Module A3.6SSI

Mathématiques pour la Physique - Traitement Numérique

Yassine Ariba

Dpt GEI - Icam, Toulouse.

version 2.2

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : Mathématiques depuis le CP, Mathématiques de l'Ingénieur.
- 8h en amphi : cours. Présentation sur transparents.
- 14h de TD : exercices.
- 2×4h de TP.
  - initiation à Scilab
  - grille d'évaluation (CR non-noté, pas de TP bilan).
- 1 examen final (1h30-2h).

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : Mathématiques depuis le CP, Mathématiques de l'Ingénieur.
- 8h en amphi : cours. Présentation sur transparents.
- 14h de TD : exercices.
- 2×4h de TP.

  initiation à Scilab
  grille d'évaluation (CR non-noté, pas de TP bilan).
- 1 examen final (1h30-2h).

Sur Moodle

- Documents : transparent cours + exercices + sujets TP.
- Forum.

Sommaire

Sommaire

Suites numériques

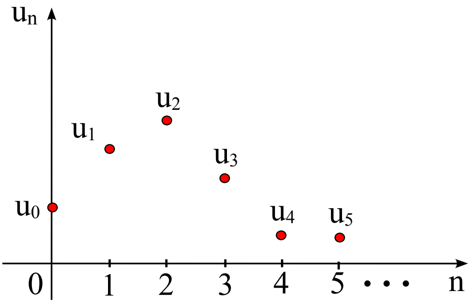
Une suite réelle est une succession d'éléments de $\mathbb{R}$: u_0, u_1, u_2,..., u_n.

Suites numériques

Une suite réelle est une succession d'éléments de $\mathbb{R}$: u_0, u_1, u_2,..., u_n.

Une suite numérique réelle, notée (u_n), est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \rightarrow & u_n \end{array}$$



Une suite numérique réelle peut être définie de 2 façons :

- définition explicite : $u_n = f(n)$,
- définition par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, le premier terme u_0 étant donné

Une suite numérique réelle peut être définie de 2 façons :

- définition explicite : $u_n = f(n)$,
- définition par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, le premier terme u_0 étant donné

Exemples :

Suite de nombres rationnels

$$u_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \qquad \Rightarrow \qquad 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4} \dots$$

Suite de nombres entiers (les carrés)

$$u_n = n^2 \qquad \Rightarrow \qquad 0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 9 \dots$$

Suite des nombres impairs

$$u_n = 2n + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 9 \dots$$

Suite récurrente

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.5u_n - 2 \\ u_0 = 12 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 16\ ,\ 6\ ,\ 1\ ,\ -2.5 \dots$$

Majoration, minoration

- La suite (u_n) est majorée par M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée par m si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- Une suite à la fois majorée et minorée est bornée.

Sens de variation, si pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \geq u_n$ est croissante.
- $u_{n+1} \leq u_n$ est décroissante.
- Une suite à termes strictement positifs est croissante si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Convergence d'une suite numériques

Une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie quand $n \to \infty$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Convergence d'une suite numériques

Une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie quand $n \to \infty$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.
- Toute suite croissante majorée (décroissante minorée) est convergente.
- Soient (u_n) une suite croissante et (v_n) une suite décroissante. (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

$$\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

  Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

- Soient (v_n) et (w_n) des suites convergentes admettant la même limite l.

$$\begin{aligned} w_n \leq u_n \leq v_n \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} w_n \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = l \end{aligned}$$

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique de raison r est une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

On montre que $u_n = u_0 + nr$ (terme général).

- Si $r = 0$, la suite est constante et égale à u_0.
- Si $r > 0$, la suite est croissante et divergente vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante et divergente vers $-\infty$.

Exemple

1 , 3 , 5 , 7 est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Suites géométriques

Une suite géométrique de raison q est une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = q u_n}$$

On montre que $u_n = u_0 q^n$ (terme général).

- Si $q = 1$, la suite est constante et égale à u_0.
- Si $q > 1$, la suite est croissante et divergente vers $+\infty$.
- Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0.
- Si $q = -1$, la suite n'admet pas de limite et alterne entre u_0 et $-u_0$.
- Si $q < -1$, la suite diverge et alterne valeurs négatives valeurs positives.

Exemple

2 , 6 , 18 , 54 est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Applications

La suite de Fibonacci

Suite introduite par Leonardo Fibonacci en 1202 pour décrire la croissance d'une population de lapins sous des hypothèses très simplifiées.

- un couple de lapins adultes procrée un nouveau couple de lapins chaque mois.
- un couple ne peut procréer qu'à partir du troisième mois de son existence.

Applications

La suite de Fibonacci

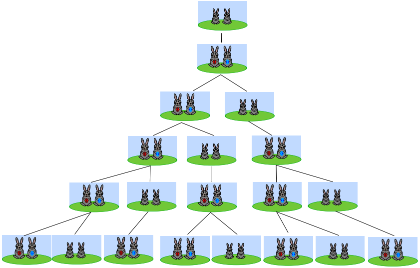
Suite introduite par Leonardo Fibonacci en 1202 pour décrire la croissance d'une population de lapins sous des hypothèses très simplifiées.

- un couple de lapins adultes procrée un nouveau couple de lapins chaque mois.
- un couple ne peut procréer qu'à partir du troisième mois de son existence.

Dans cette suite, chaque terme est en fait la somme des deux qui le précédent

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.



Remplissage d'un récipient

Soit un récipient vide de contenance 2 litres.

On verse dans celui-ci un litre d'eau, puis un demi-litre, puis un quart, puis un huitième,...

Est-ce que le récipient va déborder ?

Remplissage d'un récipient

Soit un récipient vide de contenance 2 litres.

On verse dans celui-ci un litre d'eau, puis un demi-litre, puis un quart, puis un huitième,...

Est-ce que le récipient va déborder ?

On a : $u_0 = 1; \quad u_1 = \frac{1}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{4}; \quad u_3 = \frac{1}{8}$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Somme des n premiers termes : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Le récipient ne débordera pas.

Évolution d'une dette

A chaque mois n, on définit :

y_n : la dette $\qquad$ r : l'intérêt $\qquad$ u_n : remboursement mensuel

Évolution d'une dette

A chaque mois n, on définit :

y_n : la dette $\quad$ r : l'intérêt $\quad$ u_n : remboursement mensuel

Modèle de l'évolution de la dette :

$$y_{n+1} = y_n + r\, y_n - u_n$$

Évolution d'une dette

A chaque mois n, on définit :

y_n : la dette $\quad r$: l'intérêt $\quad u_n$: remboursement mensuel

Modèle de l'évolution de la dette :

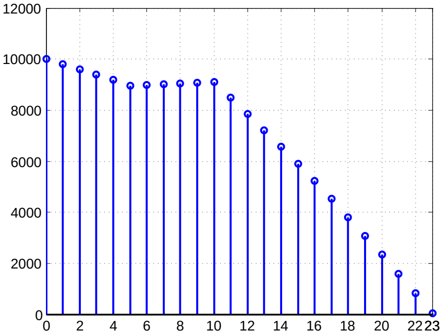
$$y_{n+1} = y_n + r\,y_n - u_n$$

Evolution de la dette :

$r = 0.02$

$y_0 = 10000$ (emprunt initial)

$$u_n = \begin{cases} 400, & n = 1, \dots, 5 \\ 150, & n = 6, \dots, 10 \\ 800, & n = 11, \dots, 23 \end{cases}$$



Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et
pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Modèle exponentiel

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- naissances et morts proportionnelles à la population courante.

Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et

pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Modèle exponentiel

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- naissances et morts proportionnelles à la population courante.

$$\boxed{N_{t+1} = N_t + r\, N_t}$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.

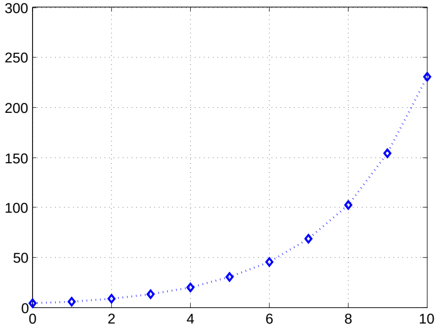
Prédictions (dépend du taux intrinsèque d'accroissement)

- Si $(1 + r) > 1$, croissance exponentielle de la population (div).
- Si $1 > (1 + r) > 0$, extinction exponentielle de la population (cv $\rightarrow$ 0).
- Si $r = 0$, équilibre démographique.

Prédictions (dépend du taux intrinsèque d'accroissement)

- Si $(1+r) > 1$, croissance exponentielle de la population (div).
- Si $1 > (1+r) > 0$, extinction exponentielle de la population (cv $\rightarrow$ 0).
- Si $r = 0$, équilibre démographique.

Considérons une population avec un nombre d'individus initial de $N_0 = 4$ et un taux d'accroissement de $r = 0.5$



Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Modèle logistique

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- prise en compte de la limitation des ressources.

Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Modèle logistique

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- prise en compte de la limitation des ressources.

$$\boxed{N_{t+1} = N_t + r\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)}$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.
k : capacité de charge du milieu.

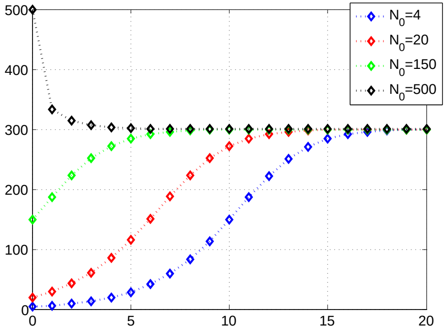
Prédictions (avec $r > 0$)

- Si $N_t < k$, la population croît.
- Si $N_t > k$, la population décroît, la population est supérieure à la capacité du milieu.
- Si $N_t = k$, stabilisation de la population.

Prédictions (avec $r > 0$)

- Si $N_t < k$, la population croît.
- Si $N_t > k$, la population décroît, la population est supérieure à la capacité du milieu.
- Si $N_t = k$, stabilisation de la population.

Considérons une population avec un taux d'accroissement de $r = 0.5$ vivant dans un milieu de capacité maximale $k = 300$ et pour différentes conditions initiales (N_0).



Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.

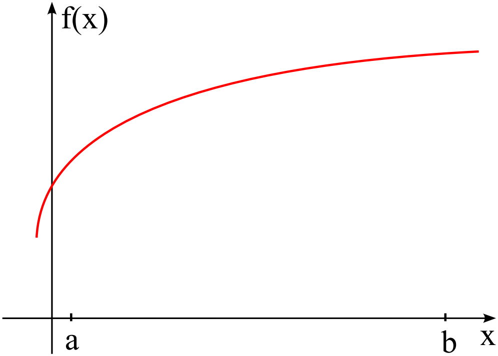
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.



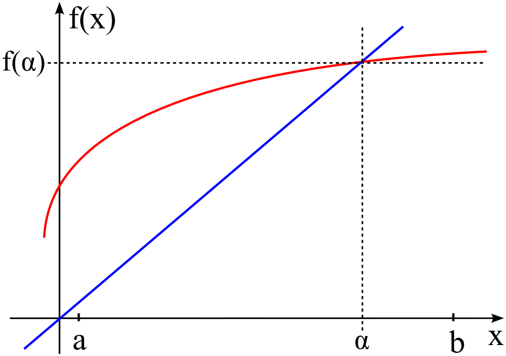
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.



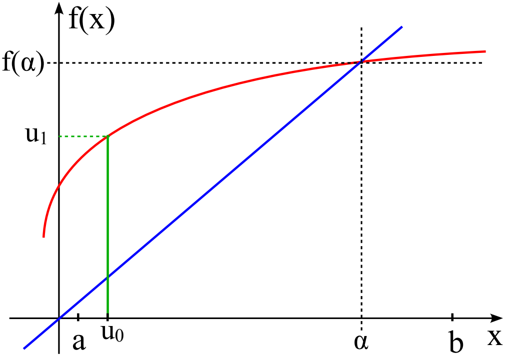
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.



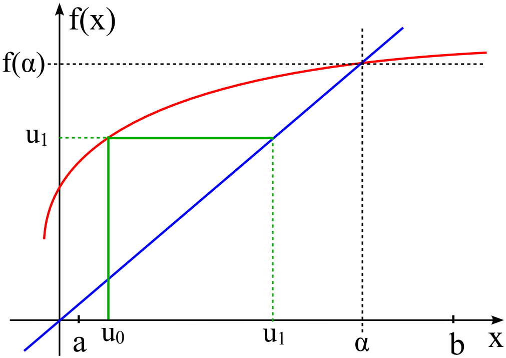
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.



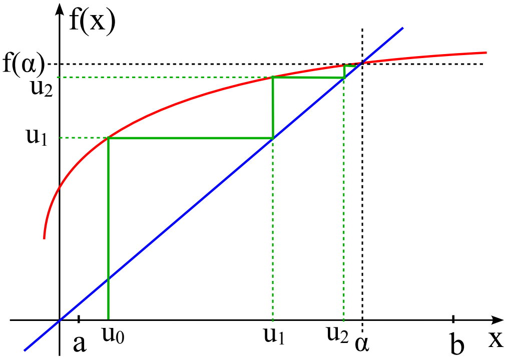
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.



Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

A partir d'une valeur x_0 assez "proche" de la racine $\hat{x}$, cherchons un incrément δx tel que

$$f(x_1) \simeq 0 \quad \text{avec} \quad x_1 = x_0 + \delta x$$

Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

A partir d'une valeur x_0 assez “proche” de la racine $\hat{x}$, cherchons un incrément δx tel que

$$f(x_1) \simeq 0 \quad \text{avec} \quad x_1 = x_0 + \delta x$$

Estimons l'incrément nécessaire en linéarisant $f(x_1)$

$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\delta x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

A partir d'une valeur x_0 assez “proche” de la racine $\hat{x}$, cherchons un incrément δx tel que

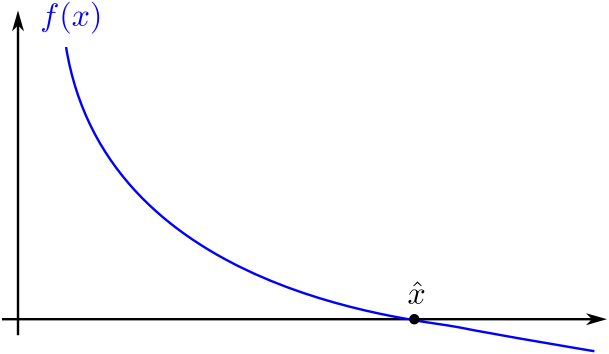
$$f(x_1) \simeq 0 \quad \text{avec} \quad x_1 = x_0 + \delta x$$

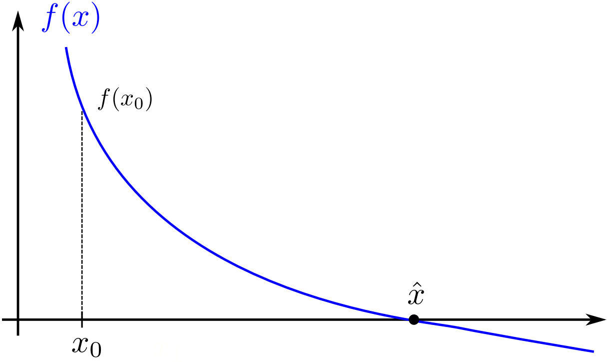
Estimons l'incrément nécessaire en linéarisant $f(x_1)$

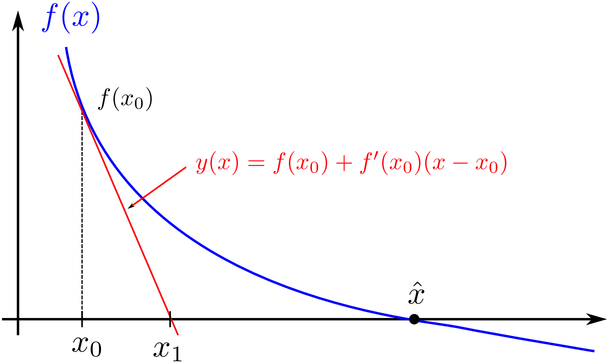
$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\delta x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

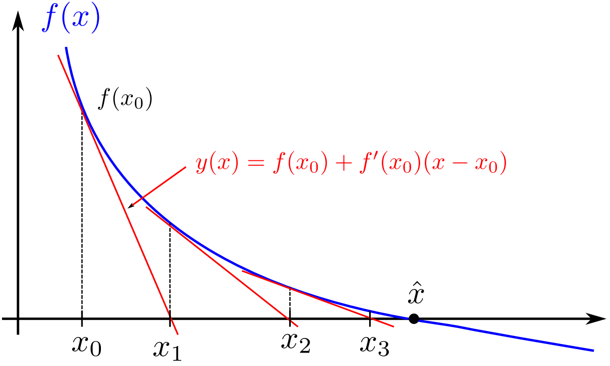
A chaque itération, un nouveau point d'abscisse x_n est calculé

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$


$f(x)$
$\hat{x}$


$f(x)$
$f(x_0)$
$\hat{x}$
x_0


$f(x)$
$f(x_0)$
$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$\hat{x}$
x_0
x_1



$f(x)$
$f(x_0)$
$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$\hat{x}$
x_0
x_1
x_2
x_3

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2 \ , \ \ldots \ , \ u_n$$

On appelle série de terme général u_n, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2 \ , \ \ldots \ , \ u_n$$

On appelle série de terme général u_n, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$S_0 = u_0 \qquad S_1 = u_0+u_1 \qquad S_2 = u_0+u_1+u_2 \qquad \ldots \qquad S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2 \ , \ \ldots \ , \ u_n$$

On appelle série de terme général u_n, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$S_0 = u_0 \qquad S_1 = u_0+u_1 \qquad S_2 = u_0+u_1+u_2 \qquad \ldots \qquad S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

Si la limite notée S existe et est finie

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

la série est dite convergente et S est appelé la somme de la série.

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Série de terme général (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

$$S_n = \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \quad u_0 + (u_0 + r) + \ldots + (u_0 + nr) \quad = \quad \frac{(n+1)(u_n + u_0)}{2}$$

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1+2+3+\ldots+n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Série de terme général (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

$$S_n = \quad u_0+u_1+\ldots+u_n \quad = \quad u_0+(u_0+r)+\ldots+(u_0+nr) \quad = \quad \frac{(n+1)(u_n+u_0)}{2}$$

Série de terme général (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

$$S_n = \quad u_0+u_1+\ldots+u_n \quad = \quad u_0+u_0q+u_0q^2+\ldots+u_0q^n \quad = \quad u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

C'est une condition <u>nécessaire</u>, si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

C'est une condition <u>nécessaire</u>, si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \Rightarrow \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

C'est une condition <u>nécessaire</u>, si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \Rightarrow \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Puisque la série est convergente, on a également

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

C'est une condition <u>nécessaire</u>, si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \qquad \Rightarrow \qquad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Puisque la série est convergente, on a également

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0.$$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique $(u_{n+1} = u_n q)$

$$S_n = \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \quad u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \quad u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \quad u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 2

la convergence vers 0 du terme général n'est qu'une condition nécessaire. Soit la série de terme général (u_n)

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \qquad \text{avec } u_0 = 0.$$

La série s'exprime simplement sous la forme $S_n = \sqrt{n}$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \quad u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 2

la convergence vers 0 du terme général n'est qu'une condition nécessaire. Soit la série de terme général (u_n)

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \qquad \text{avec } u_0 = 0.$$

La série s'exprime simplement sous la forme $S_n = \sqrt{n}$

La série est donc divergente, tandis que la suite (u_n) converge vers 0 :

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

Séries à termes positifs

Une série $S_n = \sum u_n$ est à termes positifs si, $\forall n$, $u_n \geq 0$.

Théorème de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Séries à termes positifs

Une série $S_n = \sum u_n$ est à termes positifs si, $\forall n$, $u_n \geq 0$.

Théorème de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple : soit la série de terme général

$$u_n = \frac{2 + \sin n}{3^{n+1}}$$

On a :

$$\forall n, 0 < u_n \leq \frac{3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (cf. critère de d'Alembert), la série $\sum u_n$ converge.

L'équivalence entre deux suite permet d'évaluer la nature d'une série à partir d'une seconde plus facile à déterminer.

Emploi des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si

$$u_n \sim v_n$$

(ou plus généralement si u_n/v_n a une limite finie non-nulle), alors les séries correspondantes sont de même nature.

L'équivalence entre deux suite permet d'évaluer la nature d'une série à partir d'une seconde plus facile à déterminer.

Emploi des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si

$$u_n \sim v_n$$

(ou plus généralement si u_n/v_n a une limite finie non-nulle), alors les séries correspondantes sont de même nature.

Exemples :

En $n \to +\infty$, on a :

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{n^3+2n+5}{n+2} \sim n^2$$

Séries de Riemann

C'est une série de la forme $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- converge si $\alpha > 1$
- diverge si $\alpha \leq 1$

Critère de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$

- si $L < 1$, $\sum u_n$ converge
- si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$

- si $L < 1$, $\sum u_n$ converge
- si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Séries à termes de signes quelconques

Les règles de Riemann, Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs. Lorsque le terme général u_n d'une série ne reste pas positif, ou est complexe, on doit appliquer ces règles à la série de terme général $|u_n|$. Si la série $\sum |u_n|$ converge, le théorème de convergence absolue affirme que la série de terme général u_n converge aussi. Attention, la réciproque est fausse.

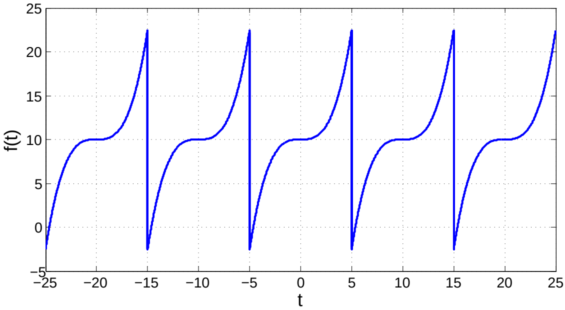
$$\sum |u_n| \quad \text{converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum u_n \quad \text{converge}$$

Sommaire

Définitions

Rappel : Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est dite périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ si

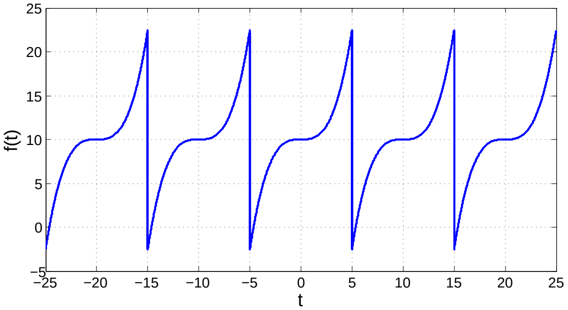
$$f(t+T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Définitions

Rappel : Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est dite périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ si

$$f(t+T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Qu'est-ce que sont les séries de Fourier ?

★ Décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales simples.

★ Caractériser les harmoniques des signaux périodiques.

Décomposition en série de Fourier :

Soit x une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sur $\mathbb{R}$. Sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, $x(t)$ peut se décomposer sous la forme

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

Décomposition en série de Fourier :

Soit x une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sur $\mathbb{R}$. Sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, $x(t)$ peut se décomposer sous la forme

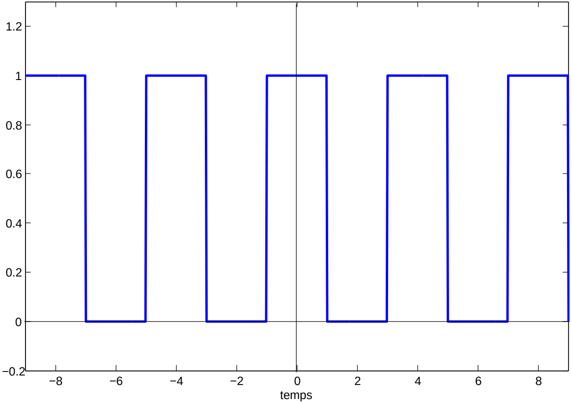
$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

- a_0 correspond à la **valeur moyenne** de la fonction x.
- Les termes de pulsation ω sont les **composantes fondamentales** de la fonction.
- Les termes de pulsation $n\omega$ avec $n > 1$ sont les **composantes harmoniques** de la fonction.
- Les coefficients $\{a_n, b_n\}$ traduisent la contribution de la $n^{\text{ième}}$ harmonique de fréquence $\frac{n}{T}$ dans le signal.

Exemple : considérons le signal carré périodique $x(t)$.



Période $T = 4\ s$; fréquence $f = 0.25\ Hz$; pulsation $\omega = \frac{\pi}{2} = 1.57\ rad/s$

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

- $a_0 \quad = \quad \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\, dt \quad = \quad \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1\, dt \quad = \quad 0.5$

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

- $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1\,dt = 0.5$$

- $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

- $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1\,dt = 0.5$$

- $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

- $b_n = 0$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right) \cos(n\frac{\pi}{2}t)$$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

soit

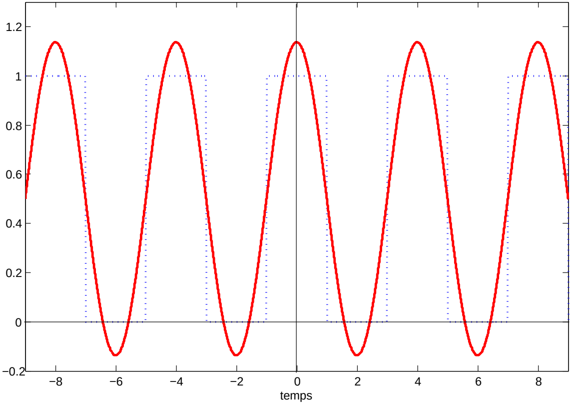
$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right) \cos(n\frac{\pi}{2}t)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

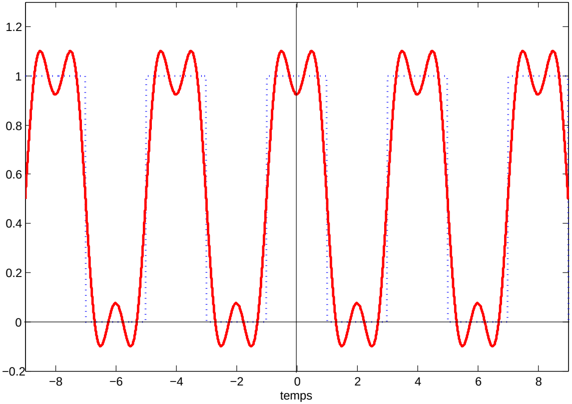
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t)$$



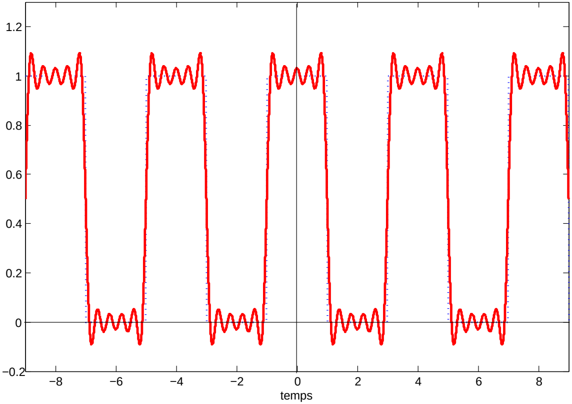
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\frac{\pi}{2}t)$$



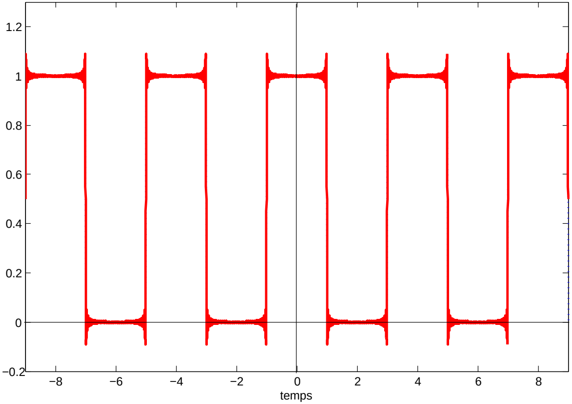
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{9}\left(\frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})\right)\cos(n\frac{\pi}{2}t)$$



$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \ldots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{99}\left(\frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})\right)\cos(n\frac{\pi}{2}t)$$



Le principe réside dans le calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

Le principe réside dans le calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

Propriétés :

- Le coefficient a_0 représente la **valeur moyenne** de la fonction x.
- Si la fonction est **paire**, $x(-t) = x(t)$, alors tous les coefficients b_n sont nuls.
- Si la fonction est **impaire**, $x(-t) = -x(t)$, alors tous les coefficients a_n sont nuls.

Représentation spectrale

Expression d'un signal périodique $x(t)$ avec les séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

- $x(t)$ est représenté par une somme de cos et de sin,
- les cos et sin ont une fréquence multiple de celle de $x(t)$: ω, 2ω, 3ω, 4ω, ...
- les coefficients a_0, a_n et b_n sont des constantes

Représentation spectrale

Expression d'un signal périodique $x(t)$ avec les séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

- $x(t)$ est représenté par une somme de cos et de sin,
- les cos et sin ont une fréquence multiple de celle de $x(t)$: ω, 2ω, 3ω, 4ω, ...
- les coefficients a_0, a_n et b_n sont des constantes

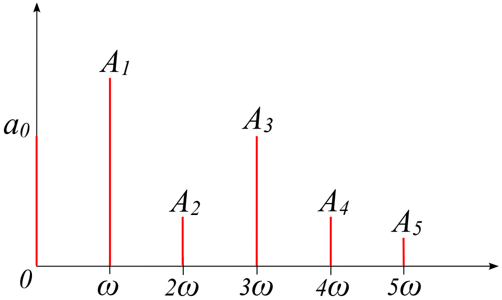
★ Le signal $x(t)$ est donc caractérisé par sa fréquence ω et les coefficients (a_0, a_n et b_n).

La **représentation spectrale** consiste à représenter les coefficients a_n et b_n par rapport à la pulsation correspondante $n\omega$:

- en abscisse : les pulsations $n\omega$.
- en ordonnée : le “module” des coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

La **représentation spectrale** consiste à représenter les coefficients a_n et b_n par rapport à la pulsation correspondante $n\omega$:

- en abscisse : les pulsations $n\omega$.
- en ordonnée : le "module" des coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.



★ Nous avons ainsi une représentation de la caractéristique fréquentielle du signal $x(t)$.

Reprenons l'exemple précédent :

$$x(t) = \underbrace{0.5}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})\right)}_{a_n} \cos(n\frac{\pi}{2}t)$$

soit

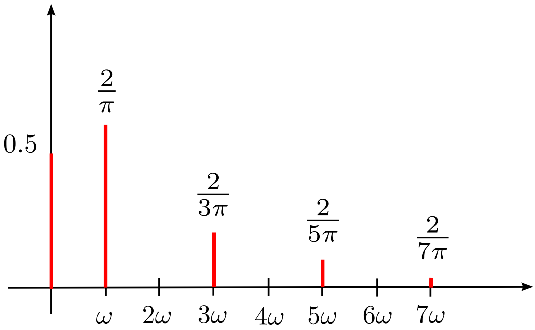
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \dots$$

Reprenons l'exemple précédent :

$$x(t) = \underbrace{0.5}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})\right)}_{a_n} \cos(n\frac{\pi}{2}t)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega t) + \ldots$$

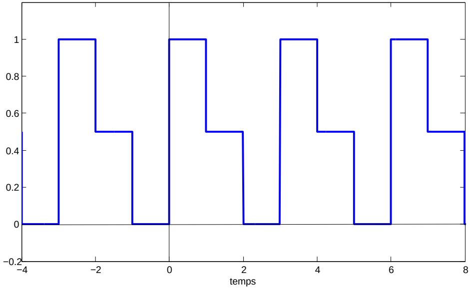


Exemples

Exemple 1 :

Soit le signal en escalier $x(t)$:

$$\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0.5 & \text{pour} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{pour} \quad 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

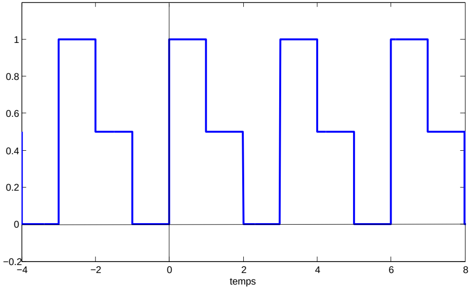


Exemples

Exemple 1 :

Soit le signal en escalier $x(t)$:

$$\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0.5 & \text{pour} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{pour} \quad 2 \leq t < 3 \end{cases}$$



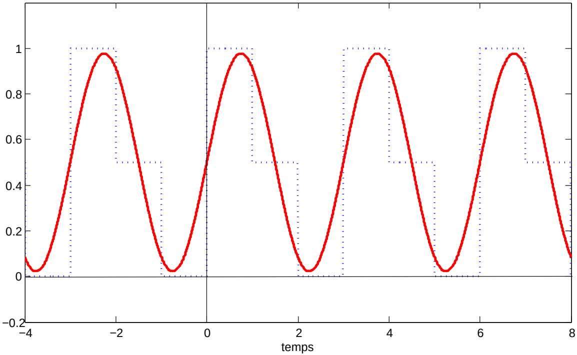
Calculons les coefficients de Fourier correspondants

$$a_0 = 0$$

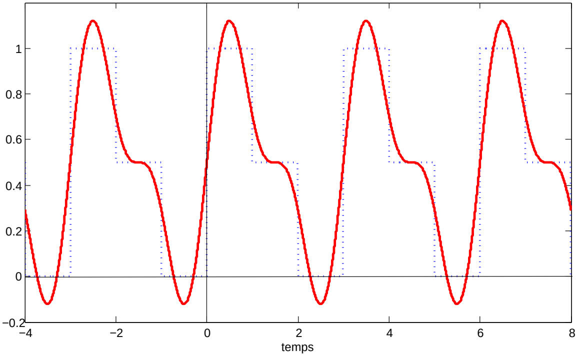
$$a_n = \frac{1}{2n\pi}\left(\sin(n\frac{2\pi}{3}) + \sin(n\frac{4\pi}{3})\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi}\left(2 - \cos(n\frac{2\pi}{3}) - \cos(n\frac{4\pi}{3})\right).$$

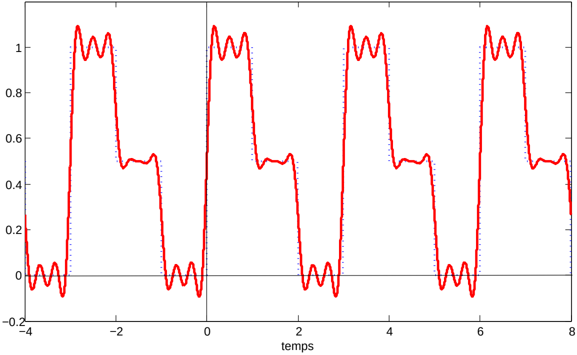
$$x(t) \simeq 0.5 + 0.478\sin(\omega t)$$



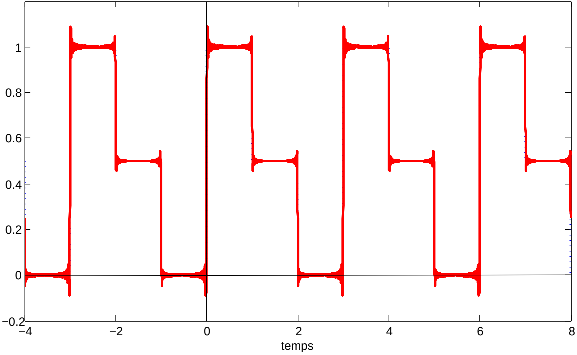
$$x(t) \simeq 0.5 + 0.478\sin(\omega t) + 0.239\sin(2\omega t)$$



$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{2n\pi} \left(2 - \cos(n\frac{2\pi}{3}) - \cos(n\frac{4\pi}{3}) \right) \sin(n\omega t)$$

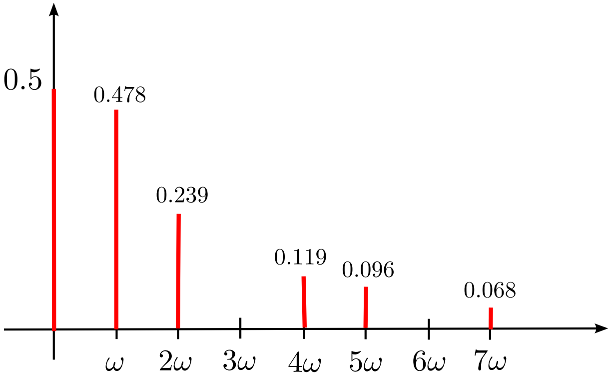


$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{2n\pi}\left(2 - \cos(n\frac{2\pi}{3}) - \cos(n\frac{4\pi}{3})\right)\sin(n\omega t)$$



Représentation spectrale

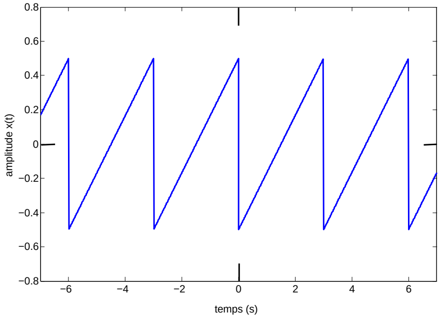
ici, $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ soit 2.094 rad/s.



Exemple 2 :

Soit un signal en dents de scie $x(t)$

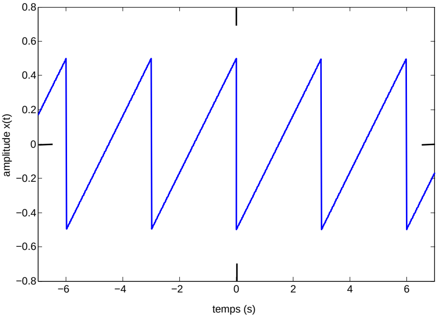
- de période $T = 3s$, de pente $\frac{1}{3}$
- d'amplitude 1 et de valeur moyenne nulle.



Exemple 2 :

Soit un signal en dents de scie $x(t)$

- de période $T = 3s$, de pente $\frac{1}{3}$
- d'amplitude 1 et de valeur moyenne nulle.



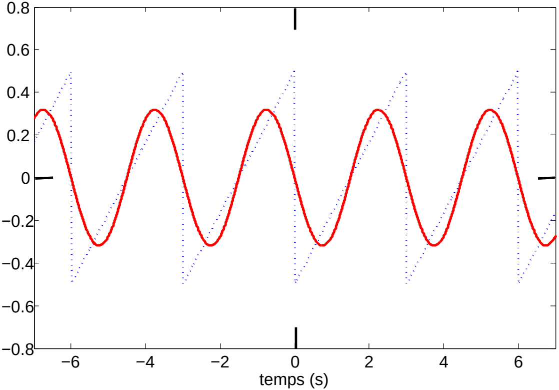
Calculons les coefficients de Fourier correspondants

$$a_0 = 0 \quad \text{(prévisible).}$$

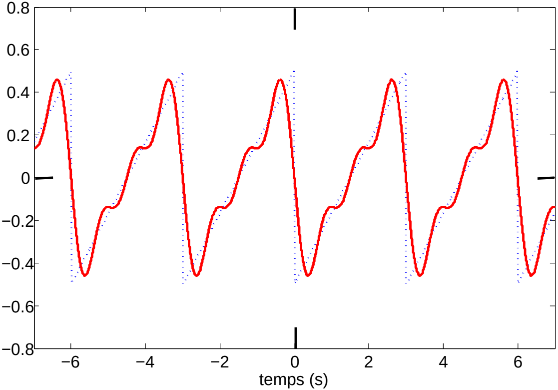
$$a_n = \; 0 \quad \text{(le signal est impair).}$$

$$b_n = \; -\frac{1}{n\pi} \quad \text{(intégration par parties)}$$

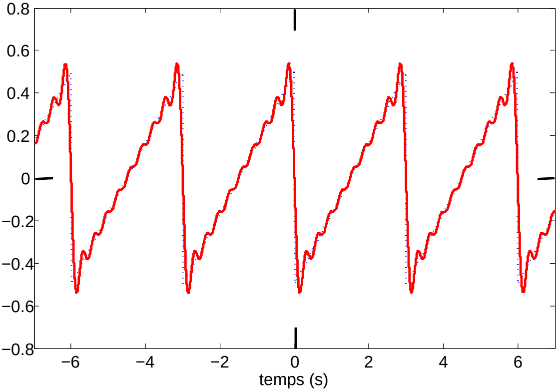
$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi}\sin(\omega t)$$



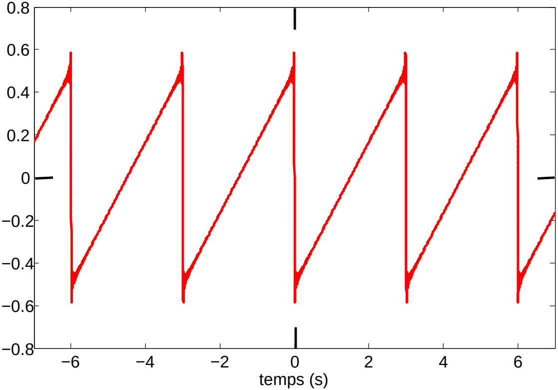
$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi}\sin(\omega t) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\omega t) - \frac{1}{3\pi}\sin(3\omega t)$$



$$x(t) \simeq \sum_{n=1}^{9} -\frac{1}{n\pi}\sin(n\omega t)$$

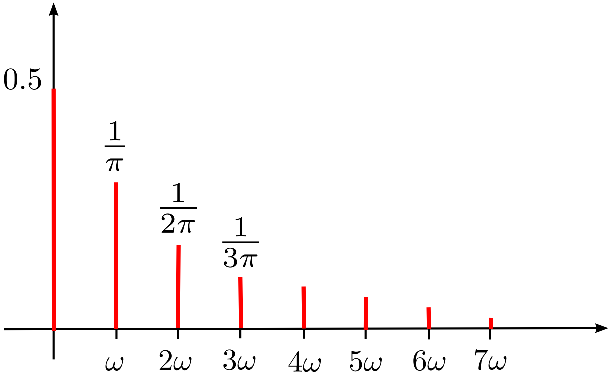


$$x(t) \simeq \sum_{n=1}^{99} -\frac{1}{n\pi} \sin(n\omega t)$$



Représentation spectrale

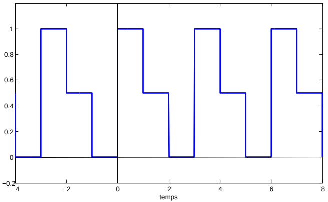
ici, $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ soit 2.094 rad/s.



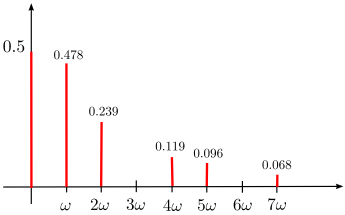
Transformée de Fourier

Nous avons considéré des signaux périodiques

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**

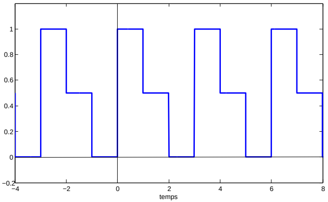


- le spectre représente les composantes fréquentielles qui caractérisent le signal $x(t)$,
- ces composantes sont des multiples de la fréquence de $x(t)$: $n\omega$,

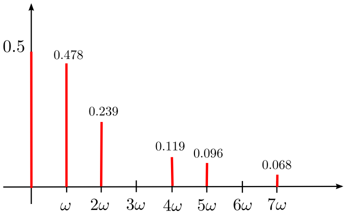
Transformée de Fourier

Nous avons considéré des signaux périodiques

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



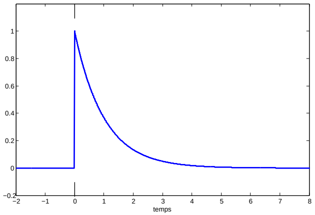
- le spectre représente les composantes fréquentielles qui caractérisent le signal $x(t)$,
- ces composantes sont des multiples de la fréquence de $x(t)$: $n\omega$,

★ extension au cas des signaux non-périodiques ?

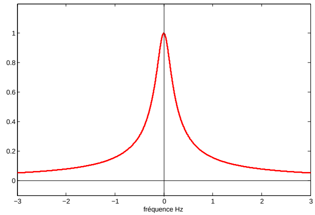
La **transformée de Fourier** permet de déterminer la représentation fréquentielle d'un signal à énergie finie.

exemple du signal $x(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$:

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



- le spectre dépend continument de la fréquence f,
- le signal $x(t)$ n'est plus caractérisé par un ensemble de fréquences particulières mais par une plage de fréquences.

Soit $x(t)$ une fonction à énergie finie.

La **transformée de Fourier** de la fonction $x(t)$ est la fonction complexe $X(f)$, de la variable f réelle, définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt.$$

Soit $x(t)$ une fonction à énergie finie.

La **transformée de Fourier** de la fonction $x(t)$ est la fonction complexe $X(f)$, de la variable f réelle, définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt.$$

La **transformée de Fourier inverse** est définie par (si $X(f)$ est également intégrable)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{\,j2\pi ft}\,df.$$

Dans l'exemple, le spectre correspond au tracé de $|X(f)|$ en fonction de f.

Applications

Une note de musique

Le diapason donne la note-repère conventionnelle, le **la**.

Play la_3

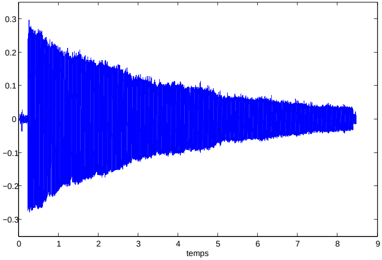
Applications

Une note de musique

Le diapason donne la note-repère conventionnelle, le **la**.

Play la_3

représentation **temporelle**



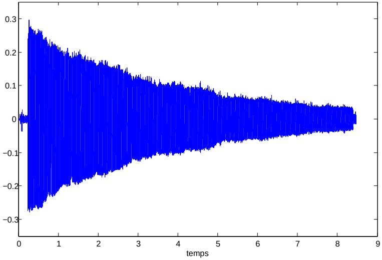
Applications

Une note de musique

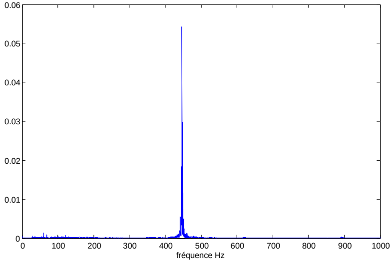
Le diapason donne la note-repère conventionnelle, le **la**.

Play la_3

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**

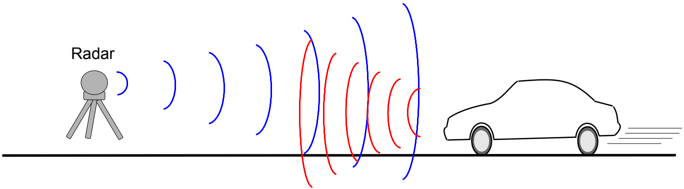


La fréquence du la_3 est 440 Hz.

Radar de contrôle routier

Effet Doppler : La fréquence d'une onde perçue par un observateur varie en fonction de la vitesse de la source émettrice par rapport à l'observateur.

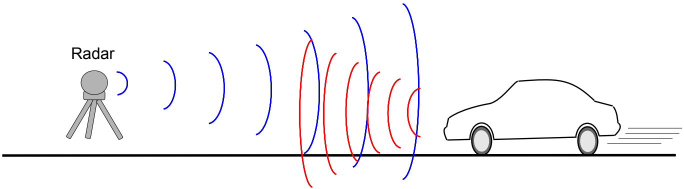
Le radar émet une onde qui est ensuite réfléchie par la cible. Si cette cible se déplace, la fréquence du signal de retour sera différente du signal émis.



Radar de contrôle routier

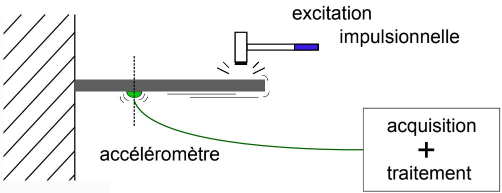
Effet Doppler : La fréquence d'une onde perçue par un observateur varie en fonction de la vitesse de la source émettrice par rapport à l'observateur.

Le radar émet une onde qui est ensuite réfléchie par la cible. Si cette cible se déplace, la fréquence du signal de retour sera différente du signal émis.

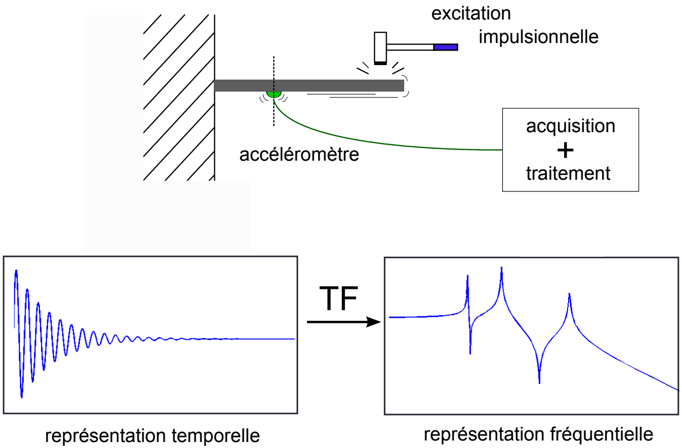


L'analyse de l'écart entre la fréquence du signal transmis et celle du signal reçu permet de mesurer la vitesse instantanée de la cible.

Analyse modale de structures



Analyse modale de structures

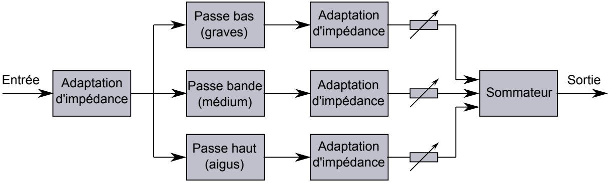


Les vibrations mesurées sont analysées dans le domaine fréquentiel.

★ *Objectif* : estimer les fréquences de résonance d'une structure mécanique.

Égaliseur audio

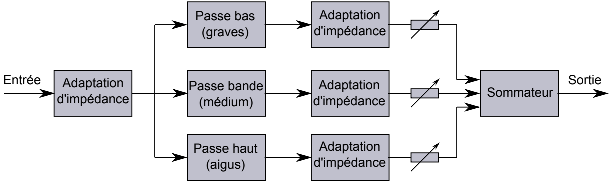
Un égaliseur [1] est composé de filtres électroniques qui permettent d'atténuer ou augmenter le signal sur différentes bandes de fréquence donnée.

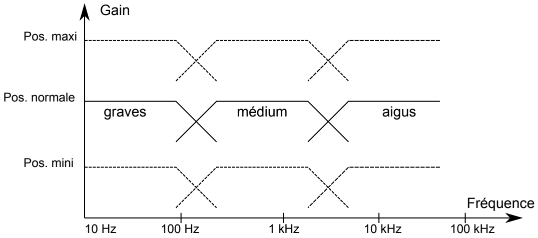


1. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n°*276.

Égaliseur audio

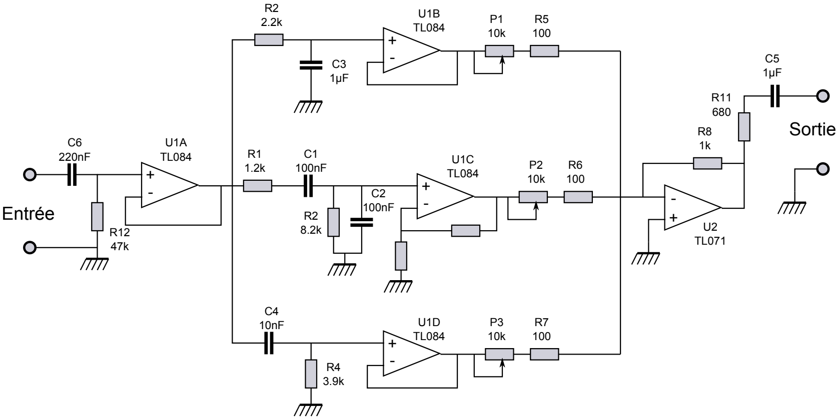
Un égaliseur [1] est composé de filtres électroniques qui permettent d'atténuer ou augmenter le signal sur différentes bandes de fréquence donnée.





1. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n°276*.

Schéma électronique de l'égaliseur [2] :



2. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n°*276.

Sommaire

Définitions

La **transformée de Laplace** d'une fonction $f(t)$, définie pour $t \geq 0$, est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\Big\{f(t)\Big\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\hat{f}(s)\Big\}$.
- La fonction $\hat{f}(s)$ n'est pas forcément définie dans tout le plan complexe ($\forall s \in \mathbb{C}$). Seulement dans une région où l'intégrale converge.

Définitions

La **transformée de Laplace** d'une fonction $f(t)$, définie pour $t \geq 0$, est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\Big\{f(t)\Big\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\hat{f}(s)\Big\}$.
- La fonction $\hat{f}(s)$ n'est pas forcément définie dans tout le plan complexe ($\forall s \in \mathbb{C}$). Seulement dans une région où l'intégrale converge.

La **transformée de Laplace inverse** d'une fonction $\hat{f}(s)$ est la fonction temporelle :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds$$

★ Mais en pratique, on utilisera la table et les propriétés de la transformée.

Propriétés :

- Linéarité : $\mathcal{L}\Big\{af(t) + bg(t)\Big\} = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants.
- Dérivation : $\mathcal{L}\Big\{\frac{d}{dt}f(t)\Big\} = s\hat{f}(s) - f(0)$.
- Intégration : $\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(\theta)d\theta\Big\} = \dfrac{1}{s}\hat{f}(s)$.
- Retard : $\mathcal{L}\Big\{f(t-\tau)\Big\} = e^{-s\tau}\hat{f}(s)$, $\tau > 0$ et $f(t) = 0\ \forall t < 0$.
- Valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{f}(s)$.

Fonctions types

Exemple 1 :

Transformée de Laplace de la fonction échelon $f(t) = 1$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

Fonctions types

Exemple 1 :

Transformée de Laplace de la fonction échelon $f(t) = 1$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt \\ &= \Big[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Notons que cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re[s] > 0$.

Exemple 2 :

Transformée de Laplace de la fonction rampe $g(t) = 2t$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon.

Exemple 2 :

Transformée de Laplace de la fonction rampe $g(t) = 2t$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon.

Notons que $g(t) = 2\int_0^t 1\,dt = 2\int_0^t f(t)\,dt$,

alors

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \mathcal{L}\left\{2\int_0^t f(t)\,dt\right\} \\
&= 2\frac{1}{s}\hat{f}(s) \\
&= \frac{2}{s^2}.
\end{aligned}$$

Là encore cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re[s] > 0$.

Exemple 3 :

Transformée de Laplace de la fonction exponentielle $h(t) = e^{-at}$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

Exemple 3 :

Transformée de Laplace de la fonction exponentielle $h(t) = e^{-at}$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

$$\begin{aligned}
\hat{h}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\, dt \\
&= \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{s+a}.
\end{aligned}$$

Notons que cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re[s] > -Re[a]$.

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	**Dom. temporel** $f(t)$	**Trans. de Laplace** $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	**Dom. temporel** $f(t)$	**Trans. de Laplace** $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\dfrac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL (pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y \;=\; b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL
(pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y \; = \; b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) \; = \; b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL (pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y \;=\; b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) \;=\; b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

La réponse s'exprime donc $\hat{y}(s) \;=\; \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}\hat{u}(s)$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL (pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y \ = \ b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) \ = \ b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

La réponse s'exprime donc $\qquad \hat{y}(s) \ = \ \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \hat{u}(s)$

A partir de l'expression de $\hat{y}(s)$:

- effectuer une décomposition en éléments simple,
- appliquer la transformée de Laplace inverse à chaque éléments,

$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t),$$

à l'aide de la table des transformées.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{5}{(3s+1)}\hat{u}(s) = \frac{5}{(3s+1)}\frac{2}{s} = \frac{A}{3s+1} + \frac{B}{s}$$

avec

$$A = (3s+1)\frac{10}{(3s+1)s}\bigg|_{s=-1/3} = -30 \ , \qquad B = s\frac{10}{(3s+1)s}\bigg|_{s=0} = 10.$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{5}{(3s+1)}\hat{u}(s) = \frac{5}{(3s+1)}\frac{2}{s} = \frac{A}{3s+1} + \frac{B}{s}$$

avec

$$A = (3s+1)\frac{10}{(3s+1)s}\bigg|_{s=-1/3} = -30\ , \qquad B = s\frac{10}{(3s+1)s}\bigg|_{s=0} = 10.$$

- A l'aide de la table, la réponse temporelle est :

$$\boxed{y(t) = -\frac{30}{3}e^{-\frac{1}{3}t} + 10 = 10(1 - e^{-\frac{1}{3}t})}.$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{9/2}{s^2 + 12s + 9}\hat{u}(s) = \frac{A}{s + 11.196} + \frac{B}{s + 0.804} + \frac{C}{s}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= (s + 11.196)\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=-11.196} = 0.039, \\
B &= (s + 0.804)\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=-0.804} = -0.539, \\
C &= s\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=0} = 0.5.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{9/2}{s^2 + 12s + 9}\hat{u}(s) = \frac{A}{s + 11.196} + \frac{B}{s + 0.804} + \frac{C}{s}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= (s + 11.196)\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=-11.196} = 0.039, \\
B &= (s + 0.804)\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=-0.804} = -0.539, \\
C &= s\frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s}\bigg|_{s=0} = 0.5.
\end{aligned}$$

- A l'aide de la table, la réponse temporelle est :

$$\boxed{y(t) = 0.039e^{-11.196t} - 0.539e^{-0.804t} + 0.5}$$

Exemple 3 : Datation au carbone 14

- La proportion de C^{14}, par rapport au carbone total (C^{12}, C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroit en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) = -\frac{1}{8033} N(t).$$

Exemple 3 : Datation au carbone 14

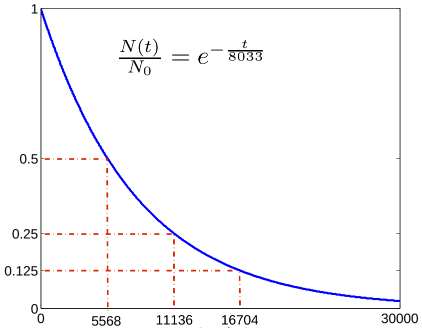
- La proportion de C^{14}, par rapport au carbone total (C^{12}, C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroit en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) = -\frac{1}{8033}N(t).$$

Soit à $t_0 = 0$, la quantité initiale présente $N(0) = N_0$.

$$\text{TL :} \quad s\hat{N}(s) - N_0 = -\frac{1}{8033}\hat{N}(s)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{N}(s) = \frac{N_0}{s + \frac{1}{8033}}$$



Exemple 3 : Datation au carbone 14

- La proportion de C^{14}, par rapport au carbone total (C^{12}, C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroit en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) \;=\; -\frac{1}{8033}N(t).$$

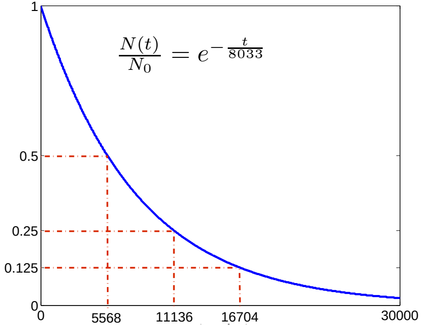
Soit à $t_0 = 0$, la quantité initiale présente $N(0) = N_0$.

$$\text{TL :} \quad s\hat{N}(s) - N_0 \;=\; -\frac{1}{8033}\hat{N}(s)$$

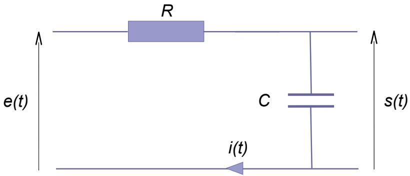
$$\Rightarrow \quad \hat{N}(s) \;=\; \frac{N_0}{s + \frac{1}{8033}}$$

Expression temporelle :

$$N(t) = N_0 \; e^{-\frac{1}{8033}t}$$



Exemple 4 : Circuit RC



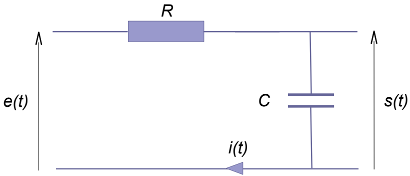
Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

Exemple 4 : Circuit RC



Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

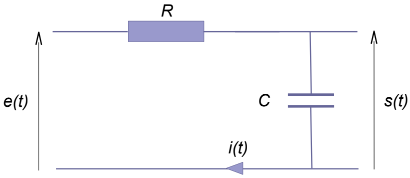
$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

Pour une tension d'entrée de type échelon, $e(t) = 5V$:

$$\text{TL :} \quad RC\, s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) = \hat{e}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \hat{s}(s) &= \frac{1}{RCs+1}\frac{5}{s} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s+\frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

Exemple 4 : Circuit RC



Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

Pour une tension d'entrée de type échelon, $e(t) = 5V$:

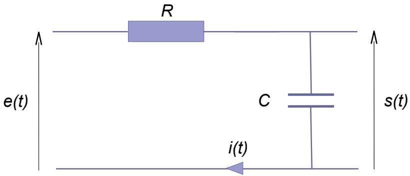
$$\text{TL :} \quad RC\, s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) \; = \; \hat{e}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \hat{s}(s) &= \frac{1}{RCs+1}\frac{5}{s} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s+\frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

Expression temporelle

$$s(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Exemple 4 : Circuit RC



Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

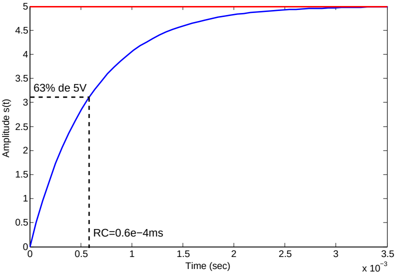
Pour une tension d'entrée de type échelon, $e(t) = 5V$:

$$\text{TL :} \quad RC\, s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) = \hat{e}(s)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{s}(s) = \frac{1}{RCs+1}\frac{5}{s} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+\frac{1}{RC}}$$

Expression temporelle

$$s(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$



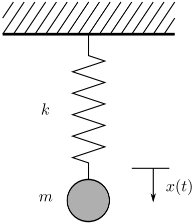
$(R = 3M\Omega,\ C = 0.2\mu F)$

Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

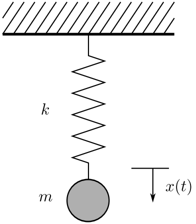


Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



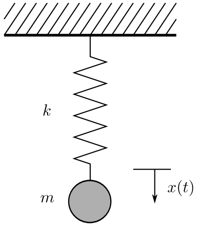
Conditions initiales :

- position $x(0) = 0.01\ m$,
- vitesse $\dot{x}(0) = 0\ m/s$.

$$\text{TL :} \quad s^2\hat{x}(s) - sx(0) + \omega_0^2\hat{x}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} x_0$$

Exemple 5 : Système masse-ressort



Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Conditions initiales :

- position $x(0) = 0.01\ m$,
- vitesse $\dot{x}(0) = 0\ m/s$.

$$\text{TL :} \quad s^2\hat{x}(s) - sx(0) + \omega_0^2\hat{x}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} x_0$$

Expression temporelle

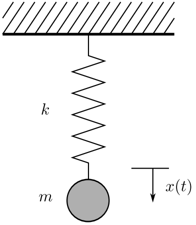
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0 \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0$$

avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$.



Conditions initiales :

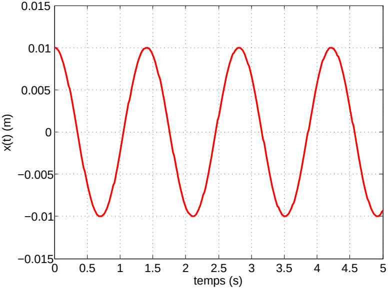
- position $x(0)=0.01\ m$,
- vitesse $\dot{x}(0)=0\ m/s$.

$$\text{TL :} \quad s^2\hat{x}(s)-sx(0)+\omega_0^2\hat{x}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}x_0$$

Expression temporelle

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)$$



$(m = 0.1\ kg,\ k = 2\ N/m)$

Sommaire

Définition

Pour tous entiers positifs n et p, une **matrice** $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{R}$ à n lignes et à p colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Le coefficient a_{ij} représente le coefficient situé à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne du tableau. On note $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Définition

Pour tous entiers positifs n et p, une **matrice** $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{R}$ à n lignes et à p colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Le coefficient a_{ij} représente le coefficient situé à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne du tableau. On note $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Exemples :

matrice rectangle

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 6 & 0.17 \end{bmatrix}$$

matrice carrée

$$\begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 4 \\ 1 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

n et p représentent les **dimensions** de la matrice.

Matrices particulières

Matrice nulle :
matrice $n \times p$ dont tous les éléments sont nuls, on la note $\mathbb{0}_{n\times p}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale :
matrice telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire :
matrice telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (triangulaire supérieure),
matrice telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (triangulaire inférieure).

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice identité :
matrice carrée diagonale dont les éléments valent 1, on la note $\mathbb{1}_n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique :
matrice carrée telle que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i$ et $\forall j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -9 \\ 4 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Opérations élémentaires

Transposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, la **transposée** de A est une matrice $p \times n$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est a_{ji}.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Opérations élémentaires

Transposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, la **transposée** de A est une matrice $p \times n$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est a_{ji}.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplication par un nombre réel

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le résultat de $\lambda\, A$ est une matrice dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est λa_{ij}.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 3 \qquad \lambda\, A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 0 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

Propriétés : $\left(A^T\right)^T = A$ et $\left(\lambda\, A\right)^T = \lambda\, A^T$

Addition matricielle

Soit deux matrices A et $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. La somme de A et B

$$C = A + B$$

est une matrice $n \times p$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Addition matricielle

Soit deux matrices A et $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. La somme de A et B

$$C = A + B$$

est une matrice $n \times p$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

⚠ Cette opération n'est définie que pour des matrices de mêmes dimensions.

Exemples :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 13 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 15 \\ 13 & 9 \end{bmatrix} \qquad A - B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 11 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriété : $(A + B)^T = A^T + B^T$

Multiplication matricielle

Soit deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Le produit de A et B est une matrice $n \times q$

$$C = A \times B$$

dont le coefficient c_{ij} est la somme des produits "termes à termes"de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Multiplication matricielle

Soit deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Le produit de A et B est une matrice $n \times q$

$$C = A \times B$$

dont le coefficient c_{ij} est la somme des produits "termes à termes" de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}.$$

⚠ Opération définie que si le nb de colonnes de A est égal au nb de lignes de B.
⚠ Opération non commutative $A\,B \neq B\,A$.

Exemples :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -2 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}_{C}$$

Inversion de matrices

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que

$$A\,B = B\,A = \mathbb{1}_n.$$

Cette matrice B s'appelle l'inverse de A, elle est unique et se note A^{-1}.

Inversion de matrices

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que

$$A\,B = B\,A = \mathbb{1}_n .$$

Cette matrice B s'appelle l'inverse de A, elle est unique et se note A^{-1}.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -8 & 19 \end{bmatrix}$$

Propriétés :

- Si A inversible, la matrice A^{-1} est aussi inversible $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors $A\,B$ est inversible et $\left(A\,B\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Si A est inversible, alors A^T est inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

★ Comment savoir si une matrice est inversible et comment calculer A^{-1} ?

Déterminant d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Le **déterminant** de A, noté $det\,A$ est un nombre réel que l'on définit par récurrence par :

$$det\,A \;=\; a_{11}\,\Delta_{11} \;-\; a_{12}\,\Delta_{12} \;+\; \ldots \;+ (-1)^{n+1} a_{1n}\,\Delta_{1n}$$

où Δ_{1i} est le déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue à partir de A en rayant la première ligne et la i-ième colonne.

- Pour $n \geq 2$, le déterminant est calculé à partir de n déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$.
- Pour une matrice 2×2 :

$$A \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad det\,A \;=\; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \;=\; a\,d \;-\; b\,c$$

Déterminant d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée. Le **déterminant** de A, noté $det\,A$ est un nombre réel que l'on définit par récurrence par :

$$det\,A = a_{11}\,\Delta_{11} - a_{12}\,\Delta_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\,\Delta_{1n}$$

où Δ_{1i} est le déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue à partir de A en rayant la première ligne et la i-ième colonne.

- Pour $n \geq 2$, le déterminant est calculé à partir de n déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$.
- Pour une matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det\,A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} det\,A &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1) - 2 \times (-3) + 1 \times (-10) = -5 \end{aligned}$$

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$det\, B = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3$$

Exemple : $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det\,B = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3$$

Propriétés :

- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.
- Si une ligne (ou colonne) de A est une combinaison linéaire des autres lignes (colonnes), alors $det\,A = 0$.
- Si une ligne (ou colonne) de A est nulle, alors $det\,A = 0$.
- $det\left(\lambda A\right) = \lambda^n \det\,A$, $\quad det\left(A\,B\right) = \det\,A \times \det\,B$ et $\quad det\left(A^T\right) = \det\,A$.

Théorème

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le cas échéant, $det\left(A^{-1}\right) = 1/det\, A$.

Une matrice dont le déterminant est nul est dite **singulière**.

Théorème

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le cas échéant, $det\left(A^{-1}\right) = 1/det\, A$.

Une matrice dont le déterminant est nul est dite **singulière**.

Définition

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

On appelle **cofacteur** de a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice de dimension $(n-1)$ obtenue à partir de A en rayant la ligne i et la colonne j.

On appelle **comatrice** de A la matrice de dimension n, noté $Com\, A$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Com\, A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} & \Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ \Delta_{31} & -\Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Théorème

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le cas échéant, $det\left(A^{-1}\right) = 1/det\, A$.

Une matrice dont le déterminant est nul est dite **singulière**.

Définition

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

On appelle **cofacteur** de a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice de dimension $(n-1)$ obtenue à partir de A en rayant la ligne i et la colonne j.

On appelle **comatrice** de A la matrice de dimension n, noté $Com\, A$ dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad Com\, A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} & \Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ \Delta_{31} & -\Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A est une matrice inversible, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A}\left(Com\, A\right)^T.$$

Exemples :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Système d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + \, a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + \, a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \dots & + \, a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

système de n équations

et p inconnues

Système d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + \, a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + \, a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + \, a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

système de n équations

et p inconnues

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A\,X \;=\; B$$

Définition

Un système linéaire est appelé **système de Cramer** s'il comporte autant d'équations que d'inconnues (c'est-à-dire $n = p$) et si $det\,A \neq 0$.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 + 1\,x_2 & = & -5 \\ 4\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définition

Un système linéaire est appelé **système de Cramer** s'il comporte autant d'équations que d'inconnues (c'est-à-dire $n = p$) et si $det\, A \neq 0$.

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x_1 + 1\,x_2 & = & -5 \\ 4\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $\det\, A \neq 0$, le système d'équations admet une solution unique.

Si $\det\, A = 0$, deux cas de figure :

- le système admet une infinité de solutions,
- le système n'admet aucune solution.

★ *Comment résoudre le système lorsque c'est un système de Cramer ?*

Si l'on considère un système de Cramer, la matrice A est inversible.

La solution du système est donnée par :

$$X = A^{-1}\,B$$

Si l'on considère un système de Cramer, la matrice A est inversible.

La solution du système est donnée par :

$$X = A^{-1} B$$

Exemple précédent : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad det\, A = 4$

Calcul de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -10 \end{bmatrix}^T$$

Résolution :

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 & -1 \\ 2.75 & -0.75 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -8.5 \\ -16.25 \end{bmatrix}$$

Si l'on considère un système de Cramer, la matrice A est inversible.

La solution du système est donnée par :

$$X = A^{-1} B$$

Exemple précédent : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad det\, A = 4$

Calcul de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -10 \end{bmatrix}^T$$

Résolution :

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 & -1 \\ 2.75 & -0.75 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -8.5 \\ -16.25 \end{bmatrix}$$

★ Méthodes trop lourdes en calculs ...

Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire.

Cette transformation s'effectue en modifiant certaines lignes de la matrice par combinaison linéaire d'autres lignes.

Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire.

Cette transformation s'effectue en modifiant certaines lignes de la matrice par combinaison linéaire d'autres lignes.

Explication sur un exemple :
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Cherchons à éliminer x_1 dans les équations 2 et 3 :

Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire.

Cette transformation s'effectue en modifiant certaines lignes de la matrice par combinaison linéaire d'autres lignes.

Explication sur un exemple :
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Cherchons à éliminer x_1 dans les équations 2 et 3 :

- On multiplie la $1^{\text{ière}}$ équation par -2 et on l'ajoute à la 2^{nde} qui devient
$$0\,x_1 \;-\; 5\,x_2 \;+\; 2\,x_3 \;=\; 10 \qquad (L_2 \longleftarrow -2\,L_1 + L_2)$$

Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire.

Cette transformation s'effectue en modifiant certaines lignes de la matrice par combinaison linéaire d'autres lignes.

Explication sur un exemple : $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Cherchons à éliminer x_1 dans les équations 2 et 3 :

- On multiplie la $1^{\text{ière}}$ équation par -2 et on l'ajoute à la 2^{nde} qui devient
$$0\,x_1 \;-\; 5\,x_2 \;+\; 2\,x_3 \;=\; 10 \qquad (L_2 \longleftarrow -2\,L_1 + L_2)$$
- On multiplie la $3^{\text{ième}}$ équation par 2, on lui retranche la $1^{\text{ière}}$ et devient
$$0\,x_1 \;+\; 3\,x_2 \;-\; 2\,x_3 \;=\; 7 \qquad (L_3 \longleftarrow 2\,L_3 - L_1)$$

Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire.

Cette transformation s'effectue en modifiant certaines lignes de la matrice par combinaison linéaire d'autres lignes.

Explication sur un exemple : $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Cherchons à éliminer x_1 dans les équations 2 et 3 :

- On multiplie la $1^{\text{ière}}$ équation par -2 et on l'ajoute à la 2^{nde} qui devient
$$0\,x_1 \;-\; 5\,x_2 \;+\; 2\,x_3 \;=\; 10 \qquad\qquad (L_2 \longleftarrow -2\,L_1 + L_2)$$

- On multiplie la $3^{\text{ième}}$ équation par 2, on lui retranche la $1^{\text{ière}}$ et devient
$$0\,x_1 \;+\; 3\,x_2 \;-\; 2\,x_3 \;=\; 7 \qquad\qquad (L_3 \longleftarrow 2\,L_3 - L_1)$$

Le système devient : $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Cherchons à éliminer x_2 dans l'équations 3 :

- On multiplie la 2^{nde} équation par 3/5 et on l'ajoute à la $3^{\text{ième}}$ qui devient

$$0\,x_1 \ + \ 0\,x_2 \ - \ \frac{4}{5}\,x_3 \ = \ 13 \qquad\qquad (L_3 \longleftarrow \frac{3}{5}\,L_2 + L_3)$$

Cherchons à éliminer x_2 dans l'équations 3 :

- On multiplie la 2^{nde} équation par 3/5 et on l'ajoute à la $3^{\text{ième}}$ qui devient

$$0\,x_1 \;+\; 0\,x_2 \;-\; \frac{4}{5}\,x_3 \;=\; 13 \qquad\qquad (L_3 \longleftarrow \frac{3}{5}\,L_2 + L_3)$$

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

La matrice du système est maintenant triangulaire supérieure.

Cherchons à éliminer x_2 dans l'équations 3 :

- On multiplie la 2^{nde} équation par $3/5$ et on l'ajoute à la $3^{\text{ième}}$ qui devient

$$0\,x_1 \;+\; 0\,x_2 \;-\; \frac{4}{5}\,x_3 \;=\; 13 \qquad\qquad (L_3 \longleftarrow \frac{3}{5}\,L_2 + L_3)$$

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

La matrice du système est maintenant triangulaire supérieure.

On peut résoudre facilement les équations en "remontant" :

$$\begin{aligned} x_3 &= -13\,\tfrac{5}{4} \;=\; -\tfrac{65}{4} \\ x_2 &= -\tfrac{1}{5}\big(10 + \tfrac{65}{4}2\big) \;=\; -\tfrac{17}{2} \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}\big(-5 - \tfrac{17}{2}\big) \;=\; \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

1. Dans la $k^{\text{ième}}$ étape, on cherche à éliminer x_k dans les équations allant de $(k+1)$ à n.

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

1. Dans la $k^{\text{ième}}$ étape, on cherche à éliminer x_k dans les équations allant de $(k+1)$ à n.
2. Les k premières lignes restent inchangées.

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

1. Dans la $k^{\text{ième}}$ étape, on cherche à éliminer x_k dans les équations allant de $(k+1)$ à n.
2. Les k premières lignes restent inchangées.
3. On retranche à la i-ième ligne, la k-ième ligne multipliée par

$$\frac{a_{ik}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}}, \qquad k+1 \leq i \leq n$$

$a_{ij}^{[k]}$ représentent les coefficients de la matrice A à l'étape k (après les précédentes modif.).

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

1. Dans la $k^{\text{ième}}$ étape, on cherche à éliminer x_k dans les équations allant de $(k+1)$ à n.
2. Les k premières lignes restent inchangées.
3. On retranche à la i-ième ligne, la k-ième ligne multipliée par
$$\frac{a_{ik}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}}, \qquad k+1 \leq i \leq n$$
$a_{ij}^{[k]}$ représentent les coefficients de la matrice A à l'étape k (après les précédentes modif.).
4. Si le coefficient $a_{kk}^{[k]}$ est nul, il faut permuter la ligne k avec une des lignes suivantes dont le coefficient du terme x_k est non nul.

Algorithme : transformer en $n-1$ étapes le système $A\,X = B$ en un système équivalent $U\,X = C$, où U est une matrice triangulaire supérieure.

1. Dans la $k^{\text{ième}}$ étape, on cherche à éliminer x_k dans les équations allant de $(k+1)$ à n.

2. Les k premières lignes restent inchangées.

3. On retranche à la i-ième ligne, la k-ième ligne multipliée par

$$\frac{a_{ik}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}}, \qquad k+1 \leq i \leq n$$

   $a_{ij}^{[k]}$ représentent les coefficients de la matrice A à l'étape k (après les précédentes modif.).

4. Si le coefficient $a_{kk}^{[k]}$ est nul, il faut permuter la ligne k avec une des lignes suivantes dont le coefficient du terme x_k est non nul.

$\Rightarrow$ Résoudre le système $U\,X = C$ à partir de la dernière équation

$$\begin{cases} x_n = c_n/u_{nn} \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}}\Big(c_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\Big), \qquad i = n-1,\, n-2, \ldots, 1 \end{cases}$$

Exemple :
$$\left\{\begin{array}{rcll} 2\,x_1 + x_2 + 4\,x_4 & = & 2 & L_1 \\ -4\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 7\,x_4 & = & -9 & L_2 \\ 4\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 8\,x_4 & = & 2 & L_3 \\ -3\,x_2 - 12\,x_3 - x_4 & = & 2 & L_4 \end{array}\right.$$

Système sous forme matricielle : $A\,X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemple :
$$\left\{\begin{array}{rcll} 2\,x_1 + x_2 + 4\,x_4 & = & 2 & \color{magenta}{L_1} \\ -4\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 7\,x_4 & = & -9 & \color{magenta}{L_2} \\ 4\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 8\,x_4 & = & 2 & \color{magenta}{L_3} \\ -3\,x_2 - 12\,x_3 - x_4 & = & 2 & \color{magenta}{L_4} \end{array}\right.$$

Système sous forme matricielle : $A\,X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Etape 1 : élimination de x_1 dans les équations 2, 3 et 4 :

- $L_2 \longleftarrow 2\,L_1 + L_2$: $\quad 0\,x_1 + 0\,x_2 + 3\,x_3 + 1\,x_4 = -5$
- $L_3 \longleftarrow -2\,L_1 + L_3$: $\quad 0\,x_1 - 1\,x_2 - 2\,x_3 + 0\,x_4 = -2$
- pas de modification nécessaire pour la dernière équation.

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Etape 2 : élimination de x_2 dans les équations 3 et 4 :

- On permute les équations 2 et 3.
- La $3^{\text{ième}}$ (L_3) n'a plus besoin de modification.
- $L_4 \longleftarrow -3\,L_2 + L_4$: $\qquad 0\,x_1 + 0\,x_2 - 6\,x_3 - 1\,x_4 = 8$

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Etape 2 : élimination de x_2 dans les équations 3 et 4 :

- On permute les équations 2 et 3.
- La $3^{\text{ième}}$ (L_3) n'a plus besoin de modification.
- $L_4 \longleftarrow -3\,L_2 + L_4$: $\qquad 0\,x_1 + 0\,x_2 - 6\,x_3 - 1\,x_4 = 8$

$$\text{Le système devient :}\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : élimination de x_3 dans l'équations 4 :

- $L_4 \longleftarrow 2\,L_3 + L_4$: $\qquad 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,x_4 = -2$

$$\text{Le système devient :}\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : élimination de x_2 dans les équations 3 et 4 :

- On permute les équations 2 et 3.
- La $3^{\text{ième}}$ (L_3) n'a plus besoin de modification.
- $L_4 \longleftarrow -3\,L_2 + L_4$: $\quad 0\,x_1 + 0\,x_2 - 6\,x_3 - 1\,x_4 = 8$

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Etape 3 : élimination de x_3 dans l'équations 4 :

- $L_4 \longleftarrow 2\,L_3 + L_4$: $\quad 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,x_4 = -2$

Le système devient : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

La résolution donne : $\boxed{x_4 = -2 \qquad x_3 = -1 \qquad x_2 = 4 \qquad x_1 = 3}$

Application 1 : approximation polynomiale

On dispose de données expérimentales : N couples de points $(x_i\ ,\ y_i)$.

On cherche à en déduire une loi approchée $y = f(x)$ de la forme

$$y = a_m\, x^m + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

Application 1 : approximation polynomiale

On dispose de données expérimentales : N couples de points $(x_i\,,\,y_i)$.

On cherche à en déduire une loi approchée $y = f(x)$ de la forme

$$y = a_m\,x^m + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

Idéalement, chaque couple $(x_i\,,\,y_i)$ vérifierait cette relation :

$$y_i = a_m\,x_i^m + \cdots + a_2\,x_i^2 + a_1\,x_i + a_0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N.$$

Application 1 : approximation polynomiale

On dispose de données expérimentales : N couples de points $(x_i\ ,\ y_i)$.

On cherche à en déduire une loi approchée $y = f(x)$ de la forme

$$y = a_m\, x^m + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

Idéalement, chaque couple $(x_i\ ,\ y_i)$ vérifierait cette relation :

$$y_i = a_m\, x_i^m + \cdots + a_2\, x_i^2 + a_1\, x_i + a_0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N.$$

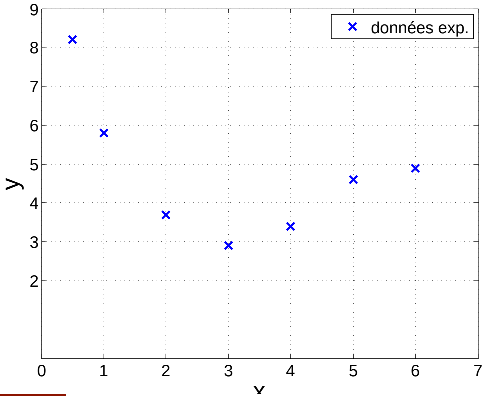
Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^m & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-2}^m & \ldots & x_{N-2}^2 & x_{N-2} & 1 \\ x_{N-1}^m & \ldots & x_{N-1}^2 & x_{N-1} & 1 \\ x_N^m & \ldots & x_N^2 & x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

★ Pb : quelles valeurs données aux coefficients a_i ?

Exemple : $N = 7$ couples de points $(x_i\ ,\ y_i)$ ont été mesurés.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.5	1	2	3	4	5	6
y_i	8.2	5.8	3.7	2.9	3.4	4.6	4.9



Exemple : $N = 7$ couples de points $(x_i\ ,\ y_i)$ ont été mesurés.

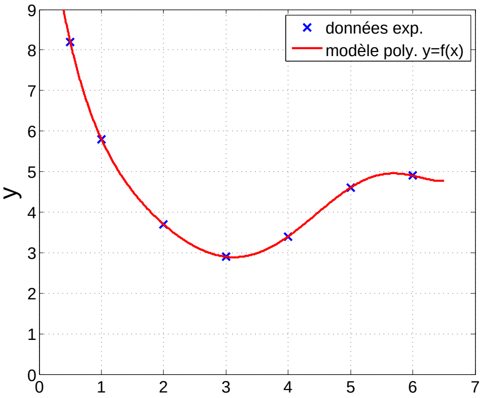
i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.5	1	2	3	4	5	6
y_i	8.2	5.8	3.7	2.9	3.4	4.6	4.9

On cherche à approcher la relation $y = f(x)$ par un polynôme d'ordre $m = 6$:

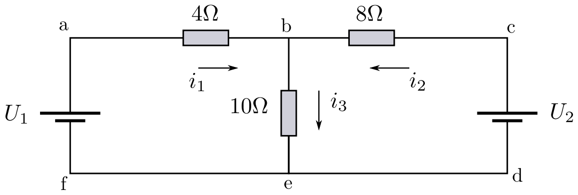
$$y = a_6\,x^6 + a_5\,x^5 + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

Résolution du système :

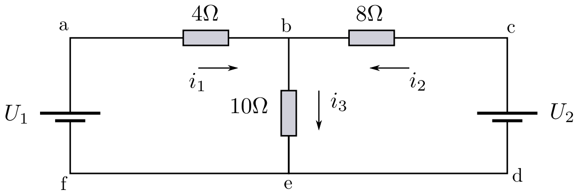
$$\begin{aligned}
a_0 &= 13.11\\
a_1 &= -13.79\\
a_2 &= 9.805\\
a_3 &= -4.233\\
a_4 &= 1.025\\
a_5 &= -0.123\\
a_6 &= 0.0057
\end{aligned}$$



Application 2 : analyse d'un réseaux électriques



Application 2 : analyse d'un réseaux électriques



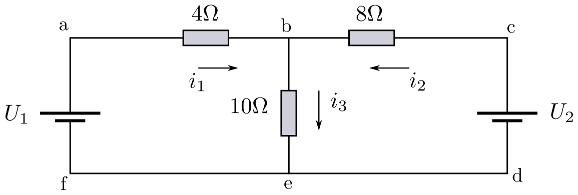
En prenant un sens arbitraire pour les courants et en appliquant la seconde loi de Kirchhoff aux boucles fermées *abef* et *acdf*, on a les équations :

$$4\ i_1 + 10\ i_3 = U_1 \qquad \text{et} \qquad 4\ i_1 - 8\ i_2 = U_1 - U_2$$

Puis, en appliquant la première loi au noeud b :

$$i_1 + i_2 = i_3$$

Application 2 : analyse d'un réseaux électriques



En prenant un sens arbitraire pour les courants et en appliquant la seconde loi de Kirchhoff aux boucles fermées *abef* et *acdf*, on a les équations :

$$4\ i_1 + 10\ i_3 = U_1 \qquad \text{et} \qquad 4\ i_1 - 8\ i_2 = U_1 - U_2$$

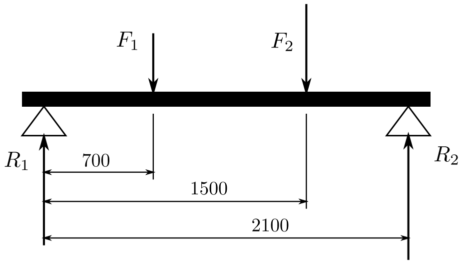
Puis, en appliquant la première loi au noeud b :

$$i_1 + i_2 = i_3$$

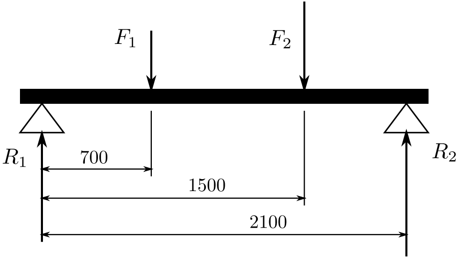
Nous pouvons reformuler ce problème sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 4 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_1 - U_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Application 3 : réactions sous une poutre soutenue



Application 3 : réactions sous une poutre soutenue



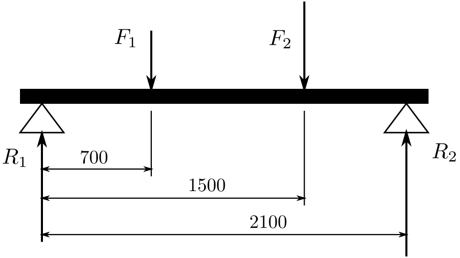
En appliquant le principe fondamental de la statique, nous avons :

$$R_1 + R_2 - F_1 - F_2 = 0$$

Puis, en exprimant la somme des moments au point d'application de la force F_1, nous avons :

$$-700\ R_1 + 1400\ R_2 - 800\ F_2 = 0$$

Application 3 : réactions sous une poutre soutenue



En appliquant le principe fondamental de la statique, nous avons :

$$R_1 + R_2 - F_1 - F_2 = 0$$

Puis, en exprimant la somme des moments au point d'application de la force F_1, nous avons :

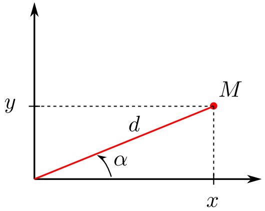
$$-700\ R_1 + 1400\ R_2 - 800\ F_2 = 0$$

Nous pouvons reformuler ce problème sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -700 & 1400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ 800F_2 \end{bmatrix}$$

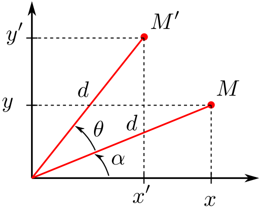
Application 4 : matrice de rotation

Effectuons une rotation d'angle θ sur le point M



Application 4 : matrice de rotation

Effectuons une rotation d'angle θ sur le point M



Les coordonnées des points M et M' s'écrivent :

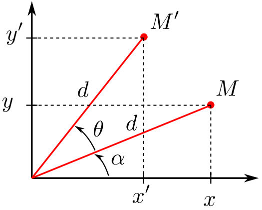
$$\left\{\begin{array}{l} x = d\cos\alpha \\ y = d\sin\alpha \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = d\cos(\theta+\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) \end{array}\right.$$

A l'aide de formules trigonométriques appropriées, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' = d\cos(\theta+\alpha) & = & d(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) & = & d(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{array}\right.$$

Application 4 : matrice de rotation

Effectuons une rotation d'angle θ sur le point M



Les coordonnées des points M et M' s'écrivent :

$$\begin{cases} x = d\cos\alpha \\ y = d\sin\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = d\cos(\theta+\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

A l'aide de formules trigonométriques appropriées, nous avons :

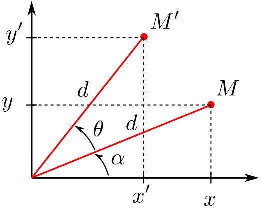
$$\begin{cases} x' = d\cos(\theta+\alpha) & = & d(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) & = & d(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{cases}$$

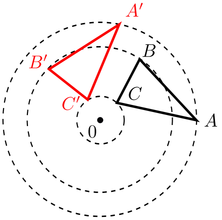
Nous en déduisons donc une formulation matricielle avec la *matrice de rotation* (cas 2D) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Application 4 : matrice de rotation

Effectuons une rotation d'angle θ sur le point M





Les coordonnées des points M et M' s'écrivent :

$$\begin{cases} x = d\cos\alpha \\ y = d\sin\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = d\cos(\theta+\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

A l'aide de formules trigonométriques appropriées, nous avons :

$$\begin{cases} x' = d\cos(\theta+\alpha) & = & d(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ y' = d\sin(\theta+\alpha) & = & d(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{cases}$$

Nous en déduisons donc une formulation matricielle avec la *matrice de rotation* (cas 2D) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

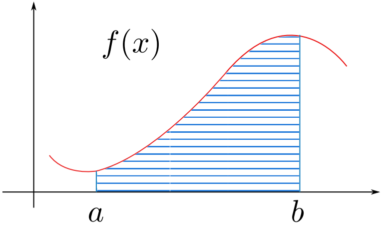
Sommaire

Position du problème

Objectif : évaluer numériquement la valeur d'une intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

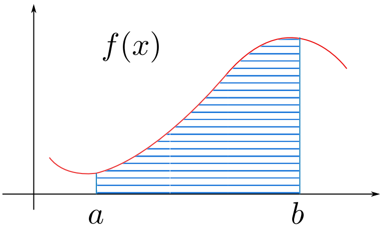


Position du problème

Objectif : évaluer numériquement la valeur d'une intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

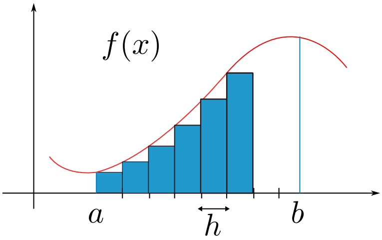


A partir d'un ordinateur, on ne peut manipuler qu'un nombre fini de points

$\Rightarrow$ considérons $(n+1)$ points de l'intervalle $[a, b]$: $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$

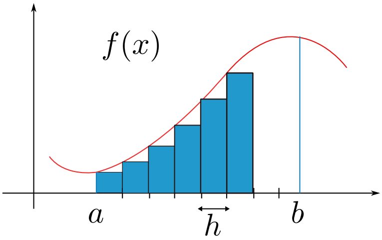
Méthode des rectangles

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de rectangles



Méthode des rectangles

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de rectangles



Le sommet haut gauche d'un rectangle coïncide avec la courbe.

A partir de $(n+1)$ points équidistants, on a n rectangles et $h = \dfrac{b-a}{n}$

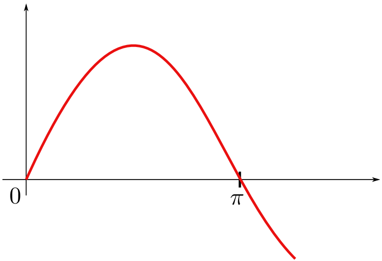
$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\,f(a) + h\,f(a+h) + h\,f(a+2h) + \cdots + h\,f(a+(n-1)h)$$

$$\simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile !) :

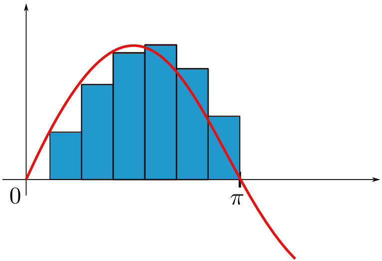
$$I = \int_0^\pi \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^\pi = 2$$



Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile !) :

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$$



Posons $n = 7$, soit 8 points, on a $h = \dfrac{\pi}{7}$

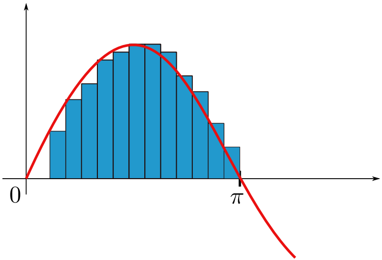
$$I \simeq \frac{\pi}{7} \times 0 + \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 2\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 3\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 4\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 5\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 6\frac{\pi}{7}$$

$$\simeq 1.9663$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile !) :

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$$

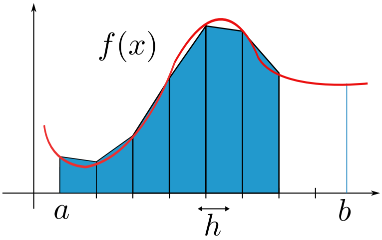


Posons $n = 13$, soit 14 points, on a $h = \dfrac{\pi}{13}$

$$I \simeq 1.9902$$

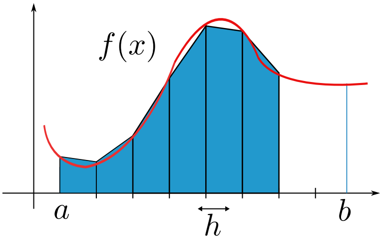
Méthode des trapèzes

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de trapèzes



Méthode des trapèzes

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de trapèzes



Les points successifs sont maintenant relié par une droite.

A partir de $(n+1)$ points équidistants, on a n trapèzes et $h = \dfrac{b-a}{n}$

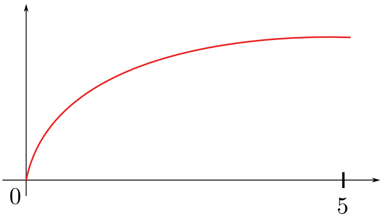
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h\, f(a+ih) + h\frac{f(a+(i+1)h) - f(a+ih)}{2}$$

$$\simeq h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2}$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile !) :

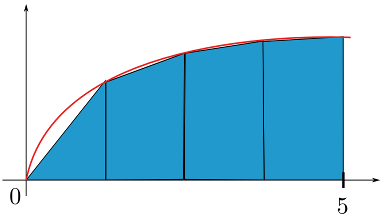
$$I = \int_0^5 1 - e^{-x}\,dx = \left[x + e^{-x}\right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$



Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile !) :

$$I = \int_0^5 1 - e^{-x}\, dx = \left[x + e^{-x}\right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$



Posons $n = 4$, soit 5 points, on a $h = \dfrac{5}{4}$

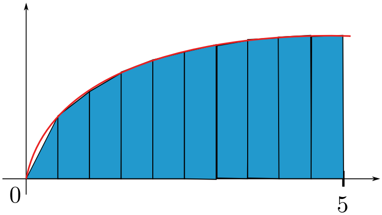
$$I \simeq \frac{h}{2}(f(0) + f(h)) + \frac{h}{2}(f(h) + f(2h)) + \frac{h}{2}(f(2h) + f(3h)) + \frac{h}{2}(f(3h) + f(4h))$$

$$\simeq 3.8806$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile !) :

$$I = \int_0^5 1 - e^{-x}\, dx = \left[x + e^{-x}\right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$

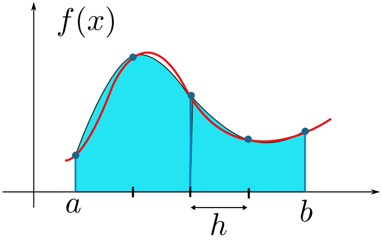


Posons $n = 10$, soit 11 points, on a $h = \dfrac{1}{2}$

$$I \simeq 3.9861$$

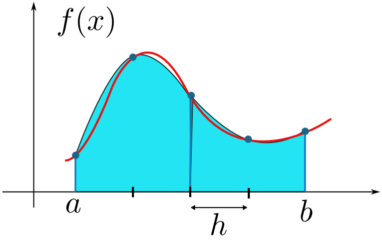
Méthode de Simpson

Principe : chaque intervalle est approximée par une parabole



Méthode de Simpson

Principe : chaque intervalle est approximée par une parabole



- On divise $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{2n}$

- Un polynôme de degré 2 est construit à partir de 3 points sur 2 sous-intervalles.

  Polynôme de Newton :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Sur chaque intervalle, nous utiliserons donc l'approximation :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x)dx$$

$$\simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Sur chaque intervalle, nous utiliserons donc l'approximation :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x)dx$$

$$\simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$s = \frac{x - x_i}{h} \qquad \text{soit} \qquad (x - x_i) = s\,h \quad \text{et} \quad dx = h\,ds$$

Ce qui entraîne

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x)dx = \int_{i}^{i+2} \Big[f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}]hs + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]h^2 s(s-1) \Big] \; h \; ds$$

En remplaçant les différences divisées par leur valeur respective :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$$

En remplaçant les différences divisées par leur valeur respective :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$$

Nous obtenons après intégration :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\Big)$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\Big(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\Big)$$

Nous avons approché le calcul de l'intégrale sur un seul intervalle $[x_i, x_{i+2}]$.

Il faut donc sommer la formule sur les n intervalles.

Nous avons approché le calcul de l'intégrale sur un seul intervalle $[x_i, x_{i+2}]$.

Il faut donc sommer la formule sur les n intervalles.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) + \frac{h}{3}\Big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big)$$

$$+ \frac{h}{3}\Big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\Big) + \cdots + \frac{h}{3}\Big(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big)$$

Nous avons approché le calcul de l'intégrale sur un seul intervalle $[x_i, x_{i+2}]$.

Il faut donc sommer la formule sur les n intervalles.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\Big)+\frac{h}{3}\Big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big)$$

$$+\frac{h}{3}\Big(f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\Big)+\cdots+\frac{h}{3}\Big(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\Big)$$

$$\simeq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{3}\Big(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\Big)$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul : $$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul : $$I = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2$$

Posons $n = 1$, soit 2 sous-intervalles de longueur $h = \dfrac{\pi}{2}$

$$I \simeq \frac{\pi}{6}\left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi\right)$$
$$\simeq 2.0944$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul : $$I = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2$$

Posons $n = 1$, soit 2 sous-intervalles de longueur $h = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{\pi}{6}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right) \\ &\simeq 2.0944 \end{aligned}$$

Posons $n = 2$, soit 4 sous-intervalles de longueur $h = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{\pi}{12}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi\right) \\ &\simeq 2.0046 \end{aligned}$$

Exemples

Application 1 : calcul approché de π

Signification géométrique de la constante π : surface du disque unité.

$$x^2 + y^2 = 1$$

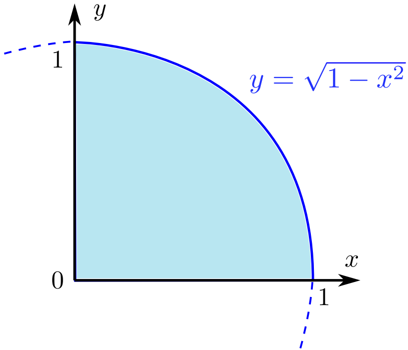
Exemples

Application 1 : calcul approché de π

Signification géométrique de la constante π : surface du disque unité.

$$x^2 + y^2 = 1$$

Sachant que l'aire du disque est égal à 4 fois celle du quart de disque, calculons l'intégrale du premier quadrant.



Aire du disque unité :

$$I = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Aire du disque unité :

$$I = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Méthode des trapèzes avec 5 points (donc $h = 0.25$)

$$\begin{aligned} I &= 0.5(1+\sqrt{1-0.25^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}) \\ &\quad +0.5(\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.75^2}) \\ &= 2.9957 \end{aligned}$$

Aire du disque unité :

$$I = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Méthode des trapèzes avec 5 points (donc $h = 0.25$)

$$\begin{aligned} I &= 0.5(1+\sqrt{1-0.25^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}) \\ &\qquad +0.5(\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.75^2}) \\ &= 2.9957 \end{aligned}$$

- avec 21 points, soit $h = 0.05$, on trouve : $I = 3.1284$,
- avec 101 points, soit $h = 0.01$, on trouve : $I = 3.1404$,
- avec 1001 points, soit $h = 0.001$, on trouve : $I = 3.141555$.

Exemple 2 : profil de vitesse d'un robot mobile

Considérons une base mobile en mouvement suivant une trajectoire rectiligne. Un accéléromètre mesure l'accélération $\gamma(t)$ du robot suivant cet axe.

t (s)	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
γ (m/s^2)	0	0.11	0.32	0.64	0.89	0.97	0.94	0.85

t (s)	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	
γ (m/s^2)	0.66	0.29	0.1	0.05	0.0	0.0	0.0	

Exemple 2 : profil de vitesse d'un robot mobile

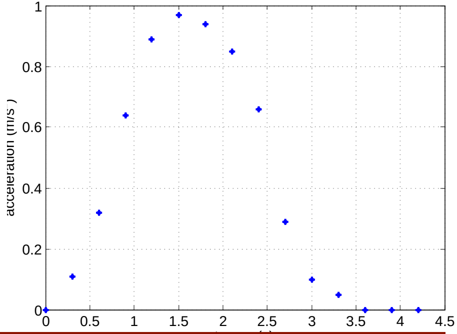
Considérons une base mobile en mouvement suivant une trajectoire rectiligne. Un accéléromètre mesure l'accélération $\gamma(t)$ du robot suivant cet axe.

$t\ (s)$	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
$\gamma\ (m/s^2)$	0	0.11	0.32	0.64	0.89	0.97	0.94	0.85
$t\ (s)$	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	
$\gamma\ (m/s^2)$	0.66	0.29	0.1	0.05	0.0	0.0	0.0	

On cherche à estimer la vitesse instantanée du robot :

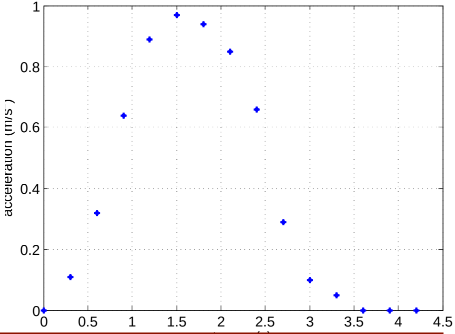
$$v(t) = \int_0^t \gamma(u)\, du$$

Il faut intégrer les valeurs de γ jusqu'à l'instant t_i pour calculer $v(t_i) = v_i$.


acceleration (m/s)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

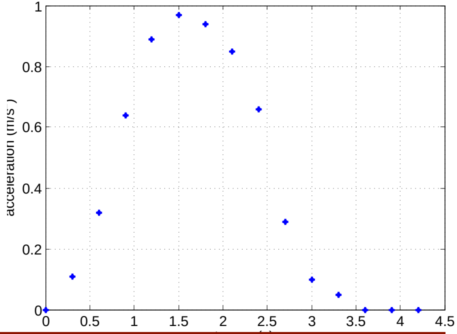
Appliquons la méthode des trapèzes

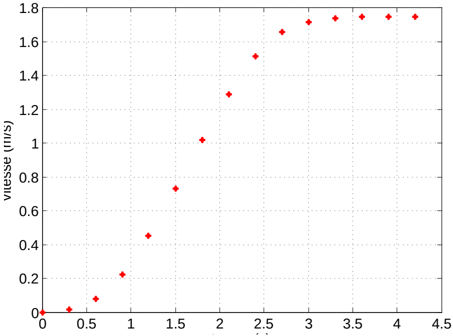
$$
\begin{aligned}
v(0.3) &= \frac{h}{2}(0+0.11) \\
v(0.6) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32) \\
v(0.9) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32)+\frac{h}{2}(0.32+0.64) \\
v(1.2) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32)+\frac{h}{2}(0.32+0.64)+\frac{h}{2}(0.64+0.89) \\
V(1.5) &= \dots
\end{aligned}
$$



Appliquons la méthode des trapèzes

$$
\begin{aligned}
v(0.3) &= \frac{h}{2}(0+0.11)\\
v(0.6) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32)\\
v(0.9) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32)+\frac{h}{2}(0.32+0.64)\\
v(1.2) &= \frac{h}{2}(0+0.11)+\frac{h}{2}(0.11+0.32)+\frac{h}{2}(0.32+0.64)+\frac{h}{2}(0.64+0.89)\\
V(1.5) &= \dots
\end{aligned}
$$





Sommaire

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} y' & = & f(t, y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation ci-dessus.

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation ci-dessus.

- $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale.
- Notre équation dépend de la variable t le temps, mais ce n'est pas toujours le cas.
- Avec les outils numériques, il n'est pas possible d'obtenir toutes les valeurs de $y(t)$ quelque soit t. On obtient en fait une approximation de la solution seulement en certaines valeurs de t, notées t_i.

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t,y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation ci-dessus.

- $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale.
- Notre équation dépend de la variable t le temps, mais ce n'est pas toujours le cas.
- Avec les outils numériques, il n'est pas possible d'obtenir toutes les valeurs de $y(t)$ quelque soit t. On obtient en fait une approximation de la solution seulement en certaines valeurs de t, notées t_i.

Notation :

- On note $y(t_i)$ la solution analytique de l'équation en $t = t_i$.
- On note y_i la solution approchée au même instant.

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -4y+3 \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -4y+3 \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

Solution de l'équation sans second membre :

$$y(t) = C\,e^{-4t}$$

Solution particulière :

$$y(t) = \frac{3}{4}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$y(t) = C\,e^{-4t} + \frac{3}{4}$$

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -4y+3 \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

Solution de l'équation sans second membre :

$$y(t) = C\, e^{-4t}$$

Solution particulière :

$$y(t) = \frac{3}{4}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$y(t) = C\, e^{-4t} + \frac{3}{4}$$

A partir de la condition initiale (en $t = 0$, $y(0) = 2$), nous pouvons déterminer la solution

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{4}\, e^{-4t} + \frac{3}{4}}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} y' & = \; t\,y \\ y(1) & = \; 2 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & t\,y \\ y(1) & = & 2 \end{array} \right.$$

Effectuons une séparation des variables

$$\frac{dy}{dt} = t\,y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = t\,dt$$

Intégrons l'égalité

$$\ln y = \frac{t^2}{2} + C$$

Nous obtenons donc la solution générale

$$y(t) = C\,e^{t^2/2}$$

Exemple 2 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & t\,y \\ y(1) & = & 2 \end{array}\right.$$

Effectuons une séparation des variables

$$\frac{dy}{dt} = t\,y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = t\,dt$$

Intégrons l'égalité

$$\ln y = \frac{t^2}{2} + C$$

Nous obtenons donc la solution générale

$$y(t) = C\,e^{t^2/2}$$

A partir de la condition initiale (en $t = 1$, $y(1) = 2$), nous pouvons déterminer la solution

$$\boxed{y(t) = 2\,e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}}$$

Méthode d'Euler

Nous connaissons le point de départ : $\Big(t_0, y(t_0)\Big)$

$\Rightarrow$ Comment déterminer les points suivants ?

$\Rightarrow$ tout d'abord en t_1, approximation de $y(t_1)$?

Méthode d'Euler

Nous connaissons le point de départ : $\Big(t_0, y(t_0)\Big)$

- $\Rightarrow$ Comment déterminer les points suivants ?
- $\Rightarrow$ tout d'abord en t_1, approximation de $y(t_1)$?

Nous connaissons la pente en t_0

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$

Méthode d'Euler

Nous connaissons le point de départ : $\Big(t_0, y(t_0)\Big)$

$\Rightarrow$ Comment déterminer les points suivants ?

$\Rightarrow$ tout d'abord en t_1, approximation de $y(t_1)$?

Nous connaissons la pente en t_0

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$

Le point suivant peut donc être approché en suivant la droite passant par (t_0, y_0) et de pente $f(t_0, y_0)$

$$y(t_1) \simeq y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = y_1$$

Méthode d'Euler

Nous connaissons le point de départ : $\Big(t_0, y(t_0)\Big)$

⇒ Comment déterminer les points suivants ?

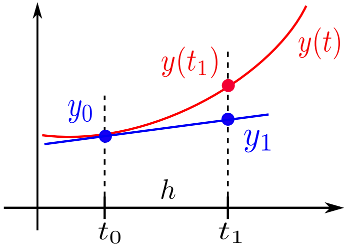
⇒ tout d'abord en t_1, approximation de $y(t_1)$?

Nous connaissons la pente en t_0

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$

Le point suivant peut donc être approché en suivant la droite passant par (t_0, y_0) et de pente $f(t_0, y_0)$

$$y(t_1) \simeq y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = y_1$$



Nous connaissons maintenant le point : $\left(t_1, y_1\right)$ ... approximant $\left(t_1, y(t_1)\right)$

$\Rightarrow$ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Nous connaissons maintenant le point : $\Big(t_1, y_1\Big)$ ... approximant $\Big(t_1, y(t_1)\Big)$

$\Rightarrow$ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Ainsi, à la $2^{\text{ième}}$ itération :

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) = y_1 + h\, f(t_1, y_1) \simeq y(t_2)$$

Nous connaissons maintenant le point : $\big(t_1, y_1\big)$ ... approximant $\big(t_1, y(t_1)\big)$

$\Rightarrow$ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Ainsi, à la 2$^{\text{ième}}$ itération :

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) = y_1 + h\, f(t_1, y_1) \simeq y(t_2)$$

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \qquad \text{avec} \qquad t_{n+1} = t_n + h$$

Nous connaissons maintenant le point : $\left(t_1, y_1\right)$ ... approximant $\left(t_1, y(t_1)\right)$

$\Rightarrow$ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

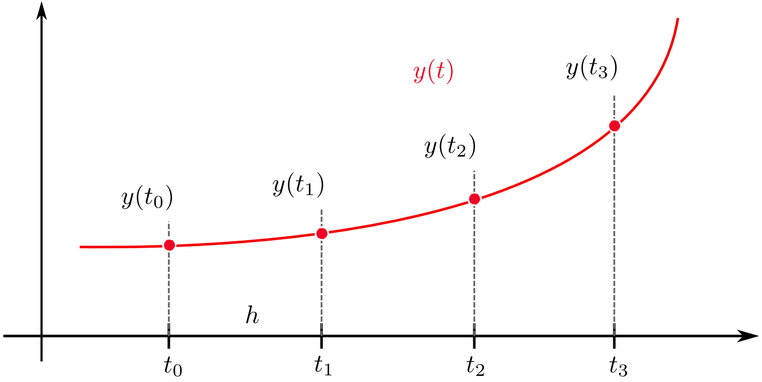
Ainsi, à la $2^{\text{ième}}$ itération :

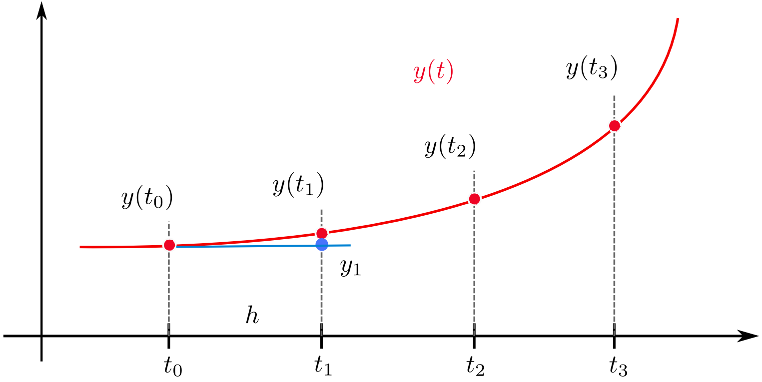
$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) = y_1 + h\, f(t_1, y_1) \simeq y(t_2)$$

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

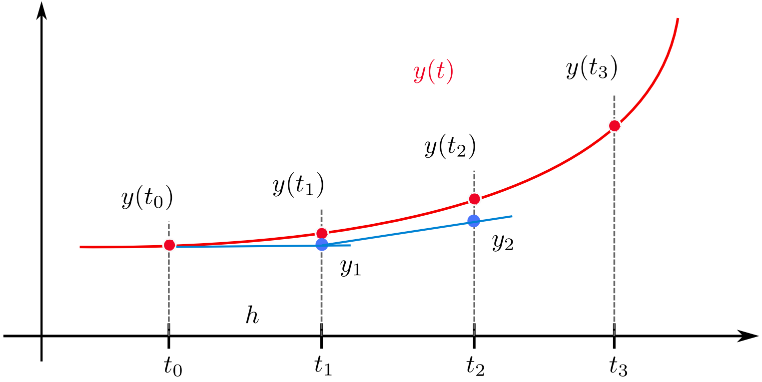
$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \qquad \text{avec} \qquad t_{n+1} = t_n + h$$

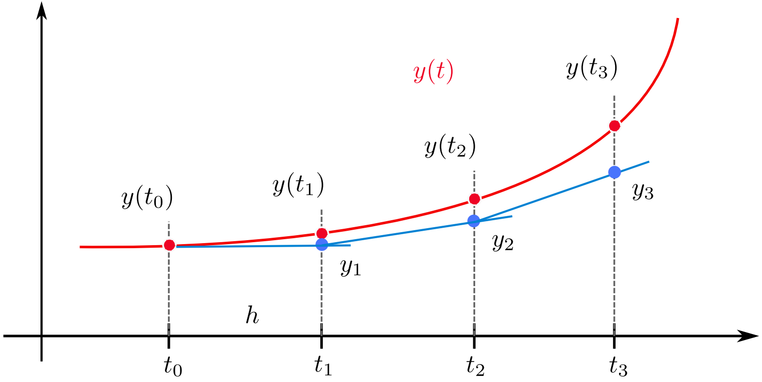
⧫ Il est important de noter que l'erreur introduite sur le premier calcul a des répercussions sur les suivants. Il y a propagation de l'erreur.


$y(t)$
$y(t_3)$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0)$
h
t_0
t_1
t_2
t_3



$y(t)$
$y(t_3)$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0)$
y_1
h
t_0
t_1
t_2
t_3


$y(t)$
$y(t_3)$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0)$
y_1
y_2
h
t_0
t_1
t_2
t_3


$y(t)$
$y(t_3)$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0)$
y_3
y_2
y_1
h
t_0
t_1
t_2
t_3

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y + t + 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y+t+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & -y+t+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $\quad y(t) = e^{-t} + t$

Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 \\ y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1f(0.1, 1) = 1.01 \\ y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.01 + 0.1f(0.2, 1.01) = 1.029 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y + t + 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

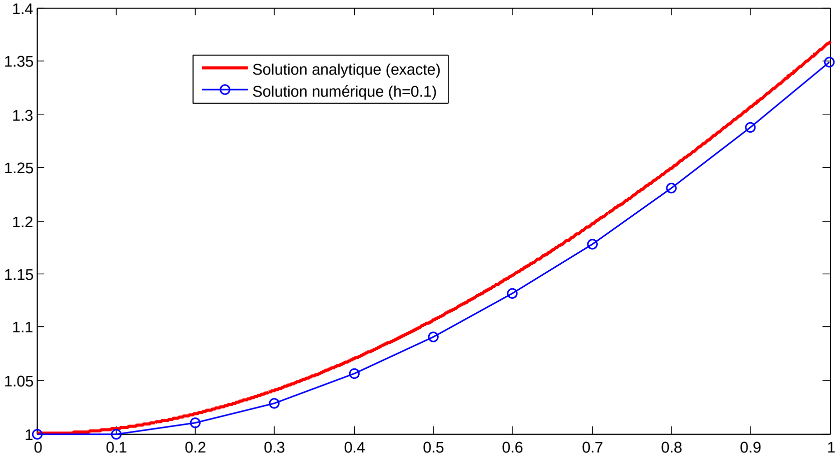
On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

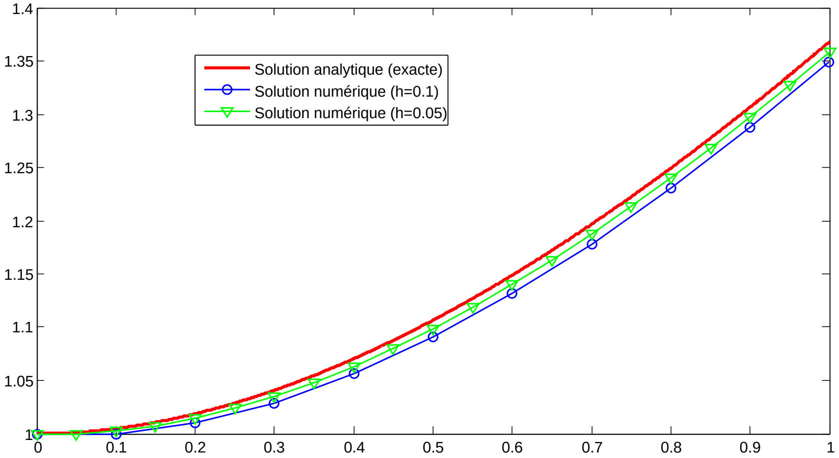
Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 \\ y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1f(0.1, 1) = 1.01 \\ y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.01 + 0.1f(0.2, 1.01) = 1.029 \\ &\dots \end{aligned}$$

t_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y(t_i)$	1.000	1.004	1.018	1.040	1.070	1.106	1.148	1.196	1.249	1.306	1.3
y_i	1.000	1.000	1.010	1.029	1.056	1.090	1.131	1.178	1.230	1.287	1.3
e	0.00	0.48	0.87	1.18	1.42	1.60	1.73	1.82	1.88	1.91	1.

La dernière ligne e correspond à l'erreur : $|y(t_i) - y_i|$ avec un coefficient de 10^{-2}.


1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Solution analytique (exacte)
Solution numérique (h=0.1)



Solution analytique (exacte)
Solution numérique (h=0.1)
Solution numérique (h=0.05)
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)\,h + y''(t_n)\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)\,h + y''(t_n)\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))\,h + f'(t_n, y(t_n))\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)\, h + y''(t_n)\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))\, h + f'(t_n, y(t_n))\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Exprimons $y''(t)$:

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)\,h + y''(t_n)\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))\,h + f'(t_n, y(t_n))\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Exprimons $y''(t)$:

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Finalement, en négligeant les termes d'ordre supérieure ou égale à 3, nous avons :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h\,f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n))\right]$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)\,h + y''(t_n)\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))\,h + f'(t_n, y(t_n))\,\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Exprimons $y''(t)$:

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Finalement, en négligeant les termes d'ordre supérieure ou égale à 3, nous avons :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h\,f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n))\right]$$

♦ Nota : Nous nous limitons ici à la méthode de Taylor d'ordre 2.

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n, $n = \{1, 2, 3, \dots\}$,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n, $n = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right]$$

avec $\quad t_{n+1} = t_n + h.$

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n, $n = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right]$$

avec $\qquad t_{n+1} = t_n + h.$

♦ Nota : Si l'on ne tient pas compte du dernier terme (lié à la dérivée seconde de y), nous retrouvons la formule d'Euler.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y + t + 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' & = -y + t + 1 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

On a

$$f(t, y(t)) = -y + t + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y+t+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

On a

$$f(t,y(t)) = -y+t+1, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

La formule de l'algorithme devient :

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}(1 - (-y_n + t_n + 1))$$

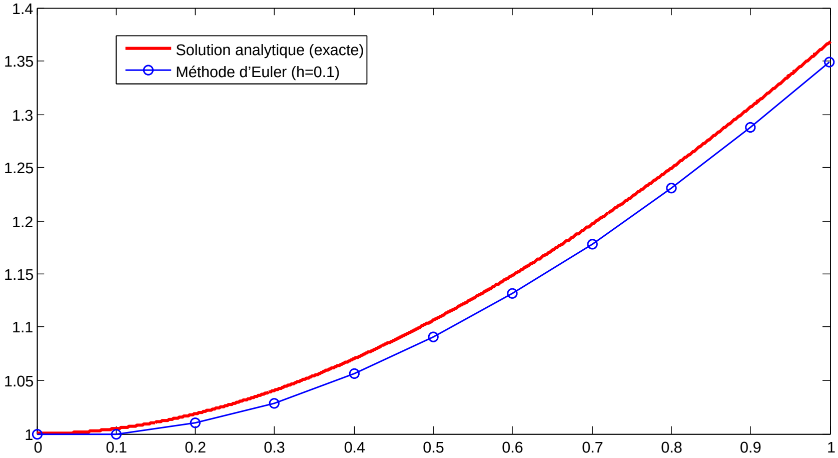
Prenons un pas de temps de $h = 0.1$.

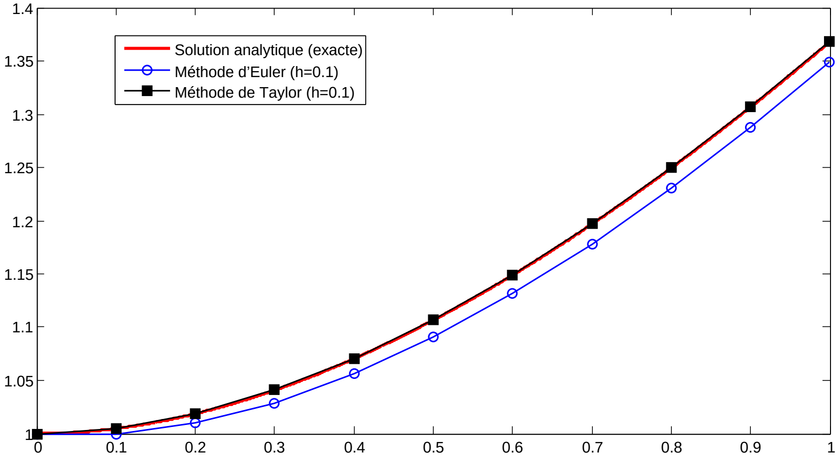
Résolvons sur 10 itérations l'équation différentielle :

Prenons un pas de temps de $h = 0.1$.

Résolvons sur 10 itérations l'équation différentielle :

t_i	$y(t_i)$	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544
0.6	1.148811	1.149403	0.000592
0.7	1.196585	1.197210	0.000625
0.8	1.249328	1.249975	0.000646
0.9	1.306569	1.307227	0.000658
1.0	1.367879	1.368540	0.000662


Solution analytique (exacte)
Méthode d'Euler (h=0.1)
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Solution analytique (exacte)
Méthode d'Euler (h=0.1)
Méthode de Taylor (h=0.1)

Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f.

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f.

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Nous avons :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+h\,f(t_n, y(t_n))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}f(t_n, y(t_n))\right]+\mathcal{O}(h^3).$$

Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f.

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Nous avons :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+h\,f(t_n,y(t_n))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n,y(t_n))}{\partial t}+\frac{\partial f(t_n,y(t_n))}{\partial y}f(t_n,y(t_n))\right]+\mathcal{O}(h^3).$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 cherche une approximation de la solution en t_{n+1} de la forme :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + a_1 h\,f(t_n,y(t_n)) + a_2 h\,f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h).$$

★ Il s'agit de déterminer les paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que l'erreur commise soit du même ordre que la méthode de Taylor d'ordre 2.

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n+a_3h, y(t_n)+a_4h) = f(t_n, y(t_n))+a_3h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_4h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^2)$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n+a_3h, y(t_n)+a_4h) = f(t_n, y(t_n))+a_3h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_4h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+(a_1+a_2)h\,f(t_n, y(t_n))+a_2a_3h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_2a_4h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^3$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n+a_3h, y(t_n)+a_4h) = f(t_n, y(t_n))+a_3h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_4h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+(a_1+a_2)h\,f(t_n, y(t_n))+a_2a_3h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_2a_4h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^3)$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+h\,f(t_n, y(t_n))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}f(t_n, y(t_n))\right]+\mathcal{O}(h^3).$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n+a_3h, y(t_n)+a_4h) = f(t_n, y(t_n))+a_3h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_4h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+(a_1+a_2)h\, f(t_n, y(t_n))+a_2a_3h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_2a_4h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^3$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+h\, f(t_n, y(t_n))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}f(t_n, y(t_n))\right]+\mathcal{O}(h^3).$$

Nous pouvons constater que cette formulation est du même ordre que celle de Taylor.

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n+a_3h, y(t_n)+a_4h) = f(t_n, y(t_n))+a_3h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_4h\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+(a_1+a_2)h\, f(t_n, y(t_n))+a_2a_3h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+a_2a_4h^2\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}+\mathcal{O}(h$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+h\, f(t_n, y(t_n))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}+\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}f(t_n, y(t_n))\right]+\mathcal{O}(h^3).$$

Nous pouvons constater que cette formulation est du même ordre que celle de Taylor.

$\Rightarrow$ Déterminons par identification les paramètres a_i.

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2\, a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2\, a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2\, a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2\, a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{array}\right.$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2\, a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2\, a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{array} \right.$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.
En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2\, a_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2\, a_4 &= \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.
En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_4 = f(t_n, y(t_n)).$$

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2\, a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2\, a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{array}\right.$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.
En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_4 = f(t_n, y(t_n)).$$

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{y} & = & y_n + h\, f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \bar{y})\Big) \\ t_{n+1} & = & t_n + h \end{array}\right.$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' & = & -y + t + 1 \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y+t+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -y + t + 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544

♦ On retrouve les mêmes résultats que la méthode de Taylor d'ordre 2. Toutefois, cette parfaite similitude est exceptionnelle, cette EDO est un cas particulier.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1 & = & h\,f(t_n, y_n) \\ k_2 & = & h\,f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 & = & h\,f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 & = & h\,f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} & = & t_n + h \end{array}\right.$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1 & = & h\, f(t_n, y_n) \\ k_2 & = & h\, f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 & = & h\, f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 & = & h\, f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} & = & t_n + h \end{array}\right.$$

♦ Cette méthode est très utilisée en raison de sa grande précision.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' & = -y + t + 1 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y+t+1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$\|y(t_i) - y_i\|$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.004837	0.081×10^{-6}
0.2	1.018730	1.018730	0.148×10^{-6}
0.3	1.040818	1.040818	0.201×10^{-6}
0.4	1.070320	1.070320	0.242×10^{-6}
0.5	1.106530	1.106530	0.274×10^{-6}
0.6	1.148811	1.148811	0.298×10^{-6}
0.7	1.196585	1.196585	0.314×10^{-6}
0.8	1.249328	1.249329	0.325×10^{-6}
0.9	1.306569	1.306569	0.331×10^{-6}
1.0	1.367879	1.367879	0.333×10^{-6}

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, on peut calculer facilement la solution analytique :

sol. générale $\rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{t+C}$ et sol. passant par la CI $\rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{t+1}$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, on peut calculer facilement la solution analytique :

sol. générale $\rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{t+C}$ et sol. passant par la CI $\rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{t+1}$

Résolvons numériquement cette EDO sur l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant un pas de 0.2.

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

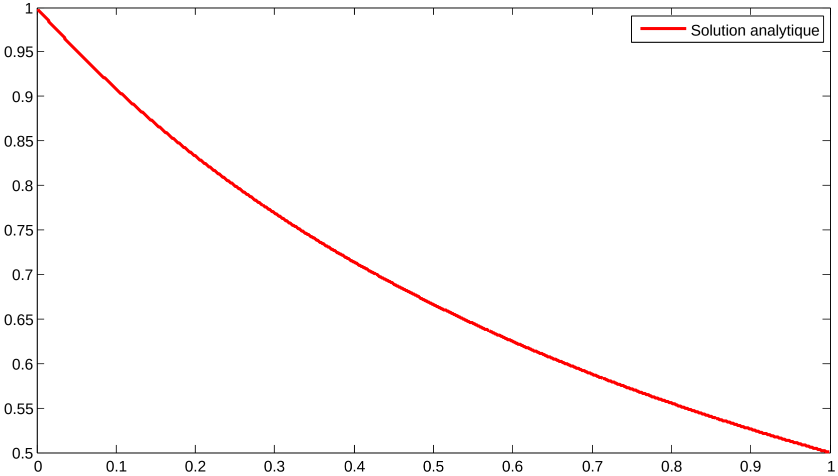
$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

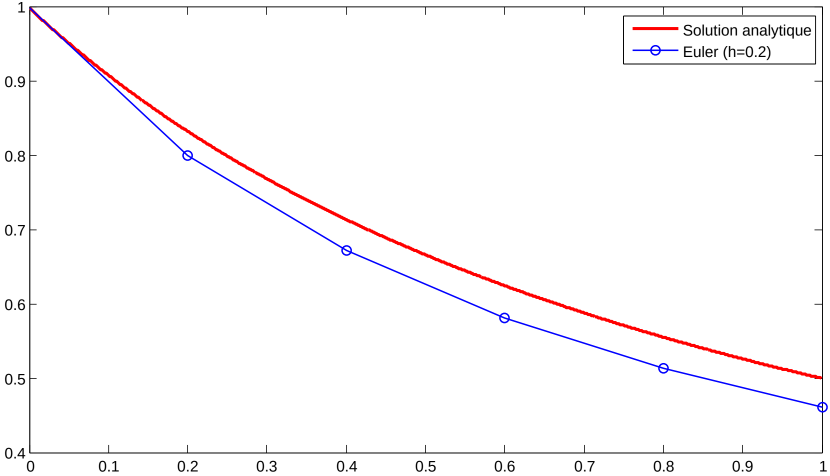
Dans cet exemple, on peut calculer facilement la solution analytique :

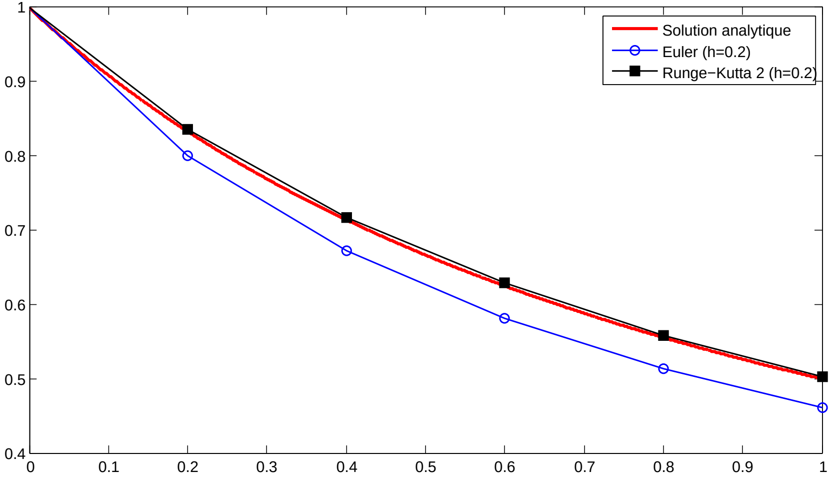
sol. générale $\rightarrow$ $y(t) = \dfrac{1}{t+C}$ et sol. passant par la CI $\rightarrow$ $y(t) = \dfrac{1}{t+1}$

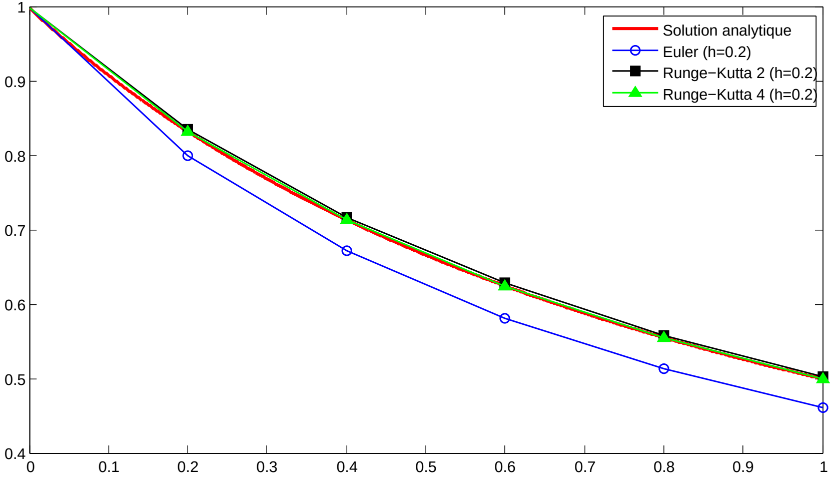
Résolvons numériquement cette EDO sur l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant un pas de 0.2.

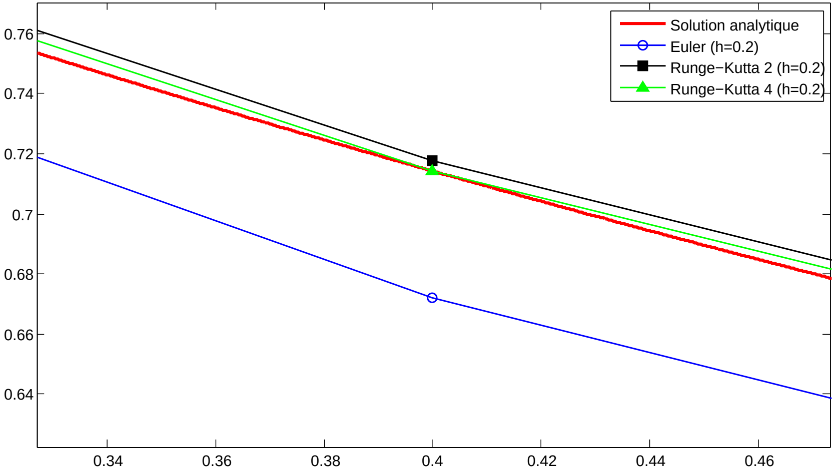
t_i	$y(t_i)$	y_i (Euler)	y_i (R-K 2)	y_i (R-K 4)
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.833333	0.800000	0.836000	0.833339
0.4	0.714285	0.672000	0.717638	0.714292
0.6	0.625000	0.581683	0.628359	0.625005
0.8	0.555555	0.514012	0.558692	0.555560


Solution analytique
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Solution analytique
Euler (h=0.2)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Solution analytique
Euler (h=0.2)
Runge−Kutta 2 (h=0.2)

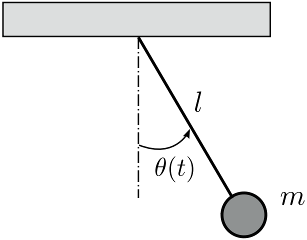

Solution analytique
Euler (h=0.2)
Runge−Kutta 2 (h=0.2)
Runge−Kutta 4 (h=0.2)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Solution analytique
Euler (h=0.2)
Runge−Kutta 2 (h=0.2)
Runge−Kutta 4 (h=0.2)
0.76
0.74
0.72
0.7
0.68
0.66
0.64
0.34
0.36
0.38
0.4
0.42
0.44
0.46

Exemples

Exemple 2 :

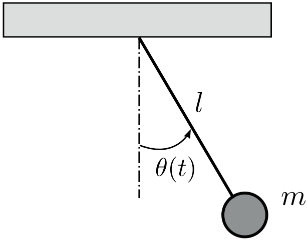
Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à une corde de longueur l.



Exemples

Exemple 2 :

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à une corde de longueur l.



L'évolution de l'angle $\theta(t)$ est décrite par l'équation différentielle suivante. A $t = 0$, on suppose que la masse est à l'arrêt et forme un angle $\theta_0 = 30°$ avec la verticale.

$$\begin{cases} ml\,\theta''(t) = -mg\sin\theta(t) - c_f l\,\theta'(t) \\ \theta(0) = \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $\qquad x_1(t) = \theta(t) \quad$ et $\quad x_2(t) = \theta'(t).$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ml\,x_2' & = & -mg\sin x_1 - c_f\,l\,x_2 \\ x_1' & = & x_2 \\ \theta(0) & = & \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ml\,x_2' & = & -mg\sin x_1 - c_f\,l\,x_2 \\ x_1' & = & x_2 \\ \theta(0) & = & \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2' & = & -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{c_f}{m}x_2 \\ x_1' & = & x_2 \\ x_1(0) & = & \frac{\pi}{6} \\ x_2(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $\quad x_1(t) = \theta(t) \quad$ et $\quad x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ml\,x_2' & = & -mg\sin x_1 - c_f\,l\,x_2 \\ x_1' & = & x_2 \\ \theta(0) & = & \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2' & = & -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{c_f}{m}x_2 \\ x_1' & = & x_2 \\ x_1(0) & = & \frac{\pi}{6} \\ x_2(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

En définissant $y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, on retrouve la forme étudiée précédemment

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = f(t,y) \\ y(0) & = & \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

où f est une fonction vectorielle de la forme

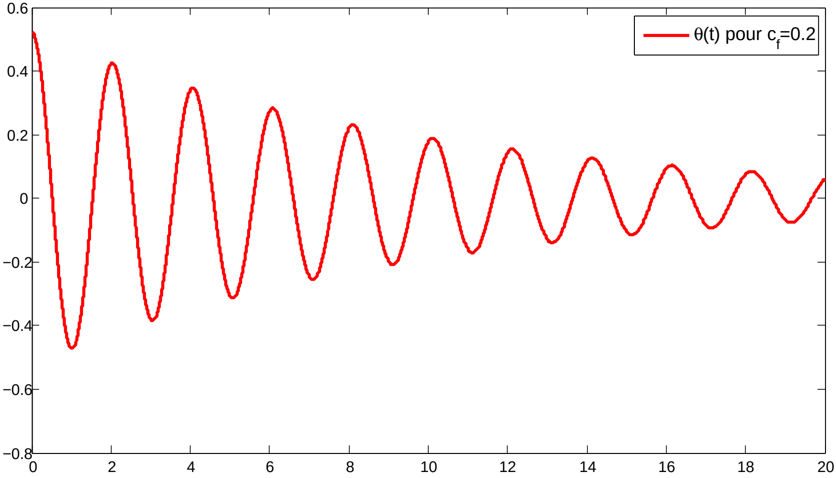
$$f(t,y) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{c_f}{m}x_2 \end{bmatrix}$$

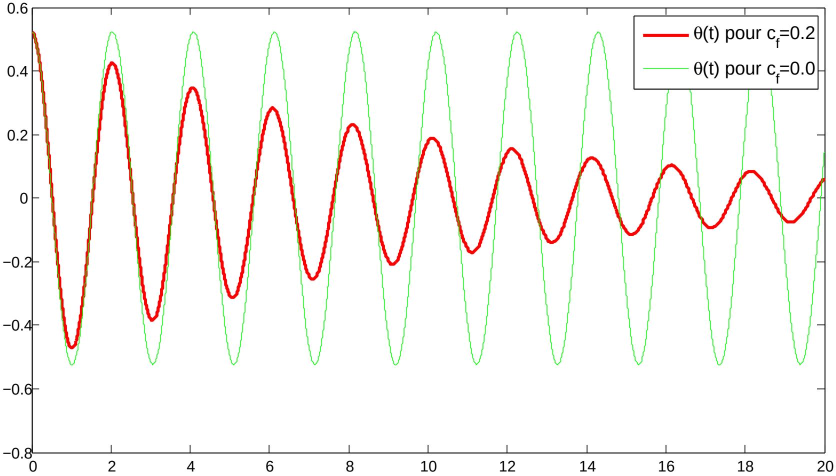
Résolvons numériquement l'équation dans le cas d'un pendule de masse et de longueur unitaire, et analysons l'impact du coefficient de frottement c_f.
Appliquons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin d'estimer la solution $\theta(t)$ sur l'horizon temporel : $0 - 20\,s$.

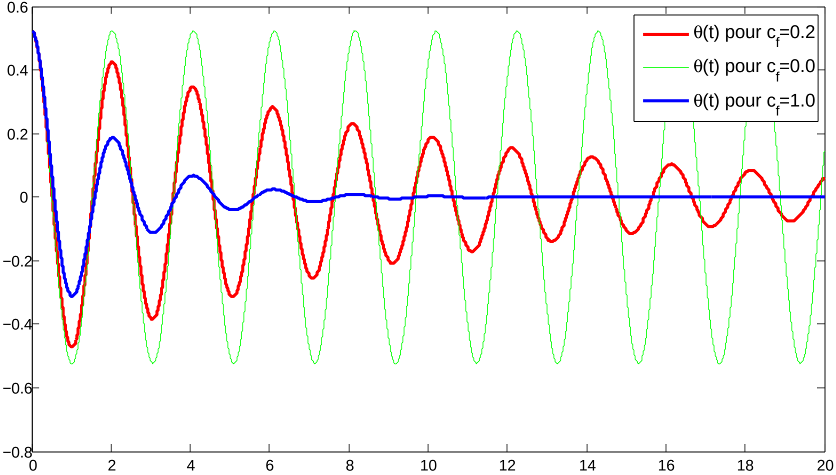
Résolvons numériquement l'équation dans le cas d'un pendule de masse et de longueur unitaire, et analysons l'impact du coefficient de frottement c_f.
Appliquons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin d'estimer la solution $\theta(t)$ sur l'horizon temporel : $0 - 20\,s$.

Prenons un pas de temps $h = 0.001$, la condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations $N = 20000$, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{lcl} k_{1,1} & = & h\,x_{2_n} \\ k_{2,1} & = & h\left(-g\sin x_{1_n} - c_f x_{2_n}\right) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} k_{1,2} & = & h\,x_{2_n} + h\frac{k_{2,1}}{2} \\ k_{2,2} & = & h\left(-g\sin(x_{1_n} + \frac{k_{1,1}}{2}) - c_f(x_{2_n} + \frac{k_{2,1}}{2})\right) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} k_{1,3} & = & h\,x_{2_n} + h\frac{k_{2,1}}{2} \\ k_{2,3} & = & h\left(-g\sin(x_{1_n} + \frac{k_{1,2}}{2}) - c_f(x_{2_n} + \frac{k_{2,2}}{2})\right) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} k_{1,4} & = & h\,x_{2_n} + hk_{2,3} \\ k_{2,4} & = & h\left(-g\sin(x_{1_n} + k_{1,3}) - c_f(x_{2_n} + k_{2,3})\right) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl} x_{1_{n+1}} & = & x_{1_n} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \\ y_{2_{n+1}} & = & x_{2_n} + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \end{array}\right. \\
t_{n+1} = t_n + h
\end{array}
\right.
$$


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
θ(t) pour c_f=0.2


θ(t) pour c_f=0.2
θ(t) pour c_f=0.0
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20



θ(t) pour c_f=0.2
θ(t) pour c_f=0.0
θ(t) pour c_f=1.0
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20