

Soutenance de Doctorat de **Yassine ARIBA**

**Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps:
théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur**

Sous la direction de F. Gouaisbaut et Y. Labit



Université
de Toulouse



Université Paul Sabatier, LAAS-CNRS
23 novembre 2009, Toulouse, France.

- **Analyse de stabilité des systèmes à retards variants dans le temps**

- ⇒ méthode de Lyapunov-Krasovskii,

- [Ariba et al CDC07, CDC08, IJC09]

- ⇒ principe de séparation quadratique,

- [Ariba et al ICNPAA08, ROCOND09, CDC09]

- **Contrôle de trafic dans les réseaux de communication TCP**

- ⇒ contrôle de congestion et gestion du trafic TCP par un routeur

- [Ariba et al CDC07, ECC09, IEEE trans. NSM09]

- ⇒ supervision de trafic par un routeur

- [Ariba et al CCA09, soumission à IET CTA]

Stabilité des systèmes à retards variants dans le temps

- Position du problème
- Séparation quadratique
- Analyse des systèmes à retards
- Exemples

Contrôle de trafic dans les réseaux de communication TCP

- Modélisation
- Contrôle de TCP et gestion d'un routeur
- Supervision de trafic

Conclusion et travaux futurs

Position du problème

Considérons le système linéaire à retard de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), \forall t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-h_{\max}, 0] \end{cases}$$

Le retard h varie dans le temps et nous supposons que:

$$h(t) \in [h_{\min}, h_{\max}] \quad \text{et} \quad |\dot{h}(t)| \leq d,$$

où $0 \leq h_{\min} < h_{\max}$ et $d \geq 0$ sont des scalaires.

But: Évaluer la stabilité du système pour tout $h(t)$ vérifiant les contraintes ci-dessus.

Outils:

- Méthode de Lyapunov [Gu 03], [Richard 03], [Fridman 02].
- Analyse robuste (approche entrée-sortie, théorème du faible gain, IQC),
[Kao 07], [Fridman 06], [Zhang 01], [Niculescu 01].

Position du problème

Considérons le système linéaire à retard de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), \forall t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-h_{\max}, 0] \end{cases}$$

Le retard h varie dans le temps et nous supposons que:

$$h(t) \in [h_{\min}, h_{\max}] \quad \text{et} \quad |\dot{h}(t)| \leq d,$$

où $0 \leq h_{\min} < h_{\max}$ et $d \geq 0$ sont des scalaires.

But: Évaluer la stabilité du système pour tout $h(t)$ vérifiant les contraintes ci-dessus.

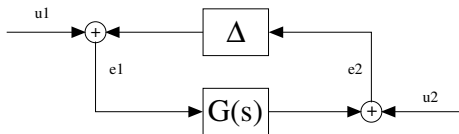
Outils:

Proposition \Rightarrow analyse robuste: **utiliser le principe de séparation quadratique.**

Premier travaux sur les systèmes à retards constants [Gouaisbaut 06].

Séparation quadratique

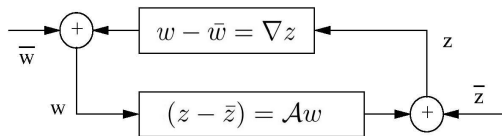
Analyse de stabilité d'une interconnexion:



- Approche traditionnelle en analyse robuste: théorème du faible gain.

Séparation quadratique

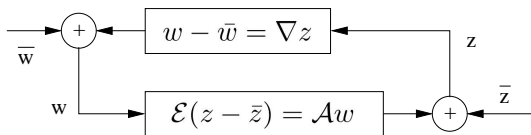
Analyse de stabilité d'une interconnexion:



- Approche traditionnelle en analyse robuste: théorème du faible gain.
 - Séparation quadratique [Iwasaki 98] [Safonov 80]:
 - \mathcal{A} est une matrice réelle.
 - ∇ est une matrice complexe: opérateurs dans le formalisme de Laplace.
- [Iwasaki 98] donne une condition NS pour les systèmes LTI classiques.

Séparation quadratique

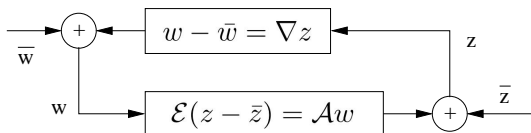
Analyse de stabilité d'une interconnexion:



- Approche traditionnelle en analyse robuste: théorème du faible gain.
- Séparation quadratique [Iwasaki 98] [Safonov 80]:
 - \mathcal{A} est une matrice réelle.
 - ∇ est une matrice complexe: opérateurs dans le formalisme de Laplace.
 [Iwasaki 98] donne une condition NS pour les systèmes LTI classiques.
- Extension: [Peaucelle 07] étend ces résultats aux systèmes singuliers, introduction d'une matrice \mathcal{E} .

Séparation quadratique

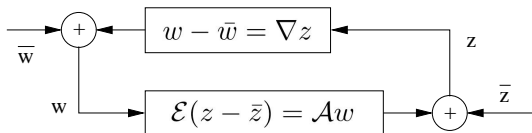
Analyse de stabilité d'une interconnexion:



- Approche traditionnelle en analyse robuste: théorème du faible gain.
- Séparation quadratique [Iwasaki 98] [Safonov 80]:
 - \mathcal{A} est une matrice réelle.
 - ∇ est une matrice complexe: opérateurs dans le formalisme de Laplace.
 [Iwasaki 98] donne une condition NS pour les systèmes LTI classiques.
- Extension: [Peaucelle 07] étend ces résultats aux systèmes singuliers, introduction d'une matrice \mathcal{E} .
- **Nouvelle extension:** [Ariba CDC09] ∇ n'est plus une matrice complexe mais un opérateur temporel.

Pourquoi ? Pour pouvoir traiter la nature variante du retard.

Stabilité d'une interconnexion



Théorème [Ariba ICNPAA08] [Ariba CDC09]

L'interconnexion ci-dessus est stable s'il existe une matrice symétrique $\Theta = \Theta^T$ satisfaisant les deux conditions suivantes:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp T} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > 0 \quad (1)$$

$$\forall u \in L_{2e}, \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u \right\rangle \leq 0 \quad (2)$$

✪ ∇ est une matrice d'opérateurs. L'idée est de construire l'inégalité (2) puis de tester la première.

✪ Nous souhaitons utiliser ce cadre de travail pour l'analyse des systèmes à retards.

Analyse des systèmes à retards: Idée de la preuve

[Ariba et al ICNPAA08, ROCOND09, CDC09]

① Réécrire le système à retard comme une interconnexion.

★ Choisir l'ensemble des opérateurs définissant le système
(intégrateur, retard, autres ?...)

Analyse des systèmes à retards: Idée de la preuve

[Ariba et al ICNPAA08, ROCOND09, CDC09]

① Réécrire le système à retard comme une interconnexion.

★ Choisir l'ensemble des opérateurs définissant le système
(intégrateur, retard, autres ?...)

② Chercher des contraintes intégrales quadratiques sur les opérateurs de ∇ .

$$\forall u \in L_{2e}, \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u \right\rangle \leq 0$$

★ En déduire le séparateur Θ .
★ Cela définit l'inégalité (2) du théorème

Analyse des systèmes à retards: Idée de la preuve

[Ariba et al ICNPAA08, ROCOND09, CDC09]

① Réécrire le système à retard comme une interconnexion.

★ Choisir l'ensemble des opérateurs définissant le système
(intégrateur, retard, autres ?...)

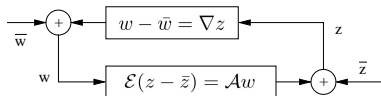
② Chercher des contraintes intégrales quadratiques sur les opérateurs de ∇ .

$$\forall u \in L_{2e}, \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u \right\rangle \leq 0 \quad \begin{array}{l} \star \text{ En déduire le séparateur } \Theta. \\ \star \text{ Cela définit l'inégalité (2) du théorème} \end{array}$$

③ Obtenir une inégalité matricielle linéaire (LMI) à partir de la première inégalité (1).

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp T} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > 0 \quad \begin{array}{l} \star \text{ Transformer l'inégalité.} \\ \star \text{ Fournit la condition de stabilité.} \end{array}$$

Une première interconnexion: réécriture *directe* du système à retard



Nous définissons les opérateurs \mathcal{I} et \mathcal{D} :

$$\mathcal{I} : x(t) \rightarrow \int_0^t x(u) du$$

$$\mathcal{D} : x(t) \rightarrow x(t - h(t))$$

Nous exprimons alors l'interconnexion sous la forme:

$$\begin{aligned} \overbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}}^{z(t)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix}}^{\nabla} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}^{z(t)} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & A_d \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Construction de la 2nd inégalité (contrainte sur ∇) du Théorème

Pour chaque opérateur \Rightarrow recherche d'un séparateur.

Des contraintes inégalités pour \mathcal{I} et \mathcal{D} sont données par les inégalités,

$$\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}, \forall P > 0, \forall Q_0 > 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q_0 & 0 \\ 0 & Q_0(1 - h(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

✪ Choix particuliers des séparateurs \Rightarrow introduction de pessimisme.

✪ En pratique, on cherche une majoration sur la norme L_2 induite de chaque opérateur.

Construction de la 2nd inégalité (contrainte sur ∇) du Théorème

Pour chaque opérateur \Rightarrow recherche d'un séparateur.

Des contraintes inégalités pour \mathcal{I} et \mathcal{D} sont données par les inégalités,

$$\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}, \forall P > 0, \forall Q_0 > 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \end{bmatrix} x, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & -Q_0 & 0 & 0 \\ -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_0(1 - \dot{h}(t)) \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

★ Ce qui donne un séparateur global Θ pour ∇ (2^{nde} inégalité satisfaite).

★ En pratique, on cherche une majoration sur la norme L_2 induite de chaque opérateur.

Stabilité *Independent Of Delay*

Par application du Théorème, il reste à tester la première inégalité

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp*} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > 0.$$

Celle-ci fournit une condition de stabilité *Independent Of Delay* :

Théorème [Ariba ICNPAA08]

S'il existe deux matrices définies positives $P, Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q_0 & PA_d \\ A_d^T P & -Q_0(1-d) \end{bmatrix} < 0$$

alors le système est asymptotiquement stable pour tout $h(t) > 0$ et $\dot{h}(t) < d$

Ce résultat est similaire à celui obtenu à partir de la **L.K.F** [Gu 03]:

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Q_0x(s)ds$$

Stabilité *Delay Dependent*: introduction d'un nouvel opérateur

- Pour avoir des informations sur la taille du retard, l'utilisation de \mathcal{D} est insuffisante!
- Dans la littérature [Gouaisbaut 06], [Kao 07], un autre opérateur est proposé.

Soit l'opérateur:

$$(1 - \mathcal{D})\mathcal{I} : x(t) \rightarrow \int_{t-h(t)}^t x(u)du,$$

Nouvelle matrice d'opérateurs:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & & \\ & \mathcal{D} & \\ & & (1 - \mathcal{D})\mathcal{I} \end{bmatrix}$$

Stabilité *Delay Dependent*: introduction d'un nouvel opérateur

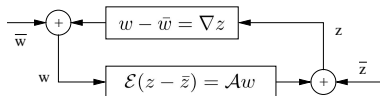
Une contrainte inégalité pour le nouvel opérateur $(\mathbb{1} - \mathcal{D})\mathcal{I}$ est donnée par,
 $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}, \forall Q_1 > 0,$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ (\mathbb{1} - \mathcal{D})\mathcal{I} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -h_{\max}^2 Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ (\mathbb{1} - \mathcal{D})\mathcal{I} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0.$$

✪ Celle-ci est obtenue à partir de l'inégalité $\|(\mathbb{1} - \mathcal{D})\mathcal{I}x\|_{L_2}^2 \leq h_{\max}^2 \|x\|_{L_2}^2$.

Un séparateur global Θ peut alors s'écrire sous la forme

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & -Q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_{\max}^2 Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \dot{h}(t))Q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_1 \end{array} \right] \quad (3)$$

Stabilité *Delay Dependent*: introduction d'un nouvel opérateurNouvelle modélisation \equiv nouvelle interconnexion

Nous exprimons l'interconnexion sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t) - x(t-h(t)) \end{bmatrix}}_{w(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & & \\ & \mathcal{D} & \\ & & (\mathbb{1} - \mathcal{D})\mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{3n} \\ \mathbb{0}_{n \times 3n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A}_d & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{A}_d & 0 \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t) - x(t-h(t)) \end{bmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Stabilité *Delay Dependent*: introduction d'un nouvel opérateur

La première inégalité du Théorème, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp*} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > 0$$

fournit une condition de stabilité *Delay Dependent* :

Théorème [Ariba ICNPAA08]

Pour des scalaires positifs d et h_{max} donnés, s'il existe des matrices définies positives P , Q_0 et $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors le système est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ tel que $h(t) \leq h_{max}$ et $\dot{h}(t) \leq d$ si la LMI ci-dessus est vérifiée pour Θ , \mathcal{E} et \mathcal{A} définies en (3) et (4).

Ce résultat est similaire à celui obtenu à partir de la [L.K.F](#): [Fridman 02]

$$V(x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-h(t)}^t x'(\theta)Qx(\theta)d\theta + \int_{t-h_{max}}^t \int_s^t \dot{x}'(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

Stabilité *Delay Range*

Nous proposons un nouvel opérateur [Ariba ICNPAA08]:

$$\nabla_4 = (\mathbb{1} - \mathcal{D} - h(t)\mathcal{I}^{-1})\mathcal{I}^2 \frac{1}{h(t)} : x(t) \rightarrow \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(\theta) d\theta ds.$$

On montre que l'inégalité suivante est vraie, $\forall x \in L_{2e}$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_4 \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -\frac{h_{\max}^2}{2} Q_2 & 0 \\ 0 & 2Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_4 \end{bmatrix} x \right\rangle < 0.$$

✪ L'ajout de cet opérateur permet d'obtenir une condition **Delay Range**,

⇒ le critère détecte des intervalles de stabilité sur le retard (*clusters*),

⇒ fonctionne même si le système sans retard est instable.

Dans le cadre de la méthode de Lyapunov-Krasovskii cela revient à ajouter le terme [Ariba IJC09]:

$$V_{add}(x_t) = \int_{t-h_m}^t \int_s^t \int_u^t \ddot{x}^T(\theta) W \ddot{x}(\theta) d\theta duds.$$

Pour aller plus loin...

- Trouver de nouveaux opérateurs auxiliaires liés au retard,
 - ★ $(\mathbb{1} - \mathcal{D} - h(t)\mathcal{I}^{-1})\mathcal{I}^2 \frac{1}{h(t)} \Rightarrow$ permet d'établir une condition *Delay Range* [Ariba ICNPAA08].
 - ★ $\mathcal{D}_{h(t)/2}$, fractionnement du retard [Ariba CDC08]
- Trouver des séparateurs moins pessimistes,
 - ★ caractérisation pertinente des opérateurs,
 - ★ majorations fines [Ariba CDC09].
- L'extension à l'analyse robuste est directe étant donné le cadre de travail [Iwasaki 98][Peaucelle 07].
- Analyse des systèmes à retards distribués [Ariba ROCOND09]

Exemples

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - h(t)).$$

Table: Retard maximal autorisé h_{max} ($h_{min} = 0$) préservant la stabilité.

d	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	$\forall d > 1$
Fridman et al (02)	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	0.999
Fridman et al (06)	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632
Wu et al (04)	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	-	-
Kao et al (05)	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	-
He et al (07)	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345	1.345
He et al (07)	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345	1.345
Kao et al (07)	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.359	0.999
Lyapunov-Krasovskii [Ariba IJC09]	5.120	4.081	3,448	2,528	2.152	1.991	-
Séparation quadratique avec 3 opérateurs (DD)	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	0.999
Séparation quadratique avec 4 opérateurs (DR)	5.120	4.081	3,448	2,528	2.152	1.991	-
Séparation quadratique avec filtre [CDC'09]	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.360	-
Séparation quadratique avec filtre [CDC'09]	6.117	4.794	3.995	2.682	1.957	1.602	-

✪ Notons que notre méthode permet d'obtenir de meilleurs résultats mais au détriment du nombre de variables de décision.

Exemples

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t - h(t)).$$

Pour cet exemple, les critères classiques sont inapplicables! Nous utilisons la méthode de séparation quadratique avec 4 opérateurs qui fournit une condition *Delay Range*.

Table: Intervalle de retard stabilisant le système en fonction de d .

	h_{min}	h_{max}
$d = 0$	0.102	1.424
$d = 0.1$	0.102	1.424
$d = 0.2$	0.103	1.423
$d = 0.5$	0.104	1.421
$d = 0.8$	0.105	1.419
$d = 1$	0.105	1.417
analytique (cas constant)	0.10016826	1.7178

Plan

Stabilité des systèmes à retards variants dans le temps

- Position du problème
- Séparation quadratique
- Analyse des systèmes à retards
- Exemples

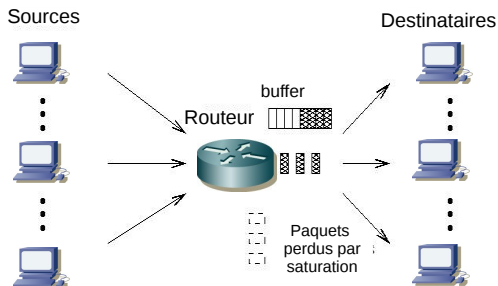
Contrôle de trafic dans les réseaux de communication TCP

- Modélisation
- Contrôle de TCP et gestion d'un routeur
- Supervision de trafic

Conclusion et travaux futurs

Introduction au problème de congestion et aux communications TCP

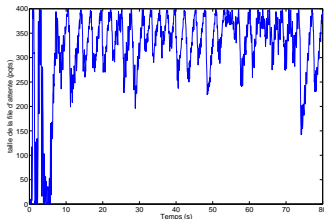
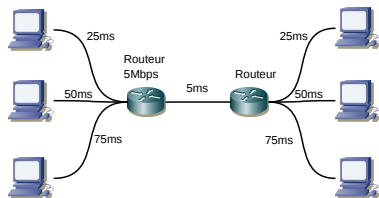
- TCP (*Transmission Control Protocol*) met en place un mécanisme de contrôle de congestion dit de bout-en-bout.
- Sur réception d'un paquet → le destinataire renvoie un acquittement.
- Sur réception d'un accusé (ou pas) → la source augmente (ou diminue) son taux d'émission: algorithme AIMD (*Additive Increase Multiplicative Decrease*).
- Si le trafic est trop intense, le buffer du routeur en congestion se remplit.



⇒ Lorsque le buffer sature, les paquets sont éjectés: mécanisme de *Drop tail*.

Exemple

Simulation du mécanisme de *Drop tail* sous NS-2 (simulateur de réseaux)



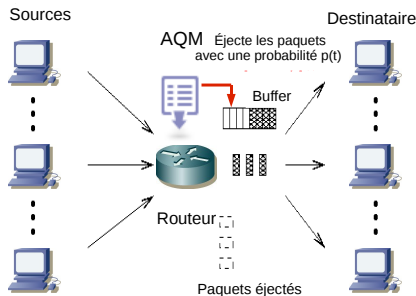
Lorsque le buffer sature (taille: 400 *pqts*) → pertes:

- larges oscillations,
- entretient une taille de file proche de la saturation,
- temps de file d'attente important.

⇒ Qualité de Service (QoS) pauvre

Mécanisme *Active Queue Management* (AQM) pour la régulation de réseaux

- Un AQM complète TCP pour le contrôle de congestion.
- Les AQM sont des mécanismes qui marquent ou éjectent des paquets.
- En marquant/éjectant des paquets, un AQM agit implicitement sur le taux d'émission d'une source.
- AQM dans la littérature: RED, BLUE, AVQ, PI... [Low 02], [Hollot 02], [Ryu 04]
- Un AQM agit comme un contrôleur et met en place une structure de type boucle fermée.

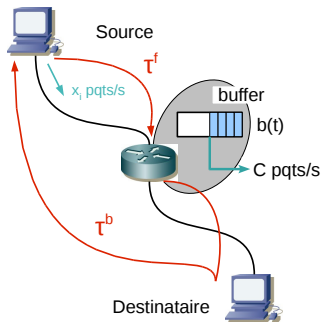


Modélisation des flux TCP à travers un goulet d'étranglement

Modèle fluide de l'ensemble TCP/AQM: reformulation de celui de [Low 02]

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= \frac{x_i(t-\tau_i)}{x_i(t)\tau_i(t)^2} (1 - p_i(t - \tau_i^b)) - \frac{x_i(t-\tau_i)x_i(t)}{2} p_i(t - \tau_i^b) \\ &\quad + \frac{x_i(t)}{\tau_i(t)} - \frac{x_i(t)}{\tau_i(t)C} \sum_N x_k(t - \tau_k^f) \\ \dot{b}(t) &= -C + \sum_N x_i(t - \tau_i^f) \\ \tau_i &= \frac{b(t)}{C} + T_{p_i} = \tau_i^f + \tau_i^b \end{cases}$$

- $x_i \doteq$ taux d'émission de la source i (pqt/s)
- $b \doteq$ taille de la file d'attente (pqt/s)
- $\tau_i \doteq$ round trip time (RTT) (s)
- $\tau_i^f \doteq$ forward delay (s)
- $\tau_i^b \doteq$ backward delay (s)
- $C \doteq$ capacité du routeur (pqt/s)
- $N \doteq$ nombre de sources
- $p_i \doteq$ probabilité de perte de paquet



Modélisation

Linearisation

Point d'équilibre:

$$\begin{cases} \tau_i^* &= T_{p_i} + b^*/C \\ \dot{b}(t) &= 0 \rightarrow \sum_N x_i^* = C \\ \dot{x}_i(t) &= 0 \rightarrow p_i^* = \frac{2}{2+(x_i^* \tau_i^*)^2} \end{cases}$$

Le choix du point d'équilibre permet de régler la Qualité de Service (QoS):

[Ariba ECC 09], [Ariba TNSM 09]

- b^* fixe le temps de file d'attente.
- x_i^* fixe la part de capacité allouée à la source i .

Modèle linéaire:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta p_1(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta p_N(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}$$

Régulation de TCP et gestion d'un routeur: synthèse d'un AQM

Pourquoi ?

- Pour contrôler la file d'attente,
⇒ QoS en termes de délai.
- Pour contrôler les flux TCP,
⇒ QoS en termes de débit et
de répartition
(par exemple équité).

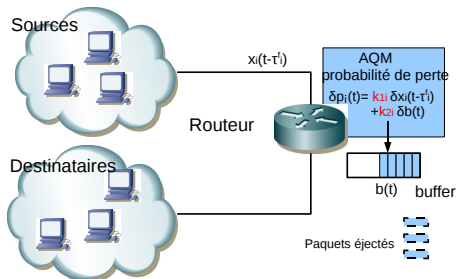
Régulation de TCP et gestion d'un routeur: synthèse d'un AQM

Pourquoi ?

- Pour contrôler la file d'attente,
⇒ QoS en termes de délai.
- Pour contrôler les flux TCP,
⇒ QoS en termes de débit et de répartition
(par exemple équité).

Soit la loi de commande suivante:

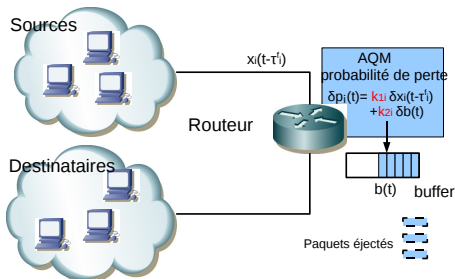
$$\delta p_i(t) = k_1 \delta x_i(t - \tau_i^f) + k_2 \delta b(t)$$



Régulation de TCP et gestion d'un routeur: synthèse d'un AQM

Pourquoi ?

- Pour contrôler la file d'attente, \Rightarrow QoS en termes de délai.
- Pour contrôler les flux TCP, \Rightarrow QoS en termes de débit et de répartition (par exemple équité).



Soit la loi de commande suivante:

$$\delta p_i(t) = k_1 \delta x_i(t - \tau_i^f) + k_2 \delta b(t)$$

\Rightarrow Stabilité des systèmes à retards multiples:

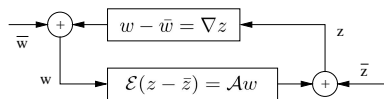
$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_N(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + B K_1 \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N) \end{bmatrix} + B K_2 \begin{bmatrix} \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}.$$

Synthèse du contrôleur [Ariba ECC 09], [Ariba TNSM 09]

Modèle linéarisé du trafic TCP + notre AQM implanté au routeur:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_N(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + BK_1 \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N) \end{bmatrix} + BK_2 \begin{bmatrix} \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}.$$

⇓



$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & & & 0 \\ & \mathcal{F}_f & & \\ & & \mathcal{F} & \\ 0 & & & \mathcal{F}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_\diamond = \text{diag} \left((1 - \mathcal{D}_{\tau_1^\diamond})\mathcal{I}, \dots, (1 - \mathcal{D}_{\tau_N^\diamond})\mathcal{I} \right)$$

⇓

Application du principe de séparation quadratique → condition de stabilité.

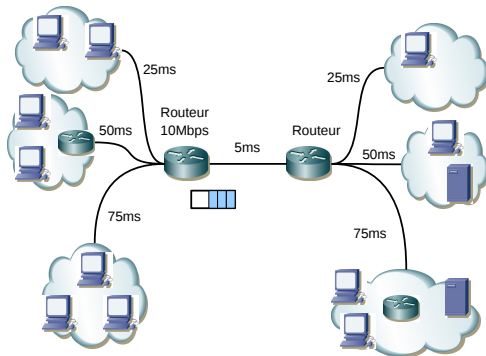
$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp *} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > 0 \Rightarrow K_1, K_2.$$

On peut montrer que cette inégalité est bilinéaire en K_1, K_2 et P, R .

- Obligation d'introduire du conservatisme.
- Utilisation d'un solveur BMI ou d'algorithmes de relaxation.

Exemple

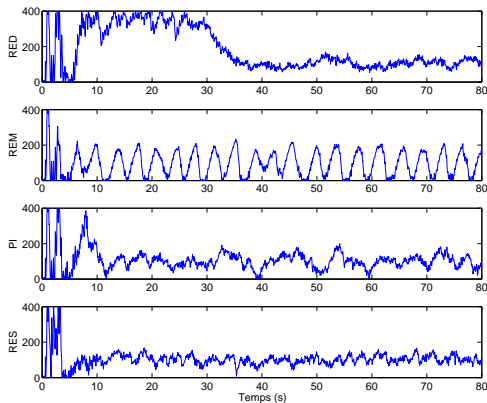
Considérons la topologie suivante:



- Nous supposons le trafic fluide.
- Chaque source comprend 10 utilisateurs.
- Nous souhaitons réguler la file d'attente à une longueur de $100pqts$ (la taille du buffer étant $400pqts$).

Simulations NS-2

Taille de file d'attente (pqts) dans le routeur pour différentes stratégies d'éjection de paquets:

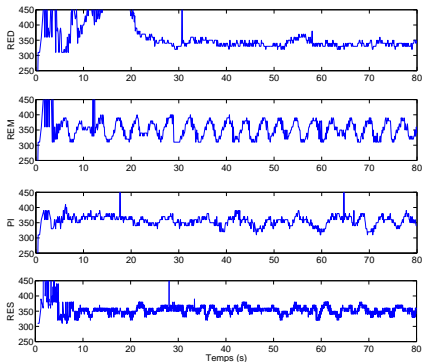


Objectifs pour assurer la QoS:

- Réguler la file à $100pqts$ \Rightarrow régulation du délai de communication.
- Induire peu d'oscillations \Rightarrow pour assurer une gigue faible.
- Régime transitoire court.

Simulations NS-2

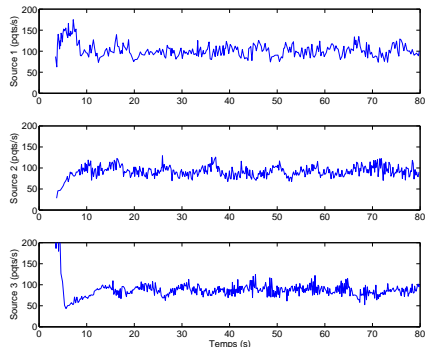
RTT résultants (ms) pour chaque utilisateur de la source 1, pour différentes stratégies d'éjection de paquets:



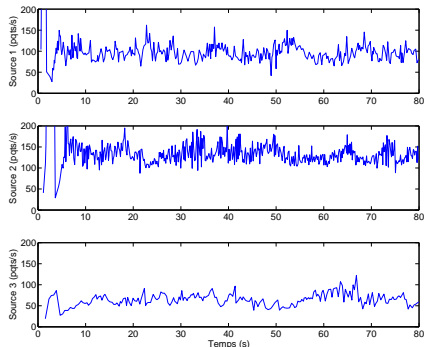
Si la file d'attente est bien régulée, il en sera de même du temps de file d'attente.

Simulations NS-2:

En choisissant de façon appropriée le point d'équilibre, différentes conditions en termes de QoS peuvent être satisfaites.



- QoS préconisée: équité.
- Tous les utilisateurs ont le même débit d'émission (à l'équilibre): 87ppts/s .



- QoS préconisée: service différencié, source 1: 33%, source 2: 45% et source 3: 22%
- Chaque utilisateur observe un débit différent en fonction de sa source d'appartenance: 87ppts/s , 117ppts/s ou 57ppts/s .

Cadre de travail

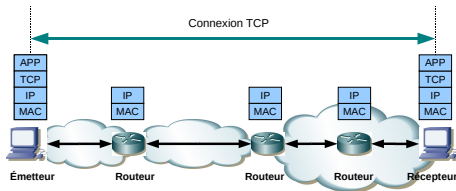
Nous nous sommes focalisés sur le problème de congestion d'un goulet d'étranglement.

⇒ Application de notre étude sur une topologie simpliste ?

Cadre de travail

Nous nous sommes focalisés sur le problème de congestion d'un goulet d'étranglement.

⇒ Application de notre étude sur une topologie simpliste ?

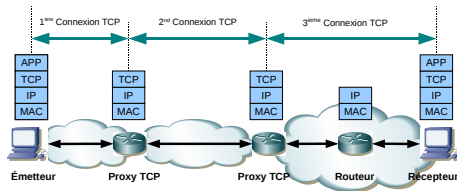


Le protocole TCP établit une connexion de **bout en bout**.

Cadre de travail

Nous nous sommes focalisés sur le problème de congestion d'un goulet d'étranglement.

⇒ Application de notre étude sur une topologie simpliste ?



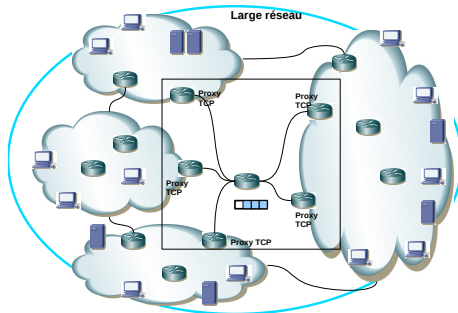
La mise en place de Proxy TCP permet de **"splitter"** la connexion globale.

- Permet d'isoler des parties du réseau à faible QoS.
- Implémentation facile: ajout d'une couche TCP aux routeurs concernés.

Cadre de travail

Nous nous sommes focalisés sur le problème de congestion d'un goulet d'étranglement.

⇒ Application de notre étude sur une topologie simpliste ?



Intérêts:

- On retrouve la topologie étudiée.
- La topologie est statique.

Supervision de trafic

Objectifs:

- Observer le comportement du trafic dans le réseau.
- Détecter des anomalies.

Supervision de trafic

Objectifs:

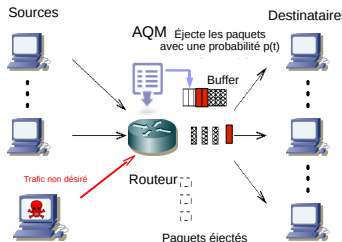
- Observer le comportement du trafic dans le réseau.
- Détecter des anomalies.

Prise en compte d'une classe d'anomalies:

$$\dot{b}(t) = -C + \sum_N x_i(t - \tau_i^f) + d(t)$$

Nous considérons des anomalies de type CBR
(*Constant Bit Rate*)

⇒ l'anomalie $d(t)$ peut être modélisée
par une fonction constante par morceaux.



Supervision de trafic

Objectifs:

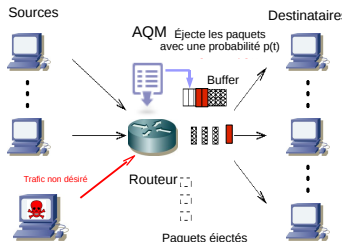
- Observer le comportement du trafic dans le réseau.
- Détecter des anomalies.

Prise en compte d'une classe d'anomalies:

$$\dot{b}(t) = -C + \sum_N x_i(t - \tau_i^f) + d(t)$$

Nous considérons des anomalies de type CBR
(Constant Bit Rate)

⇒ l'anomalie $d(t)$ peut être modélisée
par une fonction constante par morceaux.



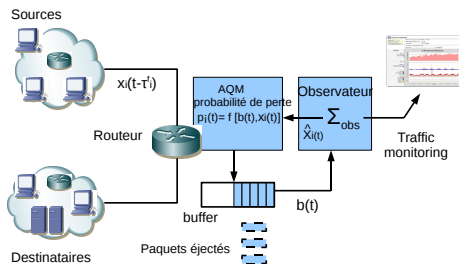
$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}_d} x_d(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u(t) \\ y(t) = \bar{C} \tilde{x}(t) = [0 \quad 1 \quad 0] x(t) \end{cases}$$

où $x(t) = [\delta x_1(t) \cdots \delta x_N(t) \delta b(t) d(t)]$ et
 $x_d(t) = [\delta x_1(t - \tau_1^f) \cdots \delta x_N(t - \tau_N^f) \delta b(t) d(t)]$.

Synthèse d'un observateur

Pourquoi ?

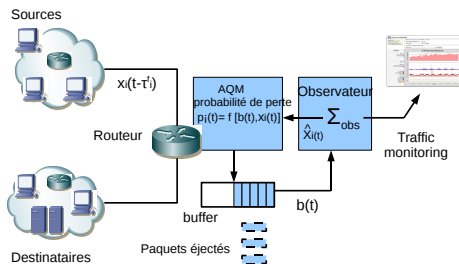
- Pour fournir une estimation de l'état dans un but de commande (pour un AQM).
- Pour faire de la supervision de trafic et de la détection.



Synthèse d'un observateur

Pourquoi ?

- Pour fournir une estimation de l'état dans un but de commande (pour un AQM).
- Pour faire de la supervision de trafic et de la détection.



Nous définissons un observateur de la forme:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}\hat{x}(t) + \bar{A}_d\hat{x}_d(t) + \bar{B}u(t) + L(y(t) - \bar{C}\hat{x}(t))$$

où L est le gain de l'observateur à synthétiser t.q. $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$.

⇒ Problème de stabilité d'un système à retards multiples:

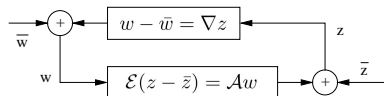
$$\dot{e}(t) = (\bar{A} - L\bar{C})e(t) + \bar{A}_de_d(t).$$

Synthèse d'un observateur [Ariba CCA 09], [Ariba TNSM 09]

Erreur entre l'état estimé et l'état du modèle linéarisé de l'ensemble TCP/AQM:

$$\dot{e}(t) = (\bar{A} - L\bar{C}) e(t) + \bar{A}_d e_d(t).$$

⇓



$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & & \\ & \mathcal{D} \otimes \mathbf{1}_{N+2} & \\ & & (\mathbf{1} - \mathcal{D})\mathcal{I} \otimes \mathbf{1}_{N+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \text{diag} \left(\mathcal{D}_{\tau_1^f}, \dots, \mathcal{D}_{\tau_N^f} \right)$$

⇓

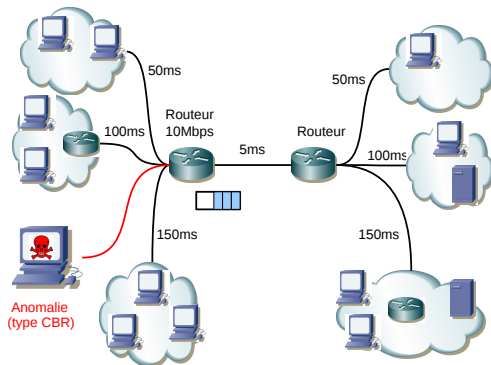
Application du principe de séparation quadratique → condition de stabilité.

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp*} \Theta [\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp} > 0 \Rightarrow L.$$

On peut montrer que cette inégalité est une LMI.

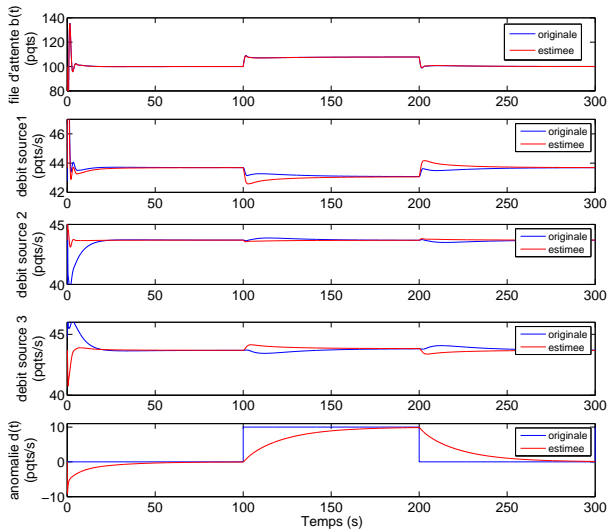
Exemple

Considérons la topologie suivante:

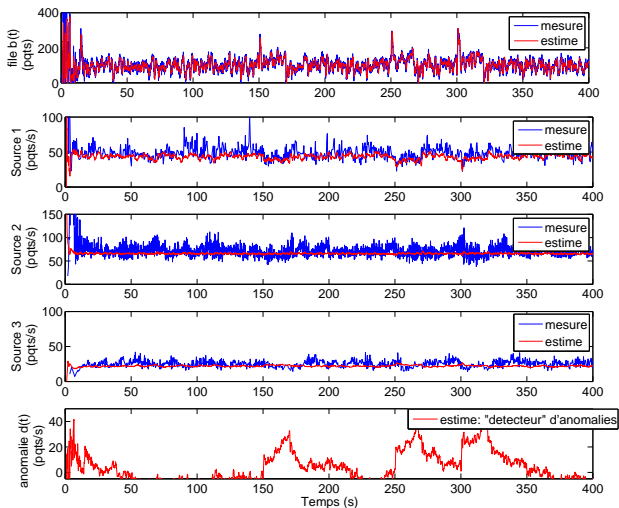


- Un AQM régule le trafic TCP autour d'un point d'équilibre.
- Une source envoie du trafic UDP de courte durée (*bursty short-lived traffic*).
- Le trafic UDP est supposé de type CBR.

Simulations du modèle non linéaire sous Matlab/Simulink:



Simulations NS-2:



Conclusion de la présentation

Séparation quadratique

- Nouveau cadre de travail pour l'étude des systèmes à retards.
- Dans cette méthode, le système est modélisé comme une interconnexion.
- Le choix des opérateurs mène à différentes conditions: IOD, DD, DR, robuste.
- Les critères de stabilité sont exprimés en termes de LMI.

Contrôle de trafic dans les réseaux de communication TCP

- A partir d'une modélisation fluide de TCP, un système à retards multiples est obtenu.
- Un dispositif d'AQM est synthétisé sur les bases d'un retour d'état structuré.
- La QoS peut être réglée au travers du choix du point d'équilibre.
- Un observateur est implanté au routeur pour la supervision de trafic.
- Des simulations sous Matlab et NS-2 valident la théorie.

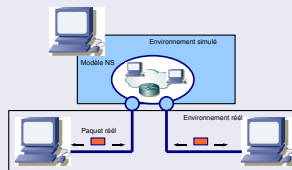
Travaux futurs

Séparation quadratique

- Trouver de nouveaux opérateurs auxiliaires pour une description pertinente du retard.
- Considérer d'autres types d'opérateurs: saturation par exemple.
- Etablir les liens avec la méthode de Lyapunov.

Contrôle de trafic dans les réseaux de communication TCP

- Test d'émulation en cours
 - plate-forme d'expérimentation: *laasnetexp*
 - trafic réel TCP
 - goulet + AQM + observateur sont émulés par NS-2



- Pertinence de la loi de commande,
 - ⇒ ajouter des propriétés (robustesse, performances...).
 - ⇒ liens avec la QoS.
- Campagne d'expérimentations (emulation et réseaux réels),
- Développer des observateurs à entrées inconnues (UIO) pour la détection de d'anomalies (diagnostic).