

# Techniques de preuve formelle en science : le défi.

Victor Magron<sup>1</sup>

Bonjour, je suis Victor Magron. J'ai fini ma thèse de doctorat il y a un an et depuis, je suis chercheur Postdoc en mathématiques et en informatique. Un de mes thèmes de recherche est la preuve formelle. Je vais donc vous parler de l'application de ces techniques de preuve en science, en particulier en mathématiques. Je vais commencer à faire le rapprochement avec les technosciences pour ensuite discuter de problématiques liées à ce domaine de recherche qu'est la preuve formelle.

Dans Wikipédia, on lit : "la notion de technoscience vise à combler le fossé entre sciences et techniques, compte tenu de la nécessité de penser les découvertes scientifiques et les inventions techniques dans un même contexte social afin de rendre compte de leurs interactions fortes."

Il y a deux parties de la phrase très intéressantes : au début, elle fait mention d'un fossé, et à la fin d'interactions, d'interactions fortes. J'évoquerai un peu plus tard ces deux notions par rapport à mon sujet.

Je reviens à moi. Je fais des preuves de mathématiques en utilisant mon ordinateur. En résumé, je montre des formules, des théorèmes en exécutant des programmes. On donne une logique de base à l'ordinateur, un ensemble d'axiomes, par exemple si  $a = b$  et  $b = c$  alors  $a = c$ . On construit au dessus de ces axiomes des preuves plus compliquées et c'est l'ordinateur tout seul qui vérifie que tout est cohérent à la fin. En quoi est-ce utile de faire des preuves avec un ordinateur, est-ce bien nécessaire ?

Imaginez un exercice de mathématiques où vous devez montrer une égalité entre deux fractions ou un exercice de géométrie où vous devez calculer un angle dans un triangle ou la longueur d'un de ses côtés. C'est plus ou moins facile : vous travaillez sur le problème ou si vous n'aimez pas les maths, vous demandez à quelqu'un qui est plus fort que vous en mathématiques de le résoudre. Maintenant, imaginez que vous devez résoudre des milliers d'exercices de géométrie ou de calcul. Que faites vous? Là vous avez besoin soit de travailler pendant des années tout seul ou de demander à des centaines d'amis de vous aider à faire ces exercices.

---

<sup>1</sup>Circuits and Systems Group, Department of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College London

Notez que résoudre tous ces petits problèmes n'est pas forcément intéressant mais cela peut permettre de résoudre un gros problème qui lui est très intéressant pour la communauté mathématique ou pour des applications dans d'autres domaines: en physique, en biologie, etc.

Et bien justement, au cours du vingtième siècle, plusieurs gros problèmes très intéressants nécessitent de résoudre des milliers de petits sous problèmes. Deux exemples de telles preuves : les 4 couleurs et la conjecture de Kepler. Le théorème des 4 couleurs est le suivant : si on vous donne une carte (de géographie par exemple) et que vous voulez colorier les pays de la carte sans utiliser la même couleur pour des pays limitrophes (avec une frontière commune), de combien de crayons de couleur avez vous besoin? La réponse c'est 4, cela a été démontré en 1977 par deux mathématiciens : Appel et Haken. La preuve est très compliquée du point de vue mathématique et en plus elle nécessite des calculs qui sont impossible à faire à la main. Pour cette raison, deux informaticiens ont résolu le problème en utilisant les preuves formelles (par ordinateur donc) en 2008.

Autre théorème très intéressant: le théorème de Kepler. Cela dit que la meilleure manière d'empiler des oranges est la manière intuitive. Quand vous allez au marché et que vous voyez les étalages d'oranges ou de pommes sur les comptoirs, vous avez sûrement remarqué que souvent, ils sont obtenus en formant des pyramides avec 3 oranges et une au dessus. La conjecture de Kepler dit que si on dispose d'un espace carré pour entasser de tels objets sphériques, on en casera le plus possible de cette manière. C'était une conjecture majeure en géométrie, une de celles qui a mis le plus de temps à être démontrée. Une vérité que tout le monde suppose depuis l'antiquité. Kepler l'a formulé en 1610, c'est donc vieux de 400 ans. Cette conjecture est utilisée pour d'autres théorèmes en mathématiques mais aussi en astronomie, en physique et en chimie. En 1998, un mathématicien a soumis une preuve de plusieurs centaines de pages à un des plus grand journaux de mathématiques (Annales des Mathématiques). La preuve comporte des mathématiques classiques et aussi des aspects calculatoires, résolubles par des programmes informatiques. C'était quasiment impossible pour les mathématiciens chargés de relire la preuve d'être sur à 100% qu'elle ne comportait aucune erreur. Pour cette raison, Hales a mis en place un projet de formalisation de la preuve. C'est lui-même qui a d'abord démontré la conjecture de Kepler en 1998 puis qui a mené à terme la vérification formelle de sa preuve, le 10 août dernier.

Une autre motivation qui apparaît dans de tels contextes, c'est de permettre l'élimination de toute erreur quand on rédige une preuve en mathématiques. Tout le monde fait des erreurs, même les plus grands. Il y a des ouvrages qui recensent les erreurs faites par des mathématiciens comme Fermat ou Euler. Si vous deviez faire des milliers d'exercices de géométrie ou de calcul, vous ou les gens qui reliraient vos copies seraient susceptibles de se tromper aussi.

Un autre mathématicien s'est intéressé à la preuve formelle tout récemment, Vladimir Voevodsky. Voevodsky a eu la médaille Fields en 2002 après avoir travaillé sur des problèmes de mathématiques pures puis il a décidé d'étendre ses recherches au monde de la preuve formelle à partir de 2009. C'est entre autre

cette problématique de l'erreur qui l'a particulièrement incité à cette nouvelle orientation.

Vœvodsky a récemment donné une interview où il dit, je cite : "Le problème de l'erreur est comme une maladie. Quand on n'a pas de remède à une maladie, on préfère ne pas mentionner cette maladie. Et puis il suffit qu'on trouve un remède pour que tout le monde se mette à en parler. C'est un peu pareil avec cette question des preuves et des erreurs en mathématiques."

Pour finir, je vais revenir à la notion de fossé entre techniques et sciences. Certains mathématiciens refusent d'utiliser les techniques de preuve formelle pour leur travail. Je ne prétends pas connaître toutes les causes de cela. Certains disent que l'investissement en temps pour apprendre à utiliser la technique est trop important. D'autres prétendent que ces preuves là ne sont pas de vraies preuves mathématiques, dans le sens où elles ne fournissent pas d'explications. En effet, il y a souvent un écart, un fossé entre la compréhension originelle du problème et la résolution des milliers de petits sous-problèmes. Certains pensent qu'il devrait exister souvent, voire toujours, une preuve plus concise qui à la fois résolve le problème mais explique aussi pourquoi il le résout. Peut-être.

Enfin un travers à éviter (et cela rejoint certaines problèmes de société liés aux technosciences), je pense qu'il ne faut pas imposer l'utilisation de ces techniques à tout le monde. Il faut attendre que cela devienne mature pour certains champs des mathématiques. Les nouveaux défis, c'est de développer des outils pédagogiques pour les novices. Mais aussi des techniques de preuve concurrentes pour les experts, des outils de translation entre ces langages. Enfin, il y a la mission de convaincre les communautés scientifiques de les utiliser et de les améliorer, creuser le fossé et renforcer les interactions. Dans tous les cas, disposer d'outils performants et surs pour faire avancer les sciences et la découverte de nouvelles vérités, c'est un avantage dont la majorité des mathématiciens et scientifiques d'autres disciplines devraient bénéficier dans le futur.