Diagnostic à base de modèles: le cas des systèmes continus

Yannick Pencolé

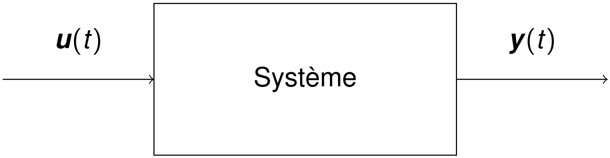
CNRS-LAAS, Université de Toulouse, FRANCE

12 juin 2012

Notion de système

Definition (Système)

- Entité
- Mise en œuvre, instanciation d'une Fonction
- Produisant des Sorties à partir d'Entrées.



Exemples de système

Tuyau

- fonction : transport de fluide
- entrée : débit
- sortie : débit

Avion

- fonction : transport aérien
- entrées : passagers, kérosène, commande de pilotage,....
- sorties : trajectoires de vol d'un point *A* à un point *B*....

Etre humain

- fonction : je vous laisse chercher pourquoi nous sommes là...
- entrées : l'air qu'on respire, le petit croissant de ce matin, le prof qu'on écoute
- sorties : l'air qu'on expire, la petite sieste en amphi, de nouvelles idées

Systèmes à dynamique continu

- Système évoluant au cours du temps
- Le temps est vu comme une fonction continue $t \in \mathbb{R}$
- Objet principal d'étude de l'automaticien
- Motivation de l'automaticien : commander le système
- Notre motivation : détecter et identifier les fautes du systèmes
  - Communauté scientifique : FDI (Fault Detection and Isolation)

Commande tolérante aux fautes vs FDI

- Pourquoi chercher à détecter des fautes si l'on peut commander le système en leur présence ?
- Commande : Commandabilité
- FDI : Observabilité
- pas la même motivation : fonction de surveillance, de supervision (FDI)
- Possibilité de faire du FDI sur des systèmes non-commandables.

Cadre générique de modélisation

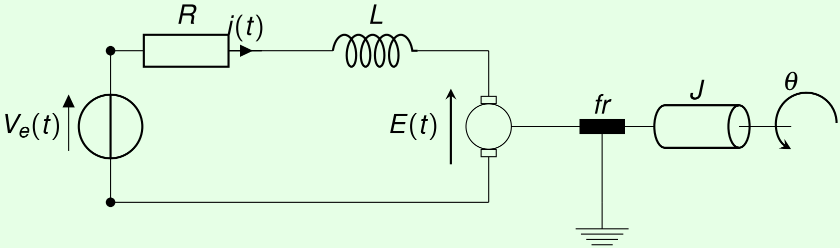
Modèle du système *Sys* :

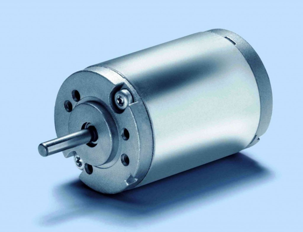
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

- Modèle d'équations d'états
- $\boldsymbol{x}(t)$ vecteur de l'état du système à l'instant t
- $\boldsymbol{u}(t)$ vecteur d'entrée du système à l'instant t
- $\mathscr{P}$ ensemble des paramètres connus du système
- $\boldsymbol{y}(t)$ vecteur de sortie du système à l'instant t
- $\boldsymbol{f}$ définit l'équation d'évolution
- $\boldsymbol{h}$ définit l'équation d'observation

Exemple : moteur à courant continu 1

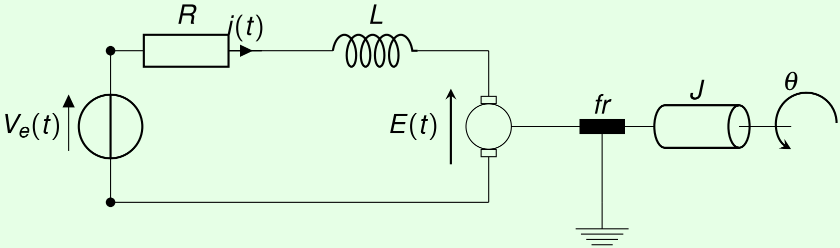
Exemple





Exemple : moteur à courant continu 2

Exemple



$$V_e(t) = R.i(t) + L\frac{di}{dt} + E(t) \quad \text{(Loi électrique)}$$

$$\Gamma(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + fr\frac{d\theta}{dt} \quad \text{(Loi mécanique)}$$

$$E(t) = k_e\frac{d\theta}{dt} \quad \text{(Loi de couplage 1)}$$

$$\Gamma(t) = k_c.i(t) \quad \text{(Loi de couplage 2)}$$

Exemple : moteur à courant continu 3

Exemple

- Entrées du système : $V_e(t)$
- Sortie du système : $\theta(t)$
- Paramètres : $\mathscr{P} = \{k_c, k_e, R, L, J, fr\}$

Soit ω la vitesse de rotation de l'arbre : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ on obtient

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{k_c i - fr.\omega}{J}$$

$$\dot{i} = \frac{V_e - R.i - k_e\omega}{L}$$

Exemple : moteur à courant continu 4

Exemple

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \theta) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

avec

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} V_e \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \theta \end{pmatrix}$$

Principe de la résolution d'un problème FDI

1. Modélisation du système *Sys* à diagnostiquer
2. Modélisation des fautes anticipées (s'il y en a)
3. Synthèse analytique/programmatique de résidus
4. Instrumentation du système pour la mise en œuvre des résidus
5. Surveillance en ligne de la valeur des résidus
6. Détecter et identifier les fautes en fonction des mesures de résidus

Notion de résidus

Définition

Un résidu est un signal $\rho(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$ qui reflète la cohérence ($|\rho(t)| < \mathit{seuil}$) des données mesurées de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ vis à vis d'un modèle.

Définition

Un résidu est dit non-affecté dans un domaine $\mathscr{D}$ de $\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{y}(t) \times \mathscr{P}(t)$ si pour toute entrée observable $\boldsymbol{u}$ et toute sortie observable $\boldsymbol{y}$ compatible avec $\mathscr{D}$,

$$|\rho(t)| < \mathit{seuil}_{\mathscr{D}}$$

Peu importe les variations possibles du système dans $\mathscr{D}$ (variation de paramètres, de flux,...) le résidu ne répond pas.

Détection de fautes

- Faute : sollication anormale du système (domaine $\mathscr{D}_{\{}$)
- Détection de faute : utilisation d'un résidu affecté par le domaine $\mathscr{D}_{\{}$
- Difficulté : trouver la définition analytiques de ces résidus
  - Problème d'existence
  - Problème de robustesse
  - Problème de sensibilité

Règle fondamentale

Soit un système *Sys*, soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des résidus disponibles :
à toute instant t, s'il existe $\rho \in \mathscr{R}$, $\rho(t) > seuil_\rho$ une faute a été détectée.

Identification de fautes : résidus structurés

Soit $\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ l'ensemble des fautes anticipées.

Définition

La structure d'un résidu ρ par rapport à un ensemble de fautes $\mathscr{F}$ est :

$$structure(\rho) = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

où $\forall i, b_i \equiv$ « ρ est affecté par la présence de f_i ».

Exemple

$structure(\rho_1) = [1001]$: ρ_1 est affecté par f_1 et f_4
$structure(\rho_2) = [0101]$: ρ_2 est affecté par f_2 et f_4

Identification de fautes : résidus structurés (2)

Règle fondamentale

Soit un système *Sys*, soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des résidus disponibles :
à toute instant t,

- soit $\mathscr{R}_i = \{\rho, structure(\rho)[i] = 1\}$
- si $\forall \rho \in \mathscr{R}_i, \rho(t) > seuil_\rho$
- alors la faute f_i est possible (identification)

Exemple

$structure(\rho_1) = [1001]$: ρ_1 est affecté par f_1 et f_4
$structure(\rho_2) = [0101]$: ρ_2 est affecté par f_2 et f_4
Si $\rho_1(t) > seuil_1$ et $\rho_2(t) > seuil_2$ alors f_4 est identifiée au temps t.
Si $\rho_1(t) > seuil_1$ alors f_1 est identifiée au temps t.
Si $\rho_2(t) > seuil_2$ alors f_2 est identifiée au temps t.

Identification de fautes : résidus structurés (3)

Définition

Un résidu ρ de structure $[b_1, b_2, \ldots, b_m]$ est robuste par rapport à un sous-ensemble de fautes $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ ssi $\forall f_i \in \mathscr{F}', b_i \equiv$ « ρ est non-affecté par la présence de f_i ».

Propriété

En présence de la faute f_i, seuls les résidus non-robustes à f_i sortiront de leur rang.

Signature de faute

Définition

L'ensemble des structures des résidus $\mathscr{R} = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ sur les fautes $\mathscr{F}$ contitue la matrice des signatures.

Exemple

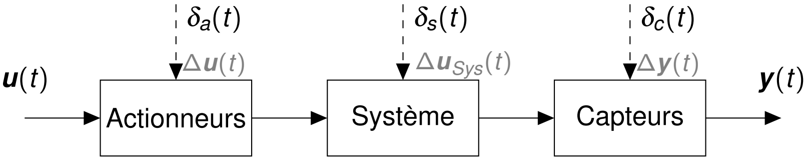
$structure(\rho_1) = [1001]$, $structure(\rho_2) = [0101]$:

$$\begin{array}{ccccc} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \rho_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Définition

La signature $Sig(f)$ d'une faute f est la colonne associée à la faute f.

Décomposition « actionneur-système-capteur »

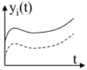


- δ : signaux modélisant les phénomènes de fautes, de défauts
- $\Delta \boldsymbol{u}$, $\Delta \boldsymbol{y}$: variations de signaux induites (conséquences)

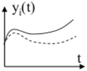
Type de fautes/défauts

- Défaut Capteur

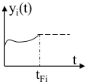
Biais : $y_i(t) = Cx(t) + f_i(t)$ $\quad f_i(t)=C^{te}$



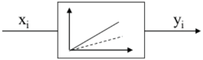
Dérive : $y_i(t) = Cx(t) + f_i(t)$ $\quad f_i(t)=at$



Blocage : $y_i(t) = y_i(t_{Fi})$

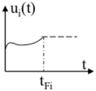


Calibrage : $yi(t) = \alpha_i . c_i\, x_i(t)$

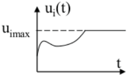


- Défaut Actionneur

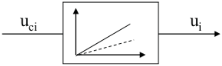
Blocage :



Saturation:



Perte d'efficacité :



Fautes additives

Définition

Une faute est additive si on peut la modéliser comme une déviation inconnue d'un signal du système.

- Fautes sur les actionneurs $\Delta \boldsymbol{u}(t)$
  - Une valve d'entrée bloquée
  - Un moteur usé
  - Générateur de tension endommagé (produit des sur-(sous) tensions)
- Fautes sur les capteurs $\Delta \boldsymbol{y}(t)$
  - Problème de calibrage, étalonnage
  - Usure de capteur
- Fautes internes systèmes $\Delta \boldsymbol{u}_{Sys}(t)$
  - Dérive de flux (intensité, débit)
  - Fuites

Effet sur le modèle d'une faute additive

- Valeur d'entrée anticipée : $\boldsymbol{u}(t)$
- Valeur d'entrée réelle (observée ou non) : $\boldsymbol{u}^r(t)$

$$\boldsymbol{u}^r(t) = \boldsymbol{u}(t) + \Delta\boldsymbol{u}(t)$$

- Valeur de sortie anticipée : $\boldsymbol{y}(t)$
- Valeur de sortie réelle (observée ou non) : $\boldsymbol{y}^r(t)$

$$\boldsymbol{y}^r(t) = \boldsymbol{y}(t) + \Delta\boldsymbol{y}(t)$$

Fautes multiplicatives

Définition

Une faute est multiplicative si on peut la modéliser comme une déviation inconnue d'un paramètre du système.

- Soit $p \in \mathscr{P}$
- Faute multiplicative $\Delta p(t)$
  - Variation des propriétés intrinsèques du système
  - Usure des composants internes (corrosion, perte de resistivité)

Effet sur le modèle d'une faute multiplicative

- Valeur de paramètre anticipé : $p \in \mathscr{P}$
- Valeur de paramètre réelle (observée ou non) : p^r

$$p^r = p + \Delta p$$

- Effet "multiplicatif" sur la sortie anticipée $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y}^r = \Delta p . \boldsymbol{y}$$

Lien entre faute additive et faute multiplicative

- additive : déviation inconnue d'un signal Δs
- multiplicative : déviation inconnue d'un paramètre Δp
- dans certain cas, la même faute peut être modélisée des deux façons

Exemple

$$U = R.i$$

- U tension d'entrée, i intensité de sortie
- faute additive : déviation sur l'intensité Δi (défaillance)
- faute multiplicative : déviation sur la résistivité ΔR (défaut, panne)
- mais c'est le même phénomène :

$$U = (R + \Delta R).(i + \Delta i)$$

Entrées agissant sur le système

Notation	Type	Propriétés	
$\boldsymbol{u}(t)$	Commande	Déterministe	Connu
$\boldsymbol{v}(t)$	Perturbation	Déterministe	Inconnu
$\delta(t)$	Défaillance	Déterministe	Inconnu
$\varepsilon(t)$	Bruit	Aléatoire	Inconnu

Définition

Modèle étendu du système *Sys* :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \end{cases} \quad (1)$$

Modèle temps continu/temps discret

Définition

Temps continu :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \end{cases} \tag{2}$$

Le modèle en temps continu n'est pas pragmatique.

- Échantillonage du temps $t, t+1, t+2\ldots$ pour les calculs numériques effectifs

Définition

Temps discret :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \end{cases} \tag{3}$$

Notion de relations de redondance analytique

Notion de relations de redondance analytique

- Nécessité de tester le système
- À notre disposition :
  - des variables mesurables
  - des variables à valeurs connues

Définition

Une relation de redondance analytique (RRA) est une relation analytique ne faisant intervenir que des variables disponibles.

L'existence d'une RRA est conditionnée par :

- la capacité à extraire analytiquement du modèle *Sys* une telle relation
- la capacité à éliminer analytiquement les variables non disponibles
- le niveau de redondance d'information

Notion de relations de redondance analytique

Mise en relation d'instances variables disponibles sur une fenêtre temporelle de $[t-p,t]$.

Définition

Forme générique d'une RRA :

$$\omega[\boldsymbol{y}(t,t-p),\boldsymbol{u}(t,t-p),\mathscr{P},\boldsymbol{v}(t,t-p),\delta(t,t-p),\varepsilon(t,t-p)]=\mathbf{0}$$

avec

$$\boldsymbol{y}(t,t-p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}(t)^T & \dots & \boldsymbol{y}(t-p)^T\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(t,t-p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)^T & \dots & \boldsymbol{u}(t-p)^T\end{pmatrix}$$

$$\dots$$

Decomposition d'une RRA

Une RRA ω est composée de 2 parties :

1. Une partie mesurable, dite forme de calcul : ω_c
   - Fonction vectorielle sur les variables disponibles en temps réel par la mesure
   - Variables entrées/sorties du système *Sys*
2. Une partie évaluable, dite forme d'évaluation : ω_e
   - Variables que l'on cherche à évaluer (les fautes)
   - Variables évaluables (on peut les déterminer à partir des observations)

Posant $\omega = \omega_c - \omega_e$ et sachant $\omega = 0$ on a :

$$\omega_c = \omega_e$$

$$\omega_c[\boldsymbol{y}(t,t-p),\boldsymbol{u}(t,t-p),\mathscr{P}] =$$

$$\omega_e[\boldsymbol{y}(t,t-p),\boldsymbol{u}(t,t-p),\mathscr{P},\delta(t,t-p),\varepsilon(t,t-p)]$$

Résidu extrait d'une RRA

Définition

Soit $\omega = \omega_c - \omega_e$ une RRA, le résidu $\rho(t)$ est la valeur commune des deux membres ω_c et ω_e.

$$\omega_c = \rho = \omega_e$$

- ρ est évalué par sa forme de calcul ω_c
  - par la mesure et l'échantilonage sur la fenêtre temporelle $[t - p, t]$
- La forme d'évaluation ω_e de ρ permet d'évaluer les variables de ω_e

Valeur de résidu normale

- Fonctionnement normal du système au temps t

$$\delta(t, t-p) = \mathbf{0}$$

- Évaluation du résidu normal

$$\rho_{normal} = \omega_e[\boldsymbol{y}(t, t-p), \boldsymbol{u}(t, t-p), \mathscr{P}, \mathbf{0}, \varepsilon(t, t-p)]$$

  - Facilement évaluable pour toute commande $\boldsymbol{u}(t, t-p)$ si $\varepsilon(t, t-p) = \mathbf{0}$ (pas de bruit)
  - Évaluable par test statistique (modèle statistique du bruit)

Détection de fautes

Règle fondamentale :

si au temps t,

$$\rho(t) \neq \rho_{normal}(t) + -seuil$$

alors

$$\delta(t, t-p) \neq \mathbf{0}$$

une des fautes anticipées de δ a lieu : détection

sinon

$$\delta(t, t-p) = \mathbf{0}$$

aucune faute anticipée de δ a lieu

Détermination des RAA

Systèmes non soumis à entrées inconnues

Reprenons le modèle du système *Sys* :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \end{cases} \tag{4}$$

Supposons :

- pas de pertubations ($\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{0}$)
- pas d'entrées inconnues, modèle de fautes complet

Objectif :

- déterminer des RRA
- à partir du modèle, éliminer l'état $\boldsymbol{x}$

Redondance Statique vs Redondance Dynamique

Équations d'observation :

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t), \mathscr{P})$$

- Système de m équations
- $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$ et $\mathscr{P}$ sont connus, $\varepsilon(t)$ connu par statistique
- Seule inconnue : l'état $\boldsymbol{x}$ de dimension n
- Soit $n' \leq n$, le nombre de composantes de $\boldsymbol{x}$ intervenant dans l'équation
- Si $n' \leq m$, système d'équations surdéterminé, redondance statique
- Si $n' > m$, système d'équations sous-déterminé, à la recherche de redondance dynamique

$$n' = rang\left[\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \delta, \varepsilon)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]$$

Redondance Statique

Définition

La mesure du système au temps t est suffisante pour déterminer le résidu $\rho(t)$.

On peut réécrire $\boldsymbol{y}(t)$ en décomposant :

1. Équations $\boldsymbol{y}_1(t)$ de dimension n' déterminant les n' composantes de $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t))$$

2. Équations $\boldsymbol{y}_2(t)$ de dimension $m - n'$

$$\boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t))$$

En reportant les expressions déterminant $\boldsymbol{x}$ de 1 dans 2, on obtient :

$$\text{RRA :} \boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{h}_3(\boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t))$$

$$\text{res. :} \rho(t) = \boldsymbol{y}_2(t) - \boldsymbol{h}_3(\boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t))$$

Redondance Dynamique

Définition

La mesure du système aux temps $\{t-p,\ldots,t\}, p \geq 1$ est suffisante pour déterminer le résidu $\rho(t)$.

- Mémorisation des sorties capteurs sur une fenêtre temporelle $\{t-p,\ldots,t\}, p \geq 1$
- Objectif : récupérer assez d'informations sur la fenêtre temporelle pour construire un SE surdéterminé

Redondance Dynamique (2)

À $t-1$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-1), \boldsymbol{u}(t-1), \delta(t-1), \varepsilon(t-1), \mathscr{P})$$
$$\boldsymbol{y}(t-1) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t-1), \boldsymbol{u}(t-1), \delta(t-1), \varepsilon(t-1), \mathscr{P})$$

À t,

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t), \mathscr{P})$$

Donc :

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-1), \boldsymbol{u}(t-1), \delta(t-1), \varepsilon(t-1), \mathscr{P}), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \varepsilon(t), \mathscr{P})$$

Donc :

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}(t-1), \boldsymbol{u}(t-1), \delta(t-1), \varepsilon(t-1), \mathscr{P})$$

Système de $2m$ equations : $\boldsymbol{y}(t, t-1) = [\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-1)]$

Redondance Dynamique (3)

En itérant sur la fenêtre $\{t-p,\ldots,t\}$, on obtient $(p+1)m$ équations :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t,t-p) &= [\boldsymbol{y}(t),\ldots,\boldsymbol{y}(t-p)] \\ &= \boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t,t-p),\delta(t,t-p),\varepsilon(t,t-p)]\end{aligned}$$

- si surdéterminé, c'est gagné ($n'_p < (p+1)m$), on a des RRA, et des résidus
- si sous-déterminé, augmenter p
- si des composantes de δ sont également éliminées : fautes indétectables (problème de diagnosticabilité)

Le cas des systèmes linéaires : rappels

Modèle canonique du système *Sys*

$$\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$

Modèle (A, B, C, D) de 4 matrices :

- $A[n \times n]$ est la matrice d'état
- $B[n \times m]$ est la matrice d'entrée
- $C[p \times n]$ est la matrice de sortie
- $D[p \times m]$ est la matrice de transfert direct entrée/sortie

Le cas des systèmes linéaires : exemple

Exemple

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \theta & \omega & i \end{pmatrix}^T, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{k_c.i - fr.\omega}{J}, \quad \dot{i} = \frac{V_e - R.i - k_e\omega}{L}$$

Sous forme matricielle, équation d'état

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-fr}{J} & \frac{k_c}{J} \\ 0 & \frac{-k_e}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_e \end{pmatrix}$$

Le cas des systèmes linéaires : exemple

Exemple

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \theta \end{pmatrix}$

Sous forme matricielle, équation d'observation

$$\begin{pmatrix} \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_e \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-fr}{J} & \frac{k_c}{J} \\ 0 & \frac{-k_e}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Le cas des systèmes linéaires : modèle de fautes

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t+1) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + F_x\delta(t) + E_x\varepsilon(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) + F_Y\delta(t) + E_Y\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

- F_x, F_y matrices de fautes
- E_x, E_y matrices de bruits

Le cas des systèmes linéaires : redondance statique

Rappel : le nombre de composantes de $\boldsymbol{x}$ n' inférieur au nombre m d'équations de C. Décomposition de $\boldsymbol{y}$ en $\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1(t) \\ \boldsymbol{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} F_{y1} \\ F_{y2} \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} E_{y1} \\ E_{y2} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

avec

$$(C_1 \text{ inversible }) \equiv (C_1^{-1}.C_1 = I)$$

Le cas des systèmes linéaires : redondance statique (2)

$\boldsymbol{x}$ est calculé par :

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1^{-1}[\boldsymbol{y}_1(t) - D_1\boldsymbol{u}(t) - F_{y1}\delta(t) - E_{y1}\varepsilon(t)]$$

que l'on reporte dans la « partie C_2 », d'où le RRA :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{y}_2(t) - C_2C_1^{-1}\boldsymbol{y}_1(t) - (D_2 + C_1^{-1}D_1)\boldsymbol{u}(t) \\ -(F_{y2} + C_1^{-1}F_{y1})\delta(t) - (E_{y2} + C_1^{-1}E_y)\varepsilon(t) = 0\end{gathered}$$

Résidu $\rho(t)$:

- Forme de calcul (mesure) :

$$\rho(t) = \omega_c = \boldsymbol{y}_2(t) - C_2C_1^{-1}\boldsymbol{y}_1(t) - (D_2 + C_1^{-1}D_1)\boldsymbol{u}(t)$$

- Forme d'évaluation :

$$\rho(t) = \omega_e = (F_{y2} + C_1^{-1}F_{y1})\delta(t) + (E_{y2} + C_1^{-1}E_y)\varepsilon(t)$$

Autre méthode : espace de parité

- Rappel :

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) + F_Y\delta(t) + E_Y\varepsilon(t)$$

- Pour éliminer $\boldsymbol{x}(t)$, trouver une matrice W non-nulle telle que $WC = \mathbf{0}$ (W et C sont des diviseurs de $\mathbf{0}$)

$$W\boldsymbol{y}(t) = WD\boldsymbol{u}(t) + WF_Y\delta(t) + WE_Y\varepsilon(t)$$

- Résidu :
  - Forme de calcul (mesure) :

$$\rho(t) = \omega_c = W\boldsymbol{y}(t) - WD\boldsymbol{u}(t)$$

  - Forme d'évaluation :

$$\rho(t) = \omega_e = WF_Y\delta(t) + WE_Y\varepsilon(t)$$

Autre méthode : espace de parité (2)

$$\text{Trouver une matrice } W \text{ non nulle telle que } WC = \mathbf{0}$$

$$\equiv$$

Trouver une transformation pour « mettre en parité la sortie et les entrées »

$$\equiv$$

Travailler sur le noyau de C : espace de parité

- W n'est pas unique.
- La matrice $\begin{pmatrix} -C_2 C_1^{-1} & I \end{pmatrix}$ vue précédemment est une matrice W particulière
- Toute colonne de F_y éliminée par cette transformation implique que la faute associée est indétectable.

Le cas des systèmes linéaires : redondance dynamique (1)

On itère sur une profondeur p :

$$\boldsymbol{y}(t,t-p) = O_p\boldsymbol{x}(t-p) + K_p(A,B,C,D)\boldsymbol{u}(t,t-p) + K_p(A,F_x,C,F_y)\delta(t,t-p) + K_p(A,E_x,C,E_y)\varepsilon(t,t-p)$$

avec

$$O_p = \begin{bmatrix} C \\ CA\ldots \\ CA^p \end{bmatrix} \text{ et } K_p(M,N,P,Q) = \begin{bmatrix} Q & 0 & \ldots & 0 \\ PN & Q & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ PM^{p-1}N & \ldots & PN & Q \end{bmatrix}$$

Le cas des systèmes linéaires : redondance dynamique (2)

- Idem redondance statique : on cherche W telle que $WO_p = \mathbf{0}$
- Résidu :
  - Forme de calcul :

$$\rho(t) = \omega_c = W\boldsymbol{y}(t, t-p) - WK_p(A, B, C, D)\boldsymbol{u}(t, t-p)$$

  - Forme d'évaluation :

$$\rho(t) = \omega_e = WK_p(A, F_x, C, F_y)\delta(t, t-p) + WK_p(A, E_x, C, E_y)\varepsilon(t, t-p)$$

Optimisation des résidus

Rajoutons des entrées inconnues ($\boldsymbol{v}(t) \neq \mathbf{0}$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \delta(t), \boldsymbol{v}(t), \varepsilon(t), \mathscr{P}) \end{cases}$$

- Le principe reste le même : éliminer $\boldsymbol{x}$ ET $\boldsymbol{v}$
- Dans le cas linéaire, trouver W tel que :

$$W \begin{bmatrix} O_p \\ \\ K_p(\dots) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

où O_p matrice associée à $\boldsymbol{x}(t, t-p)$ et $K_p(\dots)$ matrice associée à $\boldsymbol{v}(t, t-p)$ dans l'équation d'observation $\boldsymbol{y}(t, t-p) = \dots$ de profondeur p

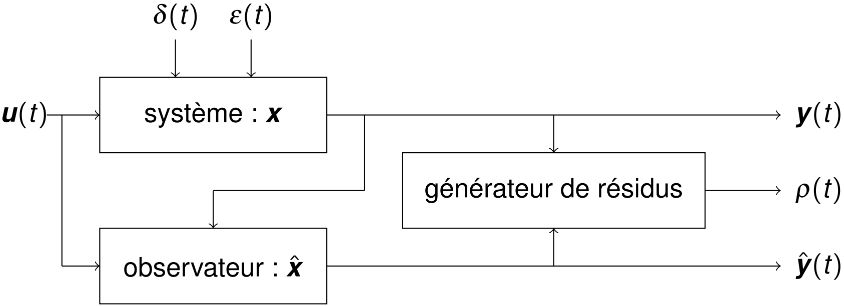
Génération de résidus à base d'observateurs

Généralités

- Le diagnostic s’appuie sur la notion de résidu
- À partir des RRA, on peut construire des résidus
- Les RRAs sont obtenus par élimination de l’état $\boldsymbol{x}$
- Encore faut-il que l’élimination de $\boldsymbol{x}$ ne rende pas les fautes indétectables...
  - La détection d’une faute peut être liée à la dynamique intrinsèque de l’état $\boldsymbol{x}$
  - Peu dépendante du comportement des signaux entrées/sorties

- Approche Observateur : génération des résidus à partir d’une estimation $\hat{\boldsymbol{x}}$ de l’état $\boldsymbol{x}$

Diagnostic à base d'observateur



Objectif de l'observateur :

- observe les mesures (observations) issues de $\boldsymbol{u}(t)$ et/ou $\boldsymbol{y}(t)$
- simule (prédit) le comportement du système $\hat{\boldsymbol{x}}$ (reconstruction d'information, état, état de santé...)
- génère une estimation $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$ cohérente avec les observations
- résidu : l'écart entre la mesure de sortie et la prédiction : $\rho(t) = \hat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t)$

Définition générique d'un observateur

Modèle du système *Sys* :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \end{cases}$$

Définition

Observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{y}(t), \mathscr{P}, \mathscr{S}) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

- État $\hat{\boldsymbol{x}}$ au lieu $\boldsymbol{x}$
- Obtenu par copie de modèle (par ex : c'est la même fonction $\boldsymbol{h}$)
- $\mathscr{S}$ nouvel ensemble de paramètres pour la stabilité de l'observateur

Définition générique avec terme correcteur

Modèle du système *Sys* :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \end{cases}$$

Définition

Observateur avec terme correcteur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) + \eta(\boldsymbol{y}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \mathscr{S}) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

- Obtenu par copie de modèle (c'est la même fonction $\boldsymbol{f}$)
- Ajout du terme correcteur $\eta(\boldsymbol{y}(t), \hat{\boldsymbol{x}}(t), \mathscr{S})$
- Correction de l'estimation de l'état $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ à partir de la sortie réelle $\boldsymbol{y}$

Cas des systèmes linéaires

- Pas de perturbations ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + F_X\delta(t) + E_X\varepsilon(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) + F_Y\delta(t) + E_Y\varepsilon(t) \end{aligned}$$

Définition

Un observateur possible :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}(t+1) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + G[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)] \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

- Observateur proportionel de gain G
- « Simule » le système sans faute $\hat{\delta}(t) = \boldsymbol{0}$, sans bruit $\hat{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{0}$
- Estimation corrigée par $G[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)]$

Erreur d'estimation d'états/sortie

Différence entre l'état réel $\boldsymbol{x}(t+1)$ et l'état estimé $\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)$:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x}(t+1) &= \boldsymbol{x}(t+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)\\ &= [A-GC]\Delta\boldsymbol{x}(t)+[F_x-GF_y]\delta(t)+[E_x-GE_y]\varepsilon(t)\end{aligned}$$

Différence entre la sortie réelle $\boldsymbol{y}(t)$ et la sortie estimée $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t)\\ &= C\Delta\boldsymbol{x}(t)+F_y\delta(t)+E_y\varepsilon(t)\end{aligned}$$

- L'erreur d'estimation ne dépend pas de l'entrée $\boldsymbol{u}(t)$
- Résidu :
  - Forme de calcul : $\rho(t)=\omega_c=\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t)$
  - Forme d'évaluation : $\rho(t)=\omega_e=C\Delta\boldsymbol{x}(t)+F_y\delta(t)+E_y\varepsilon(t)$

Estimation de paramètres

Estimation de paramètres : introduction

Modèle du système *Sys* :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \mathscr{P}) \end{cases}$$

- Cas de fautes multiplicatives Δp, $p \in \mathscr{P}$
- Nécessite en général un modèle des principes premiers (modèle physique)
  - un paramètre = la quantification d'une réalité physique
  - longueurs, dimensions, poids,...
- Faute : altération d'un/de plusieurs paramètres

Estimation de paramètres : étapes de la méthode

1. Établir le modèle physique (relations entre $\boldsymbol{u}(t)$, les paramètres $\boldsymbol{p}_j$ et les sorties $\boldsymbol{y}(t)$)
2. Si nécessaire, abstraire l'ensemble des $\boldsymbol{p}_j$ sous une forme θ_j rendant l'estimation possible (observable)
3. Estimation des paramètres θ_j à partir de mesure passées et présentes
4. Retrouver l'estimation $\hat{\boldsymbol{p}}_j$ à partir de l'estimation $\hat{\theta}_j$
5. Calculer le résidu : $\rho(t) = \Delta\boldsymbol{p}_j(t) = \hat{\boldsymbol{p}}_j(t) - \boldsymbol{p}_j(t)$

Méthode classique d'estimation (1)

Soit θ les paramètres à estimer (après étapes 1 et 2), on traduit le modèle sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{z} = \Psi\theta + \boldsymbol{e}$$

- $\boldsymbol{z}$ vecteur d'éléments fonction de variables mesurables
- Ψ matrice des variables mesurées
- θ vecteur des paramètres à estimer
- $\boldsymbol{e}$ vecteur d'erreurs

Intuitivement, la valeur effective des paramètres de θ doit suivre l'invariant du système $\boldsymbol{z}$ sachant les observations Ψ modulo le bruit de mesures induisant l'erreur $\boldsymbol{e}$.

Méthode classique d'estimation (2)

- Ψ matrice des variables mesurées $(\boldsymbol{y}_i^{OBS})_{i=1,\dots,N}$ au cours de la surveillance.
- Modèle $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, \theta)$, θ ensemble de paramètres initiaux
- L'estimée $\hat{\theta}$ est celle qui minimise l'erreur quadratique de prédiction $(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_i^{OBS})^2$ sur la fenêtre temporelle $1, \dots, N$:

$$\hat{\theta} = argmin_{\theta} \boldsymbol{e} = argmin_{\theta}(\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \theta))^2)$$

Ce qui revient dans le cas de l'ajustement d'un système linéaire à calculer :

$$\hat{\theta} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \boldsymbol{z}$$