4^e Conférence Francophone de MOdélisation et SIMulation
« Organisation et Conduite d'Activités dans l'Industrie et les Services »
MOSIM'03 – du 23 au 25 avril 2001 - Toulouse (France)

APPROCHE PAR GÉNÉRATION DE COLONNES D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DE PRISES DE VUE SATELLITE

C. MANCEL, P. LOPEZ, R. VALETTE

LAAS-CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, FRANCE
Tél. (+33) (0)-561 336 908, E-mail : {cmancel,lopez,valette}@laas.fr

RÉSUMÉ : *Dans cet article, on s'intéresse à un problème d'optimisation combinatoire issu du domaine spatial. Il s'agit du problème de sélection et d'ordonnancement des prises de vue de satellites d'observation de la Terre de nouvelle génération. On présente un modèle mathématique et on étudie les possibilités d'aborder la résolution de ce problème par une méthode exacte issue de la programmation linéaire : la génération de colonnes.*

MOTS-CLÉS : *Systèmes spatiaux, gestion de ressources, optimisation combinatoire, programmation linéaire*

1. INTRODUCTION

Les problèmes inhérents aux systèmes spatiaux relèvent souvent de l'affectation de fenêtres de communication entre stations au sol et satellites, et de la planification des tâches d'une mission à bord [Hall et Magazine, 1994, Franck *et al.*, 2001].

Le problème auquel nous nous intéressons se pose dans le contexte du projet Pléiades consistant en la mise en place d'une constellation de quatre satellites, dits *agiles*, pour l'observation de la Terre. Dans cet article, nous nous focalisons sur le problème de sélection et d'ordonnancement des prises de vues par un de ces satellites. Notons que ce problème est soumis dans le cadre du Challenge 2003 de la ROADEF (association Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision).

Compte tenu de l'enjeu généré par le Challenge dont les résultats seront délivrés lors du congrès ROADEF'2003 en février en Avignon, nous ne détaillerons pas dans cet article le modèle et les techniques retenus dans toute leur précision. Nous décrivons toutefois la problématique, la démarche et les différents concepts que nous proposons de mettre en œuvre pour traiter ce problème de type planification de tâches. Enfin, nous donnons nos conclusions sur le travail réalisé ainsi que les perspectives en ce qui concerne l'expérimentation et les résultats escomptés.

2. PLÉIADES

2.1. Problématique

Depuis 1999, le CNES travaille à l'élaboration du programme Pléiades, programme d'observation de la Terre qui va succéder à la filière SPOT d'ici à cinq ans. Contrairement à leurs prédécesseurs, les satellites Pléiades sont « agiles », c'est-à-dire qu'ils peuvent, tout en se déplaçant sur leur orbite, diriger leur instrument d'observation (optique ou radar) dans toutes les directions (figure 1).

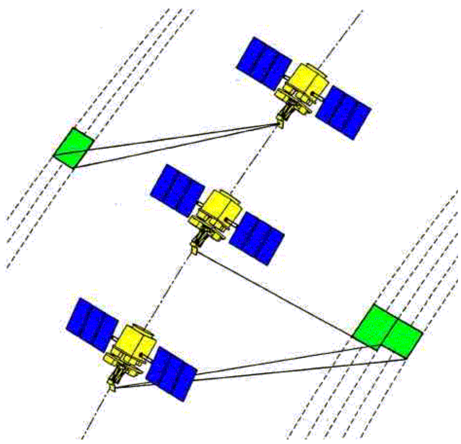

FIG. 1 – Exemple de prise de vue réalisée par un satellite agile

Les satellites d'observation sont commandés depuis la Terre de façon à répondre à des requêtes de prises de vue (PDV) de certaines zones terrestres. À partir d'un ensemble de requêtes, il faut sélectionner et ordonnancer les PDV à réaliser par les quatre satellites agiles sur un horizon donné, de façon à satisfaire au mieux l'ensemble des clients sur cet horizon. Il se pose donc au préalable un problème d'affectation des prises de vue entre les différents satellites et un problème de détermination de l'horizon de planification. De par la complexité du problème global de prises de vues par la constellation des quatre satellites, de nombreuses hypothèses simplificatrices doivent être considérées dans un premier temps. Parmi elles, nous supposons tout d'abord que ce problème d'affectation entre les satellites est déjà résolu. Ensuite, nous choisissons comme horizon une demi-révolution d'un satellite autour de la Terre — sur sa zone éclairée — effectuée en 50 minutes.

Malgré ces simplifications, et du fait de l'agilité des satellites et du grand nombre de requêtes (plusieurs centaines sur une demi-révolution), nous restons en présence d'un problème très difficile à résoudre.

2.2. Approches

Une première étude de ce problème a déjà été réalisée par l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales) du point du vue de sa modélisation et de sa résolution [Lemaître *et al.*, 2002]. Parmi différents algorithmes testés sur la base d'un même modèle, un algorithme Tabou de recherche locale donne actuellement les meilleurs résultats.

Dans ces travaux, nous notons que la Programmation Linéaire (utilisation de Ilog Cplex) ainsi que la Programmation Par Contraintes (utilisation de Ilog OPL Studio) ont été appliquées sur ce modèle sans fournir de résultats satisfaisants. Ces méthodes ne peuvent pas être rejetées pour autant car leur efficacité dépend de nombreux paramètres et pourrait probablement être améliorée, en choisissant par exemple un autre type de modélisation du problème.

D'autres travaux ont été menés sur des problèmes proches de gestion de missions de satellites, en particulier [Paschos *et al.*, 2001] et [Gabrel, 1999], qui font respectivement appel à des algorithmes de graphes ou à la programmation linéaire généralisée pour fournir des bornes de bonne qualité.

Dans notre travail, nous nous plaçons dans ce même contexte d'approche du problème par des méthodes exactes. En raison de la taille des instances étudiées et du temps de résolution fortement contraint, cette voie peut être exploitée pour établir, en un temps donné, de bonnes bornes pour approcher la solution optimale. Nous proposons une approche utilisant le principe de la génération de colonnes (ou programmation linéaire généralisée) qui permet de traiter des problèmes de grande taille en coopération avec d'autres méthodes de résolution.

3. DESCRIPTION D'UNE MÉTHODE EXACTE

Dans ce paragraphe, nous décrivons le modèle retenu et nous présentons le principe général de notre méthode de résolution. La solution attendue est une séquence de PDV qui maximise un gain d'acquisition lequel varie de façon non linéaire avec la fraction acquise d'une requête.

3.1. Modèle

Parmi les variables du problème d'optimisation, les principales sont :

- $sa(k,i)$, variable binaire renseignant sur la sélection de la PDV k en position i :

$$sa(k,i) = \begin{cases} 1 & \text{si l'image } k \text{ est sélectionnée en position } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $ta(i)$, variable continue représentant la date de début de la PDV en position i dans la séquence construite.

Pour la description des principales contraintes, il faut d'abord préciser que toute zone à photographier est découpée en bandes rectangulaires de largeurs toutes égales mais de longueur variable.

Chaque bande j sélectionnée peut être acquise dans un sens ou dans l'autre ; on note les deux PDV associées $2j$ et $2j+1$ (figure 2).

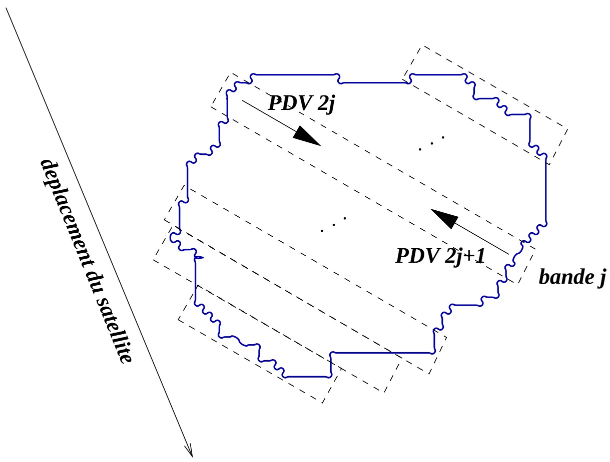

FIG. 2 – Découpage en bandes d'une requête

On a ainsi les contraintes sur l'acquisition d'une bande :

$$\forall j, \sum_i (sa(2j,i) + sa(2j+1,i)) \leq 1 \qquad (1)$$

Les contraintes d'affectation indiquent qu'une PDV n'occupe qu'une position :

$$\forall i, \sum_j (sa(2j,i) + sa(2j+1,i)) \leq 1 \tag{2}$$

De par le déplacement du satellite, les PDV sont soumises à des contraintes de fenêtre. Pour chaque bande, deux dates de début au plus tôt et deux dates de début au plus tard sont données ; elles correspondent aux deux sens possibles d'acquisition. Par convention, pour une bande j, nous notons $Tmin1$ (respectivement $Tmax1$) la date de début au plus tôt (resp. au plus tard) de la PDV $2j$ et $Tmin2$ (resp. $Tmax2$) la date de début au plus tôt (resp. au plus tard) de la PDV $2j+1$:

$$\forall i, \sum_j Tmin1(j) * sa(2j,i) < ta(i) < \sum_j Tmax1(j) * sa(2j,i) \tag{3}$$

$$\forall i, \sum_j Tmin2(j) * sa(2j+1,i) < ta(i) < \sum_j Tmax2(j) * sa(2j+1,i) \tag{4}$$

Entre la fin d'une PDV et le début de la suivante, il est nécessaire de respecter des temps de transitions induits par le changement de direction de l'instrument d'observation. On a par exemple, si la PDV $2j$ est en position i :

$$\forall i, ta(i+1) > ta(i) + Du(j) + \sum_l Dt(2j,2l) * sa(2l,i+1) + \sum_l Dt(2j,2l+1) * sa(2l+1,i+1) \tag{5}$$

où $Du(j)$ est la durée de l'acquisition de la bande j et où $Dt(2j,2l)$ est une évaluation du temps de transition nécessaire entre la PDV $2j$ et la PDV $2l$.

Viennent enfin les contraintes stéréoscopiques. A chaque requête r est associé un booléen $St(r)$ indiquant si l'on souhaite une image stéréoscopique :

$$St(r) = \begin{cases} 1 & \text{si la requête } r \text{ est stéréoscopique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque bande d'une requête stéréo doit être acquise deux fois (en respectant une distance d'écartement), dans le même sens. On a alors les contraintes :

$$\forall r, j \mid St(r) = 1, \sum_i sa(2 * Str(r,2j+1), i) = \sum_i sa(2 * Str(r,2j+2), i) \tag{6}$$

$$\forall r, j \mid St(r) = 1, \sum_i sa(2 * Str(r,2j+1)+1, i) = \sum_i sa(2 * Str(r,2j+2)+1, i) \tag{7}$$

où $Str(r,.)$ est un vecteur pointant sur les bandes relatives à la requête r.

Enfin, la recherche d'une solution est guidée par un critère dont l'objectif est la maximisation d'un gain calculé sur la base d'un gain $G(r)$ obtenu pour l'acquisition totale d'une requête r, modulé par un coefficient de pondération tenant compte de la fraction acquise $fr(r)$ de cette requête. Ce coefficient évolue de manière non linéaire et suivant une pente qui croît avec l'augmentation de la fraction acquise, ceci afin de favoriser l'acquisition totale d'une requête (le but étant de ne pas multiplier le nombre de requêtes partiellement satisfaites) :

$$\max \sum_r (G(r) * g(fr(r))) \tag{8}$$

où $g(.)$ est la fonction représentant l'évolution du facteur de pondération.

Face au nombre rédhibitoire de variables et de contraintes générées lors du traitement d'instances correspondant à des cas réels d'utilisation (plusieurs centaintes de requêtes et donc de bandes), le traitement par programmation linéaire classique s'avère impossible. Toutefois, plutôt que d'aborder le problème par des méthodes d'approximation, nous avons persévéré dans la voie des méthodes exactes. Evidemment, compte tenu des temps de résolution très courts imposés généralement par les applications spatiales, cette approche doit être vue comme une méthode hors ligne permettant de générer de bonnes bornes, voire de fournir les solutions optimales sur les instances de taille réduite. Cette orientation de la recherche justifie l'intérêt qu'a suscité la programmation linéaire généralisée plus connue sous le nom de *génération de colonnes*.

3.2. Génération de colonnes

3.2.1 Principe général

Cette technique est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire dont la taille est trop importante pour pouvoir appliquer un algorithme classique de programmation linéaire. L'idée est de décomposer le problème de telle manière qu'on le résout sans en exprimer toutes les colonnes (*i.e.,* les variables). D'une part, un *algorithme générateur* produit des solutions vérifiant une partie des contraintes du problème global. D'autre part, un programme linéaire, dit *problème maître*, sélectionne, en leur affectant un certain poids, les solutions — ou colonnes — précédemment générées. A chaque étape de la recherche, les solutions duales issues de la résolution de la relaxation continue du problème maître sont intégrées à l'algorithme générateur de façon à trouver, si elle existe, une nouvelle colonne susceptible d'améliorer la solution courante (*i.e.,* une colonne de coût réduit positif dans un problème de maximisation) [Lasdon, 1970]. Lorsqu'il n'existe plus une telle colonne, si la solution du problème maître relâché est entière alors on a une solution optimale du problème global. Sinon, la solution courante fournit une bonne borne pour la résolution du problème global et il reste à effectuer une recherche arborescente pour trouver une solution optimale entière. Sur chacune des branches il faut alors relancer le processus de génération de colonnes afin de ne pas « oublier » de solution. Cette recherche arborescente particulière est appelée *branch-and-price* [Barnhart *et al.*, 1998].

La coopération qui s'effectue entre le problème maître et l'algorithme générateur peut être résumée par le schéma de la figure 3.

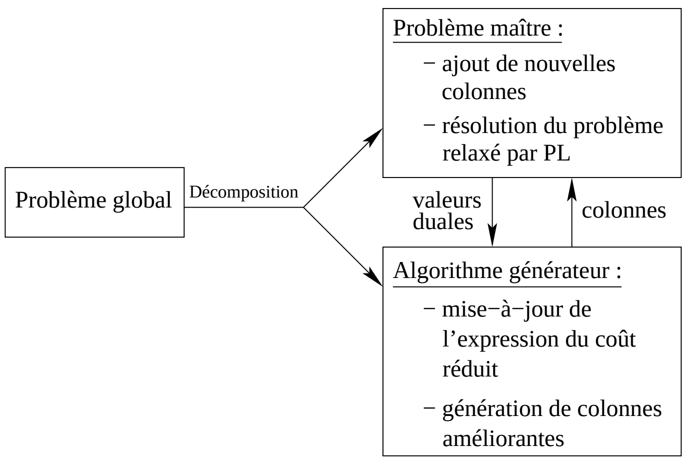

FIG. 3 – Principe de la génération de colonnes

3.2.2 Position du problème

Le modèle du problème Pléiades comporte des contraintes complexes ainsi qu'un critère d'optimisation non linéaire. Dans un premier temps, en vue de borner le problème, nous linéarisons la fonction $g(.)$ en posant $g(fr(r)) = fr(r), \forall r$ de façon à obtenir un critère de maximisation linéaire et supérieur au critère (8).

Si on considère les contraintes de fenêtres ainsi que les temps de transitions dépendant de la séquence (contraintes (3)–(5)), Notre problème se rapproche d'un problème de tournée avec fenêtres temporelles (*VRPTW : Vehicle Routing Problem with Time Windows*), où chaque PDV candidate peut être vue comme un client à visiter. Ce type de problème est traité avec succès par des méthodes de génération de colonnes, par exemple dans [Desrochers *et al.*, 1992] ou plus récemment dans [Chabrier *et al.*, 2002]. Dans ces travaux, le problème maître est un problème de recouvrement et l'algorithme générateur résout un problème de plus court chemin dans un graphe avec fenêtres de temps (*SPPTW : Shortest Path problem with Time Windows*). Dans [Desrochers et Soumis, 1988], M. Desrochers et F. Soumis proposent un algorithme de programmation dynamique efficace pour résoudre le SPPTW, appelé *generalized permanent labelling algorithm* (algorithme de marquage permanent généralisé). Le principe de cet algorithme est largement utilisé pour divers problèmes de tournées traités par génération de colonnes.

Dans ces problèmes, on n'a généralement pas de sélection de tâches à effectuer (typiquement, dans un problème de tournée de véhicule, on doit visiter tous les clients dans un minimum de temps). Dans le problème Pléiades, l'horizon temporel est fixé et le nombre de PDV candidates est tellement grand que seul un nombre restreint (en général assez faible) de PDV sont effectivement réalisées.

Dans [Feillet, 2001], D. Feillet étudie le problème de tournées sélectives, une variante des problèmes de tournées pour laquelle il n'est pas nécessaire de visiter tous les clients. On associe un gain à chaque client et l'objectif est de trouver une tournée qui maximise le gain collecté en un temps limité. L'auteur définit ainsi un nouveau problème de graphe, le PTAP (Problème de Tournées avec Arcs Profitables), et propose une approche de résolution par génération de colonnes.

Bien qu'il en soit proche, le problème Pléiades se distingue du PTAP par deux principaux aspects. D'une part le PTAP ne contient pas de contrainte ensembliste comme la contrainte stéréoscopique ((6) et (7)). D'autre part, dans le PTAP ainsi que dans la plupart des problèmes de tournées traités par génération de colonnes, le nombre de ressources n'est pas fixé (on cherche à le minimiser) alors que dans notre problème Pléiades, nous avons une unique ressource, le satellite d'observation.

Cependant, la génération de colonnes peut également se révéler efficace sur des problèmes à une machine, comme le montre J.M. Van Den Akker dans [Van Den Akker, 2000] et [Van Den Akker *et al.*, 2000], où un problème d'ordonnancement est formulé par un programme linéaire indicé sur le temps et décomposé de sorte que l'algorithme générateur produise des *pseudo-ordonnancements* dans lesquels une tâche peut être exécutée zéro, une ou plusieurs fois. La contrainte de réalisation des tâches est alors laissée dans le problème maître.

On voit donc que le problème Pléiades considéré se rapproche par de nombreux aspects de problèmes connus, traités efficacement dans la littérature par la génération de colonnes. De plus, des problèmes assez proches de gestion de satellites ont déjà été abordés par des méthodes de génération de colonnes avec plus ou moins de succès, que ce soit pour trouver des bornes [Gabrel, 1999] ou des solutions [Lebbar, 2000]. Il nous semble donc raisonnable d'explorer les possibilités de résolution du problème Pléiades par la génération de colonnes.

3.2.3 Décomposition du problème

Considérant les différents travaux présentés précédemment, nous proposons de décomposer le problème global en un problème maître d'une part et un problème de meilleur chemin dans un graphe d'autre part, de la façon suivante.

Dans le problème maître, nous incluons les contraintes sur l'acquisition des bandes (1), les contraintes d'affectation (2), ainsi que les contraintes stéréoscopiques (6) et (7). Ces dernières contraintes semblent en effet difficiles à prendre en compte dans un algorithme de recherche de chemin dans un graphe car cela nécessiterait une place mémoire exponentielle (voir [Lemaître *et al.*, 2002]).

L'algorithme générateur doit alors produire des séquences de PDV de coût réduit positif et vérifiant les contraintes (3)–(5). Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté où X, l'ensemble des sommets du graphe, représente l'ensemble des PDV candidates et U, l'ensemble des arcs, l'ensemble des transitions possibles entre deux PDV. On associe à chaque arc $(i, j) \in U$ un couple (D_{ij}, G_j) où D_{ij} est la somme de la durée de reconfiguration entre les PDV i et j et de la durée d'acquisition de la PDV j, et où G_j est le gain associé à l'acquisition de la PDV j. Le coût réduit d'un chemin du graphe G est la somme des gains collectés le long de ce chemin, réduite de quantitées liées aux valeurs duales issues de la résolution du problème maître. La recherche d'une séquence de PDV à ajouter au problème maître se ramène alors à la recherche d'un chemin de coût réduit positif dans G. Nous avons vu que, dans le cadre de la génération de colonnes, ce type de problème est généralement résolu par un algorithme de programmation dynamique inspiré de l'algorithme de marquage permanent généralisé présenté dans [Desrochers et Soumis, 1988]. Nous proposons d'adapter cet algorithme à notre problème afin d'obtenir par génération de colonnes une borne supérieure du critère du problème Pléiades.

4. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté un problème combinatoire non linéaire issu d'un projet spatial. Les problèmes de ce type sont rendus particulièrement difficiles par la présence de multiples ressources complexes à gérer (un satellite disponible dans certains intervalles de temps), par un temps imparti pour la résolution très court, par une grande taille des instances à traiter...

Nous avons mis en évidence que la génération de colonnes est une méthode exacte qui permet de résoudre efficacement des problèmes combinatoires de grande taille, proches du problème Pléiades. Ceci nous amène à proposer l'utilisation de cette méthode pour borner le critère de notre problème en résolvant de façon exacte une relaxation linéaire du problème global.

Nous envisageons à présent d'adapter l'algorithme de marquage permanent généralisé afin de pouvoir générer des solutions s'approchant au mieux d'une solution optimale du problème originel (*i.e.*, avec critère non linéaire). Nous proposons pour cela d'introduire dans l'algorithme générateur une contrainte supplémentaire visant à maximiser le nombre minimum de requêtes acquises en totalité.

REFERENCES

[Barnhart *et al.*, 1998] Barnhart C., Johnson E.L., Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P., Vance P.H., "Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs", *Operations Research*, 46:316-329, 1998

[Chabrier *et al.*, 2002] Chabrier A., Danna E., Le Pape C., "Coopération entre génération de colonnes avec tournées sans cycle et recherche locale appliquée au routage de véhicules", *Actes de JNPC'02*, Nice, mai 2002

[Desrochers et Soumis, 1988] Desrochers M., Soumis F., "A generalized permanent labelling algorithm for the shortest path problem with time windows", *INFOR*, 26(3), 1988

[Desrochers *et al.*, 1992] Desrochers M., Desrosiers J., Solomon M., "A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows", *Operations Research*, 40(2), 1992

[Feillet, 2001] Feillet D., "Problèmes de tournées avec gain : étude et application au transport inter-usines", Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2001

[Franck *et al.*, 2001] Franck J., Jónsson A., Morris R., Smith E.D., "Planning and scheduling for fleets of earth observing satellites", *Proceedings of the* 6^{th} *i-SAIRAS*, Canadian Space Agency, St-Hubert, Canada, June 18-22, 2001

[Gabrel, 1999] Gabrel V., "Improved linear programming bounds via column generation for daily scheduling of earth observation satellite", rapport LIPN, janvier 1999

[Gabrel et Vanderpooten, 2002] Gabrel V., Vanderpooten D., "Enumeration and interactive selection of efficient paths in a multiple criteria graph for scheduling an earth observing satellite", *EJOR*, 139:533-542, 2002

[Hall et Magazine, 1994] Hall N., Magazine M., "Maximizing the value of a space mission", *European Journal of Operational Research*, 78:224-241, 1994

[Lasdon, 1970] Lasdon L.S., "Optimization theory for large systems", *Macmillan*, 1970

[Lebbar, 2000] Lebbar M., "Résolution de problèmes combinatoires dans l'industrie. Apport de la Programmation mathématique et des techniques de décomposition", Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2000

[Lemaître *et al.*, 2002] Lemaître M., Verfaillie G., Jouhaud F., Lachiver J.-M., Bataille N., "Selecting and scheduling observations of agile satellites", *Aerospace Sciences and Technology*, 6:367–381, 2002

[Paschos *et al.*, 2001] Paschos V., Murat C., Gabrel V., "La Recherche Opérationnelle pour la planification de prises de vue par satellite", document No. 121 du LAMSADE, septembre 2001

[Van Den Akker, 2000] Van Den Akker J.M., "LP-based solution methods for scheduling problems", Thèse de doctorat, Université d'Eindhoven, 1994

[Van Den Akker *et al.*, 2000] Van Den Akker J.M., Hurkens C.A.J., Savelsbergh M.W.P., "Time-indexed formulations for machine scheduling problems : Column Generation", *Informs Journal on Computing*, 12(2), 2000