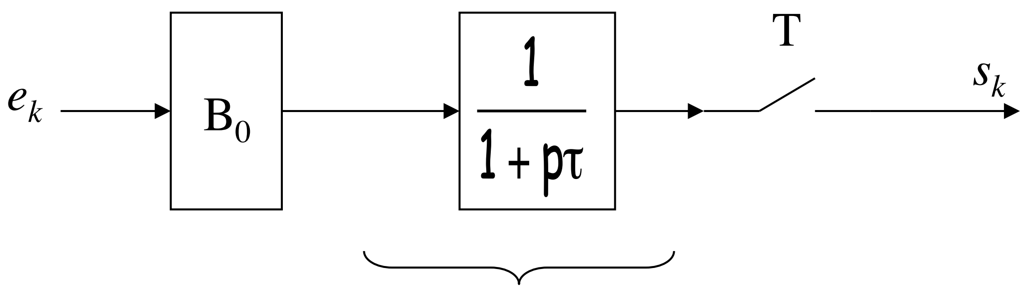
Exemple : 1er ordre échantillonné:



$$F(Z) = \left(1 - z^{-1}\right).TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right]$$

On sait que :

$$TZ\left[\frac{1}{p(1+p\tau)}\right] = \sum_{\text{pôles de } \frac{1}{p(1+p\tau)}} \text{résidus de } \frac{1}{p(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(1+p\tau)}\frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=0} + \left[\frac{1/\tau}{p\left(1\text{-z}^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=-1/\tau}$$

$$= \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1\text{-z}^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

$$\Rightarrow F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right)\left[\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1 - Z^{-1}e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right] = \frac{Z-1}{Z}\left[\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{\left(Z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right]$$

$$\boxed{F(Z) = \frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{Z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}$$

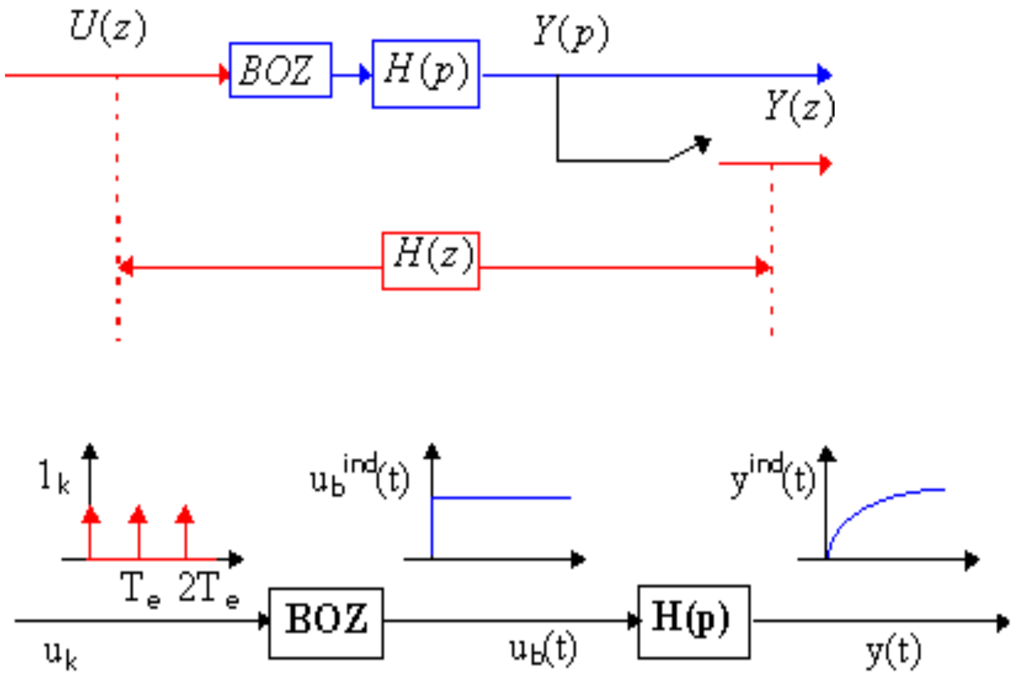
<u>Cas d'un système ayant un retard pur Tr</u>

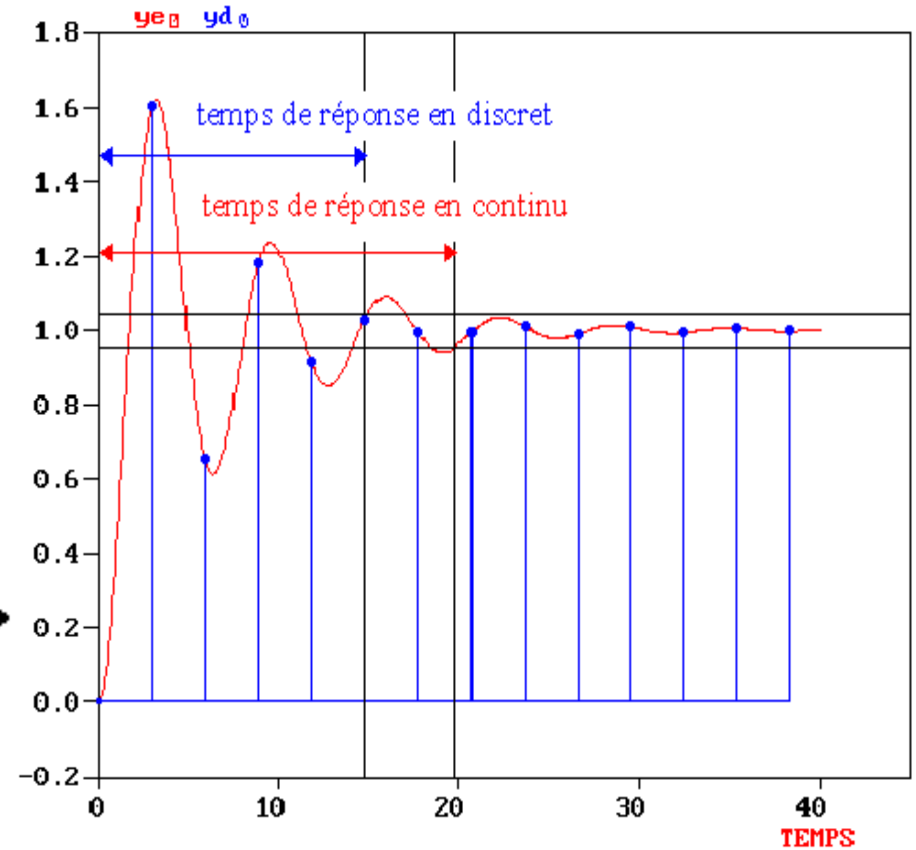
$$G(p) = G'(p)e^{-pTr}$$

On choisit *T* tel que *Tr=mT* avec ***m entier***. Pour calculer la <u>transmittance en *Z*</u> il suffit donc de multiplier la <u>transmittance en Z sans retard</u> par Z^{-m}.

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right].Z^{-m}}$$

Relation entre les temps de réponse d'un système continu avant et après l'échantillonnage de sa fonction de transfert par conservation de la réponse indicielle





Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) placé dans une boucle à retour unitaire avec : $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$ en utilisant

$$\boxed{F(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right).TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{K\left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})}$$

$$p_1 = K(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

<u>Remarque :</u> On n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en BF à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Remarque : Le système en temps continu H(p) est toujours stable, le système échantillonné ne l'ai pas toujours.

$$|p_1| < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

Si le gain statique est fixé

$$T_e < T \ln \frac{1 - K}{1 + K}$$

Choix de la fréquence d'échantillonnage

$$6 f_{BP}^{BF} < f < 25 f_{BP}^{BF}$$

Choix de la période d'échantillonnage pour la régulation numérique (valeurs indicatives)

Type de variable (ou procédé)	Période d'échantillonnage(s)
Débit	1 - 3
Niveau	5 - 10
Pression	1 - 5
Température	10 – 180
Distillation	10 - 180
Asservissements	0.001- 0.05
Réacteurs catalytiques	10 - 45
Cimenteries	20 - 45
Séchage	20 - 45

Précision des asservissements échantillonnées

Erreur de position

$$\varepsilon_p = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en échelon unité}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z-1}{z} \varepsilon(z) \right]$$

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

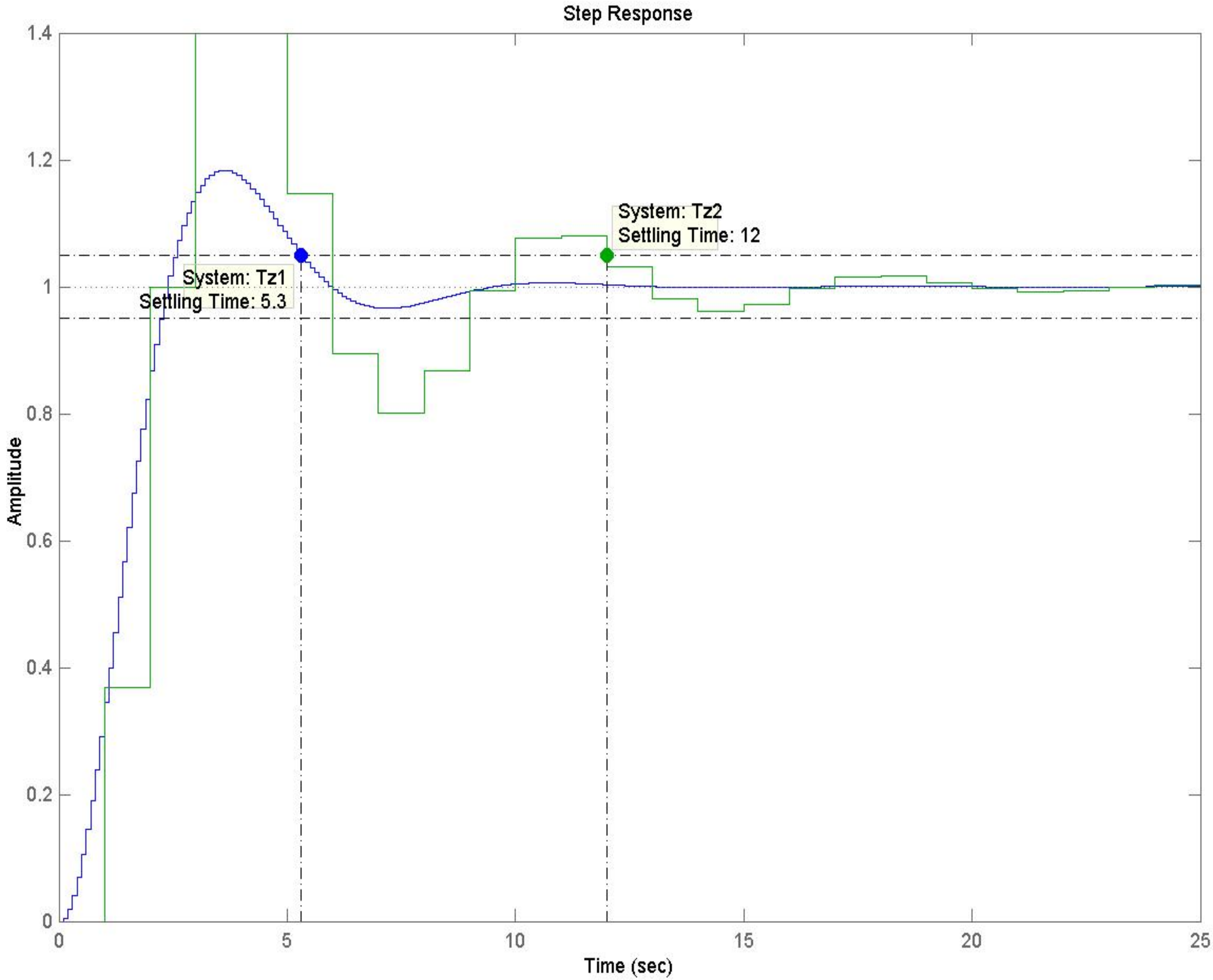
Comme l signal d'entrée est un échelon unité

$$E(z) = \left[\left(\frac{z}{z-1} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right]$$

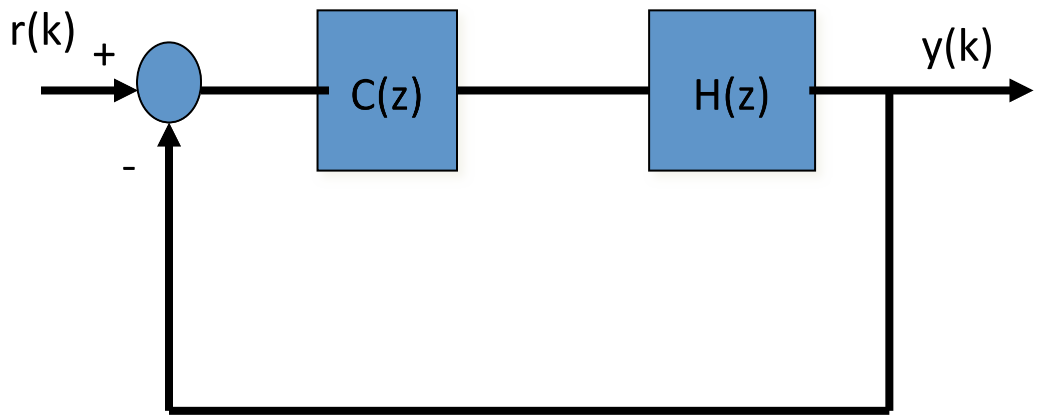
Erreur de vitesse

$$\varepsilon_v = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en rampe}$$

$$E(z) = \left[\left(\frac{T_e z}{(z-1)^2}\right)\right] \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \to 1}\left[\frac{T_e}{(z-1)(1+G(z))}\right]$$


Step Response
System: Tz1
Settling Time: 5.3
System: Tz2
Settling Time: 12
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15
20
25

Précision des systèmes asservis échantillonnés



FTBO $=C(z)H(z)= \dfrac{K}{(z-1)^m}\dfrac{N(z)}{D(z)}$ Avec N(1)=1 et D(1)=1, 0<m<n

Erreur en position (*r(k)=1*)

$$E_p=\lim_{k\to\infty}(r(k)-y(k))=\lim_{z\to 1}(z-1)(R(z)-Y(z))=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})(R(z)-Y(z))$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+FTBO}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+\dfrac{K}{(z-1)^m}\dfrac{N(z)}{D(z)}}=\begin{cases}\dfrac{1}{K+1} & \text{si } m=0\\ 0 & \text{si } m>0\end{cases}$$

Erreur en vitesse ($r(k)=kT_e$)

$$E_v=\lim_{k\to\infty}(r(k)-y(k))=\lim_{z\to 1}(z-1)(R(z)-Y(z))=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})(R(z)-Y(z))$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{T_e}{z-1}\frac{1}{1+FTBO} \quad =\lim_{z\to 1}\frac{T_e}{(z-1)\left(1+\frac{K}{(z-1)^m}\frac{N(z)}{D(z)}\right)} = \begin{cases} \infty & \text{si } m=0 \\ \frac{T_e}{K} & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m>1 \end{cases}$$

Nombre d'intégrateurs	Erreur en position	Erreur en vitesse
m=0	$\frac{1}{K+1}$	∞
m=1	0	$\frac{T_e}{K}$
m=2	0	0

Performances Dynamiques des Systèmes Echantillonnées

Rapidité et limitation du dépassement

Assimiler le fonctionnement quelconque à celui d'un Système de 2éme ordre

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta p}{\omega_n} + 1}$$

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{p_1 T_e})\ (1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e})(z - e^{p_2 T_e})}$$

$$G(z) = \frac{K\left(1 + e^{-2\zeta\omega_n T_e} - e^{-2\zeta\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\left(z^2 + 2z e^{-2\zeta\omega_n T_e} - e^{-2\zeta\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\zeta^2} + e^{-2\zeta\omega_n T_e}\right)}$$

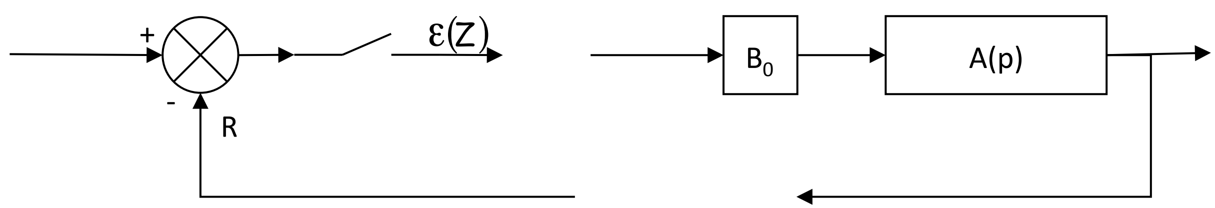
Prévision des Performances Dynamiques

<u>Méthode la plus simple</u> : Rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement en temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier le Bo.

On évalue les performances dynamiques de ce système en assimilant son fonctionnement à celui d'un système de deuxième ordre

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}}$$

$$A(p) = \frac{4}{1+p}$$



Te=0.2s

FTBO du système en temps continu

$$G(p) = \frac{4}{\left(1 + \frac{T_e p}{2}\right)(1+p)} = \frac{4}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)(1+p)}$$

Calculons la pulsation de coupure à 0dB et la marge de phase de ce système :

$$G(\omega)=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}}$$

$$G(\omega)=1 \Leftrightarrow \left(1+\omega^2\right)\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)=16 \Leftrightarrow \frac{\omega^4}{100}+\frac{101\omega^2}{100}-15=0$$

la seule solution réelle positive de cette équation est : $\omega_{C0}=3.6 rad/s$

Temps de montée en boucle fermée $\quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{C0}} \approx 0{,}8s$

Marge de phase $\quad \Delta\varphi=\pi+\varphi\left(\omega_{C0}\right)=\pi-\arctan\frac{\omega_{C0}}{10}-\arctan\omega_{C0}=85^\circ$

Sachant que :

$$\Delta\varphi = \arctan\frac{2\zeta\sqrt{1+K}}{K}$$

$$si\ K >> 1 \quad \Delta\varphi \approx \frac{2\zeta}{\sqrt{K}}$$

$$\zeta_{BF} = \frac{\zeta}{\sqrt{K+1}}$$

$$si\ K >> 1$$

$$\zeta_{BF} = \frac{\zeta}{\sqrt{K}}$$

Donc $\zeta_{BF} \approx 0.85$

Ce coefficient d'amortissemnt en boucle fermée correspond à un dépassement de 0.6 %, (imperceptible)

En conclusion nous considérons que le système échantillonné initial possède pour performances dynamiques

$$t_m \approx 0.8s$$
$$D \approx 0$$

Validation des résultats obtenus

$$A(z) = \frac{4\left(1 - e^{-T_e}\right)}{z + e^{-T_e}}$$

$FTBF$

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{4\left(1 - e^{-T_e}\right)}{\left(z - e^{-T_e}\right) + 4\left(1 - e^{-T_e}\right)} = \frac{0.72}{z - 0.1}$$

$$\left(z - 0.1\right)S(z) = 0.72E(z)$$
$$s_k = 0.1s_{k-1} + 0.72e_{k-1}$$

Validation

$$A(z) = \frac{4\left(1-e^{-T_e}\right)}{z+e^{-T_e}} \Rightarrow H\left(z\right) = \frac{A(z)}{1+A(z)} = \frac{0.72}{z-0.1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.72}{z-1} \Rightarrow s_k = 0.1 s_{k-1} + 0.72 e_{k-1}$$

Représentation d'échantillons D=?

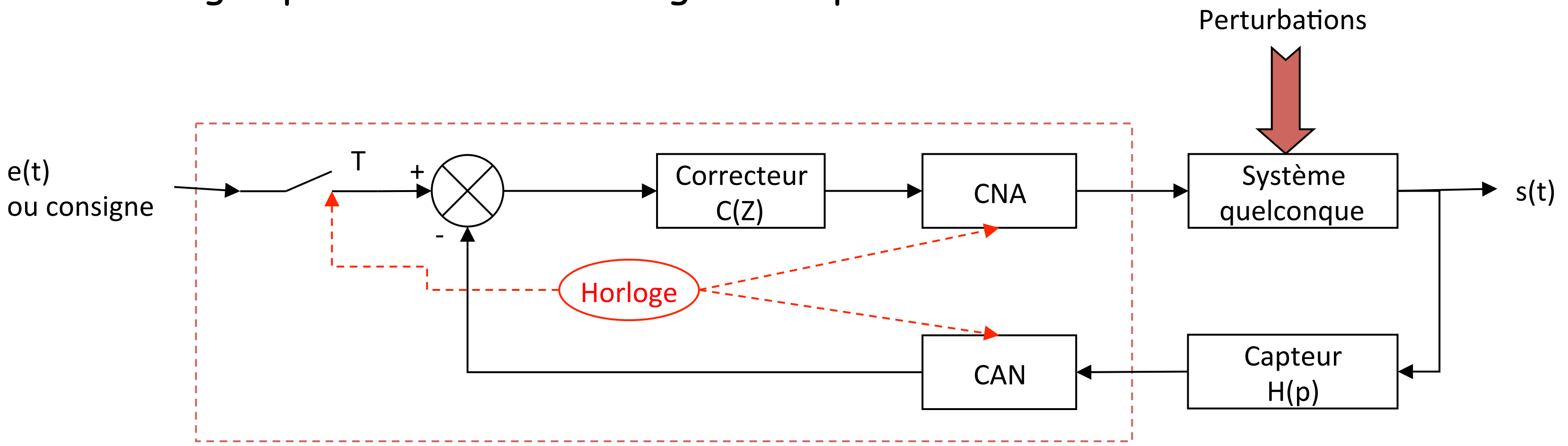
t(s)	**0**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**	**1.2**
ek	1	1	1	1	1	1	1
sk	0	0.720	0.792	0.799	0.800	0.800	0.800

Erreur de position $\varepsilon_p = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+A(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{z-e^{-T_e}}{z-e^{-T_e}+4\left(1-e^{-T_e}\right)} = 0.2 = 20\%$

Commande numérique des SLI par retour de sortie
(Systèmes asservis échantillonnés SAE)

En commande numérique c'est le calculateur qui assure les **fonctions** de **comparaison** et de **correction**. Les avantages de ce type d'asservissement sont multiples :

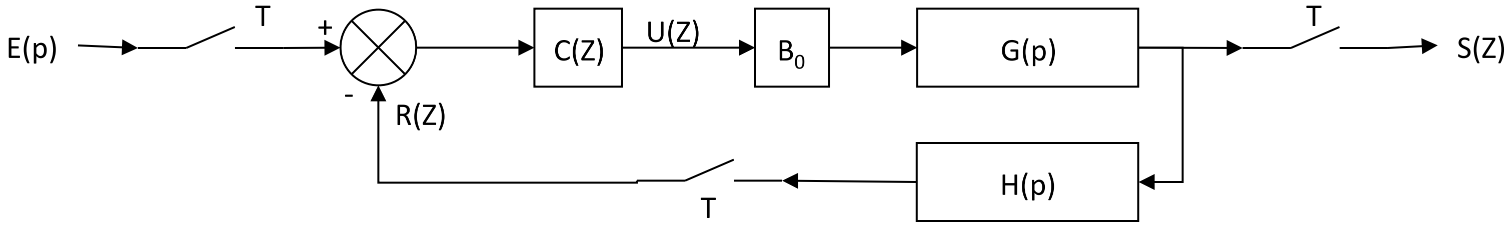
- Souplesse de correction = on peut modifier la correction sans modification au niveau "hardware"
- Possibilité de commande adaptative si les caractéristiques du systèmes changent (cas des systèmes non stationnaires)
- Possibilité d'identification sans ouverture de boucle par changement de la consigne
- La consigne peut elle même être générée par le calculateur



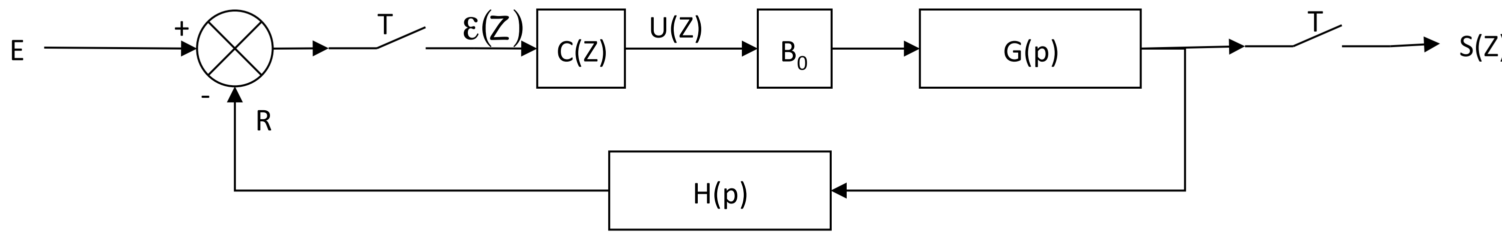
L'horloge interne définit la période d'échantillonnage (T << cte de temps du système)

Analyse des systèmes asservis échantillonnés

1 Schéma fonctionnel et transmittance associés à un SAE



Ce schéma peut aussi se ramené au schéma suivant dit à échantillonnage d'erreur.



a Fonction de transfert en BO (FTBO)

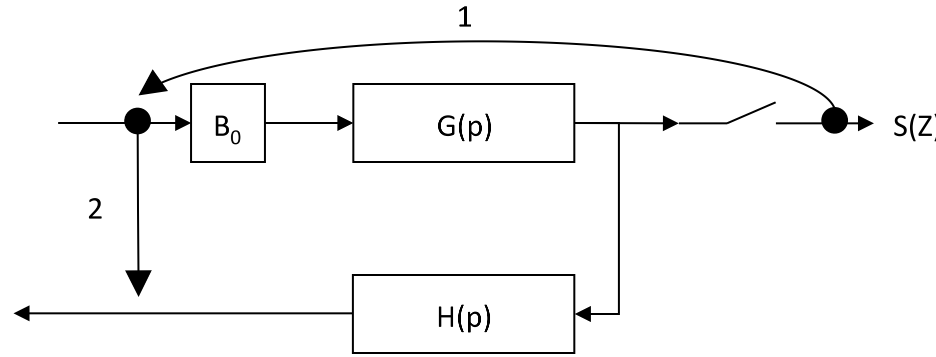
$$T(Z) = \frac{R(Z)}{\varepsilon(Z)} = C(Z)\overbrace{B_0GH}(Z) \quad \text{avec} \quad \overbrace{B_0GH} = T_{nc}(Z) = \left(1 - Z^{-1}\right)TZ\left[\frac{GH}{p}\right]$$

b Fonction de transfert en BF (FTBF)

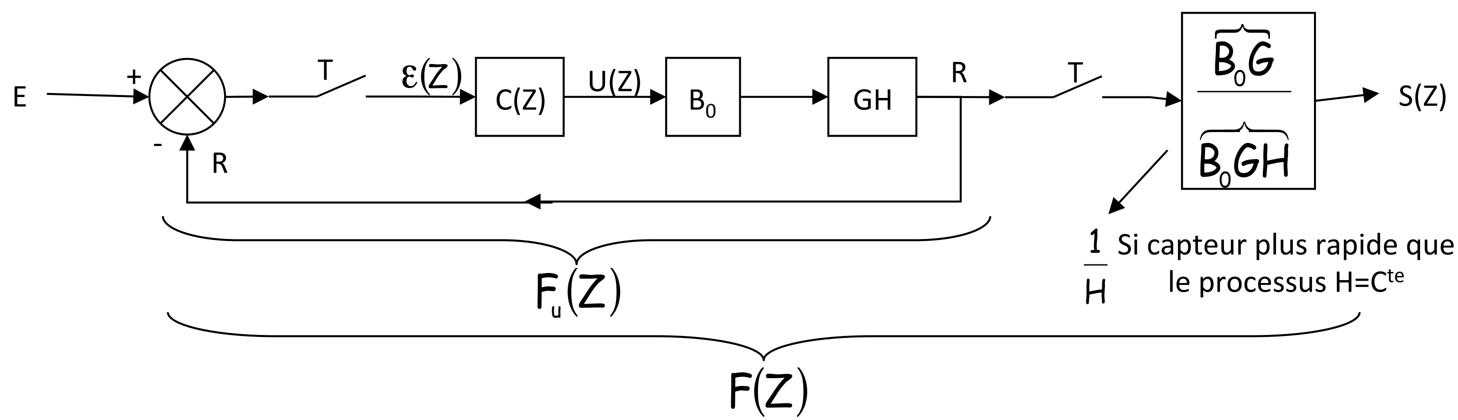
$$F(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{C(Z)\overbrace{B_0G}(Z)}{1 + C(Z)\overbrace{B_0GH}(Z)}$$

$$\Rightarrow F(Z) = \underbrace{\frac{C(Z)\overbrace{B_0GH}(Z)}{1 + C(Z)\overbrace{B_0GH}(Z)}}_{F_u(Z)=\frac{R(Z)}{E(Z)}} \; \underbrace{\frac{\overbrace{B_0G}}{\overbrace{B_0GH}}}_{\frac{S(Z)}{R(Z)} \rightarrow \frac{1}{H}}$$

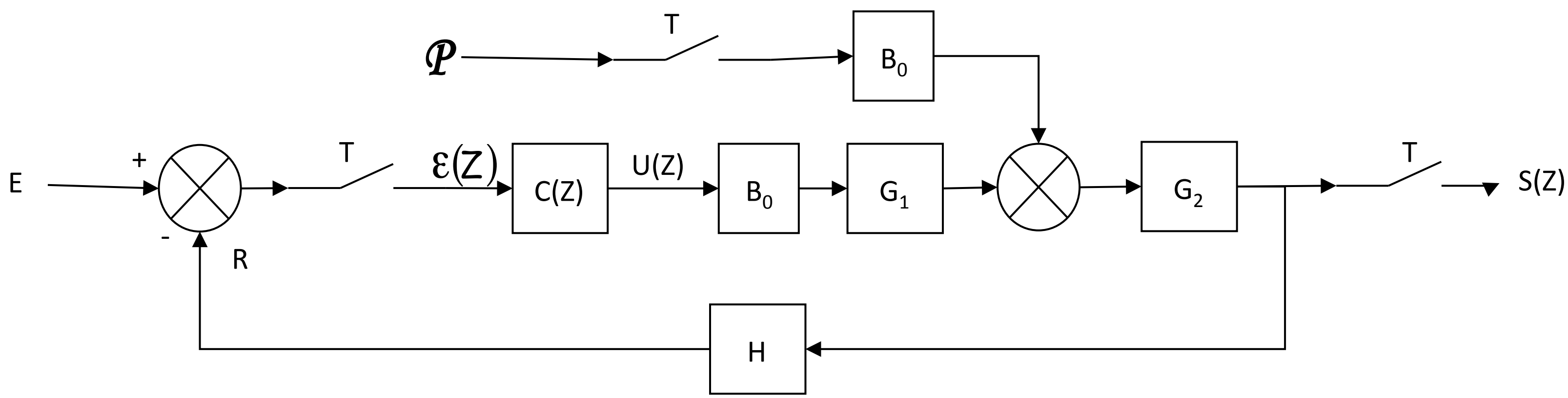
$$\Rightarrow F_u(Z) = \frac{R(Z)}{E(Z)} = \frac{T(Z)}{1+T(Z)}$$



Pour faire apparaître $F_u(Z)$ (retour unitaire), on ramène *S(Z)* avant le bloqueur, puis après *H* (pour ne pas couper une chaîne en *p*)



Transmittance relative aux perturbations



La perturbation intervient analogiquement et n'est pas exploitable, elle sera approximée par une version discrétisée par un bloqueur d'ordre 0 (B_0).

On démontre que :

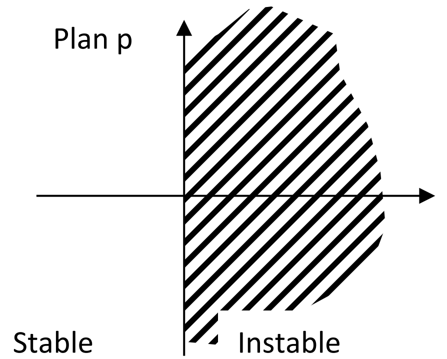
$$\Rightarrow \left[\frac{S(Z)}{\mathcal{P}(Z)}\right]_{E=0} = \frac{\overbrace{B_0G_2} + \overbrace{B_0G_2}C(Z)\overbrace{B_0G_1G_2H}(Z) - C(Z)\overbrace{B_0G_1G_2}(Z)\overbrace{B_0G_2H}(Z)}{1 + C(Z)\overbrace{B_0G_1G_2H}(Z)}$$

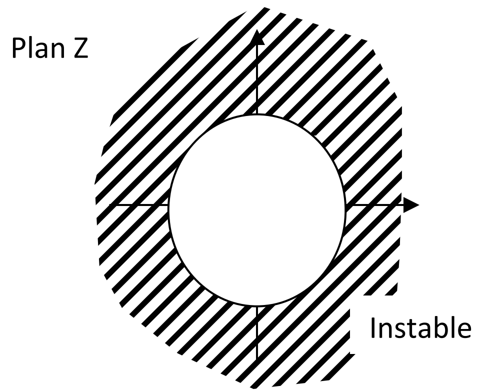
Si le capteur est rapide : H=Cte

$$\Rightarrow \left[\frac{S(Z)}{\mathcal{P}(Z)}\right]_{E=0} = \frac{\overbrace{B_0 G_2}}{1 + C(Z)\overbrace{B_0 G_1 G_2}(Z)H}$$

Stabilité et précision des SAE

Il n'existe pas de représentation graphique pour les transmittances en *Z* donc pas d'équivalent du critère de Nyquist pour les SAE.
Dans le plan *p*, un système est stable si les pôles de sa transmittance sont à partie réelle négatives. On peut transposer cette propriété au plan *Z*, les pôles de la transmittance en *Z* doivent-être tel que $|Z_p| < 1$





Cependant il est toujours possible d'utilise la transformation bilinéaire $W = \dfrac{Z-1}{Z+1}$ ( )

qui fait passer de l'intérieur du cercle unité en Z au 1/2 plan gauche en *W*, **pour obtenir la FTBO et appliquer le critère de Black, ou la FTBF et appliquer le critère de Routh-Hurwitz.**

Exemple d'application :

$$Z = \frac{1+W}{1-W}$$

$$F(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$$\text{avec } D(Z) = Z^2 + (0{,}37K - 1{,}37)Z + 0{,}37 + 0{,}26K$$

$$D(W) = (2{,}74 - 0{,}11K)W^2 + (1{,}26 - 0{,}52K)W + 0{,}63K$$

W^2	2,74-0,11K	0,63K	$\Rightarrow K < \dfrac{2{,}74}{0{,}11} = 24{,}9$
W^1	1,26-0,52K	0	$\Rightarrow K < \dfrac{1{,}26}{0{,}52} = 2{,}42$
W^0	0,63K		$\Rightarrow K > 0$

$$\boxed{\text{Système stable si } 0 < K < 2{,}42}$$

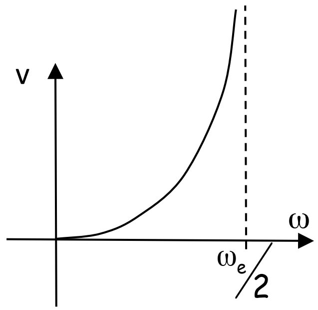
a Représentation graphique en W

$$W = \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{e^{pT}-1}{e^{pT}+1} = \frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \frac{\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)\Big/2j}{\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)\Big/2} j = j.tg\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Analyse harmonique } p \to j\omega \\ \text{Par analogie } W = jv\end{array}\right\} v = tg\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

v est une pulsation fictive

v joue le rôle d'un pulsation appelée pulsation fictive et est telle que : $v = tg\left(\frac{\omega T}{2}\right)$



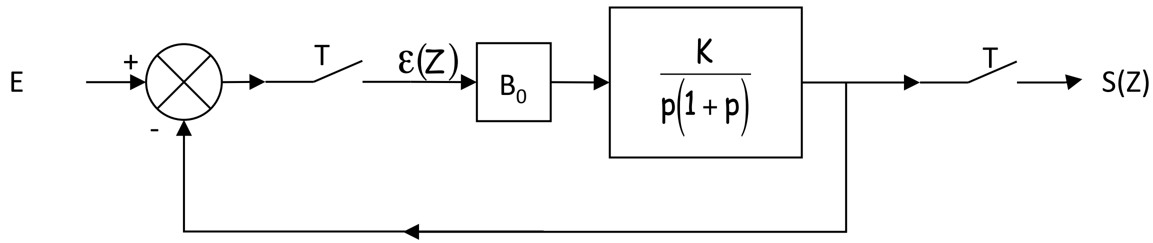
$$\left.\begin{array}{l}\text{avec } \omega \in \left[0, \frac{\omega_e}{2}\right] \\ \Rightarrow \frac{\omega T}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\} \boxed{v \in [0, \infty]} \Rightarrow \text{pour } \omega = \frac{\omega_e}{2} \Rightarrow Z = e^{j\omega T}\Big|_{\omega=\omega_e/2} = e^{j\pi} = -1$$

Conséquence: quand $v \to \infty \Leftrightarrow Z \to -1 \Rightarrow T(Z) \to T(-1)$ qui est réel positif ou négatif

Toutes les représentations graphiques de Bode en W de la FTBO se termine par une horizontale pour les gains et pour la phase.

Exemple:

Etudier la stabilité en fonction de *K* du système échantillonné suivant :



$$\text{FTBO} : T(Z) = K\left(1 - Z^{-1}\right) TZ\left[\frac{1}{p^2(1+p)}\right] \qquad TZ\left[\frac{1}{p^2(1+p)}\right] = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ (p=0)^2 \\ p=-1}} \text{résidus}\left[\frac{1}{p^2(1+p)\left(1 - Z^{-1}e^{pT}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{p^2\left(1 - Z^{-1}e^{pT}\right)}\right]_{p=-1} + \left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{(1+p)\left(1 - Z^{-1}e^{pT}\right)}\right)\right]_{p=0}$$

$$= \frac{Z}{Z - e^{pT}} - \frac{Z(Z - T - 1)}{(Z-1)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T(Z) &= K\left(1 - Z^{-1}\right)\left[\frac{Z}{Z - e^{pT}} - \frac{Z(Z - T - 1)}{(Z-1)^2}\right] \\ &= K\left[\frac{Z-1}{Z - e^{pT}} - \frac{Z - (T+1)}{Z-1}\right] \end{aligned}}$$

Faisons le changement de variable de la transformation bilinéaire :

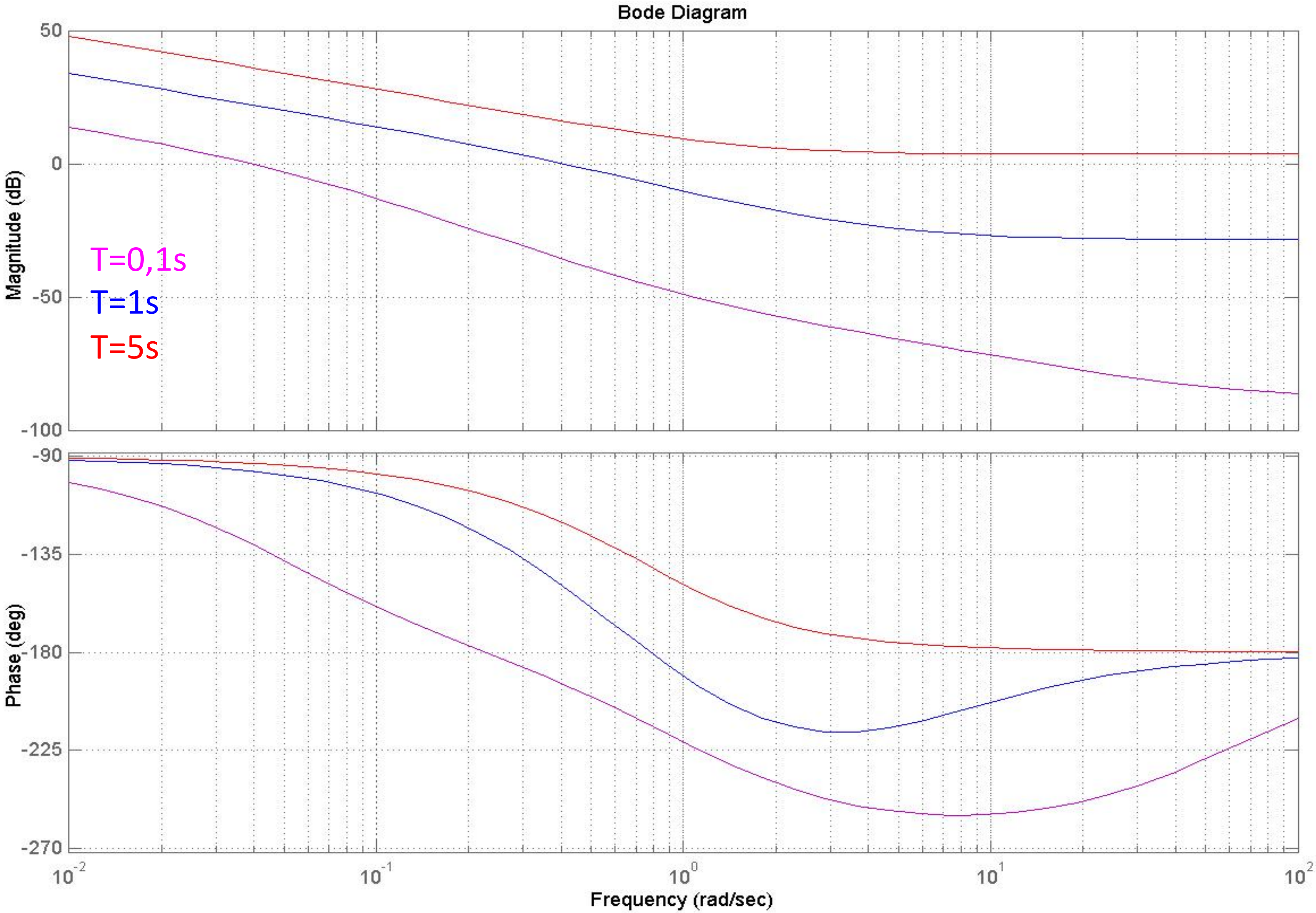
$$Z = \frac{1+W}{1-W}$$

$$T(W) = \frac{KT}{2}\,\frac{(1-W)\left(1 + W\,\dfrac{T-2+(2+T)e^{-T}}{T\left(1-e^{-T}\right)}\right)}{W\left(1 + W\,\dfrac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}}\right)}$$

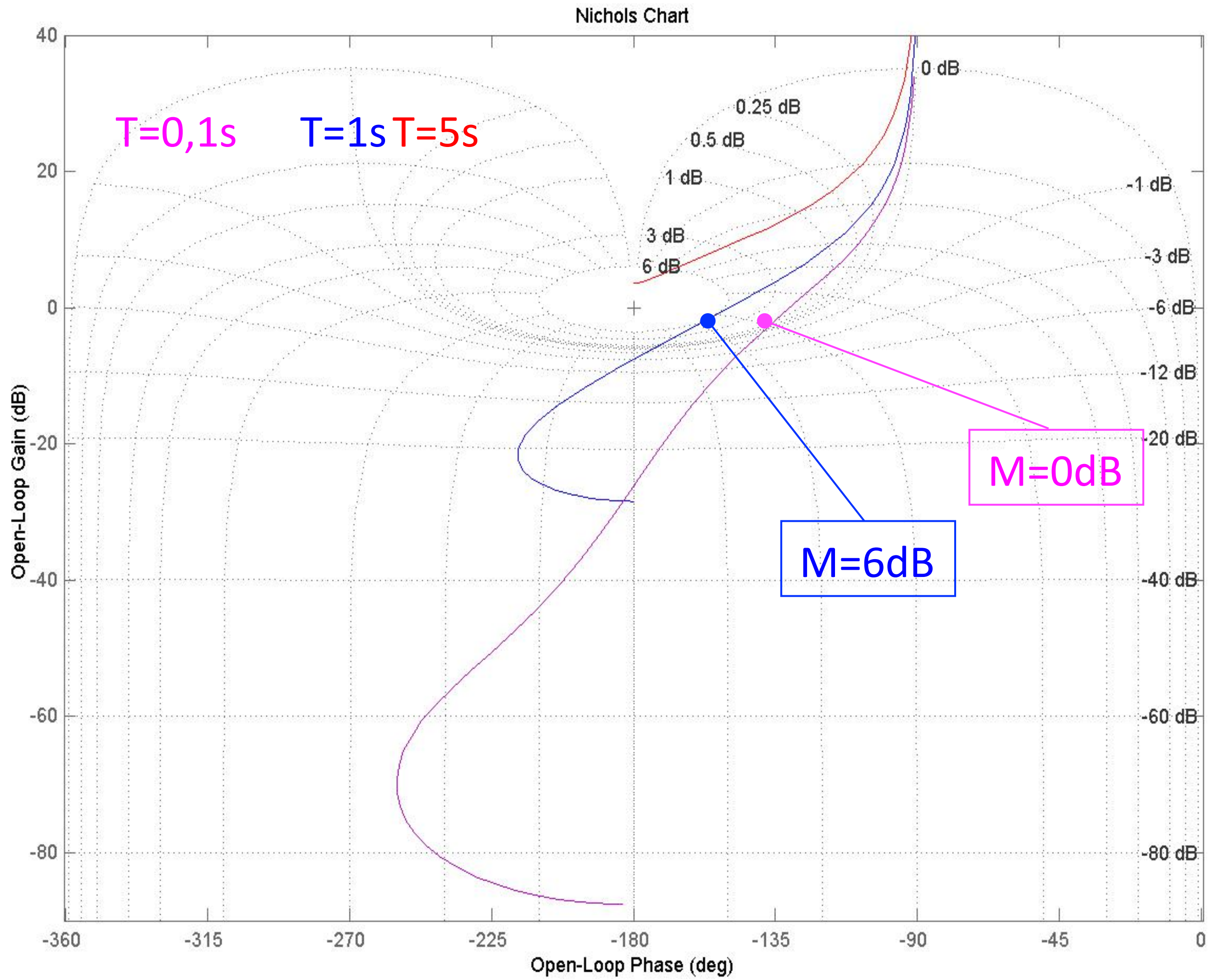
Système instable en BO (1 pôle à l'origine)

$$T(W) = \frac{KT}{2}\,\frac{(1-W)\left(1 + \dfrac{W}{W_1}\right)}{W\left(1 + \dfrac{W}{W_2}\right)}$$

Analyse harmonique W = jv



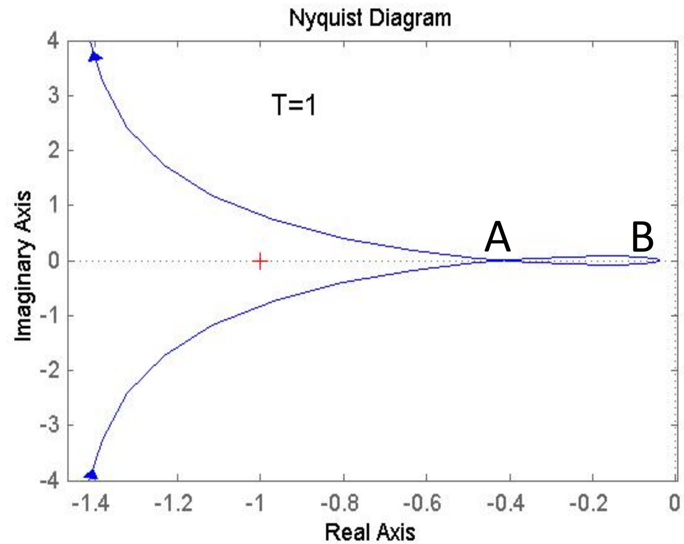
Il est préférable de travailler à un fréquence d'échantillonnage grande

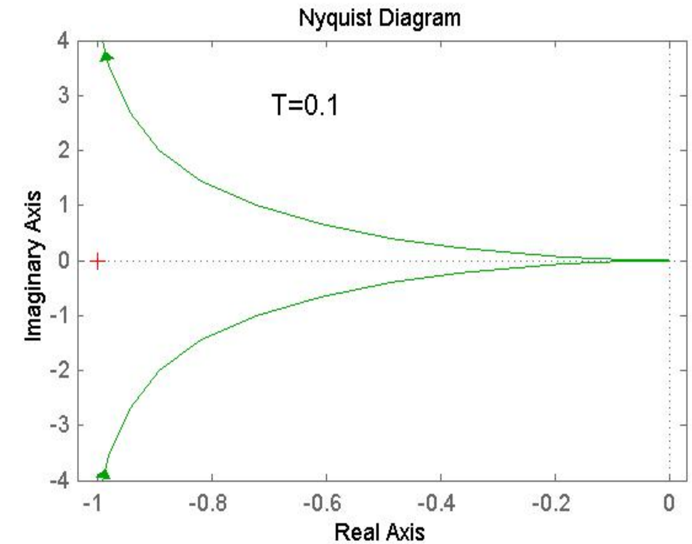


Quelques remarques

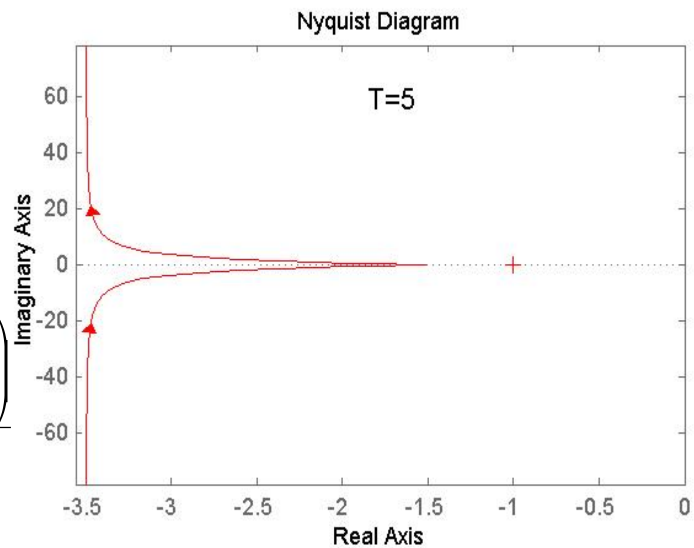
- ✓ La précision dynamique est d'autant meilleure que T petite
- ✓ Pour T=5, le système est instable en BF
- ✓ Pour T=0,1 la précision dynamique est correcte
- ✓ Pour T=1, il y a lieu de multiplier la TBO par un facteur K<1 pour diminuer le gain de résonance , ceci au détriment de la BP.

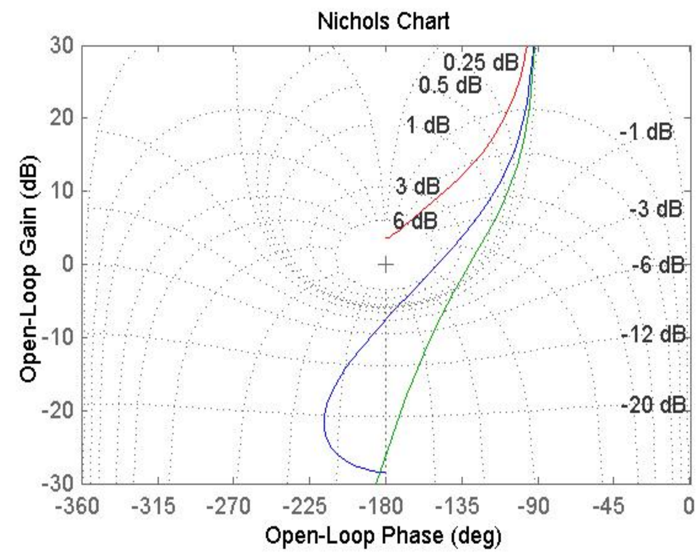
Système stable en BF si on entour pas le point critique -1 puisque pas de pole à partie réelle positive pour *T(W)*





<u>Calcul des abscisses de A et B</u>





$$T(W) = \frac{KT}{2}\,\frac{(1-W)\left(1+\frac{W}{W_1}\right)}{W\left(1+\frac{W}{W_2}\right)}$$

$$\mathrm{Im}\left[T(jv)\right] = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{W_1 W_2}{W_1 - W_2 - 1}}$$

A : v=0,78
B : v⟶∞

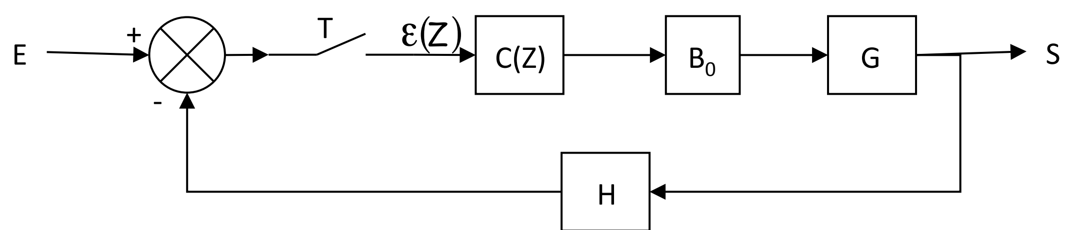
Il suffit ensuite de déterminer les valeurs limites de K pour que le critère de Nyquist soit vérifié en calculant Re[T(jv)].

Précision statique

Elle est définie exactement de la même façon que pour le cas continu. On étudiera donc que les erreurs stationnaires vis à vis de l'entrée principale (consigne).

Cependant pour annuler les effets permanents d'une perturbation en $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$,il faut introduire des pôles Z=1 d'ordre *n* et l'erreur stationnaire constante (la suivante) sera d'autant plus petite que le gain en amont (G) de la perturbation est élevé

a Erreur stationnaire ε_{0n} vis à vis de l'entrée principale



$$\varepsilon(Z) = \frac{E(Z)}{1+T(Z)}$$

$$T(Z) = C(Z)\overbrace{B_0 GH}(Z)$$

$$\text{avec comme entrée} : \frac{(kT)^{(n-1)}}{(n-1)!}u(kT)$$

On applique le théorème de la valeur finale : $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT) = \lim_{Z\to 1}(1 - Z^{-1})\varepsilon(Z)$

$$\text{Echelon} : u(kT) \xrightarrow{TZ} \frac{Z}{Z-1}$$

$$\text{Rampe} : kTu(kT) \xrightarrow{TZ} \frac{TZ}{(Z-1)^2}$$

$$\text{Parabole} : \frac{1}{2}(kT)^2 u(kT) \xrightarrow{TZ} \frac{T^2}{2}\frac{Z(Z+1)}{(Z-1)^3}$$

$$\varepsilon_{01} = \lim_{Z\to 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{Z}{Z-1}$$

Consigne = échelon ou constante

$$\varepsilon_{01} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+T(1)} & \text{si pas de pôle } Z = 1 \\ 0 & \text{si pôle } Z = 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{02} = \lim_{Z\to 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{TZ}{(Z-1)^2}$$

Consigne = rampe

$$\varepsilon_{02} = \lim_{Z\to 1} \frac{T}{(Z-1)T(Z)} \begin{cases} \infty & \text{si pas de pôle } Z=1 \\ \left[\dfrac{T}{(Z-1)T(Z)}\right]_{Z=1} & \text{si un pôle } Z=1 \\ 0 & \text{si 2 pôles } Z=1 \text{ ou plus} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{03} = \lim_{Z\to 1} \frac{Z-1}{Z} \frac{1}{1+T(Z)} \frac{T^2 Z(Z+1)}{2(Z-1)^3} = \lim_{Z\to 1} \frac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)} \begin{cases} \infty & \text{si moins de 2 pôles } Z=1 \\ \left[\dfrac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)}\right]_{Z=1} & \text{si 2 pôles } Z=1 \\ 0 & \text{si 3 pôles } Z=1 \text{ ou plus} \end{cases}$$

Consigne = parabole

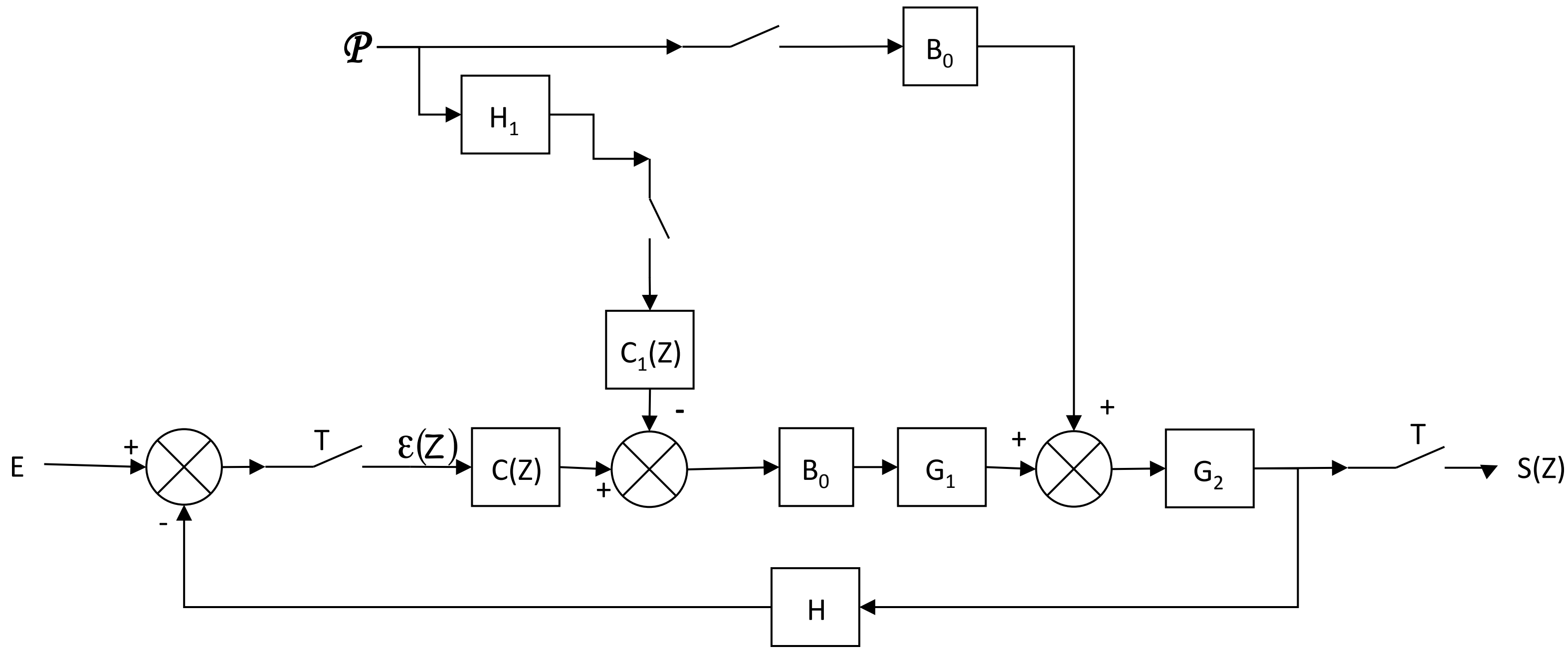
En résumé

α \ ε_{0n}	ε_{01}	ε_{02}	ε_{03}
0	$\frac{1}{1+T(1)}$	∞	∞
1	0	$\left[\frac{T}{(Z-1)T(Z)}\right]_{Z=1}$	∞
2	0	0	$\left[\frac{T^2}{(Z-1)^2 T(Z)}\right]_{Z=1}$

Commande des systèmes asservis échantillonnés

1 Traitements des perturbations mesurables

Pour annuler formellement l' effet des perturbations mesurables (P(t)), on l' utilise l'approximation étagée (B_0) de P(t)



On prendra $C_1(Z)$ de tel façon que $\overbrace{B_0G_2} = H_1C_1(Z)\overbrace{B_0G_1G_2}$

H$_1$ est supposé rapide

$$\Rightarrow C_1(Z) = \frac{\overbrace{B_0G_2}(Z)}{H_1\overbrace{B_0G_1G_2}(Z)}$$

Critères de régulation

- Une régulation doit :
  - être **précise** : $\varepsilon(t) = \text{consigne} - \text{mesure} \quad \varepsilon(t)_{t\to\infty} \to 0$
  - suffisamment **stable** :
    - M_ϕ et M_G (diagrammes de Bode et Nyquist)

  - la plus **rapide** possible, sous contrainte des deux critères précédents :
    - t_r, temps de réponse, minimum (réponse indicielle)
    - B, bande passante, maximum (diagramme de Bode)

Le dilemme stabilité-rapidité

- Le réglage du gain est déterminant dans la synthèse d'un correcteur et résulte d'un compromis :
  - K_c faible : système stable mais « mou », erreurs de position (si pas d ' intégration) et de traînage (si une intégration) importantes
  - K_c élevé : système plus réactif, erreurs plus faibles mais risque d ' instabilité

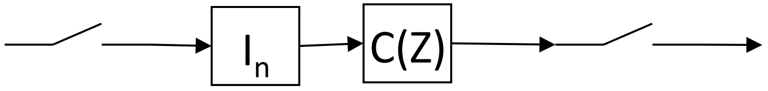
Méthodes fréquentielles

a Synthèse de *C(p)* dans le domaine analogique puis transposition analogique numérique (Interpolateur)

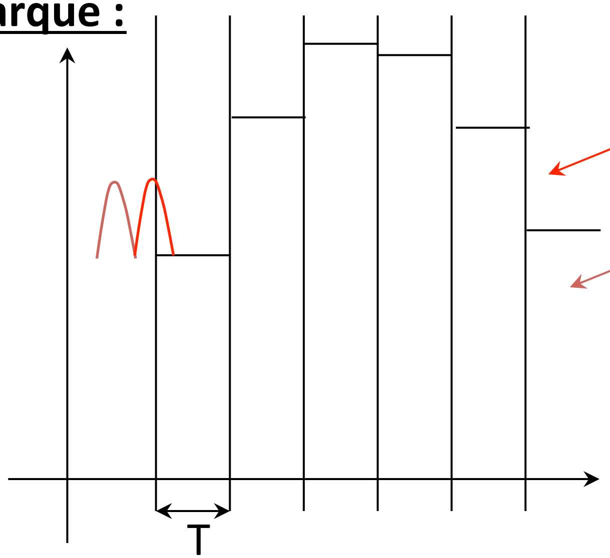
Une des méthodes consiste à déterminer le correcteur dans le domaine analogique et de transposer dans le domaine numérique par différent techniques :

- Transformation bilinéaire $p = \frac{2}{T}\frac{Z-1}{Z+1}$

- En utilisant un interpolateur d'ordre n (vu précédemment)



Remarque :



ce que voit le système

courbe = u(t) retardé de T/2

commande u(t)

Si T n'est pas négligeable devant les temps caractéristiques du système, prévoir avant la synthèse en analogique un retard T/2

Utilisation de TW

$$Z = \frac{1+W}{1-W}$$

On part de la FTBO en W non-corrigée (T_{nc}) pour régler les correcteurs gabarisés :

Attention: les représentations graphiques en *W* se terminent par des horizontales, les correcteurs utilisables sont:

- PI $C(W) = k\left(1 + \frac{1}{W\tau}\right)$
- Avance de phase

$$C(W) = k\frac{1 + aW\tau}{1 + W\tau} \quad \text{avec} \quad a > 1$$

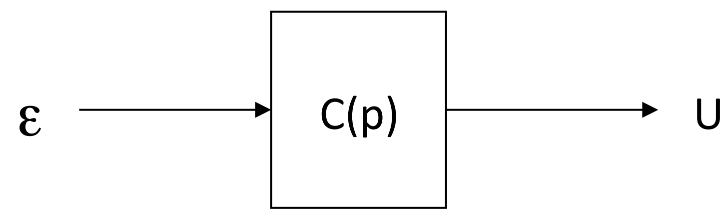
Le correcteur *C(W)* est déterminé de la même façon que pour les SA continus, il suffi de faire le changement inverse $W = \frac{Z-1}{Z+1}$ pour obtenir *C(Z).*

PID Numérique

Ils sont obtenus par transposition de PID continu.

$$C(p) = K\left(1 + \tau_d p + \frac{1}{\tau_i p}\right) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$$

$$\Rightarrow u(t) = K\left[\varepsilon(t) + \tau_d \varepsilon'(t) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau\right]$$



$$\Rightarrow u(kT) = K\left[\varepsilon_k + \tau_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T} + \frac{T}{\tau_i}\sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j\right] (1)$$

$$\Rightarrow u_{k-1} = K\left[\varepsilon_{k-1} + \tau_d \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-2}}{T} + \frac{T}{\tau_i}\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j\right] (2)$$

$$(1)-(2) \Leftrightarrow u_k - u_{k-1} = K\left[\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} + \tau_d \frac{\varepsilon_k - 2\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2}}{T} + \frac{T}{\tau_i}\varepsilon_k\right]$$

On applique la TZ :

$$\left(1 - Z^{-1}\right)U(Z) = K\varepsilon(Z)\left[\left(1 - Z^{-1}\right) + \frac{\tau_d}{T}\left(1 - 2Z^{-1} + Z^{-2}\right) + \frac{T}{\tau_i}\right]$$

$$C(Z) = \frac{U(Z)}{\varepsilon(Z)} = K\left[1 + \frac{\tau_d}{T}\left(1 - Z^{-1}\right) + \frac{T}{\tau_i}\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)}\right]$$

Posons : $K_p = K$

$$K_d = \frac{K\tau_d}{T}$$

$$K_i = \frac{KT}{\tau_i}$$

$$\boxed{PID(Z) = K_p + K_d\left(1 - Z^{-1}\right) + K_i\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)}}$$

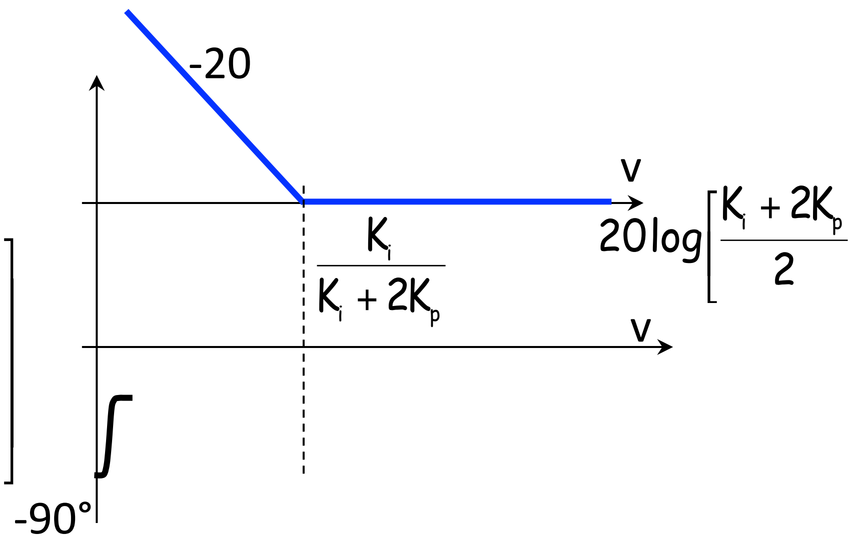
$$PI(Z) = K_p + K_i\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)}$$

$$PD(Z) = K_p + K_d\left(1 - Z^{-1}\right)$$

Forme des correcteurs dans le domaine *W*

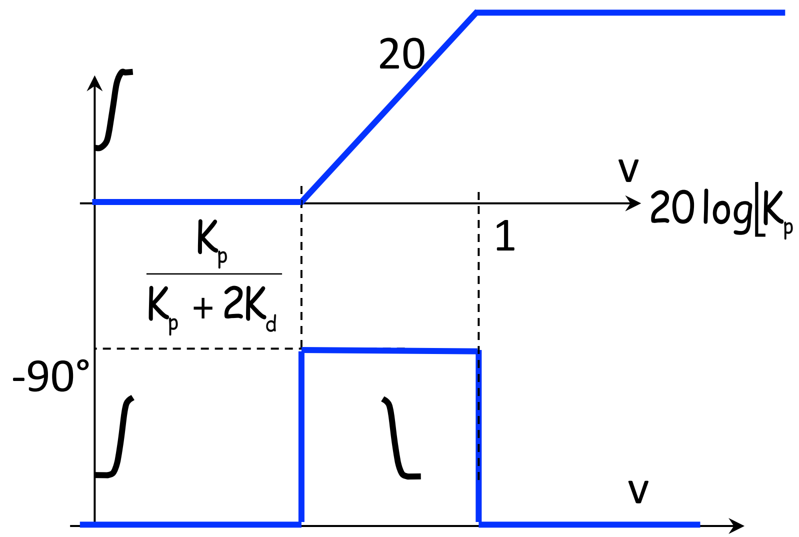
Correcteur PI

$$PI(Z) = K_p + K_i\frac{1}{\left(1 - Z^{-1}\right)} \Leftrightarrow C(W) = \frac{K_i + 2K_p}{2}\left[1 + \frac{1}{W\left(\dfrac{K_i + 2K_p}{K_i}\right)}\right]$$



Correcteur PD

$$PD(Z) = K_p + K_d\left(1 - Z^{-1}\right) \Leftrightarrow C(W) = K_p \frac{1 + W\frac{K_p + 2K_d}{K_p}}{1 + W}$$

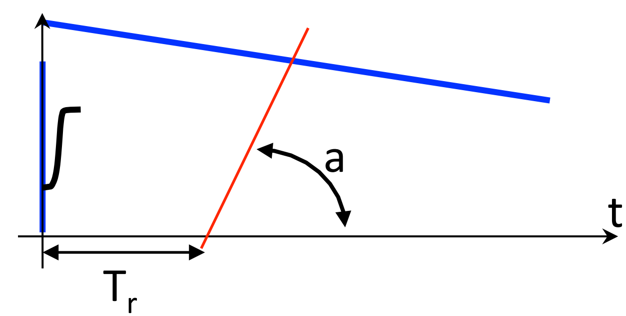


C' est un correcteur à avance de phase

Détermination des coefficients du correcteur

a. Il peut se faire soit à partir de $T_{BO}(W)$ comme on le fait pour les SA. On détermine toutes les caractéristiques (stabilité, précisions statique et dynamique) à partir des diagrammes de Bode et de Black Nichols.

b. En utilisant la méthode de Ziegler/ Nichols/ Takahasi



- En boucle ouverte, on détermine a et T_r sur la réponse indicielle (**attention la réponse à l'échelon doit-être apériodique**).

- En boucle fermée, on se place à la limite de stabilité (limite de pompage) pour déterminer K_0 et T_0 (**position Juste Oscillante**).

Méthode de Ziegler/ Nichols/ Takahasi

Correcteur	Paramètres régulateur	
	essai indiciel (BO) a, Tr	Limite de pompage (BF) K_0, T_0
P	$K_p = \dfrac{1}{a(T + T_r)}$	$K_p = 0.5K_0$
PI	$K_p = \dfrac{0.9}{a(T_r + 0.5T)} - 0.5K_i$ $K_i = \dfrac{0.27T}{a(T_r + 0.5T)^2}$	$K_p = 0.45K_0 - 0.5K_i$ $K_i = 0.54K_0 \dfrac{T}{T_0}$
PID	$K_p = \dfrac{1.2}{a(T_r + T)} - 0.5K_i$, $K_i = \dfrac{0.6T}{a(T_r + 0.5T)^2}$ $K_d = \dfrac{0.5 \text{ ou } 0.6}{aT}$ si $\dfrac{T_r}{T}$ entier	$K_p = 0.6K_0 - 0.5K_i$, $K_i = 1.2K_0 \dfrac{T}{T_0}$ $K_d = \dfrac{3}{40} K_0 \dfrac{T}{T_0}$

Implementation MATLAB

- Soit le système avec la fonction de transfert

  T=2/[(p+2)*(0.18*p^2+0.6*p+1)]

  avec Tr=0.38;a=1;

```
t=0:0.01:10;                1

num=2;
p1=[1 2];
p2=[0.18 0.6 1];
den=conv(p1,p2);
y0=step(num,den,t);
```

L=Tr
R=a

2

```
!P
L=0.38;
R=1;
Kp=1/(R*L);
nump=Kp;
denp=1;
[numsp densp]=series(nump,denp,num,den);
[numpclose,denpclose]=cloop(numsp,densp,-1);
yp=step(numpclose,denpclose,t);
```

3

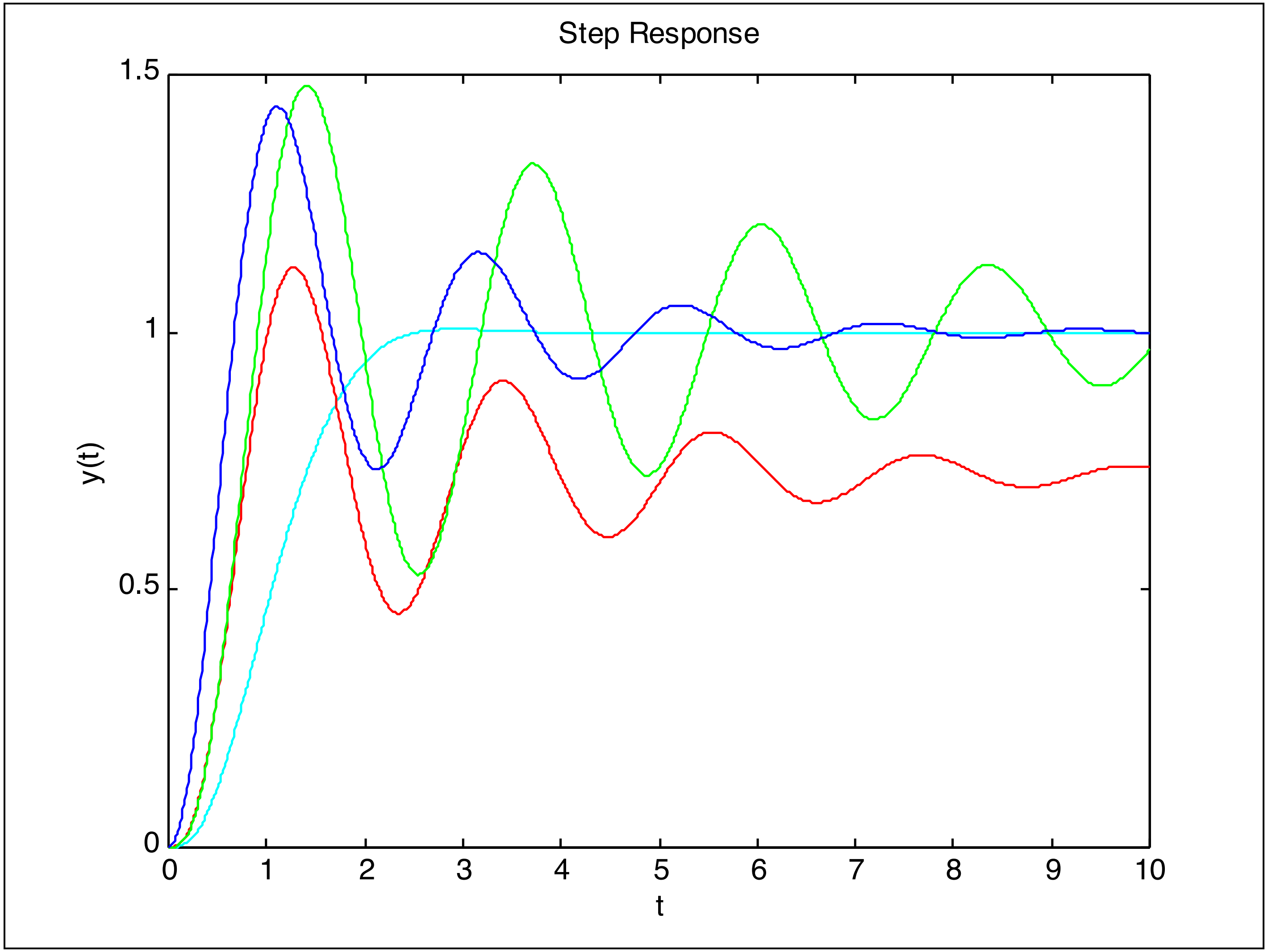
```
!PI
Kpi=0.9/(R*L);
numpi=[Kpi (Kpi*0.3)/L];
denpi=[1 0];
[numspi denspi]=series(numpi,denpi,num,den);
[numpiclose,denpiclose]=cloop(numspi,denspi,-1);
ypi=step(numpiclose,denpiclose,t);
```

4

```
!PID
Kpid=1.2/(R*L);
numpid=[0.5*L*Kpid Kpid Kpid/(2*L)];
denpid=[0 1 0];
[numspid denspid]=series(numpid,denpid,num,den);
[numpidclose,denpidclose]=cloop(numspid,denspid,-1);
ypid=step(numpidclose,denpidclose,t);
```

5

```
plot(t,y0,'c',t,yp,'r',t,ypi,'g',t,ypid,'b');
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
title('Step Response');
```


Step Response
1.5
1
0.5
0
y(t)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t