Signaux - Systèmes et Automatique Linéaire

Yassine Ariba

Dpt GEI - Icam, Toulouse.

version 3.2

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : cours de l'an dernier, mathématiques depuis le CP !
- 8h en amphi : cours + exercices. Présentation sur transparents.
- 2×4h de TP.
  - utilisation de MATLAB® et Simulink®
  - grille d'évaluation.
- 1 examen final (1h).

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : cours de l'an dernier, mathématiques depuis le CP !
- 8h en amphi : cours + exercices. Présentation sur transparents.
- 2 × 4h de TP.
  - utilisation de MATLAB® et Simulink®
  - grille d'évaluation.
- 1 examen final (1h).

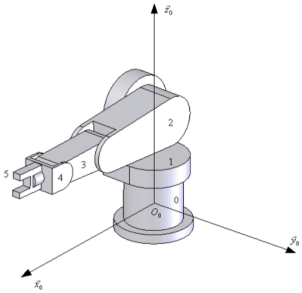
Sur Moodle

- Documents : transparent cours + support rédigé + exercices + sujets TP.
- Forum.

Sommaire

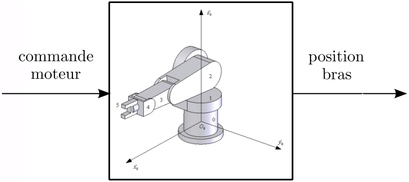
Exemple introductif

Nous souhaitons piloter la position angulaire d'un bras manipulateur.



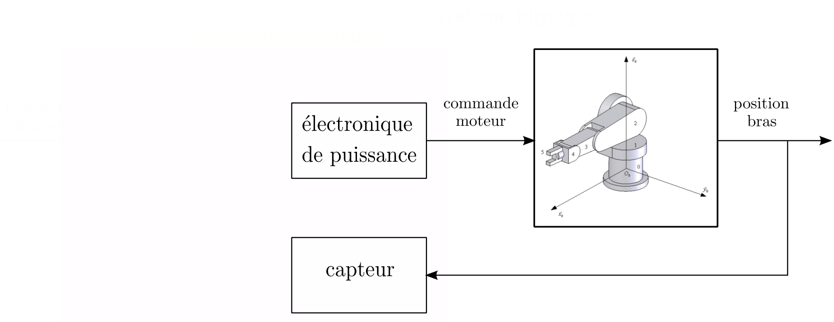
Qu'est-ce qu'on fait ? De quoi avons-nous besoin ?

Structure standard d'un asservissement



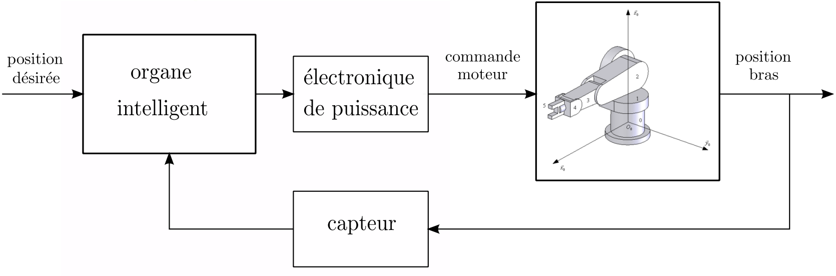
- Le bras manipulateur est entrainé par un moteur.

Structure standard d'un asservissement



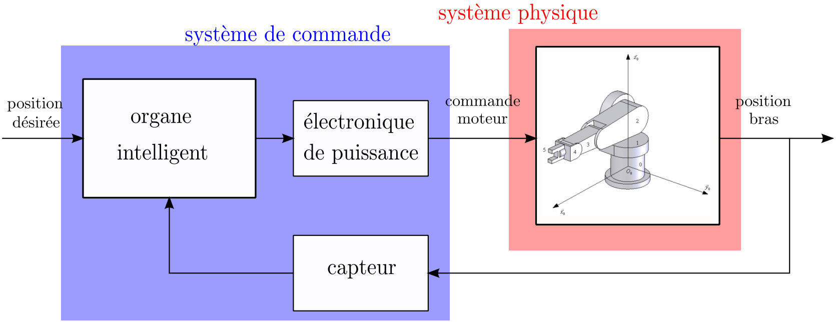
- Le bras manipulateur est entrainé par un moteur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras et l'électronique de puissance permet de générer la commande adaptée au moteur.

Structure standard d'un asservissement



- Le bras manipulateur est entrainé par un moteur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras et l'électronique de puissance permet de générer la commande adaptée au moteur.
- Un organe intelligent établit une stratégie de commande.

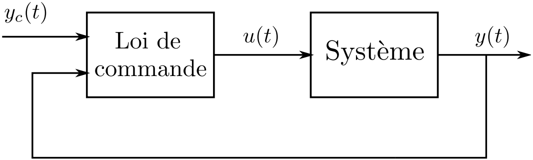
Structure standard d'un asservissement



- Le bras manipulateur est entrainé par un moteur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras et l'électronique de puissance permet de générer la commande adaptée au moteur.
- Un organe intelligent établit une stratégie de commande.
- Le système de commande peut être mise en oeuvre sur une carte électronique, un ordinateur, un calculateur...

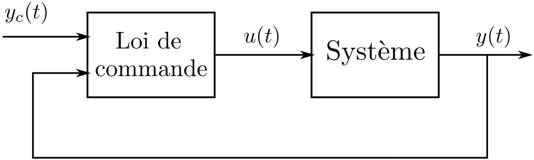
Généralités : qu'est-ce que l'Automatique ?

Ensemble des disciplines scientifiques et techniques pour l'étude et la conception de systèmes fonctionnant sans intervention humaine.



Généralités : qu'est-ce que l'Automatique ?

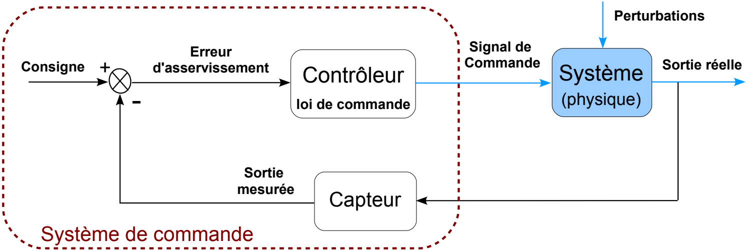
Ensemble des disciplines scientifiques et techniques pour l'étude et la conception de systèmes fonctionnant sans intervention humaine.



⋆ **Objectif :** Concevoir une loi de commande pour **asservir** la sortie du système suivant la consigne.

$\Rightarrow$ principe de contre-réaction

Structure de commande en boucle fermée classique

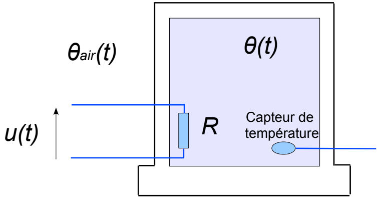


- Objectif : asservir la sortie à la valeur spécifiée en consigne.
- Le contrôleur génère le signal de commande pour contrôler le système en fonction de l'écart entre la consigne et la sortie mesurée.
- Des perturbations peuvent affecter le comportement du système.

Application thermodynamique

Régulation de température

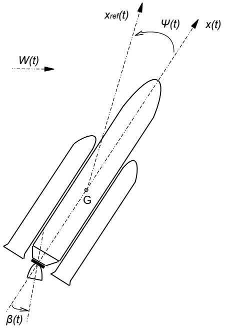
- **Entrée :** alimentation résistance $u(t)$.
- **Sortie :** température de l'enceinte $\theta(t)$.
- **Perturbations :** échange calorifique avec le milieu ambiant $\theta_{air}(t)$, introduction d'objets.



Application aéronautique

Pilotage d'un lanceur

- **Entrée :** angle de la tuyère $\beta(t)$.
- **Sortie :** angle de déviation $\Psi(t)$ par rapport à la trajectoire de référence.
- **Perturbations :** vent, charge carburant variable.

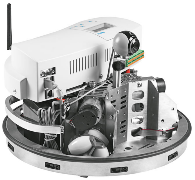


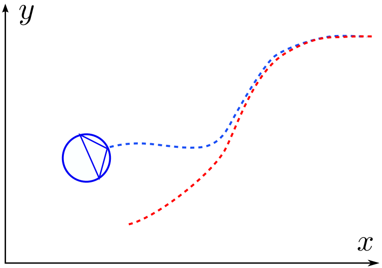
Application robotique

Suivi de trajectoire d'un robot mobile

- **Entrée :** vitesse des moteurs des deux roues.
- **Sortie :** position et vitesse du robot.
- **Perturbations :** type de sol, obstacles.

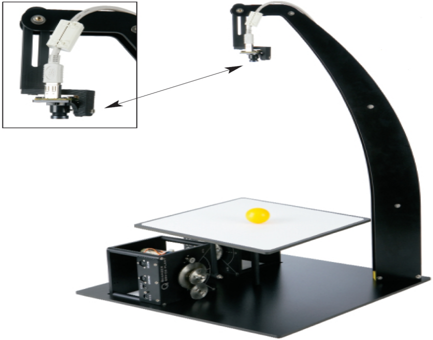
Base mobile Robotino®

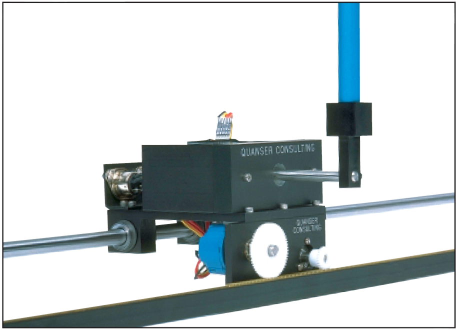




Applications académiques

Stabilisation d'une balle sur une table et d'un pendule inversé





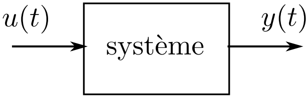
© Quanser

Sommaire

Modélisation

L'étude d'un système dynamique nécessite un *modèle*.

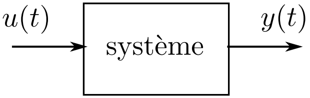
$\Rightarrow$ relation mathématique : $u(t) \ \rightarrow \ y(t)$?



Modélisation

L'étude d'un système dynamique nécessite un *modèle*.

$\Rightarrow$ relation mathématique : $u(t) \;\rightarrow\; y(t)$?



Dans le cas des **systèmes linéaires invariants**, le modèle s'écrit sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\Big\{f(t)\Big\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\hat{f}(s)\Big\}$.

Propriétés :

- Linéarité : $\mathcal{L}\Big\{af(t) + bg(t)\Big\} = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants.
- Dérivation : $\mathcal{L}\Big\{\frac{d}{dt} f(t)\Big\} = s\hat{f}(s) - f(0)$.
- Intégration : $\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(\theta) d\theta\Big\} = \dfrac{1}{s}\hat{f}(s)$.
- Retard : $\mathcal{L}\Big\{f(t-\tau)\Big\} = e^{-s\tau}\hat{f}(s)$, $\tau > 0$ et $f(t) = 0 \ \forall t < 0$.
- Valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{f}(s)$.

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	**Dom. temporel** $f(t)$	**Trans. de Laplace** $\hat{f}(s)$
impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	**Dom. temporel** $f(t)$	**Trans. de Laplace** $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s+2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \ = \ \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s+2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

Nouvelle relation entre la sortie et l'entrée

$$\boxed{\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)}$$

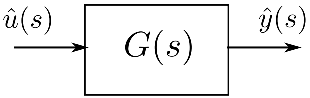


Schéma-bloc

Les fonctions de transfert sont pratiques pour analyser des systèmes plus complexes

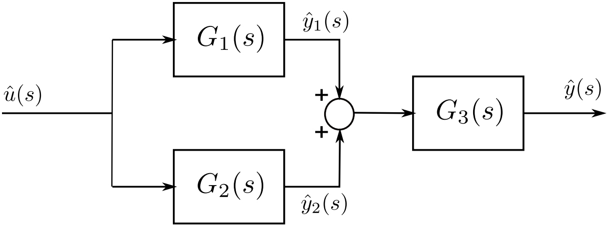
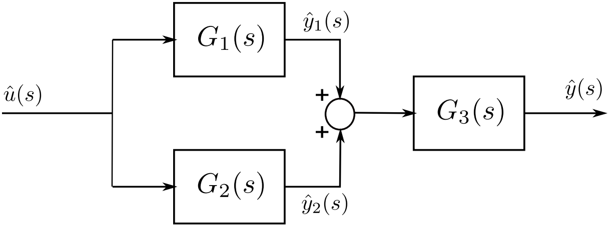


Schéma-bloc

Les fonctions de transfert sont pratiques pour analyser des systèmes plus complexes



On a les relations :

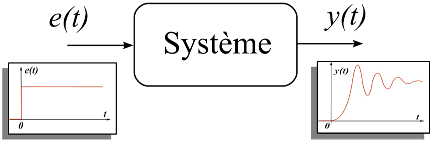
$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{y}_1(s) & = & G_1(s)\hat{u}(s) \\ \hat{y}_2(s) & = & G_2(s)\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) & = & G_3(s)\Big(\hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s)\Big) \end{array}\right.$$

Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = \underbrace{G_3(s)\Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)}_{F(s)}\hat{u}(s)$$

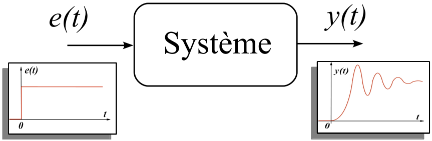
Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $e(t)$ donnée.



Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $e(t)$ donnée.



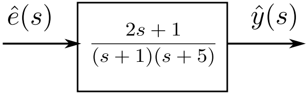
Résolution avec les fonctions de transfert :

1. Exprimer la sortie $\hat{y}(s) = G(s)\hat{e}(s)$.
2. Effectuer une décomposition en éléments simples de $\hat{y}(s)$.
3. Appliquer la transformée de Laplace inverse (à l'aide de la table)

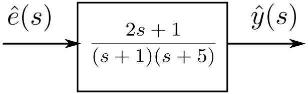
$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

pour obtenir le signal dans le domaine temporel.

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



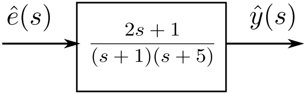
Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\frac{1}{s}$$

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



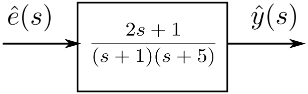
Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\frac{1}{s}$$

La réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)}\frac{1}{s}$$

La réponse se décompose en

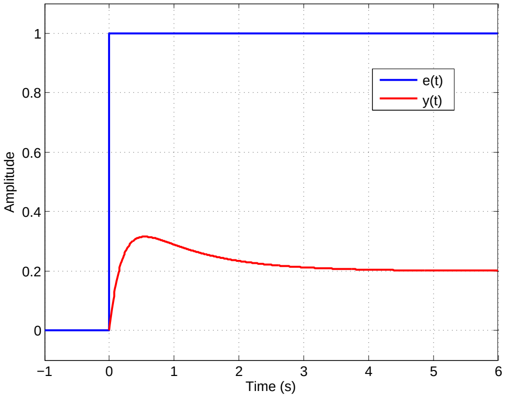
$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

Le calcul des coefficients donne :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & s\hat{y}(s)\big|_{s=0} = \frac{1}{5} \\ B & = & (s+1)\hat{y}(s)\big|_{s=-1} = \frac{1}{4} \\ C & = & (s+5)\hat{y}(s)\big|_{s=-5} = -\frac{9}{20} \end{array} \right.$$

A l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{9}{20}e^{-5t}$$



Cas des systèmes du 1^{er} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\,\hat{e}(s)$$

pour lequel on définit τ la *constante de temps* et k le *gain statique*.

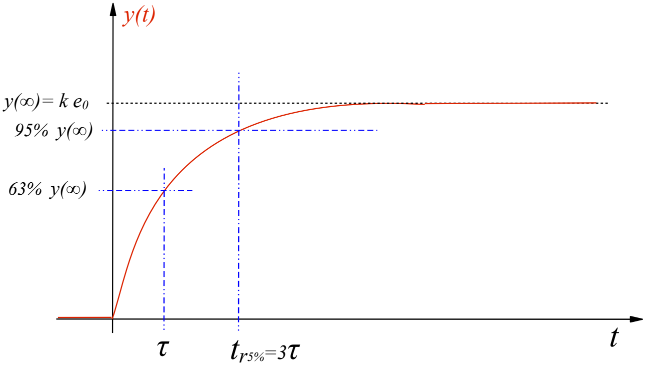
Cas des systèmes du 1^{er} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\ \hat{e}(s)$$

pour lequel on définit τ la *constante de temps* et k le *gain statique*.

Réponse à un échelon d'amplitude e_0 : $y(t) = e_0 k\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$



Cas des systèmes du 2^{nd} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\ \hat{e}(s)$$

où l'on définit ζ le *coefficient d'amortissement*, ω_n la *pulsation propre* et K le *gain statique*. 3 cas pour la réponse indicielle :

Cas des systèmes du 2^{nd} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\ \hat{e}(s)$$

où l'on définit ζ le *coefficient d'amortissement*, ω_n la *pulsation propre* et K le *gain statique*. 3 cas pour la réponse indicielle :

- cas $\zeta > 1$: régime apériodique

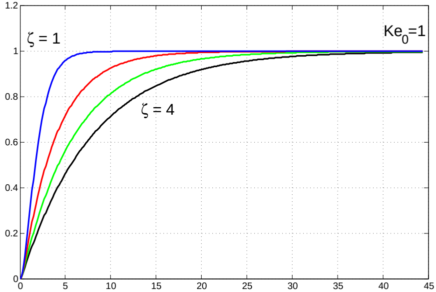
$$y(t) = Ke_0\left[1 + \tfrac{p_2}{p_1 - p_2} e^{-\zeta\omega_n t} + \tfrac{p_1}{p_2 - p_1} e^{-\zeta\omega_n t}\right]$$

- cas $\zeta = 1$: régime critique

$$y(t) = Ke_0\left[1 - \Big(1 - p_1 t\Big) e^{-\zeta\omega_n t}\right]$$

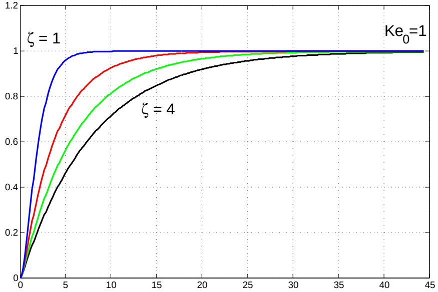
- cas $0 < \zeta < 1$: régime pseudo-périodique ($\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$)

$$y(t) = Ke_0\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_p t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_p t)\right)\right]$$



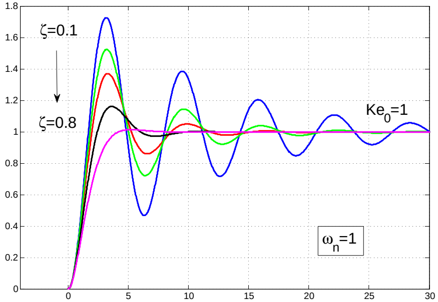
Cas $\zeta \geq 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- pas de dépassement
- quand $\zeta \searrow$ ou $\omega_n \nearrow$, les temps de réponse et de montée $\searrow$



Cas $\zeta \geq 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- pas de dépassement
- quand $\zeta \searrow$ ou $\omega_n \nearrow$, les temps de réponse et de montée $\searrow$

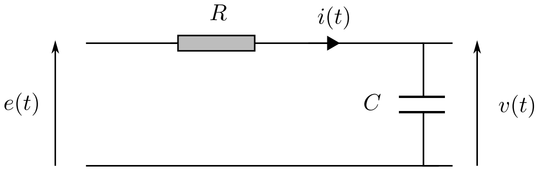


Cas $0 < \zeta < 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- dépassement : $D_1 = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- dépassement à $t = \dfrac{\pi}{\omega_p}$
- temps de réponse : $t_{r5\%} \simeq \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$

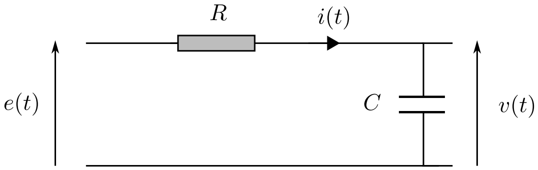
Réponse fréquentielle

Exemple introductif : circuit RC



Réponse fréquentielle

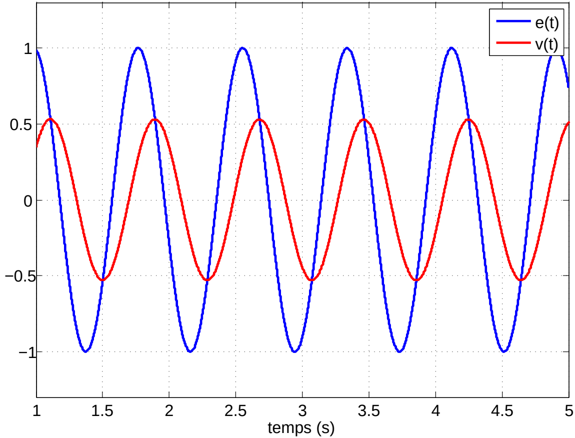
Exemple introductif : circuit RC



Régime permanent sinusoïdal :

$$\begin{cases} e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e) \\ v(t) = v_m \cos(\omega t + \phi_v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e} = e_m e^{j\phi_e} \\ \underline{v} = v_m e^{j\phi_v} \end{cases}$$

Pour $R = 1k\Omega$ et $C = 200\mu F$, appliquons la tension $e(t) = \cos(8t)$.



Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$

$$\underline{Z}_R = R \qquad \text{and} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Zi}$

$$\underline{Z}_R = R \qquad \text{and} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{e}$$

Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Zi}$

$$\underline{Z}_R = R \qquad \text{and} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{e}$$

Ainsi, le transfert de $e(t)$ vers $v(t)$ est :

$$\underline{T} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

Diagramme de Bode de la fonction de transfert

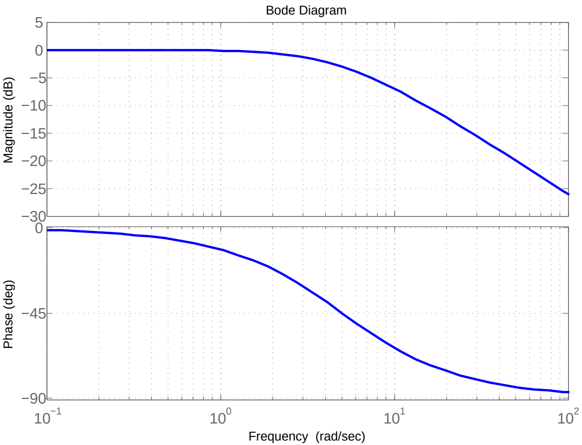
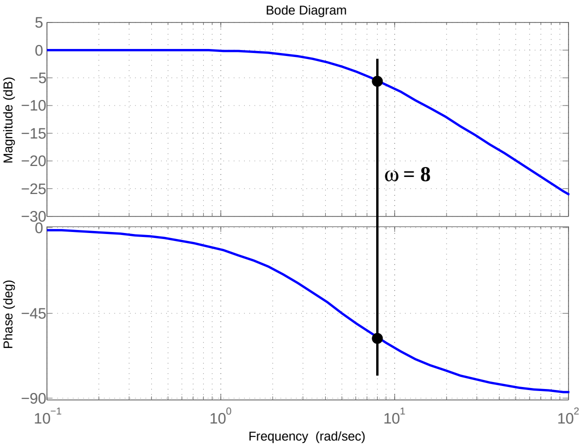
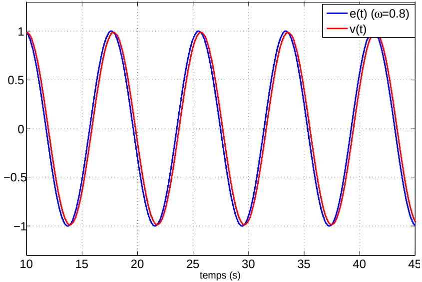


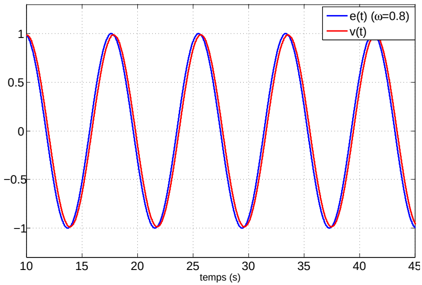
Diagramme de Bode de la fonction de transfert

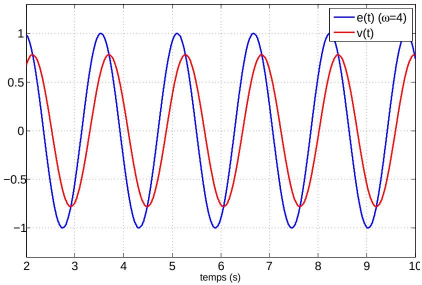


Réponse du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$

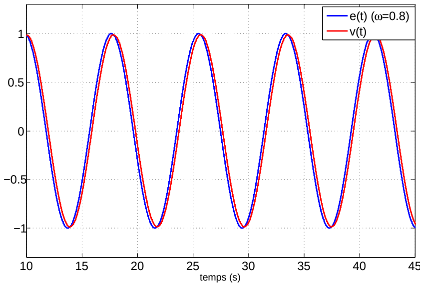


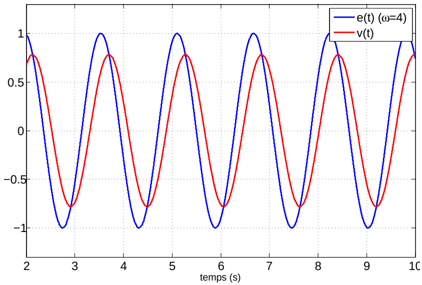
Réponse du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$

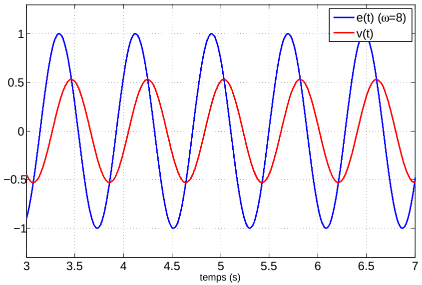




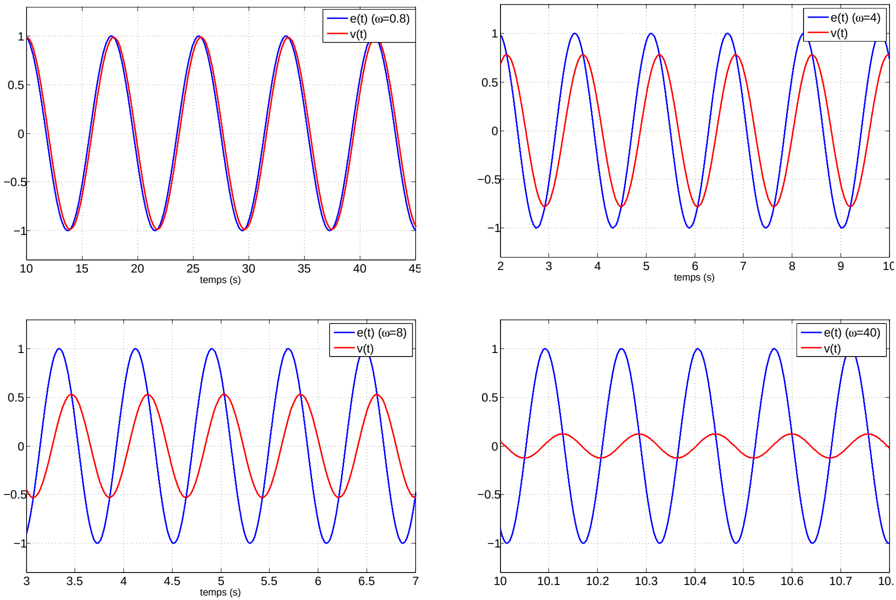
Réponse du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$

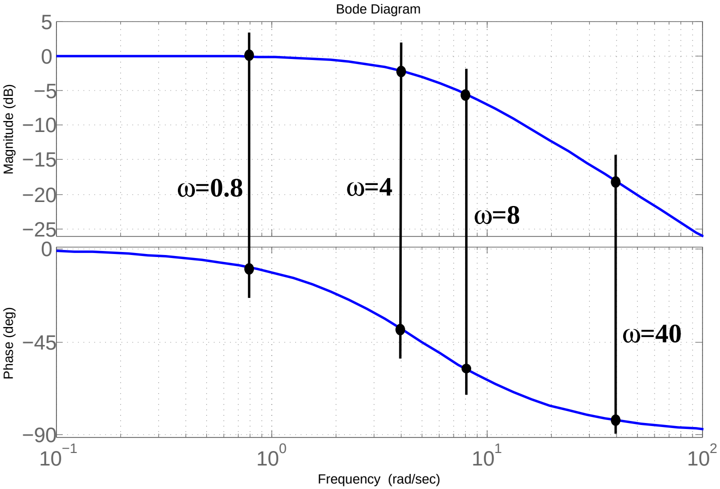






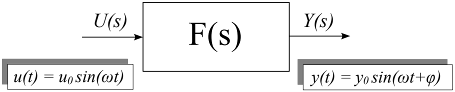
Réponse du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$




Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)
ω=0.8
ω=4
ω=8
ω=40
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
0
−45
−90
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

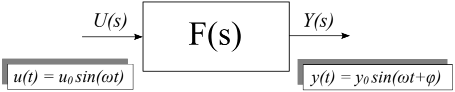
Cas général

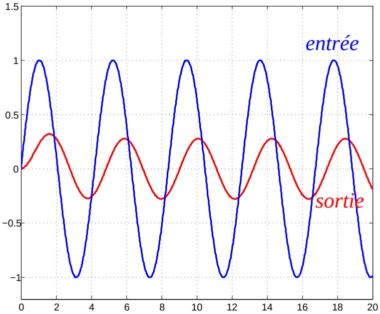
L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système à des entrées sinusoïdales.



Cas général

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système à des entrées sinusoïdales.





Le signal de sortie est aussi sinusoïdale, de même pulsation, d'amplitude différente et présente un déphasage.

Exemple : considérons le système

$$F(s) = \frac{0.5}{s+1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05\,t)$$

$$u_2 = \sin(1.5\,t)$$

$$u_3 = \sin(10\,t)$$

Exemple : considérons le système

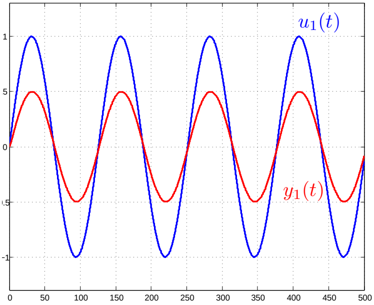
$$F(s) = \frac{0.5}{s+1}$$

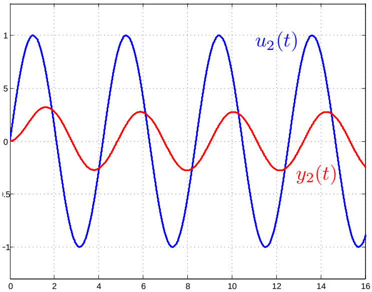
Observons sa réponse aux 3 entrées :

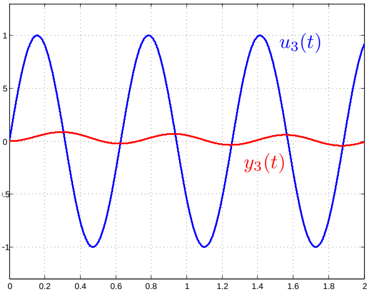
$$u_1 = \sin(0.05\,t)$$

$$u_2 = \sin(1.5\,t)$$

$$u_3 = \sin(10\,t)$$







Un système peut être caractérisé par son

amplification $= |F(j\omega)|$ déphasage$= arg\Big(F(j\omega)\Big)$

Un système peut être caractérisé par son

amplification $= |F(j\omega)|$ déphasage$= arg\Big(F(j\omega)\Big)$

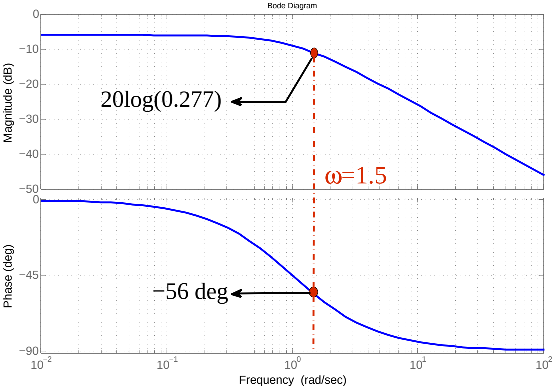
La **transmittance** $F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable s par $j\omega$.
Le **diagramme de Bode** représente le gain et le déphasage en fonction de ω.

Un système peut être caractérisé par son

$$\text{amplification} = |F(j\omega)| \qquad\qquad \text{déphasage}= arg\Big(F(j\omega)\Big)$$

La **transmittance** $F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable s par $j\omega$.
Le **diagramme de Bode** représente le gain et le déphasage en fonction de ω.

Exemple : Réponse fréquentielle de $F(s) = \dfrac{0.5}{s+1}$



Tracés élémentaires

Terme constant : $F(s) = k, \quad (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

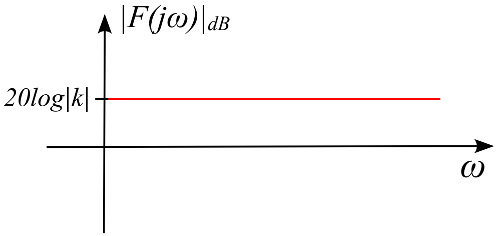
$$\left\{ \begin{array}{rcl} |F(j\omega)|_{db} & = & 20log(k) \\ \phi & = & 0 \end{array} \right.$$

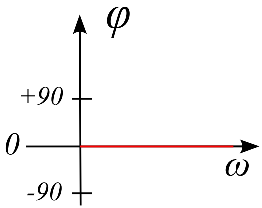
Tracés élémentaires

Terme constant : $F(s) = k, \quad (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = 20log(k) \\ \phi = 0 \end{cases}$$





Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(s) = s$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

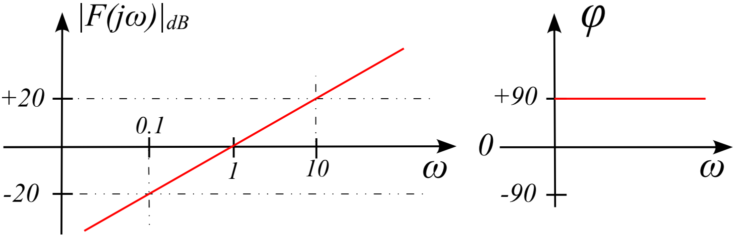
$$\left\{ \begin{array}{rcl} |F(j\omega)|_{db} & = & 20log(\omega) \\ \phi & = & +90^\circ \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(s) = s$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |F(j\omega)|_{db} & = & 20log(\omega) \\ \phi & = & +90° \end{array} \right.$$



Tracés élémentaires

$$\textbf{Intégrateur :} \qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

Fonction de transfert complexe : $\qquad F(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

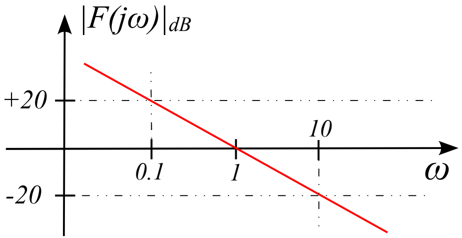
$$\left\{ \begin{array}{rcl} |F(j\omega)|_{db} & = & -20log(\omega) \\ \\ \phi & = & arg(-j\,\frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{array} \right.$$

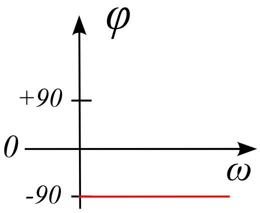
Tracés élémentaires

Intégrateur : $F(s) = \frac{1}{s}$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = -20log(\omega) \\ \phi = arg(-j\frac{1}{\omega}) = -90° \end{cases}$$





Fonction du premier ordre

$$F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\tau\omega}$

- Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{|1+j\tau\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

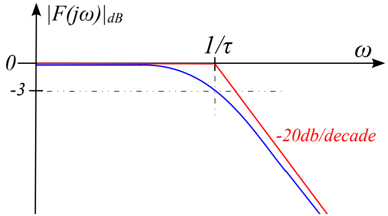
- Argument :

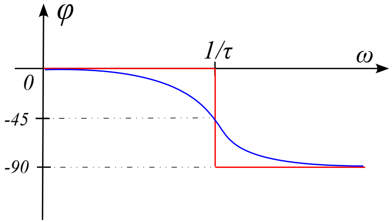
$$arg\big(F(j\omega)\big) = arg\big(1\big) - arg\big(1+j\tau\omega\big) = -arctan\frac{\tau\omega}{1}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = -20log\big(\sqrt{1+\tau^2\omega^2}\big) \\ \phi = -arctan\big(\tau\omega\big) \end{cases}$$

Fonction du premier ordre

$$F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$





Fonction du premier ordre

$$F(s) = 1 + \tau s$$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = 1 + j\tau\omega$

- Module :

$$|F(j\omega)| = |1 + j\tau\omega| = \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$$

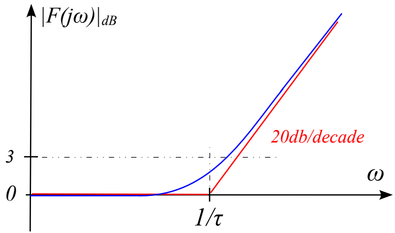
- Argument :

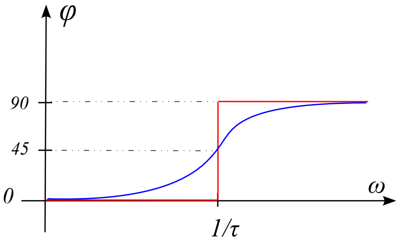
$$arg\big(F(j\omega)\big) = arg\big(1 + j\tau\omega\big) = arctan\frac{\tau\omega}{1}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = 20log\big(\sqrt{1+\tau^2\omega^2}\big) \\ \phi = arctan\big(\tau\omega\big) \end{cases}$$

Fonction du premier ordre

$$F(s) = 1 + \tau s$$





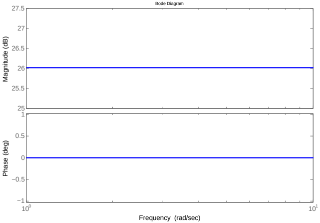
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

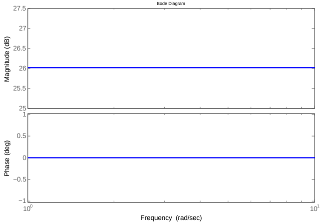
Fonction de transfert : 20



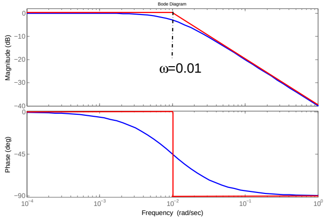
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

Fonction de transfert : 20



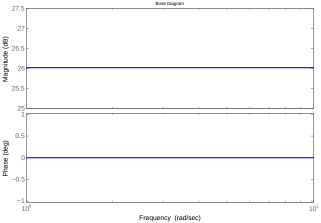
Fonction de transfert : $\frac{1}{100s+1}$



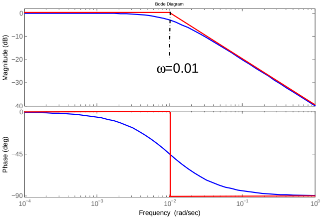
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

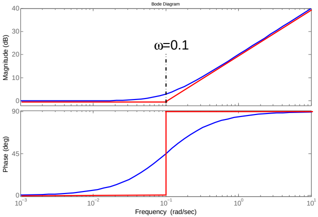
Fonction de transfert : 20



Fonction de transfert : $\frac{1}{100s+1}$



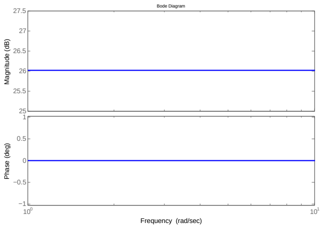
Fonction de transfert : $10s + 1$



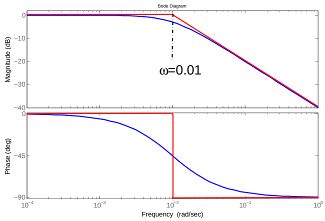
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

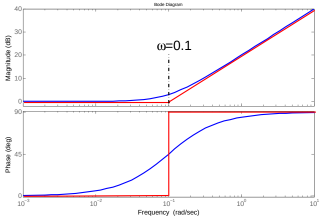
Fonction de transfert : 20



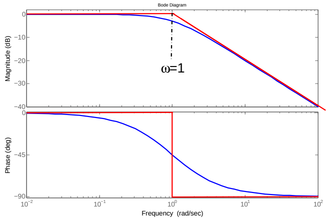
Fonction de transfert : $\frac{1}{100s+1}$



Fonction de transfert : $10s + 1$



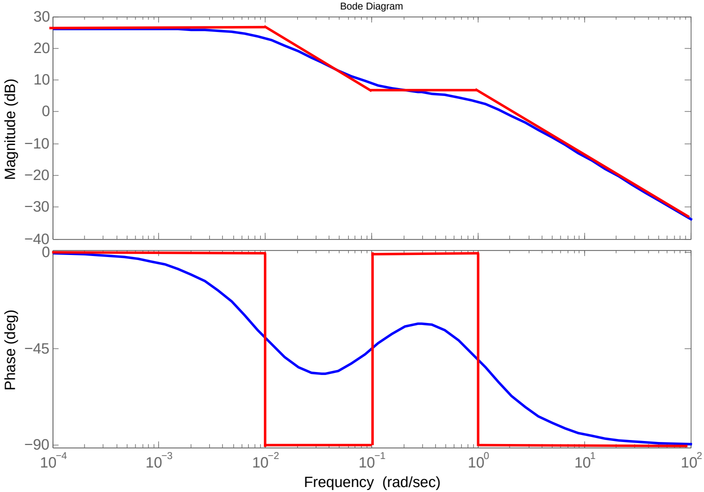
Fonction de transfert : $\frac{1}{s+1}$



Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

Somme des tracés

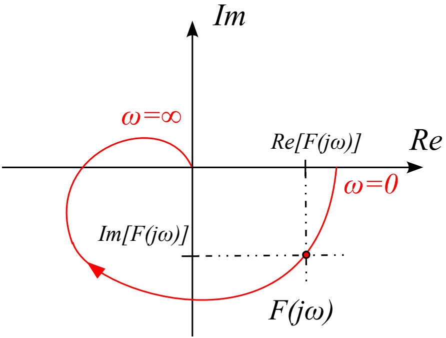


Représentation de Nyquist

Représentation graphique du transfert $F(j\omega)$ dans le plan complexe.

$$F(j\omega) = Re\Big[F(j\omega)\Big] \; + \; j \; Im\Big[F(j\omega)\Big]$$

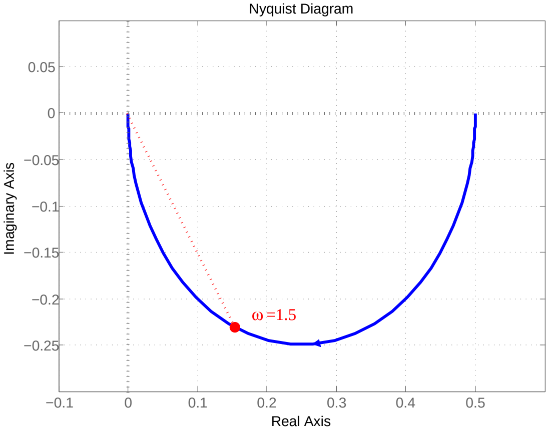
La courbe est paramétrée par la pulsation ω et doit être orientée suivant le sens des ω croissants.



Exemple :

$$F(s) = \frac{0.5}{s+1}$$

L'allure peut être esquissée à partir du diagramme de Bode.



Notion de stabilité

Considérons le système de fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s+a}\hat{u}(s).$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

$$y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

Notion de stabilité

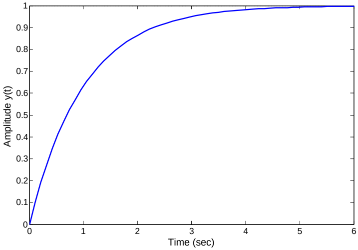
Considérons le système de fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s+a}\hat{u}(s).$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

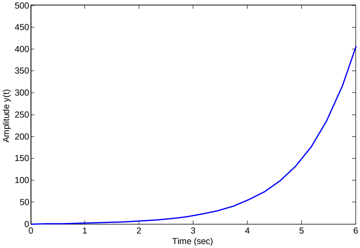
$$y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

cas $a > 0$



le terme e^{-at} tend vers 0

cas $a < 0$



le terme e^{-at} tend vers $+\infty$

$\Rightarrow$ Propriété de **stabilité**

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s-2} \qquad \frac{4}{s+0.5} \qquad \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

$$\frac{1}{s(5s+1)} \qquad \frac{s-2}{s^2+2s+2} \qquad \frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)}$$

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s-2} \Rightarrow \text{Instable} \qquad \frac{4}{s+0.5} \Rightarrow \text{Stable} \qquad \frac{3}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{1}{s(5s+1)} \Rightarrow \text{Instable} \qquad \frac{s-2}{s^2+2s+2} \Rightarrow \text{Stable} \qquad \frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)} \Rightarrow \text{Instal}$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
p^{n-3} & c_1 & c_2 & \dots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
p^0 & \alpha & & &
\end{array}$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
p^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
p^0 & \alpha & & &
\end{array}$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
p^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
p^0 & \alpha & & &
\end{array}$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Le système est stable ssi tous les coefficients de la 1^{ere} colonne sont de même signe.

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \dfrac{s+4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$, stable ?

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \dfrac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$, stable ?

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \dfrac{s+4}{s^4+s^3+4s^2+2s+1}$, stable ?

$$\begin{array}{c|cccc} s^4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ s^2 & 2 & 1 & 0 & \\ s^1 & \frac{3}{2} & 0 & & \\ s^0 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\tfrac{1}{1}(2-4) = 2 \\ b_2 &= -\tfrac{1}{1}(0-1) = 1 \\ c_1 &= -\tfrac{1}{2}(1-4) = \tfrac{3}{2} \\ c_2 &= 0 \\ \alpha &= -\tfrac{2}{3}(0-\tfrac{3}{2}) = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Système stable.

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \dfrac{7}{3s^3+s^2+2s+4}$, stable ?

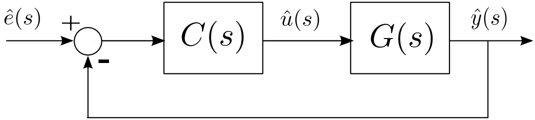
$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & 1 & 4 & 0 \\ s^1 & -10 & 0 & \\ s^0 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\tfrac{1}{1}(12-2) = -10 \\ \alpha &= -\tfrac{1}{-10}(0+40) = 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Système instable.

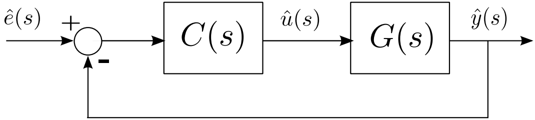
Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Méthodes :

- Ecrire la fonction de transfert globale équivalente $T(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$,

  $\Rightarrow$ Appliquer l'une des deux méthodes vues précédemment.

- Critère du revers (critère graphique).

> Si le système en boucle ouverte est stable et à minimum de phase (pôles et zéros à partie réelle strictement négative) alors le système asservi est stable si et seulement si le point critique $(-1\ ,\ 0)$ est laissé à gauche quand on parcourt le lieu de transfert de la boucle ouverte dans le plan de Nyquist dans le sens des ω croissants.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

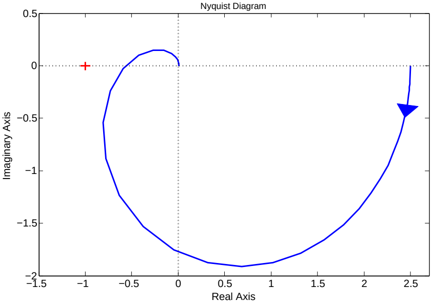
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en <u>boucle ouverte</u> $C(s)G(s)$.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en <u>boucle ouverte</u> $C(s)G(s)$.

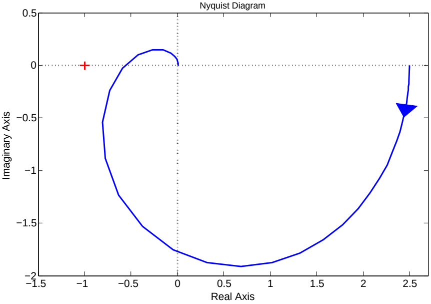


Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en <u>boucle ouverte</u> $C(s)G(s)$.



$\Rightarrow$ le système en <u>boucle fermée</u> est stable.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s+3}{10s+1}.$$

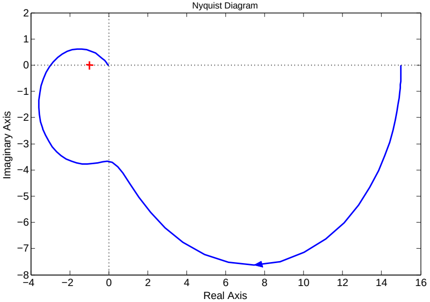
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s+3}{10s+1}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

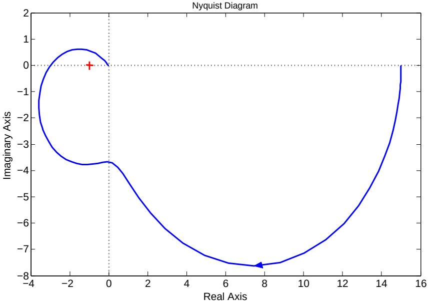


Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s+3}{10s+1}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.



$\Rightarrow$ le système en boucle fermée est instable.

Résumé

Modélisation $\Longrightarrow$ quel modèle mathématique représente bien le système ?

- équation différentielle / fonction de transfert
- schéma-bloc

Résumé

Modélisation $\Longrightarrow$ quel modèle mathématique représente bien le système ?

- équation différentielle / fonction de transfert
- schéma-bloc

Réponse temporelle $\Longrightarrow$ Comment évolue la sortie pour une entrée donnée ?

- résolution de l'équation différentielle (via la table des transformées)
- formes canoniques des systèmes du 1^{er} et 2^{nd} ordre

Résumé

Modélisation $\Longrightarrow$ quel modèle mathématique représente bien le système ?

- équation différentielle / fonction de transfert
- schéma-bloc

Réponse temporelle $\Longrightarrow$ Comment évolue la sortie pour une entrée donnée ?

- résolution de l'équation différentielle (via la table des transformées)
- formes canoniques des systèmes du 1^{er} et 2^{nd} ordre

Réponse fréquentielle $\Longrightarrow$ Comment répond mon système en fonction de la fréquence d'excitation ?

- atténuation / amplification, déphasage
- diagrammes de Bode / Nyquist

Résumé

Modélisation $\Longrightarrow$ quel modèle mathématique représente bien le système ?

- équation différentielle / fonction de transfert
- schéma-bloc

Réponse temporelle $\Longrightarrow$ Comment évolue la sortie pour une entrée donnée ?

- résolution de l'équation différentielle (via la table des transformées)
- formes canoniques des systèmes du 1^{er} et 2^{nd} ordre

Réponse fréquentielle $\Longrightarrow$ Comment répond mon système en fonction de la fréquence d'excitation ?

- atténuation / amplification, déphasage
- diagrammes de Bode / Nyquist

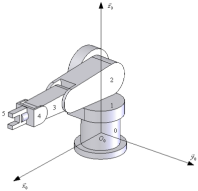
Stabilité $\Longrightarrow$ Est-ce que mon système converge ou diverge ?

- pôles de la fonction de transfert / critère de Routh
- critère du revers pour un asservissement

Retour à notre exemple

Reprenons l'exemple d'un bras manipulateur.

Objectif : asservir la position angulaire du robot suivant l'axe Z

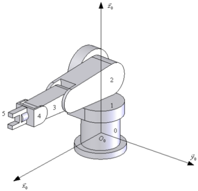


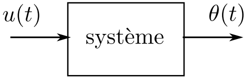
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{système}} \longrightarrow \theta(t)$$

Retour à notre exemple

Reprenons l'exemple d'un bras manipulateur.

Objectif : asservir la position angulaire du robot suivant l'axe Z





La tension de commande du moteur $u(t)$ et la position $\theta(t)$ sont liées par la relation

$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = u(t)$$

Sa fonction de transfert s'écrit

$$G(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{(s+1)s}$$

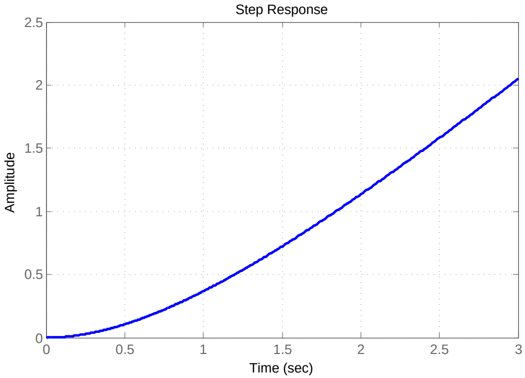
Elle possède 2 pôles : -1 et $0 \Rightarrow$ système instable

Sa fonction de transfert s'écrit

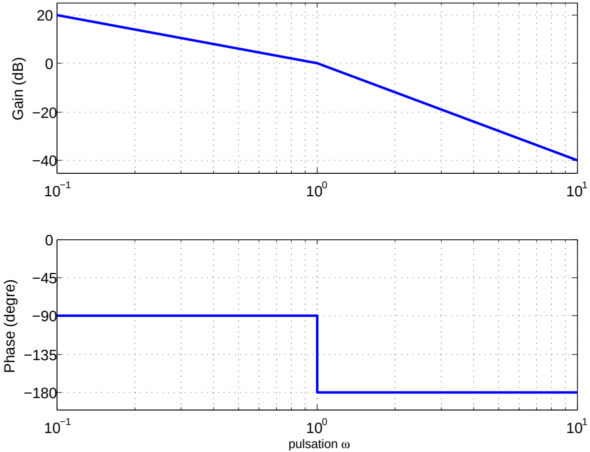
$$G(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{(s+1)s}$$

Elle possède 2 pôles : -1 et $0 \Rightarrow$ système instable

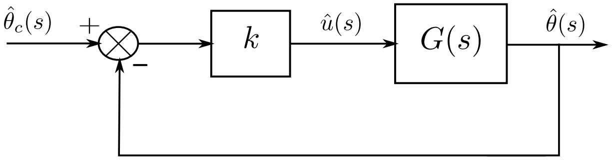
Sa réponse indicielle diverge



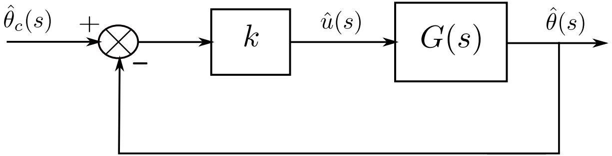
Représentation asymptotique de la fonction de transfert dans le diagramme de Bode



Le système est maintenant asservi



Le système est maintenant asservi

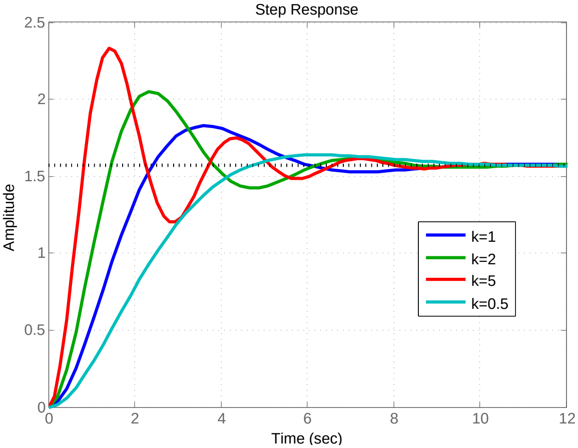


La fonction de transfert en boucle fermée s'exprime

$$F(s) = \frac{k}{s^2 + s + k}$$

à partir du critère de Routh : $F(s)$ est stable $\forall k > 0$.

Réponse de la sortie $\theta(t)$ à un échelon de consigne $\theta_c(t) = \frac{\pi}{2}$



Analyse rapide de l'asservissement

Expression de l'erreur d'asservissement : $\varepsilon(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + k}\hat{\theta}_c(s)$$

L'erreur statique est bien nulle : $\varepsilon_s = \lim_{s \to 0} s\,\hat{\varepsilon}(s) = 0$ (avec $\hat{\theta}_c(s) = \frac{1}{s}$)

Analyse rapide de l'asservissement

Expression de l'erreur d'asservissement : $\varepsilon(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + k}\hat{\theta}_c(s)$$

L'erreur statique est bien nulle : $\varepsilon_s = \lim_{s \to 0} s\,\hat{\varepsilon}(s) = 0$ (avec $\hat{\theta}_c(s) = \frac{1}{s}$)

Mise sous la forme canonique des systèmes du 2^{nd} ordre :

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} K & = & 1, \\ \omega_n & = & \sqrt{k} \\ \zeta & = & 1/2\sqrt{k} \end{array} \right.$$

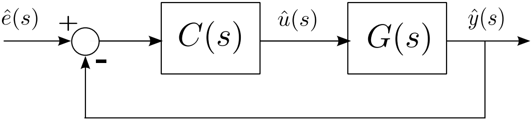
on peut confirmer que

- quand $k \nearrow$, l'amortissement $\zeta \searrow$ et donc les oscillations $\nearrow$;
- le temps de réponse est d'environ $t_{5\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 6s$.

Sommaire

Performance d'un asservissement

Il existe différents critères pour caractériser un asservissement.



En plus de la stabilité, d'autres propriétés peuvent être intéressantes :

- **la précision**.
- **la rapidité**.
- **la marge de stabilité**.

Précision

La précision est determinée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

Précision

La précision est determinée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

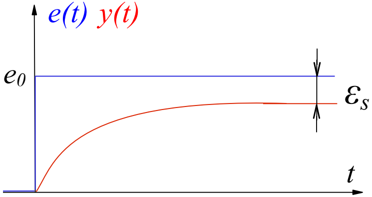
$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

On définit :

- **erreur statique** ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

$$e(t) = e_0, \ \forall t \geq 0$$



Précision

La précision est determinée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

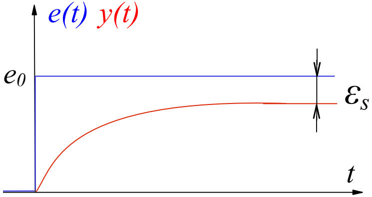
$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

On définit :

- **erreur statique** ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

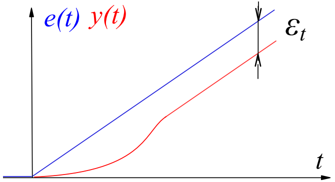
$$e(t) = e_0, \ \forall t \geq 0$$



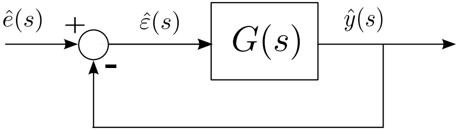
- **erreur de trainage** ϵ_t

Lorsque l'entrée est une rampe

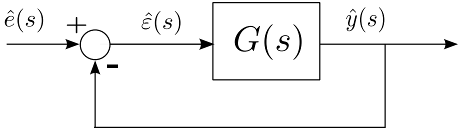
$$e(t) = e_0 t, \ \forall t \geq 0$$



L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t\to\infty} e(t) - y(t)$.

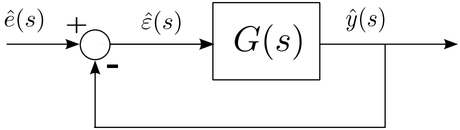


L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t\to\infty} e(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{\varepsilon}(s)$.

L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t\to\infty} e(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\, \hat{\varepsilon}(s)$.

En pratique, on utilise la transformée de Laplace :

$$\hat{\varepsilon}(s) \;=\; \hat{e}(s) - \hat{y}(s) \;=\; \Big(1 - F(s)\Big)\hat{e}(s)$$

où $F(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

Exemple 1 : $G(s) = \dfrac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{s+30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s+20}{s+30}\hat{e}(s)$.

Exemple 1 : $G(s) = \dfrac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{s+30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s+20}{s+30}\hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{e_0}{s} = \frac{2}{3}e_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \epsilon_t = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 1 : $G(s) = \dfrac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{s+30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s+20}{s+30}\hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{e_0}{s} = \frac{2}{3}e_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \epsilon_t = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$F(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2(K+1)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2(K+1)}\hat{e}(s)$.

Exemple 1 : $G(s) = \dfrac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{s+30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s+20}{s+30}\hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\, \frac{s+20}{s+30}\, \frac{e_0}{s} = \frac{2}{3}e_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \epsilon_t = \lim_{s\to 0} s\, \frac{s+20}{s+30}\, \frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$F(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2(K+1)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K+1)}\hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\left(1 - F(s)\right)\frac{e_0}{s} = \frac{1}{K+1}e_0,$$

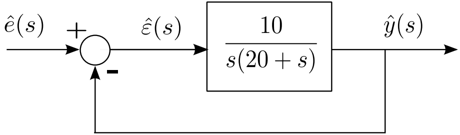
$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s\to 0} s\left(1 - F(s)\right)\frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Régles générales :

- Un gain statique élevé en boucle ouverte permet d'obtenir une erreur de position (en asservissement) plus faible.
- Loi des intégrateurs : l'erreur en régime permanent, pour une entrée $\hat{e}(s)$, est nulle si la boucle ouverte comprend au moins autant d'intégrateurs que le signal $\hat{e}(s)$.

- S'il n'y a pas d'intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est finie et l'erreur de trainage est infinie.
- S'il y a un intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est finie.
- S'il y a deux intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est nulle.

Exemple 3 :



Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{10 + s(20+s)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s(20+s)}{10+s(20+s)}\hat{e}(s)$.

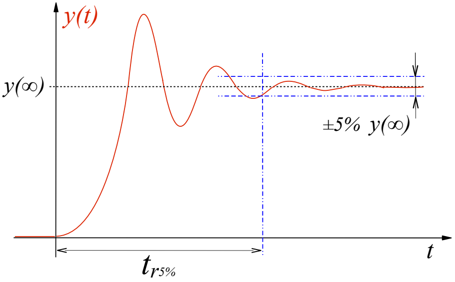
$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \to 0} s \, \frac{s(20+s)}{10+s(20+s)} \, \frac{e_0}{s} = 0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \to 0} s \, \frac{s(20+s)}{10+s(20+s)} \, \frac{e_0}{s^2} = 2e_0.$$

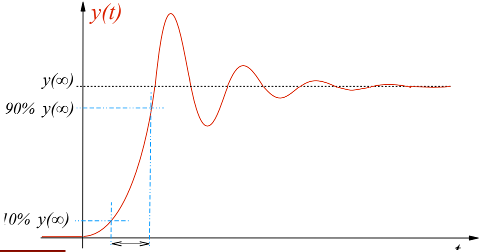
Rapidité

La performance en rapidité d'un asservissement est caractérisée par le temps de réponse et le temps de monté.

Le temps de réponse est le temps mis par le signal de sortie pour atteindre sa valeur finale à $n\%$ prés (souvent 5%) sans ressortir de cet intervalle.



Le temps de montée correspond à l'intervalle de temps dans lequel la sortie passe de 10% à 90% de la valeur finale.



Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)+k}$?

Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)+k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\dfrac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

$\Rightarrow$ système stable si $0 < k < 6$.

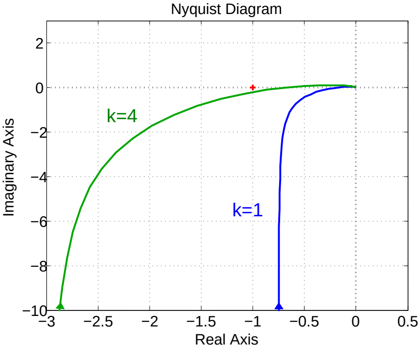
Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)+k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\dfrac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

$\Rightarrow$ système stable si $0 < k < 6$.



★ Notion de **marges de stabilité** : quantifient "l'éloignement" par rapport au seuil critique d'instabilité.

Marge de gain

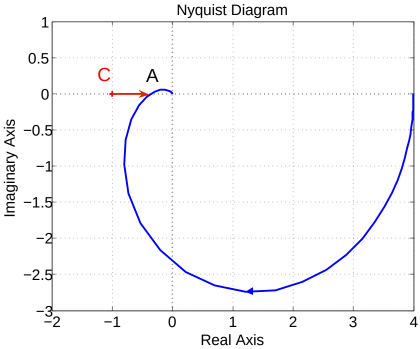
La marge de gain se définit comme le gain qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

La marge de gain d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta G \;=\; -20\log|G(j\omega_{-\pi})|$$

où $\omega_{-\pi}$ est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ est déphasé de $-180°$.



Marge de phase

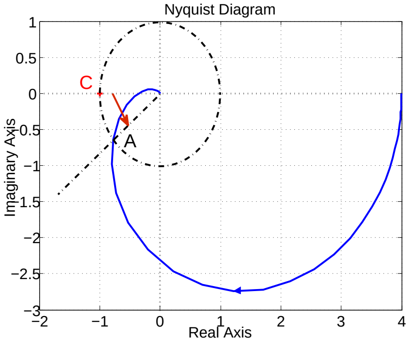
La marge de phase se définit comme le déphasage qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

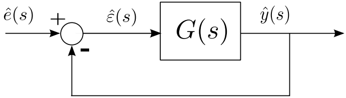
La marge de phase d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta\phi \;=\; \pi + argG(j\omega_{0dB})$$

où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ a un gain unitaire (0 en décibel).

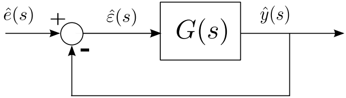


Exemple : Soit l'asservissement suivant

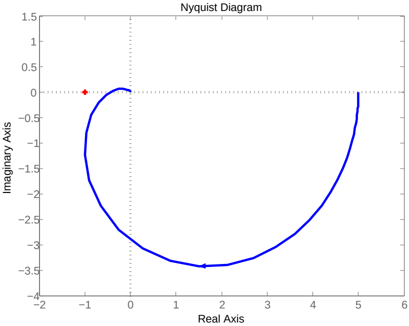


avec $G(s) = \dfrac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?

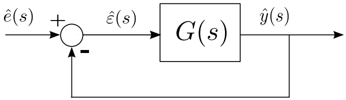
Exemple : Soit l'asservissement suivant



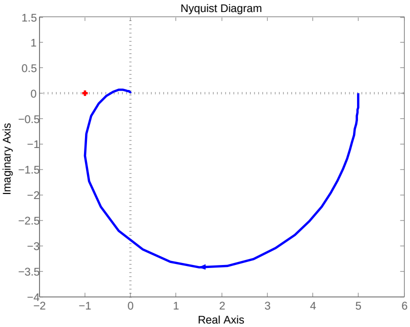
avec $G(s) = \dfrac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?



Exemple : Soit l'asservissement suivant



avec $G(s) = \dfrac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?



$\Rightarrow$ Par application du critère du revers : stable

Quelle est sa marge de stabilité ?

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24\ rad/s$,
- $\arg\left(G(j\omega)\right) = -180°$ pour la pulsation $\omega = 1.87\ rad/s$.

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24\ rad/s$,
- $\arg\Big(G(j\omega)\Big) = -180°$ pour la pulsation $\omega = 1.87\ rad/s$.

Calculs des marges

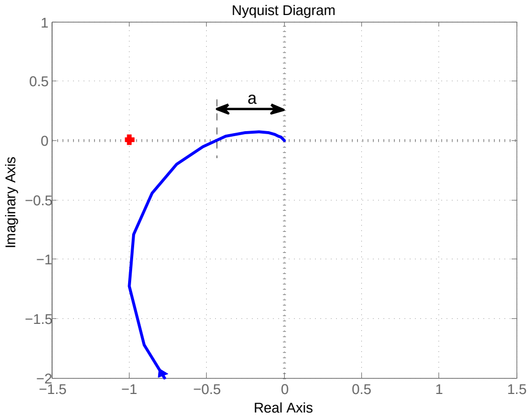
- marge de gain :

$$\begin{aligned}\Delta G &= -20\log\frac{5}{|(jw)^3 + 3.5(jw)^2 + 3.5(jw) + 1|}, \text{ avec } \omega = 1.87 \\ &= 7.04\ dB\end{aligned}$$

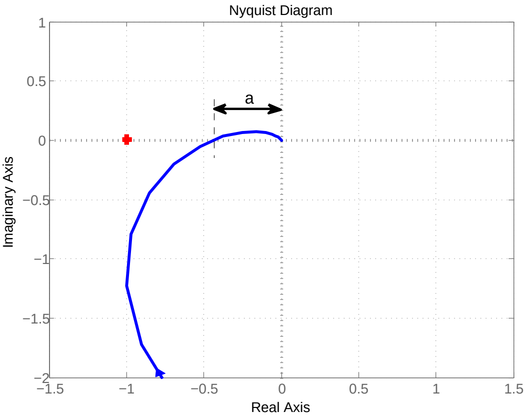
- marge de phase :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \pi + \arg\frac{5}{(jw)^3 + 3.5(jw)^2 + 3.5(jw) + 1}, \text{ avec } \omega = 1.24 \\ &= 0.51\ rad \quad (29.2\ deg)\end{aligned}$$

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

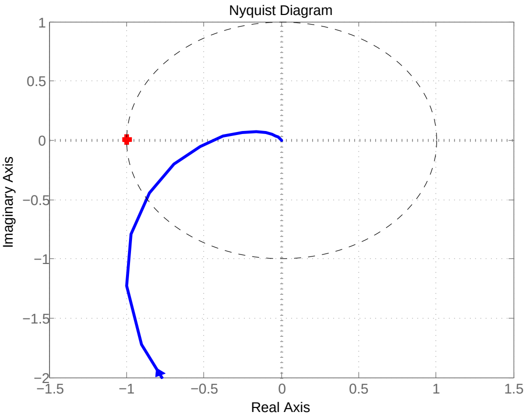


Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



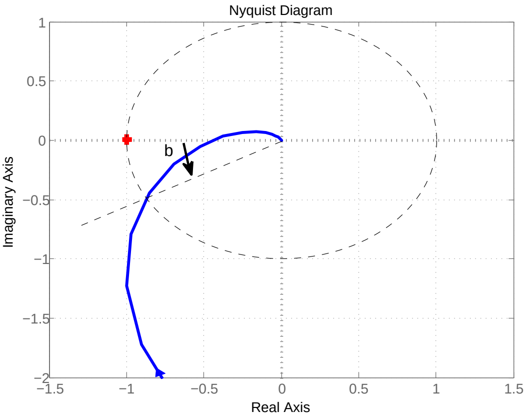
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = -20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



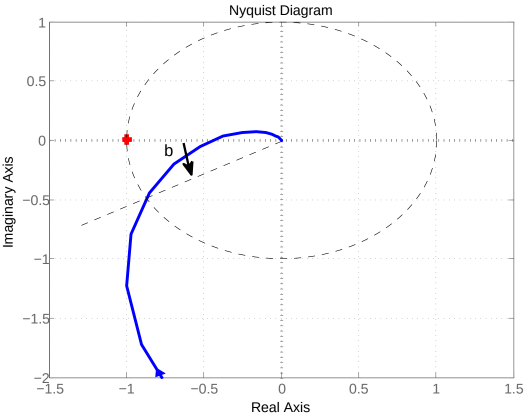
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = -20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



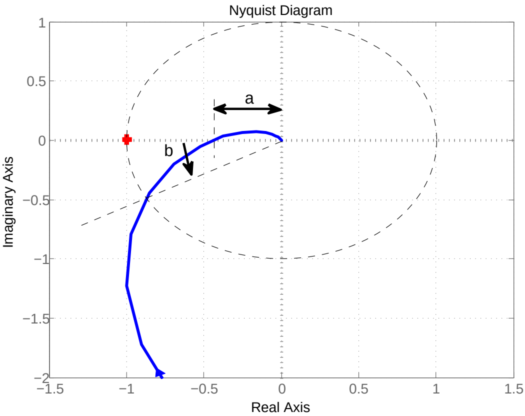
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = -20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



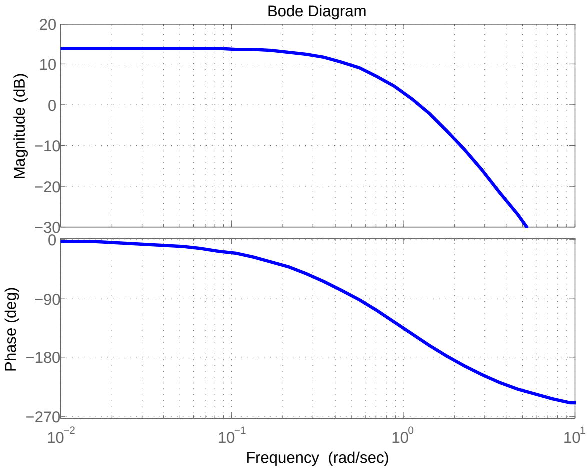
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = -20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta\phi = b \simeq 29\ deg$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

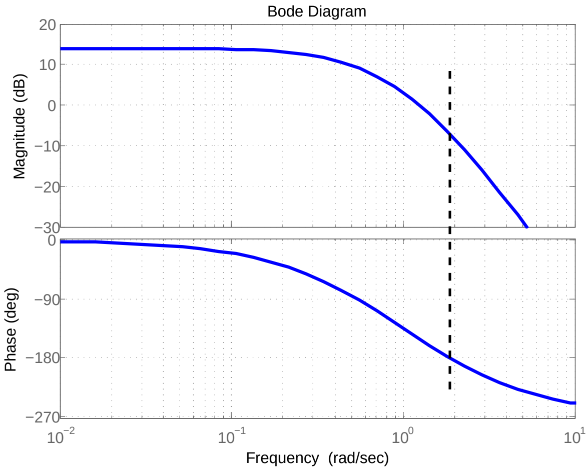


- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = -20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta\phi = b \simeq 29\ deg$.

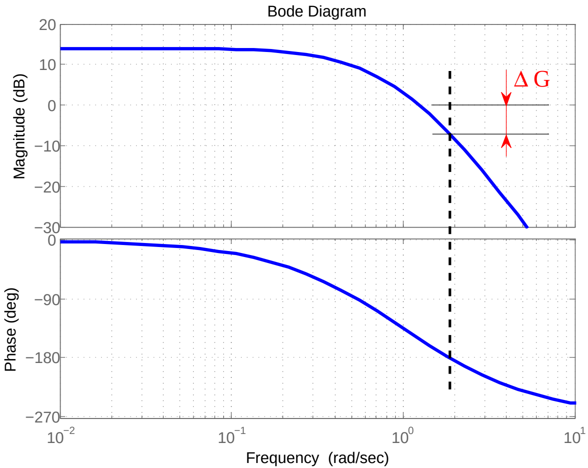
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



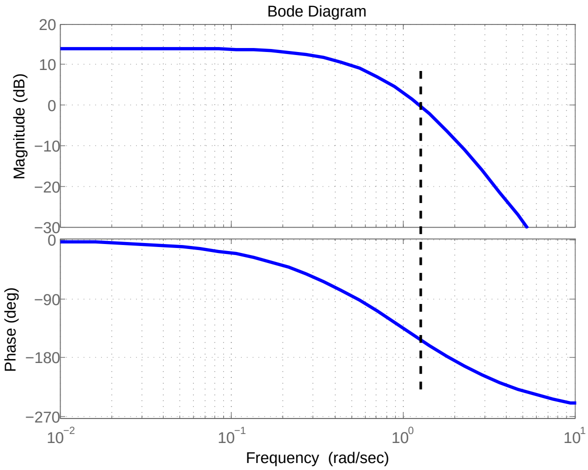
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



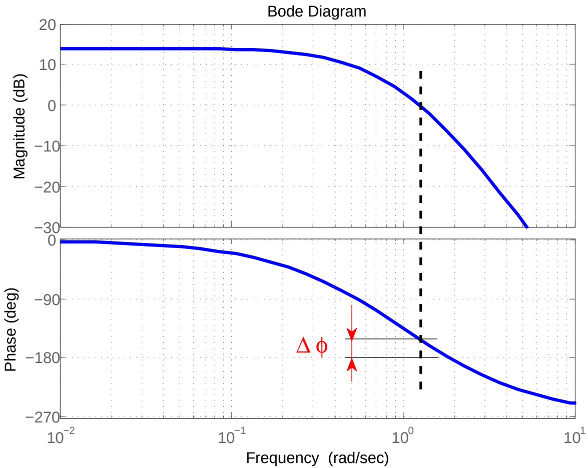
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



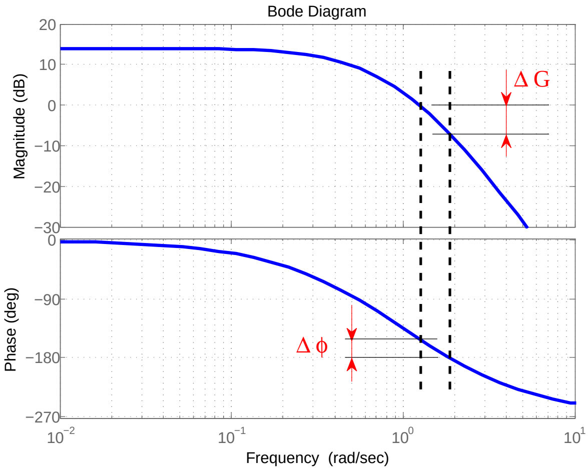
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Sommaire

Introduction

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

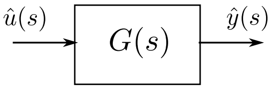
Introduction

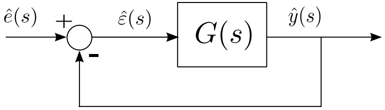
Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

Phase d'analyse :





Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- réponses temporelles et fréquentielles
- stabilité
- analyse d'un asservissement pour un correcteur donné

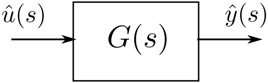
Introduction

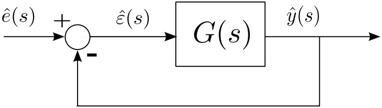
Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

Phase d'analyse :



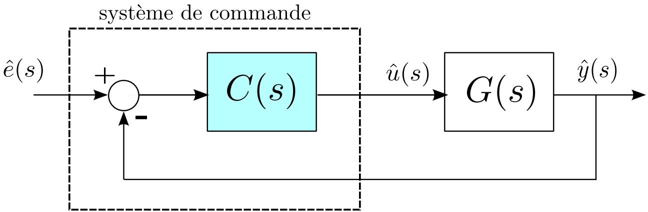


Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- réponses temporelles et fréquentielles
- stabilité
- analyse d'un asservissement pour un correcteur donné

$\Rightarrow$ Ce que vous avez vu jusqu'à maintenant.

Phase de synthèse :



Conception d'un système de commande.

- rechercher un correcteur
- stabilisation
- amélioration des performances

$\Rightarrow$ Le système en boucle fermée doit satisfaire un certain cdc.

Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- la stabilité du système asservi,
- la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- la précision en régime permanent,
- la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

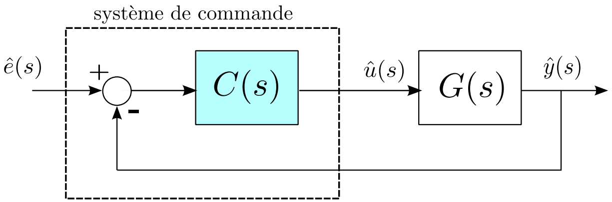
Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- la stabilité du système asservi,
- la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- la précision en régime permanent,
- la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

Dans ce cours, seule la synthèse par méthodes fréquentielles classiques est considérée. Elles sont très utilisées en entreprises du fait de

- leur aspect pratique,
- l'existence de techniques de synthèse simples ou empiriques,
- la possibilité de régler les gains intuitivement.

Pour la suite de l'exposé, nous garderons les notations suivantes :



- $C(s)$ représente le correcteur.
- $G(s)$ représente le système à commander.
- $\hat{u}(s)$ est le signal de commande.
- $F(s)$ représente la fonction de transfert en boucle fermée.
- Dans cette configuration la FTBO correspond à la chaîne directe : $C(s)G(s)$.
- L'erreur d'asservissement est notée $\hat{\varepsilon}(s) = \hat{e}(s) - \hat{y}(s)$.

Synthèse directe : modèle imposé

Une $1^{\text{ière}}$ méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1$^{\text{ière}}$ méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

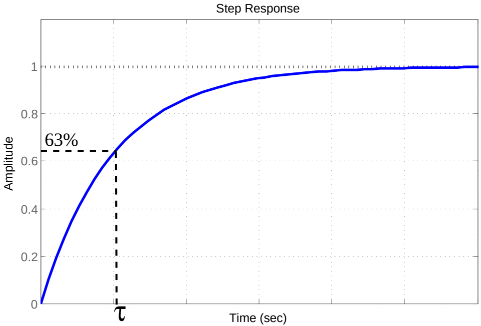
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

Synthèse directe : modèle imposé

Une $1^{\text{ière}}$ méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

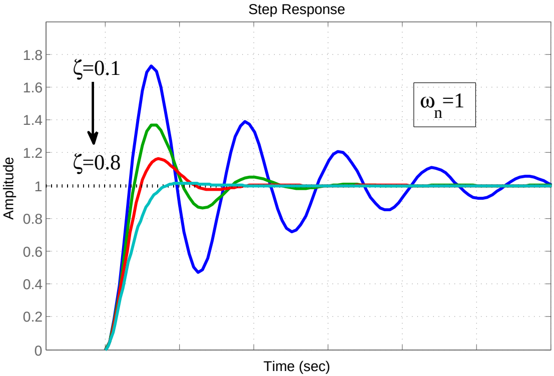
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

pour un premier ordre : $$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$



la constante de temps τ définit la rapidité : $t_{r5\%} = 3\tau$

pour un second ordre : $$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$



- l'amortissement ζ définit le dépassement : $D_1 = 100\ e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- la pulsation propre et l'amortissement définissent la rapidité $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Méthode :

1. Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.
   - type premier ordre
   $$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$
   - type second ordre
   $$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$
   - pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

Méthode :

1. Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.
   - type premier ordre
   $$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$
   - type second ordre
   $$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$
   - pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

2. En identifiant la FTBF avec la fonction désirée, calculer le correcteur :

$$F_d(p) = F(p) \qquad \Rightarrow \quad F_d(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

$$\Rightarrow \quad C(p) = \frac{F_d(p)}{G(p)\Big(1 - F_d(p)\Big)}$$

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)

4. Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement (comportement attendu, pas de saturation...).

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
   (ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)

4. Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement
   (comportement attendu, pas de saturation...).

Remarques :

- L'approche est valide seulement si le modèle du système est bien connu.
- Le système à commander doit posséder des pôles et zéros stables.
- L'approche est adaptée plutôt pour des systèmes d'ordre faible.

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

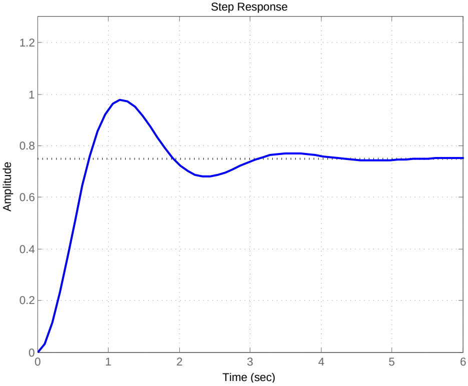
$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Simulons sa réponse indicielle :



Dépassement = 30% ; temps de réponse à 5% = 2.78s ; erreur de position = 25%.

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de 2s.
  (formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)
- La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de $2s$.
  (formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)
- La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Enfin, nous pouvons en déduire le correcteur :

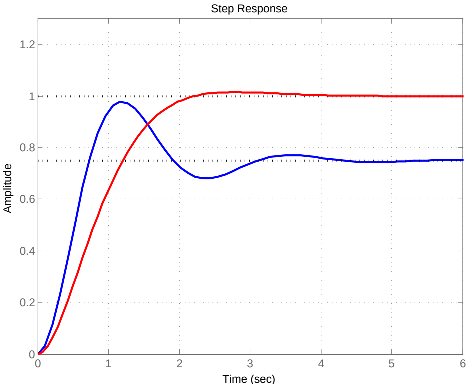
$$C(s) = \frac{s^2 + 2s + 8}{\frac{6}{\omega_n^2}s^2 + \frac{12\zeta}{\omega_n}s} = \frac{s^2 + 2s + 8}{1.707s^2 + 5.12s}$$

Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

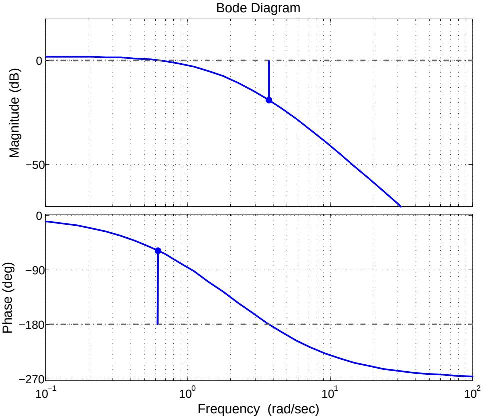


Dépassement $= 1.51\%$; temps de réponse à $5\% = 1.81s$; erreur de position $= 0\%$.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \quad \Rightarrow \quad C(s) = k_p.$$



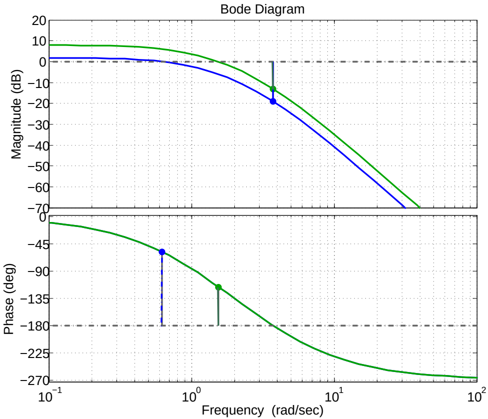
Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entrainer des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \quad \Rightarrow \quad C(s) = k_p.$$



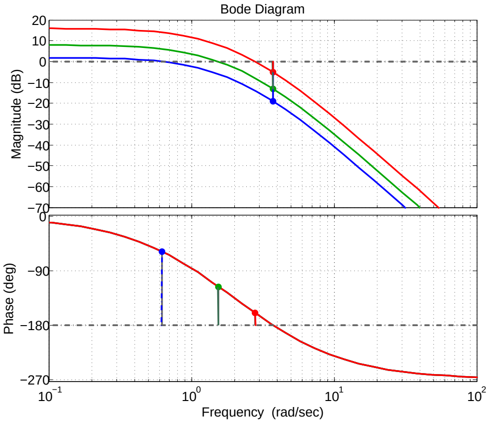
Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entrainer des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \quad \Rightarrow \quad C(s) = k_p.$$



Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entrainer des oscillations et un dépassement préjudiciable.

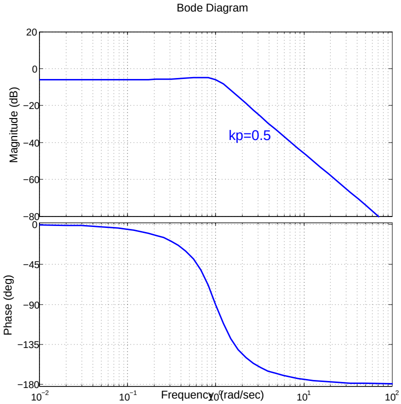
Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

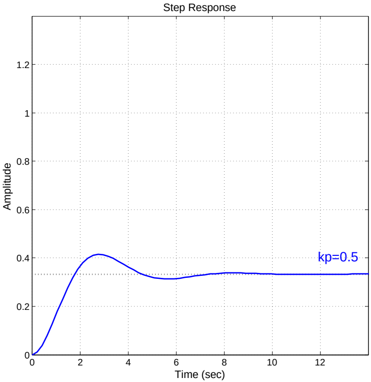
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

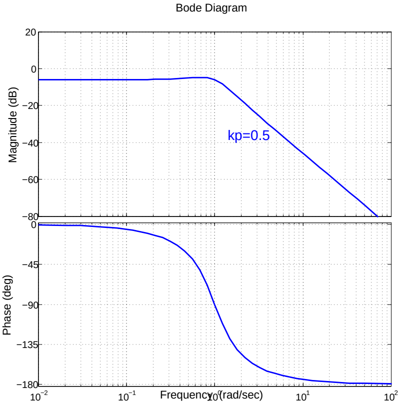


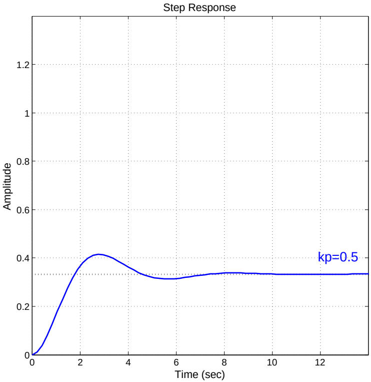


Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

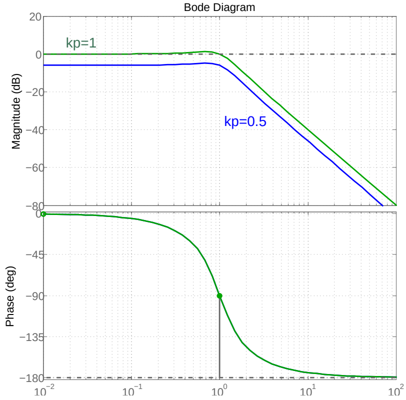


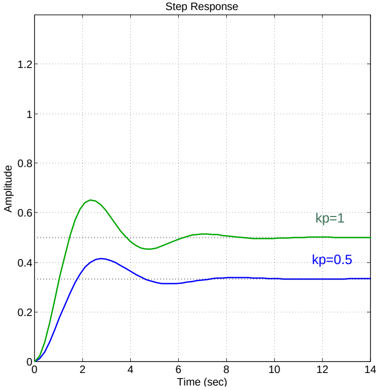


Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

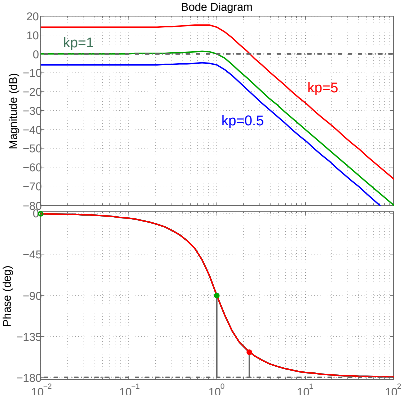


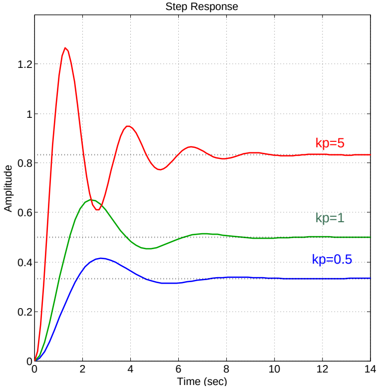


Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

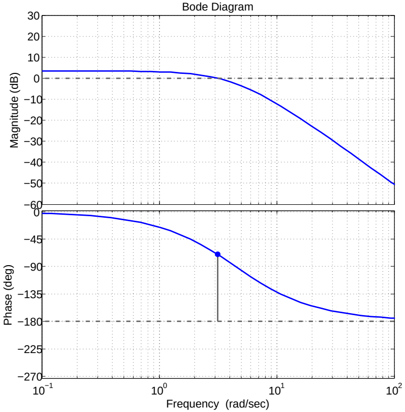




Action intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \int_0^t \epsilon(t)dt \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s}.$$



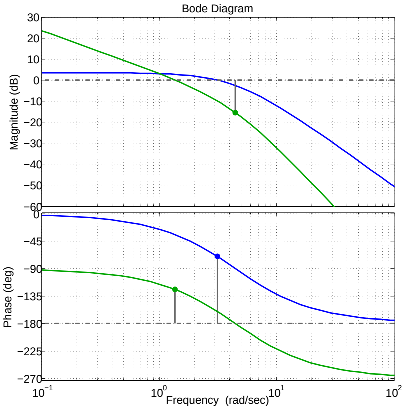
Avantages et Inconvénients :

- Erreur statique nulle en boucle fermée (BF),
- Diagramme de phase décalé de -90° : marges de stabilités dégradées,

Action intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \int_0^t \epsilon(t)dt \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s}.$$



Avantages et Inconvénients :

- Erreur statique nulle en boucle fermée (BF),
- Diagramme de phase décalé de -90° : marges de stabilités dégradées,

Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$. Le système en boucle fermée s'exprime par

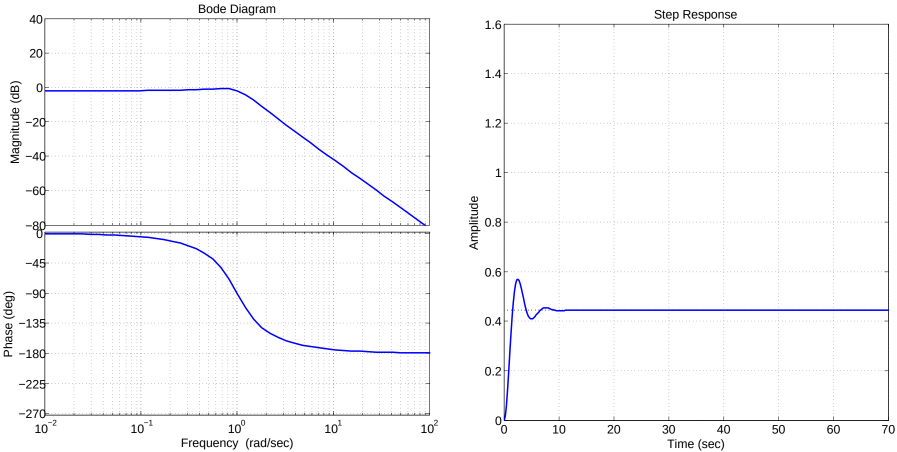
$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

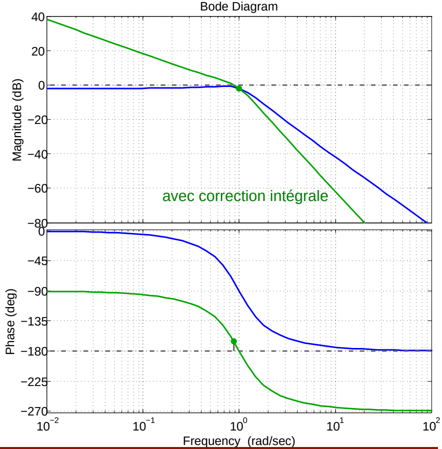
F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

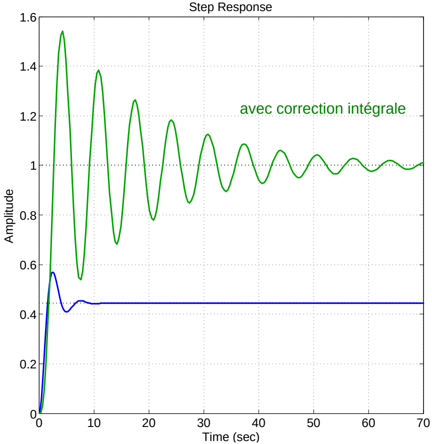


Exemple :
Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF.

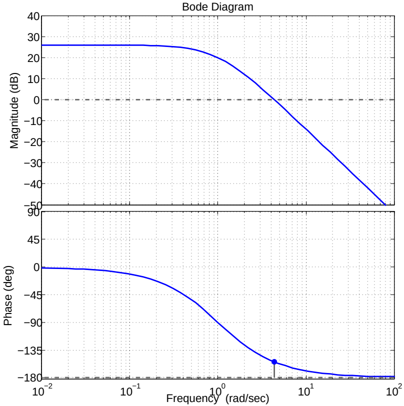




Action dérivée

Ce correcteur introduit un dérivateur qui ajoute un zero nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad C(s) = s.$$



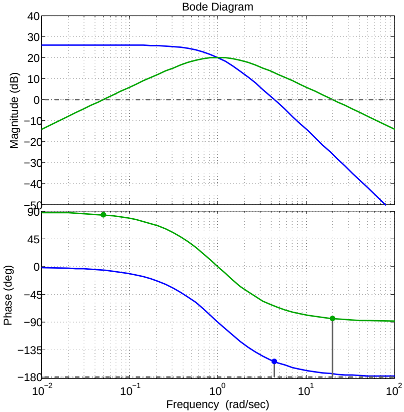
Avantages et Inconvénients :

- Ajoute de la phase : marges susceptibles d'être augmentées,
- A tendance à accélérer la réponse du système : temps de monté diminué,

Action dérivée

Ce correcteur introduit un dérivateur qui ajoute un zero nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad C(s) = s.$$



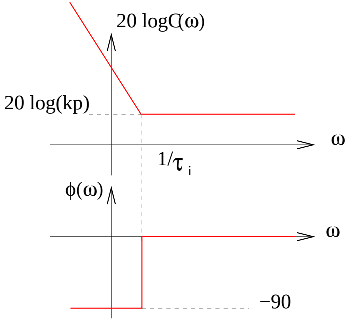
Avantages et Inconvénients :

- Ajoute de la phase : marges susceptibles d'être augmentées,
- A tendance à accélérer la réponse du système : temps de monté diminué,

Correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet de I sans ses inconvénients :

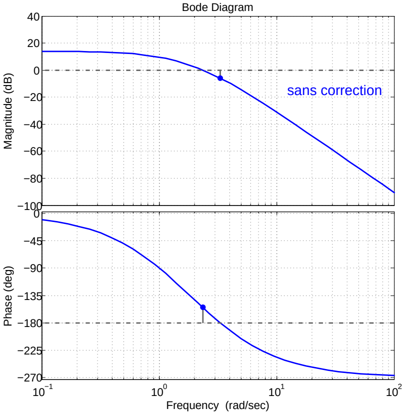
$$C(s) = k_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}.$$



Idée du correcteur :

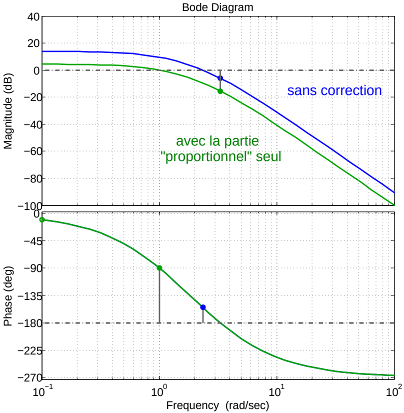
- Utiliser l'avantage de l'intégrateur en basses fréquences : précision infinie,
- L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique,

Réglage intuitif du correcteur :



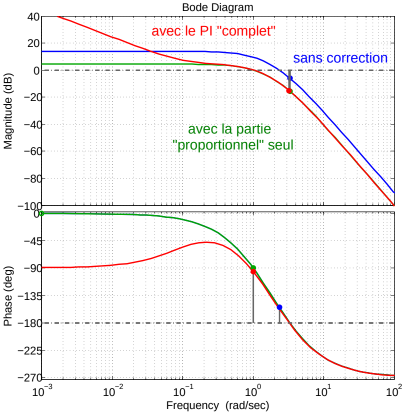
Réglage intuitif du correcteur :

- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
  - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
  - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.



Réglage intuitif du correcteur :

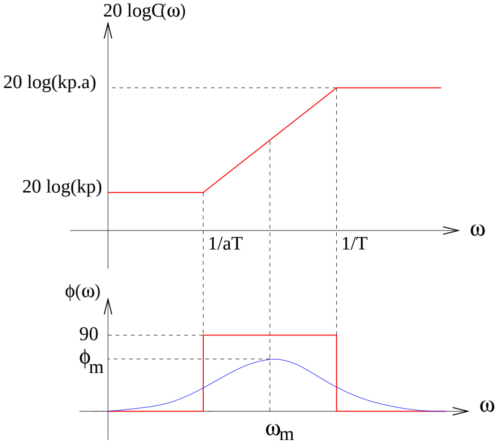
- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
  - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
  - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



Correcteur à Avance de Phase

Ce correcteur a pour objectif d'apporter de la phase autour du point critique afin d'augmenter les marges de stabilité

$$C(s) = k_p \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a > 1.$$



Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}]$) autour du point critique.

Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}]$) autour du point critique.

Méthode de réglage du correcteur :

- Régler le gain k_p pour ajuster la précision ou la rapidité ou les marges.
- Mesurer la marge de phase (après la correction prop. k_p) et en déduire la quantité de phase nécessaire
$$\phi_m = \Delta\phi_{\text{désirée}} - \Delta\phi.$$
- A partir de ϕ_m, a peut être calculé
$$a = \frac{1 + sin\phi_m}{1 - sin\phi_m}$$
- Enfin, nous avons la relation
$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}},$$
il s'agit alors de calculer T tel que ω_m coïncide avec ω_{0db} (après correction prop.) : $T = \dfrac{1}{\omega_{0db}\sqrt{a}}$.

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45°$:

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 9.95 rad/s$$

$$M\phi = \pi - 2 arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 9.95 rad/s$$

$$M\phi = \pi - 2 arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + sin\phi_m}{1 - sin\phi_m} = \frac{1 + sin34^\circ}{1 - sin34^\circ} = 3.54$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 9.95 rad/s$$

$$M\phi = \pi - 2arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + sin\phi_m}{1 - sin\phi_m} = \frac{1 + sin34^\circ}{1 - sin34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \quad \Rightarrow \quad T = 0.053$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 9.95 rad/s$$

$$M\phi = \pi - 2 arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

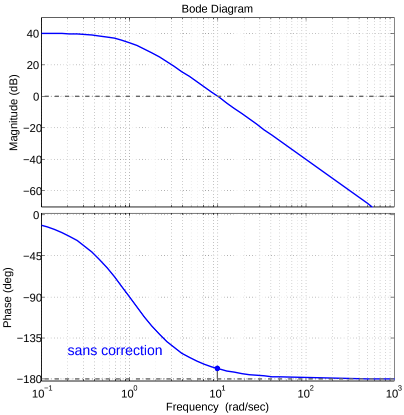
$$a = \frac{1 + sin\phi_m}{1 - sin\phi_m} = \frac{1 + sin34^\circ}{1 - sin34^\circ} = 3.54$$

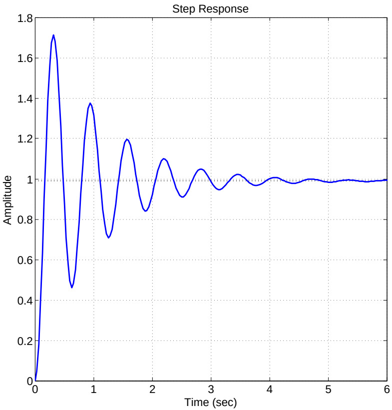
- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \quad \Rightarrow \quad T = 0.053$$

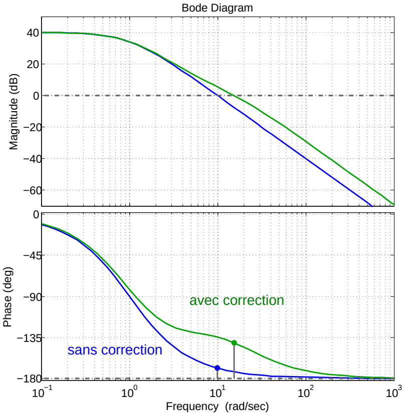
- Souvent, on choisit $\phi_m = 1.2\phi_{necessaire}$ pour compenser le décalage de ω_{0db} après correction.

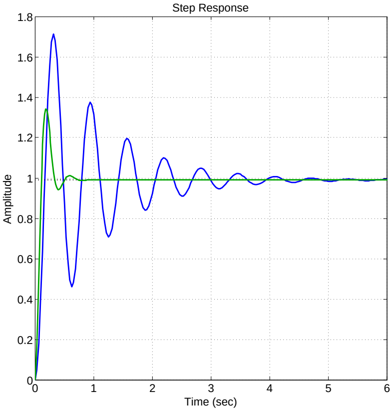
Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF





Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF

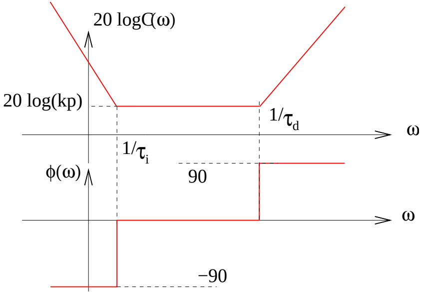




Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s).$$



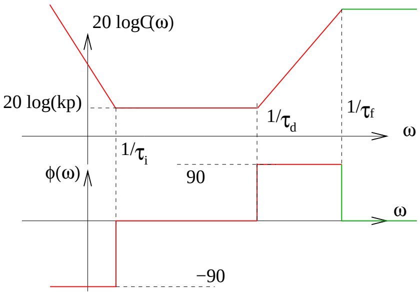
Idée du correcteur :

- Ajouter du gain en bf (précision $\nearrow$),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi \nearrow$).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD + un filtre

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \frac{1}{(1 + T_f s)}.$$



Idée du correcteur :

- Ajouter du gain en bf (précision $\nearrow$),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi \nearrow$).
- Le correcteur est propre,
- Atténuer l'effet du bruit (moins de gain en hf).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- Etudier le système en BO et ses caractéristiques

  (marges, précision, rapidité...).

- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant

  (en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).

- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf

  (pour ne pas pénaliser les marges).

- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique

  (pour ne pas pénaliser la précision).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- Etudier le système en BO et ses caractéristiques

  (marges, précision, rapidité...).

- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant

  (en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).

- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf

  (pour ne pas pénaliser les marges).

- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique

  (pour ne pas pénaliser la précision).

- Régler la constante de temps du filtre de sorte qu'il n'enlève pas de phase près du point critique,

- L'ordre du filtre peut être augmenté afin de mieux atténuer le bruit en hf.

Exemple : Soit le système $G(s) = \dfrac{5}{s^2 + s + 1}$.

- Une étude de ce système nous montre qu'il est stable en BF avec une erreur de position $\epsilon_s = 16.7\%$, un dépassement de 51% et une marge de phase $M_\phi = 27.8°$ à $\omega_{0db} = 2.33rad/s$.

- On choisit un premier correcteur proportionnel afin de baisser l'erreur et accélérer le système : on prend $k_p = 2$ pour avoir une erreur de 9%. Il en résulte une nouvelle marge de phase $M_\phi = 18.9°$ à $\omega_{0db} = 3.23rad/s$ et un dépassement de 61.9%.

- On place la constante de temps du I avant le point critique $T_i = 3 \gg 1/3.23$. Le correcteur devient $C(s) = 2\dfrac{1+3s}{3s}$.

- L'erreur en régime permanent est maintenant nul mais la nouvelle marge de phase est de $M_\phi = 12.9°$ à $\omega_{0db} = 3.24rad/s$. Il s'agit ensuite de placer la constante de temps de la partie D avant le point critique de façon à laisser le temps au correcteur de remonter la phase jusqu'a obtenir une marge satisfaisante :$T_i \gg T_d = 0.4 > 1/3.24$. On obtient $M_\phi = 70.4°$.

- Pour finir, afin de synthétiser un correcteur réalisable et pour mieux filtrer le bruit, on ajoute un filtre avec une constante de temps relativement faible $T_f = 0.1 < 1/3.24$. Il en résulte $M_\phi = 45.9°$, ce qui reste satisfaisant.

Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

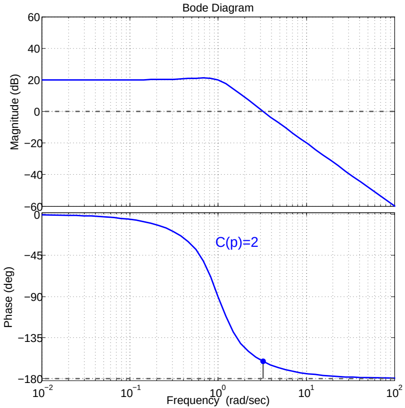


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $(C(s)G(s))$

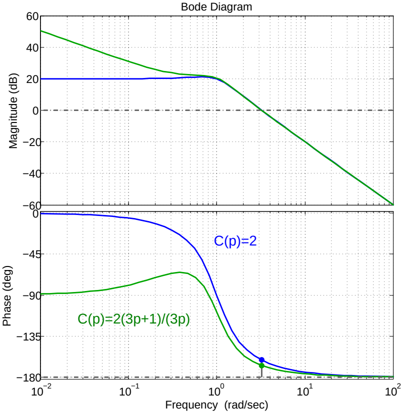


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

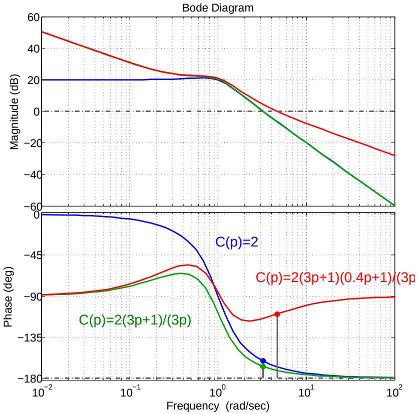
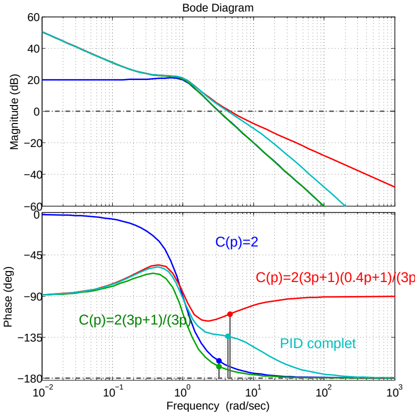


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $(C(s)G(s))$



Réponses temporelles de la BF à un échelon unité