-1}\left[F(p)E(p)\right]$$

$$s(t) = \sum_{\text{pôles de F.E}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt}$$

$$\text{Si F et E n'ont} \Rightarrow \text{pas de pôles en communs}$$

$$s(t) = \sum_{\text{pôles de F}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt} + \sum_{\text{pôles de E}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt}$$

$$\sum_i \text{combinaison linaire de } e^{p_i t}$$

$$\text{Si } F(p) \text{ est stable} \Leftrightarrow F(p) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Partie **transitoire** $s_t(t)$

Partie permanente $s_p(t)$

Calcul de la sotie permanente d'un SLI stable dans le cas d'une excitation harmonique

Soit un système de transmittance *F(p)*

F(jω) est la TF de *f(t)* ou la TL prise pour *p=jω*

$$e(t) = \sin(\omega t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow 2 \text{ pôles} : p = \pm j\omega$$

$$s_p(t) = \sum_{\text{pôles de E}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt} = r_{j\omega} + r_{-j\omega}$$

$$r_{j\omega} = \left[(p - j\omega)F(p)e^{pt}\frac{\omega}{(p - j\omega)(p + j\omega)}\right]_{p=j\omega} = \frac{F(j\omega)e^{j\omega t}}{2j}$$

$$r_{-j\omega} = -\frac{F(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\text{On peut aussi noter} : F(\pm j\omega) = |F(\omega)|e^{\pm j\angle F(\omega)}$$

$$s_p(t) = \frac{|F(\omega)|}{2j}\left[e^{j(\omega t + \angle F(\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle F(\omega))}\right]$$

$$s_p(t) = |F(\omega)|\sin[\omega t + \angle F(\omega)]$$

Intérêt de ce résultat

- *F(jω)* est le gain complexe à la pulsation *ω*

|F(ù)| : représente le gain à ω

∠F(ù) : représente le déphasage entre la sortie (s) et l'entrée (e) à ω

- Ce résultat fournit une méthode d'identification (identification harmonique). On peut donc retrouver la transmittance en observant la réponse permanente en régime harmonique.

- La sortie permanente est du même type que la fonction d'entrée.

Allure de la sotie transitoire d'un SLI stable en fonction de la position des pôles de la transmittance

Soit un système de transmittance *F(p)*, on sait que le régime transitoire se calcul :

$$s_t(t) = \sum_{\text{pôles de F}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt}$$

- Si *F(p)* possède un pôle réel simple

$$\text{pôle de } F(p) = \frac{N(p)}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \Rightarrow p = r = -\frac{1}{\tau}$$

$$s_t(t) = \sum_{\text{pôles de F}} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt} = \left[\left(p + \frac{1}{\tau}\right)\frac{N(p)}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)}E(p)e^{pt}\right]_{p=-\frac{1}{\tau}} = \boxed{C^{te}.e^{-p\frac{t}{\tau}}}$$

Si $F(p)$ possède une paire de pôles complexes

$$\text{pôle de } F(p) = \frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]} \Rightarrow p = \begin{cases} p_+ = r + j\omega = -\dfrac{1}{\tau} + j\omega \\ p_- = r - j\omega = -\dfrac{1}{\tau} - j\omega \end{cases}$$

$$s_t(t) = \sum_{\text{pôles de } F} \text{résidus de} F(p)E(p)e^{pt} = \left[(p-p_+)\frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]}E(p)e^{pt}\right]_{p=p_+} + \left[(p-p_-)\frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]}E(p)e^{pt}\right]_{p=p_-}$$

$$s_t(t) = \underbrace{\left[(p-p_+)\frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]}E(p)\right]_{p=p_+}}_{Ce^{j\phi}} e^{\left(-\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t} + \underbrace{\left[(p-p_-)\frac{N(p)}{\left[p-(r+j\omega)\right]\left[p-(r-j\omega)\right]}E(p)\right]_{p=p_-}}_{Ce^{-j\phi}} e^{\left(-\frac{1}{\tau}-j\omega\right)t}$$

$$\boxed{s_t(t) = 2Ce^{-\frac{1}{\tau}t}\cos(\omega t+\phi) = 2Ce^{rt}\cos(\omega t+\phi)}$$

Influence de la position des pôles sur la rapidité et l'amortissement d'un système du deuxième ordre

$$F(p) = \frac{N(p)}{[p-(r+j\omega)][p-(r-j\omega)]} = \frac{N(p)}{p^2 - 2r + (r^2+\omega^2)}$$

Un système de second ordre s'écrit : $\dfrac{1}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$

m : représente le facteur d'amortissement

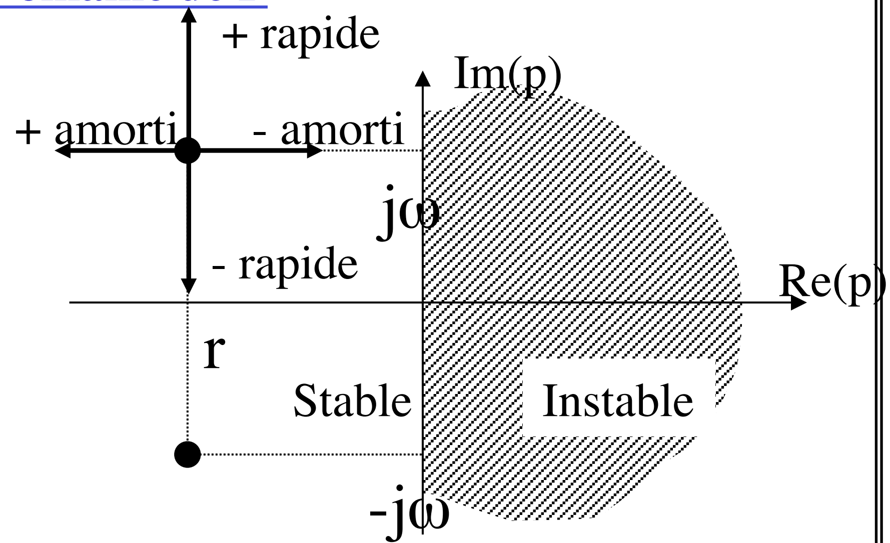
ω_0 : représente la pulsation caractéristique

$\Rightarrow \omega_0^2 = r^2 + \omega^2$

$\Rightarrow m = -\dfrac{r}{\omega_0}$

$$s_t(t) = 2Ce^{rt}\cos(\omega t + \varphi) = 2Ce^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Domaine de P

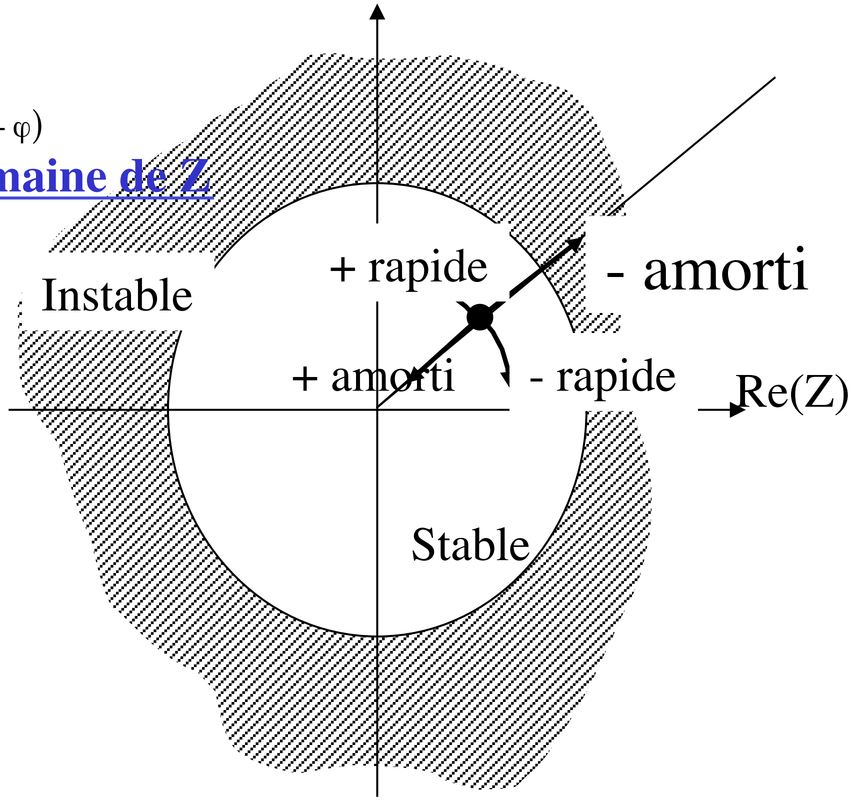


Système stable = pôles dans le demi plan de gauche de p

Le système est d'autant plus amorti que le pôle s'éloigne de l'axe *Im(p)*.

Le système est d'autant plus rapide que le pôle s'éloigne de l'axe *Re(p)*.

Domaine de Z



Système stable = pôles à l'intérieur du cercle unité

Le système est d'autant plus amorti que le pôle est près de l'origine O.

Le système est d'autant plus rapide que le pôle s'éloigne de l'axe *Re(Z)*

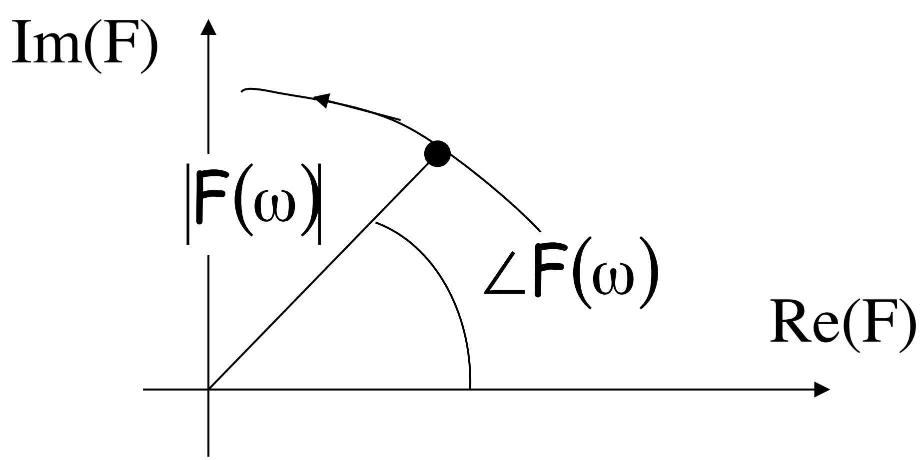
Elles concernent les différentes représentations de $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$
Il y a trois représentations possibles

a La représentation de Bode

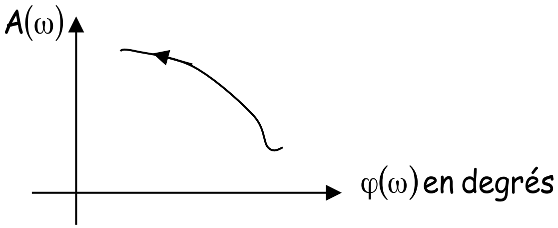
Deux courbes : $\left.\begin{array}{l} A(\omega) = 20 Log|F(\omega)| \\ \varphi(\omega) = \angle F(\omega) \end{array}\right\}$ en fonction de $Log(\omega)$

La Courbe obtenue s'appelle le lieu de transfert, elle est orientée selon les ω croissants

La représentation de Nyquist ou dans le plan complexe



La représentation de Black



elle est orientée selon les ω croissants

Remarque : Les deux dernières représentations sont obtenues à partir de Bode.

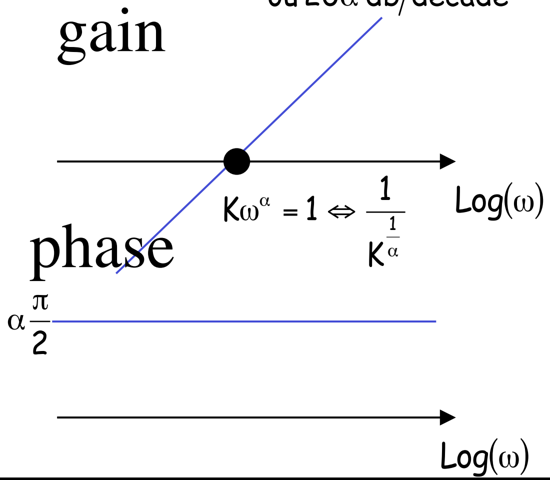
Exemple : Tracés des termes fondamentaux

$F[p] = Kp^{\alpha}$

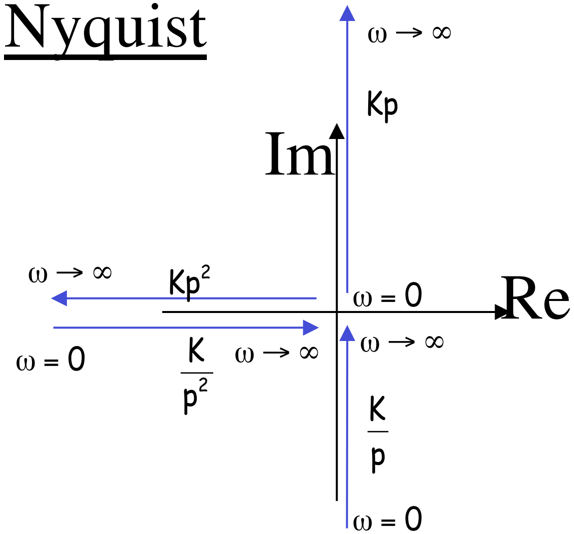
Bode

pente : 6α db/octave

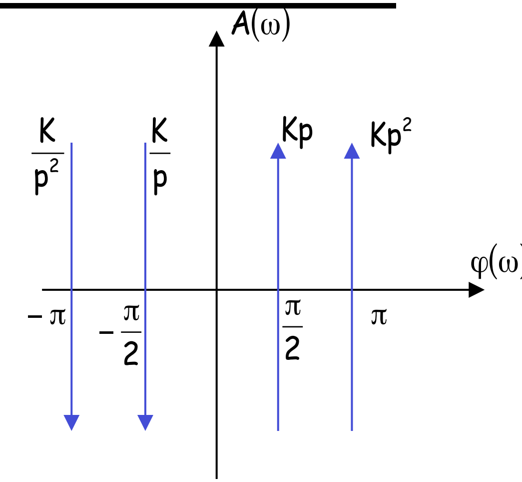
ou 20α db/decade



Nyquist



NICHOLS/Black

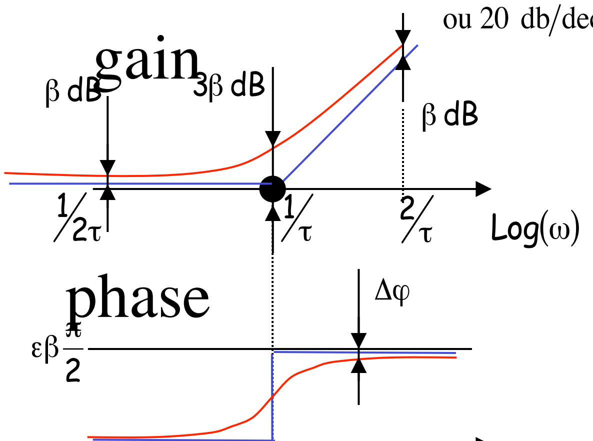


Premier ordre

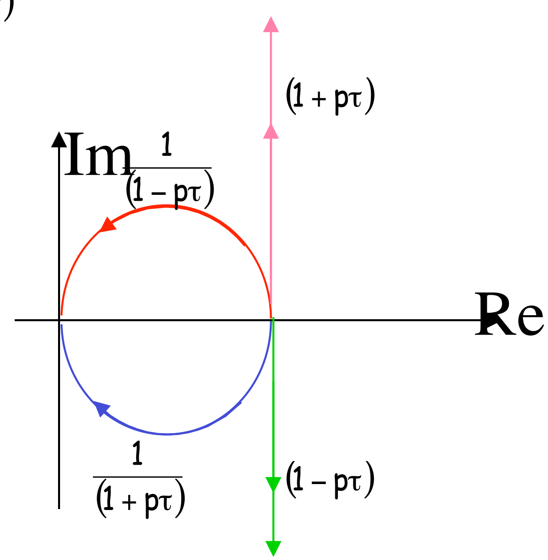
$F[p] = (1 + \varepsilon p\tau)^{\beta}$

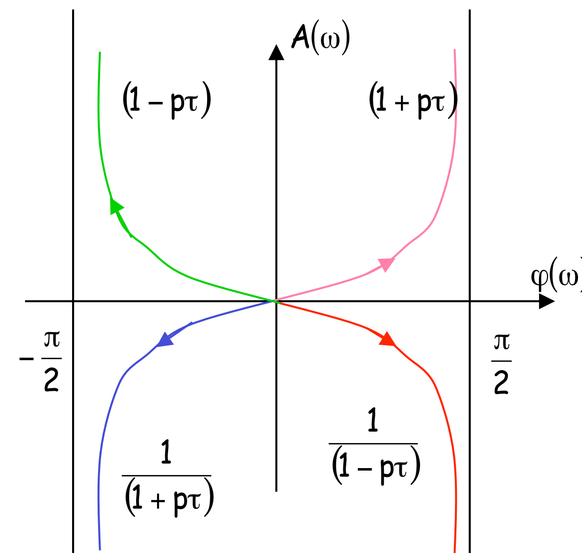
pente : 6 db/octave

ou 20 db/decade



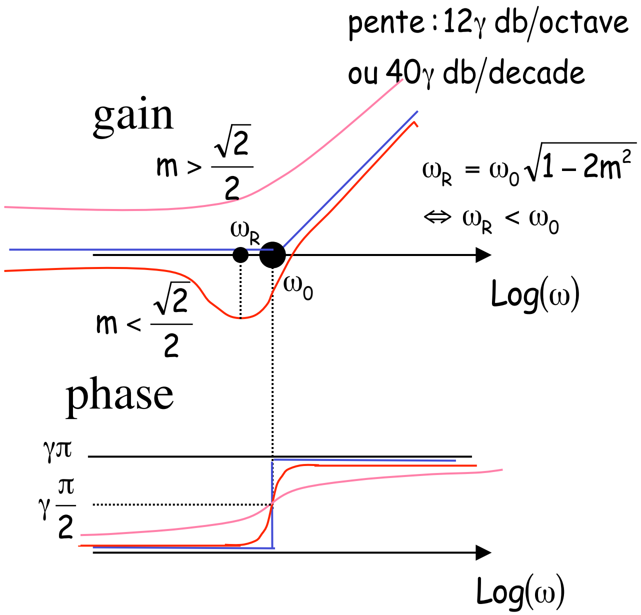
ω	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{2}{\tau}$	$\frac{4}{\tau}$	$\frac{8}{\tau}$	$\frac{16}{\tau}$
Δφ	45°	26.5	14	7	3

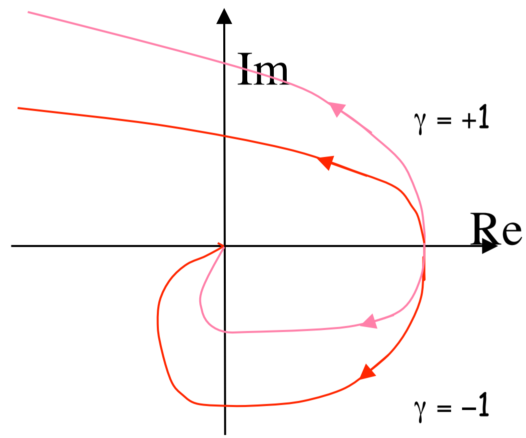


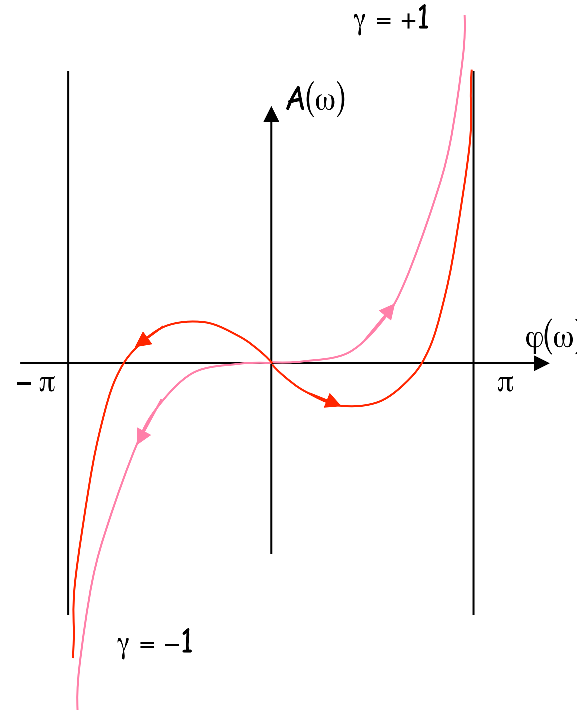


Second ordre

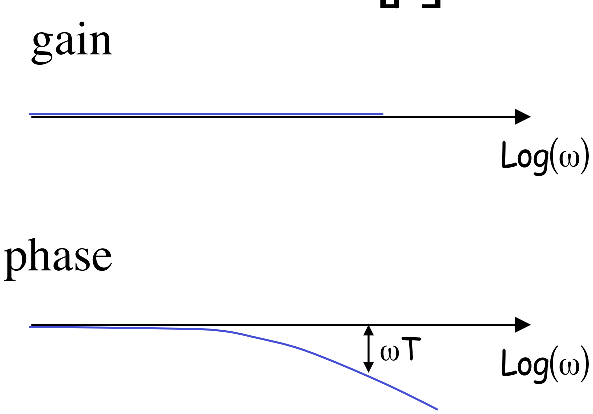
$$F[p] = \left(1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)^{\gamma}$$

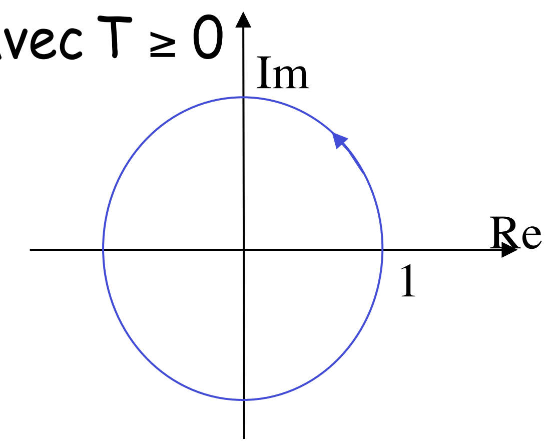


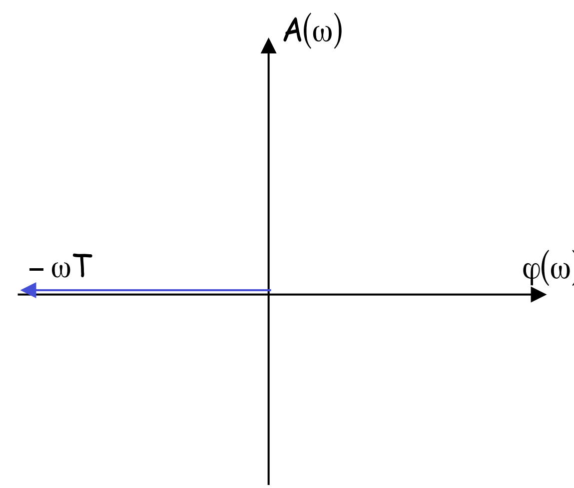




Retard pur $F[p] = e^{-pT}$ avec $T \geq 0$

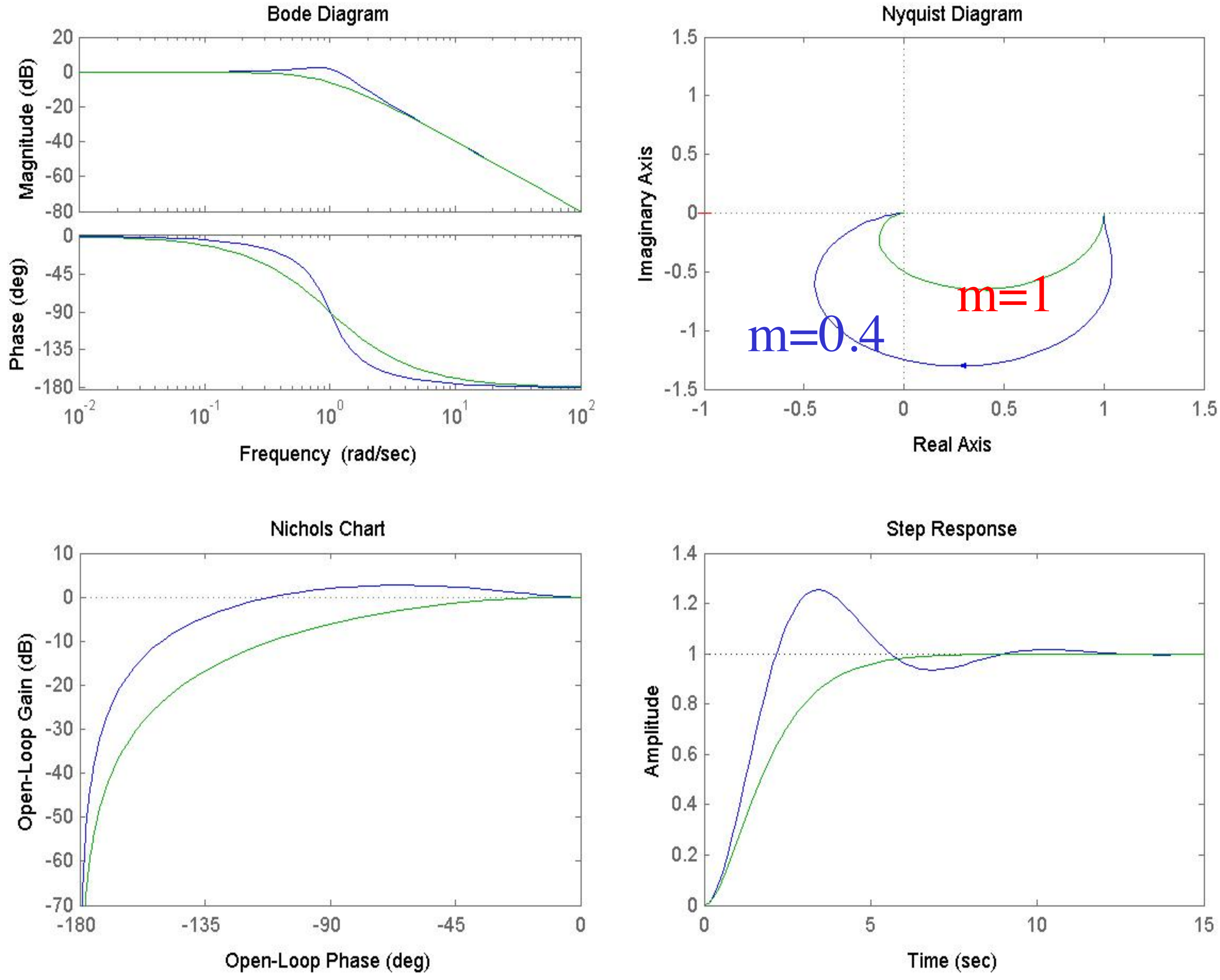






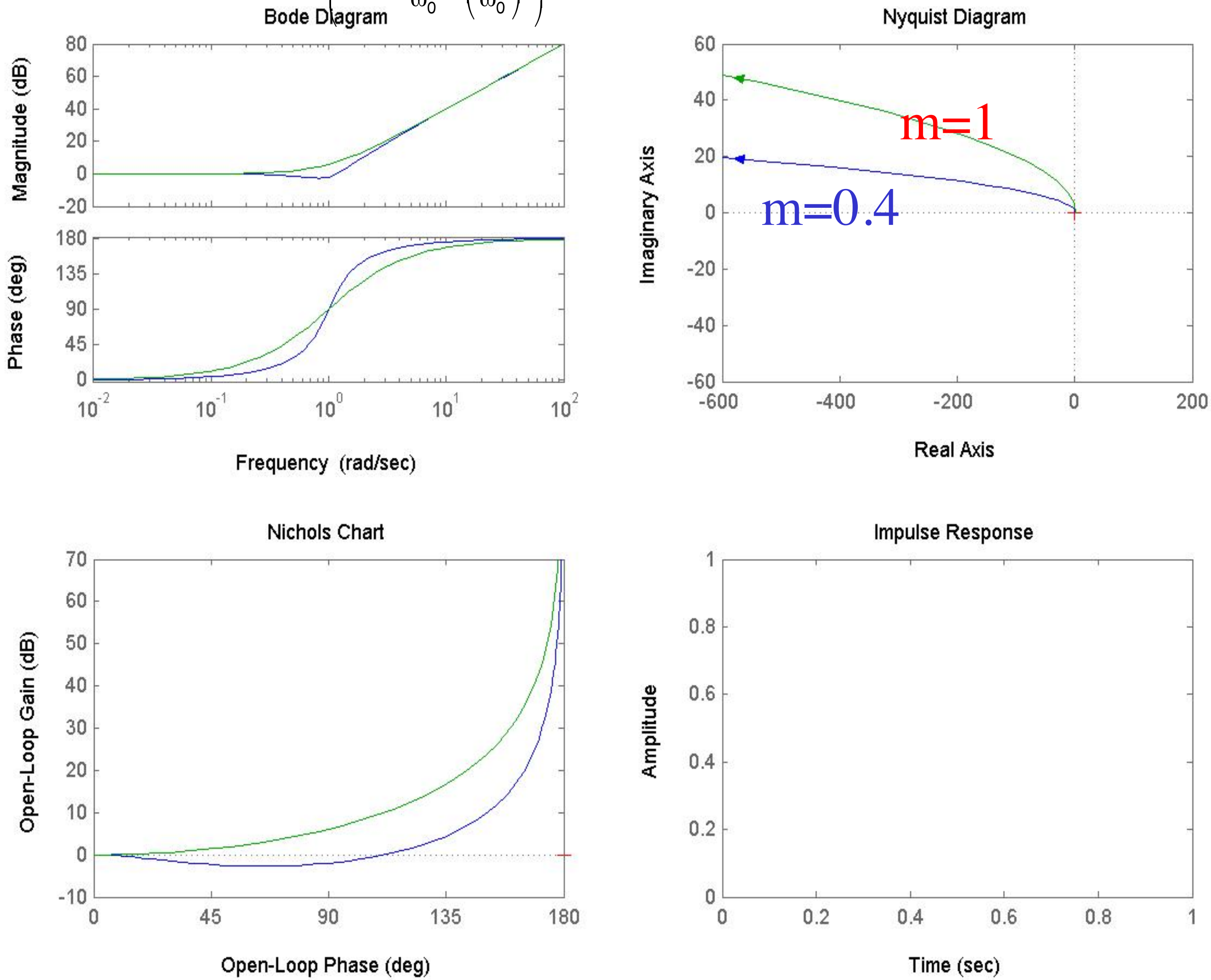
➢ Second ordre

$$F[p]=\left(1+2m\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)^{\gamma} \quad \text{avec } \gamma < 0$$



➤ Second ordre

$$F[p] = \left(1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)^\gamma \quad \text{avec } \gamma > 0$$



Stabilité et Répétabilité

Les circuits analogiques sont affectés par :

- Température
- Age

Tolérance des composants :

2 systèmes analogiques :

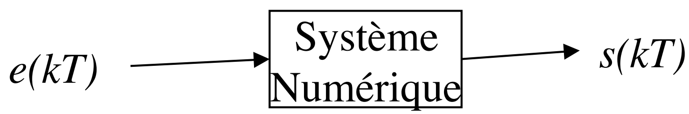
utilisant le même design

les même composantes

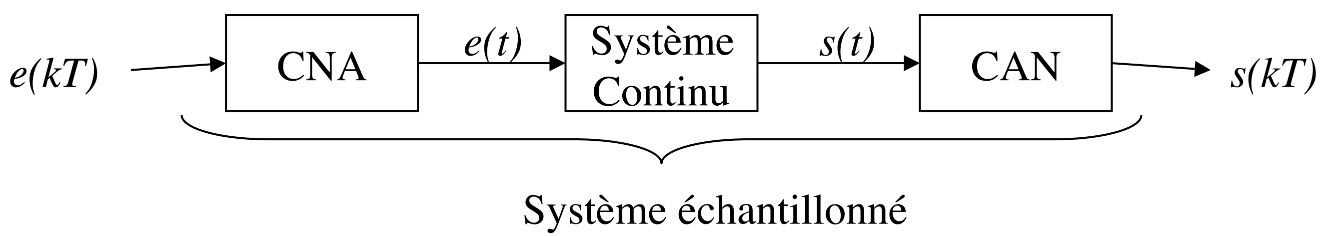
on obtient des différents performances

Les systèmes à temps discret : SLI Numériques, SLI Echantillonnés

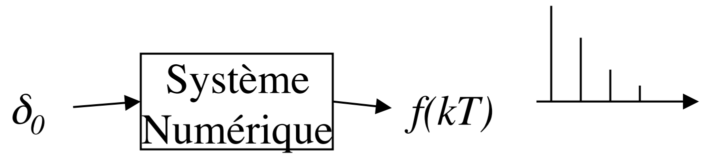
Les systèmes échantillonnés qui sont des systèmes physique donc des systèmes à temps continu mais dont la variable d'entrée *e(t)* est générée par une suite d'échantillons *e(kT)* issu d'un processeur, et dont on ne prélève que des échantillons de sortie *s(kT)* à partir de *s(t)* aux même instants *kT*.



Les systèmes numériques ou purement discret transforment une suite d'échantillons d'entrée *e(kT)* en une suite d'échantillons *s(kT)*, par exemple : processeur effectuant un algorithme de filtrage numérique



SLI Numériques



<u>Réponse impulsionnelle</u> : réponse forcée a une entrée δ_0, soit *f(kT) la RI*

Le système sera invariant, si il répond à δ_{iT} par *f(kT-iT)*

Le système sera linéaire, si pour l'excitation suivante $e = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(iT)\delta_{iT}$

il répond par $s = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(iT) f(kT - iT)$

<u>Réponse forcée</u> : $s(kT)=e(kT)*f(kT)$

Transmittance en Z :

$$TZ[RI] = TZ[f(kT)] = F(Z)$$

$$S(Z) = E(Z).F(Z) \Rightarrow F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)}$$

Réponse forcée

- **Les RII** (réponse impulsionnelle infinie) ou système récursifs obtenus par transposition analogique → numérique $\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{(i)}$

- **Les RIF** (réponse impulsionnelle finie) obtenus par filtrage passe-bas. Il n'y a pas d'équivalents analogique.

Transposition analogique → numérique de l'équation différentielle :

Transposons en numérique la dérivation :

$$s(t) \to s(kT) = s_k$$

$$\dot{s}(t) \to \frac{s(kT) - s((k-1)T)}{T} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{s}(t) \to \frac{\frac{s_k - s_{k-1}}{T} - \frac{s_{k-1} - s_{k-2}}{T}}{T} = \frac{s_k - 2s_{k-1} + s_{k-2}}{T^2}$$

$$\vdots$$

$$s^{(i)}(t) \to \sum_{j=0}^{i} C_j s_{k-j}$$

En automatique on utilisera que les systèmes RII

Systèmes RII ou systèmes récursifs

$$\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i e^{(i)} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{k-i}$$

α_i et β_i sont des constantes dépendantes de a_i et b_i

C'est une équation aux différences d'ordre *n*.

Tout système RII peut être modélisé par cette équation

Transmittance des systèmes RII

Prenons la transformée en Z des deux nombre en utilisant le théorème du retard : $TZ[s_{k-i}] = Z^{-i}.S(Z)$

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{k-i} \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^{n} \beta_i Z^{-i} S(Z) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i Z^{-i} E(Z)$$

$$\Rightarrow F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i Z^{-i}}$$

Rapport de Deux polynômes en Z

Pour trouver la RI il suffit de faire la *TZ^{-1}* de *$F(Z)$*

Pour faire la mise en œuvre (au niveau du processeur) d'un tel système il suffit de transformer **l'équation aux différences** en **équation de récurrence** en isolant **l'échantillon de sortie le plus récent**

Équation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i e_{k-i} \Leftrightarrow s_k = \frac{1}{\beta_0}\left[\sum_{i=0}^{m}\alpha_i e_{k-i} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i s_{k-i}\right]$$

A chaque instant ***kT*** on applique l'équation de récurrence.

Pour ***k=0*** on applique les propriétés du signal d'entrée qui est causal ce qui signifie que **e_{-1} à e_{-m} =0.**

Les *n* valeurs s_{-1} à s_{-n} représentent les conditions initiales. Si le système est initialement au repos, alors on prend **s_{-1} à s_{-n} =0.**

Exercice : On suppose le système de transmittance :

$$F(Z) = \frac{0.1}{Z-0.9}$$

Déterminer l'équation de récurrence, le système est initialement au repos. Puis donner la réponse à l'échelon.

Causalité

Un système *F(Z)* est causal si sa réponse impulsionnelle (RI) est causal, donc si *F(Z)* sous sa forme polynomiale ne comporte pas de puissance positive de Z. En effet, puissance positive de Z ⇒ avance dans le temps

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) Z^{-k}$$

$$\boxed{\text{Causalité} \Rightarrow \text{degré(N)} \leq \text{degré(D)}}$$

Stabilité

> Un système numérique causal est stable, si les pôles de sa transmittance en *Z* sont tous en module inférieurs à 1

$$|Z_i| < 1$$

F(Z) est la TL de la réponse impulsionnelle pour $Z=e^{pT}$,

$$F(Z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)Z^{-k}$$

les pôles p_i de la transmittance doivent être à partie réelle <0, donc les pôles de *F(Z)*, $Z_i = e^{p_iT} = e^{r_iT}e^{j\omega_iT}$ devront être tels que , c' est-à-dire à l' intérieur du cercle unité.

$$\left|Z_i\right| < 1$$

Test de Stabilité

On peut utiliser le critère de Routh Hurwitz dans la mesure où l'on trouve un changement de variable qui fait correspondre au cercle unité en Z, un demi plan gauche en W, on utilise pour cela la transformée bilinéaire :

$$\boxed{W = \frac{Z-1}{Z+1} \text{ ou encore } Z = \frac{1+W}{1-W}}$$

En conclusion, on transforme *F(Z)* en *F(W)* et on applique le critère de Routh-Hurwitz au dénominateur de *F(W)* .

On peut transposer ce qui a été fait pour les systèmes analogique, aux système RII

La réponse forcée se sépare en une réponse transitoire et une permanente :

Réponse permanente en régime harmonique

$$\text{Soit } e(kT) = \sin(\omega kT)$$

$$s_p(kT) = |F(\omega)| \sin(\omega kT + \angle F(\omega)) \quad \text{avec } F(\omega) = F\left(Z = e^{j\omega T}\right)$$

$$s(kT) = TZ^{-1}[F(Z)E(Z)] = s_t(kT) + s_p(kT)$$

$$s_t(kT) = \sum_{\text{pôles de } F(Z)} \text{résidus de} F(Z)E(Z)Z^{k-1} \quad \text{si } k \geq 1$$

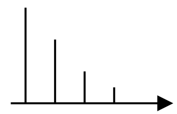
$$= \sum_{\text{pôles de } \frac{F(Z)}{Z}} \text{résidus de} \frac{F(Z)}{Z} E(Z) \text{ si } k = 0$$

$$s_p(kT) = \sum_{\text{pôles de } E(Z)} \text{résidus de} F(Z)E(Z)Z^{k-1}$$

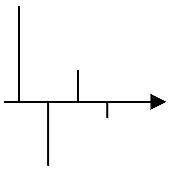
Allure de la réponse transitoire en fonction de la position des pôle de *F(Z)*

- Pôle réel $Z_i = r$

Si $0 < r < 1$



Si $-1 < r < 0$



$$s_t(kT) = \left[(Z-r)FE\right]_{Z=r} r^{k-1} = C^{te}.r^{k-1}$$

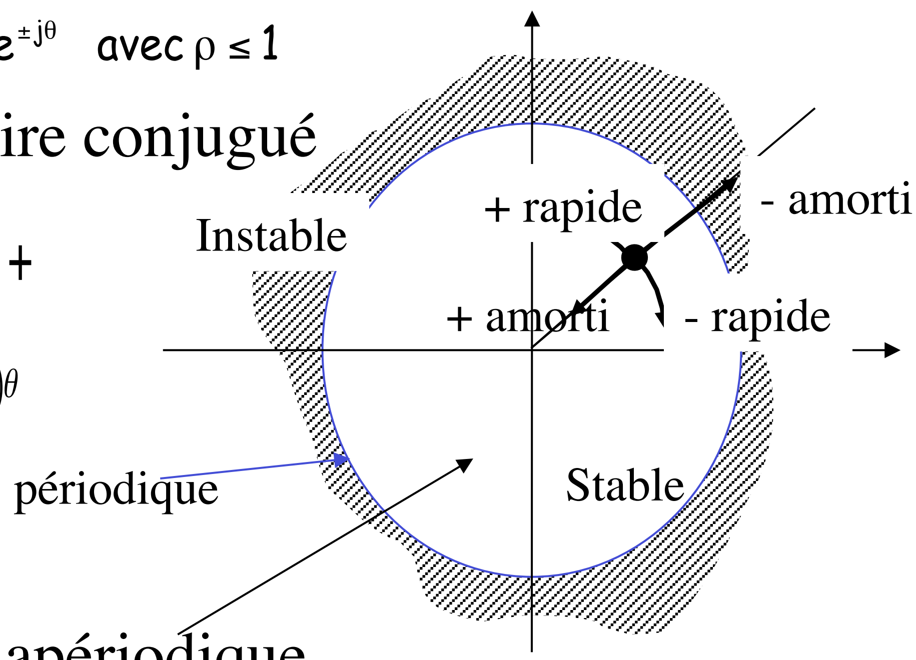
$$Z = p_{\pm} = \rho e^{\pm j\theta} \quad \text{avec } \rho \le 1$$

- Pôle couple imaginaire conjugué

$$s_t(kT) = \left[(Z-p_+)FE\right]_{Z=p_+} \rho^{k-1} e^{j(k-1)\theta} +$$

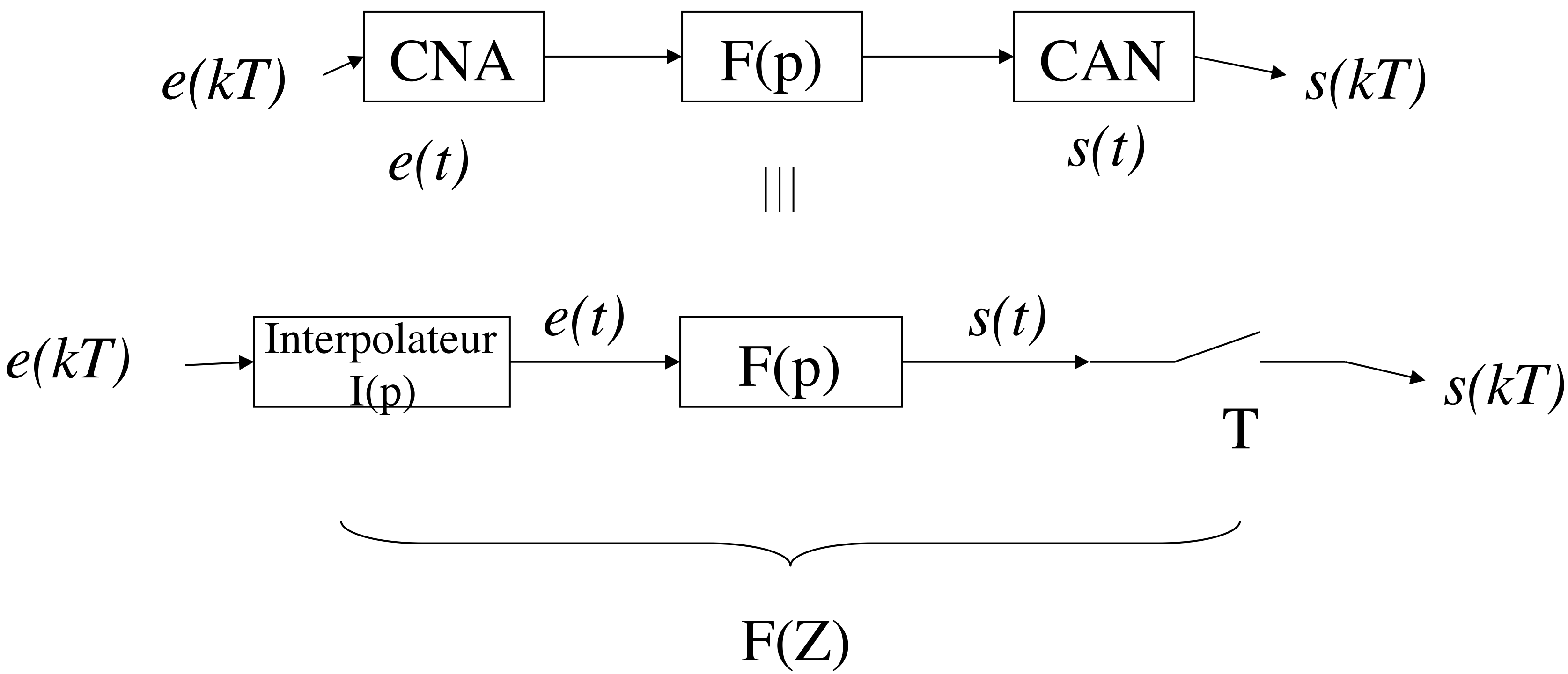
$$+\left[(Z-p_-)FE\right]_{Z=p_-} \rho^{k-1} e^{-j(k-1)\theta}$$

$$= 2C^{te}.\cos\left[(k-1)\theta + \phi\right]$$

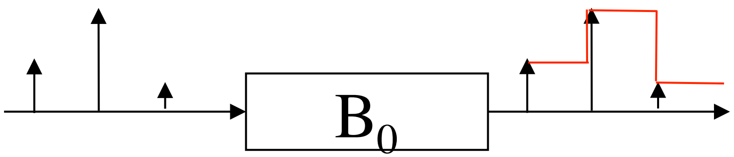


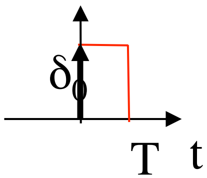
Systèmes échantillonné

Soit un système analogique de transmittance *F(p)* dont l'entrée est fournie par un convertisseur numérique analogique CNA :



Le signal *e(t)* est un signal quantifié résultant d'une interpolation. L'interpolateur est, sauf cas exceptionnel, un bloqueur d'ordre zéro





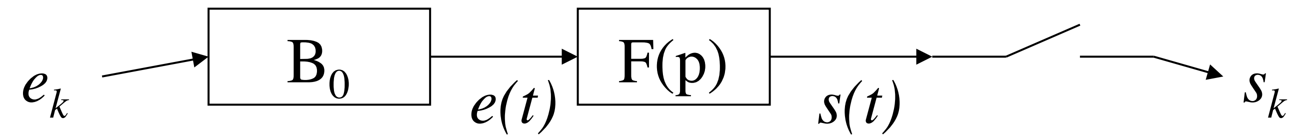
Réponse impulsionnelle du B_0

$$b_0(t) = h(t) - h(t-T) \xrightarrow{TL} \boxed{B_0(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}}$$

On peut aussi écrire : $\boxed{B_0(p) = \frac{1-Z^{-1}}{p}}$

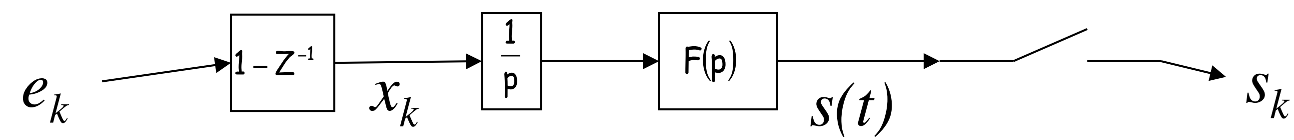
On constate que la transmittance d'un bloqueur est mixte en *p* et *Z*

Calcul de $F(Z)$ avec un B_0



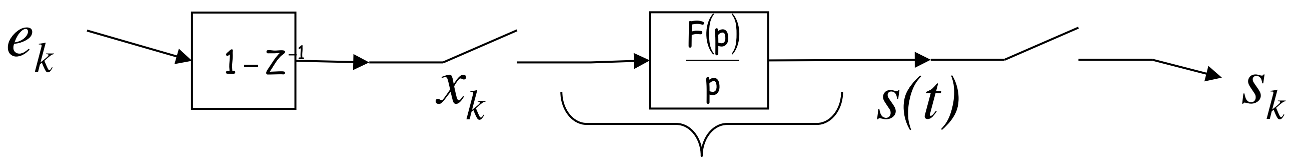
$$B_0(p) = \frac{1 - Z^{-1}}{p}$$

$$\equiv$$



La variable intermédiaire $x(kT)$ est de nature échantillonnée

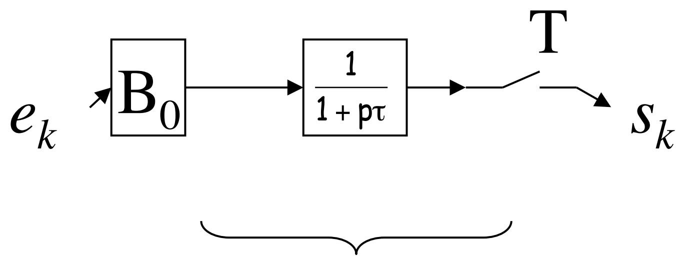
$$\equiv$$



$$TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right) . TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]}$$

Exemple : 1er ordre échantillonné:



$$F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right) TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right]$$

On sait que :

$$TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right] = \sum_{\text{pôles de } \frac{1}{p(1+p\tau)}} \text{résidus de } \frac{1}{p(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1-Z^{-1}e^{pT}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1-Z^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=0} + \left[\frac{1/\tau}{p\left(1-Z^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=-1/\tau}$$

$$= \frac{1}{\left(1-Z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1-Z^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

$$\Rightarrow F(Z) = \left(1-Z^{-1}\right)\left[\frac{1}{\left(1-Z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1-Z^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right] = \frac{Z-1}{Z}\left[\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{\left(Z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{Z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}$$

<u>Cas d'un système ayant un retard pur Tr</u>

$$G(p) = G'(p)e^{-pTr}$$

On choisit *T* tel que *Tr=mT* avec ***m entier***. Pour calculer la <u>transmittance en *Z*</u> il suffit donc de multiplier la <u>transmittance en Z sans retard</u> par Z^{-m}.

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right].Z^{-m}}$$